Nichtunitäre Darstellungen der Virasoro-Algebra mit nichttrivialen Jordanblöcken

Falk Rohsiepe[1]
Physikalisches Institut der Universität Bonn,
Nußallee 12, D-53115 Bonn, Deutschland

[1]email: `rohsiepe@uni-bonn.de`

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Eines der fundamentalsten Prinzipien der Physik ist *Symmetrie*. So ermöglicht einem die Forderung nach Symmetrie der Natur unter der Poincaré-Gruppe (der relativistischen Verallgemeinerung der klassischen Galilei-Gruppe) eine erste Klassifizierung der Elementarteilchen nach ihren Massen und ihrem Spin. Invarianz einer Theorie unter Eichgruppen läßt die Vorhersage von Wechselwirkungsteilchen und ihren Eigenschaften zu.
Auch führen Symmetrien einer physikalischen Problemstellung oft dazu, daß sich diese (im Gegensatz zu weniger symmetrischen Problemen) oft exakt lösen läßt. Jede Symmetrie impliziert nämlich eine Erhaltungsgröße – im Falle von kontinuierlichen Symmetrien in Form eines erhaltenen Noether-Stroms (z.B. folgt aus der Translationsinvarianz die Erhaltung des Impulses) oder im Falle von diskreten Symmetrien in Form einer erhaltenen (multiplikativen) Quantenzahl, wie z.B. der Paritätsquantenzahl bei Invarianz unter Raumspiegelungen. Als prominenteste Beispiele für durch erhöhte Symmetrie exakt lösbare Systeme seien nur das Wasserstoffatom und der harmonische Oszillator genannt, die zwei der wenigen exakt lösbaren Probleme in der Quantenmechanik darstellen.
Insbesondere sind Quantenfeldtheorien wegen ihrer unendlich vielen Freiheitsgrade so gut wie nie exakt lösbar – es liegt also nahe, nach zusätzlichen Symmetrien (neben Poincaré-Symmetrie) zu suchen, um die Zahl der Freiheitsgrade zu reduzieren. Viele (masselose) Systeme weisen z.B. Skaleninvarianz oder mehr noch konforme Invarianz auf. Konforme Invarianz ist dabei keine neue Idee – bereits 1909 war ihre Bedeutung für die klassische Elektrodynamik erkannt worden [2, 15]. Lange fristete sie dennoch ein Schattendasein, da sie auf der einen Seite in vielen Fällen beim Übergang zur Quantentheorie der „Mühle" von Quantisierung, Regularisierung und Renormierung zum Opfer fällt, und auf der anderen Seite, weil die konforme Gruppe in Dimension $D > 2$ mit Signatur (p, q) $(p + q = D)$ isomorph zu $SO(p+1, q+1)$ und damit auch nur endlichdimensional ist. In zwei Dimensionen ist dies erstaunlicherweise anders; hier wird die konforme Gruppe unendlichdimensional (für eine genauere Diskussion siehe Abschnitt 2.4), und es ist außerdem möglich, den Energie-Impuls-Tensor direkt als Quantenfeld zu definieren, was die konforme Symmetrie in die Quantentheorie hinüberrettet.
Großen Verdienst haben sich A.A. Belavin, A.M. Polyakov und A.B. Zamolodchikov damit erworben, daß sie 1983 in einer bahnbrechenden Arbeit [3] zeigten, daß in einer zweidimensionalen konformen Feldtheorie aufgrund der unendlichen Symmetrie alle Korrelati-

onsfunktionen primärer Felder exakt berechenbar sind. Seitdem hat die zweidimensionale konforme Feldtheorie einen raschen Aufschwung genommen und fand bald Anwendungen in vielen Bereichen der Physik.
Während sie zur direkten Beschreibung von Teilchen wegen der offensichtlich zu kleinen Dimension nur den Charakter einer mathematischen „Spielzeug"-Theorie für theoretische Physiker erwerben kann, zeigt sie ihren wahren Wert in der Superstringtheorie [32, 33], wo mit ihrer Hilfe Stringvakua klassifiziert werden, oder auch in der statistischen Physik, wo Phasenübergänge zweiter Ordnung oder allgemeiner kritische Punkte im Phasenraum der Theorie mit Hilfe zweidimensionaler konformer Quantenfeldtheorien beschrieben werden können [13].
Da die in dieser Arbeit behandelten Phänomene insbesondere in der statistischen Physik auftauchen, wollen wir nun noch kurz das Verhältnis zwischen statistischen Systemen und der Beschreibung durch Quantenfeldtheorien anreißen.

1.1 Statistische Quantenfeldtheorien

Die Bezeichnung „statistische Quantenfeldtheorien" ist eigentlich etwas unglücklich, da daran nichts speziell „quantenhaftes" ist. Vielmehr beschreiben statistische Feldtheorien den Kontinuums-Grenzfall statistischer Systeme und stehen zu Quantenfeldtheorien auf eine Art und Weise in Verbindung, die wir im folgenden etwas näher beschreiben wollen.
Das einfachste Beispiel für die Korrespondenz einer Quantentheorie und einer statistischen Theorie wird von der freien Schrödinger-Gleichung

$$i\partial_t\psi(x,t) = -\frac{1}{2m}\Delta\psi(x,t) \tag{1.1}$$

geliefert. Nimmt man nämlich statt reeller rein imaginäre Zeiten, so wird daraus die Diffusionsgleichung (setze $2m = 1$)

$$\partial_t P(x,t) = \Delta P(x,t). \tag{1.2}$$

Kann man allgemeiner in einer statistischen (also euklidischen) Theorie Korrelationsfunktionen berechnen und besitzen diese analytische Fortsetzungen zu komplexen Zeiten, so erhält man die Lösungen der entsprechenden Quantenfeldtheorie durch die Lösungen entlang der imaginären Achse und umgekehrt. Grob gesprochen entsprechen dann Heisenbergsche Unschärferelationen auf der Quantenseite statistischen Schwankungen auf der Seite der statistischen Feldtheorie.
Wir wollen nun noch kurz angeben, wie die Zustandssumme

$$Z = \mathrm{tr}\, e^{-\beta H}, \tag{1.3}$$

einer statistischen Feldtheorie mit den Erzeugenden der konformen Gruppe zusammenhängt, wobei H der Hamiltonoperator und $\beta = \frac{1}{kT}$ ist. Über die Korrespondenz zwischen Hamiltonoperator in der (minkowskischen) Quantenfeldtheorie und infinitesimaler

Transfermatrix (im wesentlichen der Logarithmus der Transfermatrix) in der statistischen Feldtheorie erhält man für die Zustandssumme auf dem Torus die Formel [13]

$$Z = q^{-\frac{c}{24}} \bar{q}^{-\frac{c}{24}} \operatorname{tr} q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0}, \tag{1.4}$$

wobei L_0 ein Fouriermode des Energie-Impuls-Tensors und c die zentrale Ladung (zu beidem mehr in Kapitel 2), $q := e^{2\pi i\tau}$ und τ der modulare Parameter des Torus ist (siehe Abschnitt 5.1).

Danksagung

Mein Dank gebührt in erster Linie Prof. W. Nahm für die Aufnahme in seine Arbeitsgruppe, stete Diskussionbereitschaft sowie die zu kreativem Denken ermutigende Art, seine Studenten anzuleiten.
Weiterhin möchte ich W. Eholzer, M. Flohr, M. Rösgen, R. Varnhagen, A. Wißkirchen und H.G. Kausch für zahlreiche nützliche Diskussionen in unterschiedlichen Stadien dieser Arbeit danken sowie dem Rest der Arbeitsgruppe für das gute Arbeitsklima und die ständige Diskussionsbereitschaft.
Für das Korrekturlesen dieser Arbeit danke ich M. Rösgen, K. Wendland und A. Wißkirchen.
Allen meinen Freunden möchte ich danken für unzählige gesellige Stunden, aus denen ich stets neue Kraft schöpfen konnte.
All dies hätte aber nichts geholfen ohne den Rückhalt und die Unterstützung meiner Eltern und meiner Freundin Astrid.
Zu guter Letzt möchte ich meiner Großmutter, die das Ende dieser Arbeit leider nicht mehr miterleben durfte, für die stete materielle wie ideelle Unterstützung während meines ganzen Studiums danken.

Kapitel 2

Konforme Feldtheorie in zwei Dimensionen

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, wird die konforme Gruppe in zwei Dimensionen unendlichdimensional und liefert genügend Erhaltungsgrößen, um Quantenfeldtheorien exakt lösen zu können. Auch kann der Enegie-Impuls-Tensor selbst direkt als Quantenfeld aufgefaßt werden.
Wir werden im folgenden kurz skizzieren, was wir unter einer konformen Feldtheorie (CFT$^{(i)}$) in zwei Dimensionen verstehen wollen, wobei wir uns im wesentlichen auf Ideen von P. Goddard [31] und W. Nahm [47, 48, 49] stützen. Der Kürze wegen legen wir dabei weder Wert auf größtmögliche Exaktheit noch werden wir für die im folgenden Kapitel angegebenen Sätze Beweise angeben – der interessierte Leser möge diese direkt in den obigen Referenzen nachlesen.
Der zu Grunde liegende Raum sei der Zylinder $M = S^1 \times \mathbb{R}$ mit minkowskischem Pseudoskalarprodukt $\langle e_x, e_x \rangle = -1$, $\langle e_t, e_t \rangle = 1$ auf dem Tangentialraum. Auf M betrachten wir Felder $\phi(x,t)$. Nach der Wick-Rotation $t \mapsto it$ und damit dem Übergang von der minkowskischen zu einer euklidischen Theorie führen wir *chirale* bzw. *Lichtkegel-* Koordinaten $u := t + x$ und $v = t - x$ ein . Ein Feld heißt *chiral*, wenn es entweder nur von u oder nur von v abhängt. Wie in den meisten zweidimensionalen Systemen erweist es sich als günstig, komplexe Koordinaten

$$z = e^{-iu} \quad \text{und} \quad \bar{z} = e^{-iv} \tag{2.1}$$

einzuführen. Die (reell differenzierbaren) Felder $\phi(z, \bar{z})$ sind dann *chiral*, wenn sie entweder holomorph oder antiholomorph sind. Wir betrachten im folgenden z und $\bar{z}$ als unabhängige, komplexe Koordinaten, so daß der Parameterraum $\mathbb{C}^2$ bzw. eine Kompaktifizierung davon ist. Den minkowskischen wie den euklidischen Fall erhält man dann durch geeignete reelle Schnitte zurück.

$^{(i)}$engl.: **C**onformal **F**ield **T**heory

2.1 Vertexoperatoren

Analog zum mathematischen Apparat der Quantenmechanik wollen wir Felder als operatorwertige Distributionen auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ (mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$)der Zustände des physikalischen Systems betrachten (bei nichtunitären Theorien hat man allerdings lediglich einen mit einem nicht degenerierten Pseudoskalarprodukt versehenen Zustandsraum).
Sei

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i \subset \mathcal{H} \tag{2.2}$$

mit einer abzählbaren Indexmenge I ein dichter graduierter Teilraum von $\mathcal{H}$ mit $\dim \mathcal{F}_i < \infty$, $\bar{\mathcal{F}} = \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$ sein Abschluß und $\mathcal{F}' = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i^*$ (allgemein sei im folgenden der Dualraum eines Vektorraums V mit V^* bezeichnet) sein sogenannter graduierter Dualraum. Offenbar ist $(\mathcal{F}')^* = \bar{\mathcal{F}}$. Sei ferner $\Psi_0 \in \mathcal{F}$ ein ausgezeichneter Vektor, das *Vakuum*, und $\tilde{L} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ ein ausgezeichneter Operator, der das Vakuum annihiliert, d.h.

$$\tilde{L} \Psi_0 = 0. \tag{2.3}$$

$\tilde{L}$ wird später als Generator der Translationen interpretiert werden.
Der Raum $\overline{End \mathcal{F}}$ der linearen Operatoren $V : \mathcal{F} \to \bar{\mathcal{F}}$ ist keine Algebra, da das Produkt zweier solcher Operatoren nicht unbedingt definiert sein muß. Sei zu gegebenem $V \in \overline{End \mathcal{F}}$ für alle $i, j \in I$ die lineare Abbildung $V_{ij} : \mathcal{F}_j \to \mathcal{F}_i$ dadurch definiert, daß $\forall \phi \in \mathcal{F}_i, \psi \in \mathcal{F}_j : \langle \phi, V \psi \rangle = \langle \phi, V_{ij} \psi \rangle$. Dann gilt offenbar $V = \sum_{i,j \in I} V_{ij}$. Für $V, W \in \overline{End \mathcal{F}}$ existiere das Produkt $VW \in \overline{End \mathcal{F}}$ genau dann, wenn für alle $i, j \in I$ und alle $\phi \in \mathcal{F}_i, \psi \in \mathcal{F}_j$ die Summe $\langle \phi, (VW)_{ij} \psi \rangle := \sum_{k \in I} \langle \phi, V_{ik} W_{kj} \psi \rangle$ absolut konvergiert, und sei dann gegeben durch $VW = \sum_{i,j \in I} (VW)_{ij}$. Im Falle der Existenz ist dieses Produkt offensichtlich assoziativ.

Definition 2.1.1 *Ein* ***Vertexoperator*** *zu einem gegebenen Zustand $\psi \in \mathcal{F}$ ist ein für alle $z \in \mathbb{C}$ definierter Operator $V(\psi, z) \in \overline{End \mathcal{F}}$, der folgende Bedingungen erfüllt:*

(i) Angewandt auf das Vakuum liefert der Operator

$$V(\psi, z) \Psi_0 = e^{z \tilde{L}} \psi. \tag{2.4}$$

(ii) Für alle $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{F}$ ist

$$\langle \phi_1, V(\psi, z) \phi_2 \rangle \tag{2.5}$$

eine meromorphe Funktion in z.

(iii) Der Definitionsbereich von $V(\psi, z)$ kann induktiv auf alle sogenannten ***verallgemeinerten kohärenten Zustände*** *$V(\psi_1, z_1) V(\psi_2, z_2) \ldots V(\psi_n, z_n) \phi$, $\phi \in \mathcal{F}$, ausgeweitet werden, falls das Produkt radial geordnet ist, d.h. $|z_1| > |z_2| > \ldots > |z_n|$.*

(iv) *Für alle $\phi_1, \phi_2, \chi, \psi \in \mathcal{F}$ ist die Funktion $\langle \phi_1, V(\psi, z)V(\chi, \zeta)\phi_2\rangle$, $|z| > |\zeta|$, meromorph auf ganz $\mathbb{C}^2$ fortsetzbar und für die Fortsetzungen gilt*

$$\langle \phi_1, V(\psi, z)V(\chi, \zeta)\phi_2\rangle = \varepsilon_{\psi\chi}\langle \phi_1, V(\chi, \zeta)V(\psi, z)\phi_2\rangle, \tag{2.6}$$

wobei die Phase $\varepsilon_{\psi\chi}$ nur von ψ und χ abhängt.

Die in Punkt (iii) definierte Radialordnung ist das (euklidische) Pendant zu den (minkowskischen) zeitgeordneten Produkten, die schon aus der Quantenmechanik bekannt sind. Statt (iv) werden wir im folgenden oft der Kürze wegen einfach

$$V(\psi, z)V(\chi, \zeta) = \varepsilon_{\psi\chi}V(\chi, \zeta)V(\psi, z) \tag{2.7}$$

schreiben, was aber immer nur das Verhalten von Funktionen ausdrücken soll, die durch Matrixelemente definiert sind.
Das durch Definition 2.1.1 gegebene System von Operatoren nennt man auch **Vertexoperatoralgebra**.

Definition 2.1.2 *Zwei Feldoperatoren $\xi(z)$, $\eta(\zeta)$ heißen* ***lokal*** *zueinander, wenn für alle $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{F}$ ihre Matrixelemente $f_{\xi\eta}(z, \zeta) := \langle \phi_1, \xi(z)\eta(\zeta)\phi_2\rangle$ für $|z| > |\zeta|$ holomorphe Funktionen definieren, die meromorphe Fortsetzungen besitzen, die die Gleichung $f_{\xi\eta}(z, \zeta) = \varepsilon_{\xi\eta} f_{\xi\eta}(\zeta, z)$ erfüllen, wobei $\varepsilon_{\xi\eta} = 1$, falls ξ oder η ein Boson beschreibt, und $\varepsilon_{\xi\eta} = -1$, falls beide Felder fermionisch sind.*
Ein ***lokales System*** *von Vertexoperatoren ist eine Menge $\mathcal{V} = \{V(\psi, z);\ \psi \in \mathcal{F}\}$ von Vertexoperatoren, die paarweise lokal zueinander sind.*
Eine nichtsinguläre Transformation U operiert ***lokal*** *auf einem lokalen System $\mathcal{V}$, wenn für alle $\psi \in \mathcal{F}$ die Operatoren $UV(\psi, z)U^{-1}$ lokal zu allen Elementen von $\mathcal{V}$ sind.*

Viele der Konsequenzen für lokale Systeme lassen sich schon mit Gleichung (2.6) ableiten, falls immer $\varepsilon_{\psi\chi} = \pm 1$. Mengen von Vertexoperatoren, in denen dies gilt, heißen *relativ lokale Systeme* von Vertexoperatoren. Entsprechend definiert man auch *relativ lokal* operierende Transformationen.

Lemma 2.1.3 (Eindeutigkeit) *Sei $\mathcal{V} = \{V(\psi, z);\ \psi \in \mathcal{F}\}$ ein lokales System von Vertexoperatoren und sei $\tilde{V}(\phi, z)$ ein für festes $\phi \in \mathcal{F}$ gegebener, zu allen $V \in \mathcal{V}$ lokaler Feldoperator mit*

$$\tilde{V}(\phi, z)\Psi_0 = e^{z\tilde{L}}\phi. \tag{2.8}$$

Dann ist $\tilde{V}(\phi, z) = V(\phi, z)$. Insbesondere gilt $V(\Psi_0, z) = \mathbb{1}$.

Lemma 2.1.4 (Translationen) *Wenn $U = e^{\lambda\tilde{L}}$ lokal auf einem lokalen System $\mathcal{V}$ von Vertexoperatoren operiert, so ist U der Translationsoperator, d.h. es ist*

$$e^{\lambda\tilde{L}}V(\psi, z)e^{-\lambda\tilde{L}} = V(\psi, z + \lambda) \tag{2.9}$$

für alle $V(\psi, z) \in \mathcal{V}$.

Durch Differenzieren nach λ erhält man damit

$$\partial_z V(\psi, z) = [\tilde{L}, V(\psi, z)] = V(\tilde{L}\psi, z). \tag{2.10}$$

Ist allgemeiner U eine lokal operierende Transformation, die das Vakuum invariant läßt, so gilt mit $V_U(\psi, z) := UV(\psi, z)U^{-1}$ und $\tilde{L}_U := U\tilde{L}U^{-1}$

$$V_U(\psi, z)\Psi_0 = e^{z\tilde{L}_U}U\psi. \tag{2.11}$$

Lemma 2.1.5 *Seien $V(\phi, z), V(\psi, z) \in \mathcal{V}$. Dann ist*

$$V(\psi, z)V(\phi, \zeta) = V(V(\psi, z-\zeta)\phi, \zeta). \tag{2.12}$$

Dabei ist die rechte Seite als geeigneter Limes im Sinne von Definition 2.1.1 zu verstehen.

Das Produkt zweier Vertexoperatoren läßt sich also wieder als Vertexoperator darstellen. Diese Tatsache wird später benutzt werden, um eine Operatorproduktentwicklung (OPE) einzuführen. Außerdem ist dieses Lemma insofern wichtig, als damit (zusammen mit der Eindeutigkeit 2.1.3) die Vertexoperatoren einen Isomorphismus zwischen dem lokalen System $\mathcal{V}$ und den Zuständen im Vakuumsektor (oder in der Vakuumdarstellung) $\mathcal{H}_0 := \{\psi = V(\psi, 0)\Psi_0 \mid V(\psi, z) \in \mathcal{V}\}$ vermitteln.

2.2 SL(2,ℂ)-Symmetrie

Bisher wurde nur das Verhalten von Vertexoperatoren unter Translationen studiert. Jetzt wollen wir allgemeiner die Wirkung von *Möbiustransformationen*

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d};\ a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \tag{2.13}$$

untersuchen. Diese sind auf der Riemannschen Zahlenkugel global definiert. Die Möbiustransformationen sind genau dann Symmetrien der Theorie, wenn sie das Vakuum (und damit Vakuumerwartungswerte) invariant lassen. Z.B. ist der Vakuumerwartungswert

$$\langle V(\psi, z)\rangle := \langle \Psi_0, V(\psi, z)\Psi_0\rangle \tag{2.14}$$

genau dann translationsinvariant, wenn neben $\tilde{L}\Psi_0 = 0$ auch $\tilde{L}^\dagger\Psi_0 = 0$ gilt, denn mit $U = e^{\lambda\tilde{L}}$ gilt nach (2.9)

$$\langle V(\psi, z+\lambda)\rangle = \langle UV(\psi, z)U^{-1}\rangle = \langle U^\dagger\Psi_0, V(\psi, z)\Psi_0\rangle. \tag{2.15}$$

Die Generatoren der Möbiusgruppe erfüllen eine $\mathfrak{su}(1,1)$-Algebra, und wir wollen $\{L_1 := \tilde{L}\}$ so ergänzen, daß eine Darstellung der Möbiusgruppe auf $\mathcal{F}$ gegeben ist durch $L_1 := \tilde{L}$, $L_{-1} := \tilde{L}^\dagger$ und $L_0 = \frac{1}{2}[\tilde{L}^\dagger, \tilde{L}]$. Zunächst betrachte die Wirkung von L_0:

Lemma 2.2.1 *Sei L_0 ein Operator mit $[L_0, L_1] = L_1, L_0^\dagger = L_0$ und $L_0\Psi_0 = 0$ und sei ferner $L_0\psi = h\psi$. Außerdem operiere $x^{L_0} := e^{\lambda L_0}$ lokal auf $\mathcal{V}$. Dann ist*

$$x^{L_0}V(\psi, z)x^{-L_0} = x^h V(\psi, xz). \tag{2.16}$$

Analog zur Gleichung (2.10) erhält man durch Ableiten

$$[L_0, V(\psi, z)] = (z\partial_z + h)V(\psi, z). \tag{2.17}$$

Mit den Lemmata 2.1.4 und 2.2.1 und unter der Voraussetzung $L_{-1}\Psi_0 = 0$ ist man in der Lage, Zweipunktfunktionen zu berechnen. Für Zustände ψ, ϕ mit $L_0\psi = h(\psi)\psi$ und $L_0\phi = h(\phi)\phi$ gilt dann nämlich für $z, \zeta, x, \xi \in \mathbb{C}$ mit $|z| > |\zeta|, |x| > |\xi|$

$$\begin{aligned} \langle V(\psi, z)V(\phi, \zeta)\rangle &:= \langle \Psi_0, V(\psi, z)V(\phi, \zeta)\Psi_0\rangle \\ &= \left(\tfrac{x-\xi}{z-\zeta}\right)^{h(\psi)+h(\phi)} \langle V(\psi, x)V(\phi, \xi)\rangle. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Wir wollen im folgenden immer annehmen, die Möbius-Transformationen 2.13 seien Symmetrien der Theorie, d.h. $L_n\Psi_0 = 0$ für $n = -1, 0, 1$. Die durch L_{-1} erzeugten Transformationen heißen *spezielle konforme Transformationen.* Zustände ψ mit $L_0\psi = h\psi$ und $L_{-1}\psi = 0$ heißen *quasiprimär* oder $SL(2,\mathbb{C})$-*Tiefstgewichtszustände* (zum Gewicht h). Falls die speziellen konformen Transformationen lokal auf $\mathcal{V}$ operieren, so gilt für quasiprimäre Zustände ψ

$$e^{\lambda L_{-1}}V(\psi, z)e^{-\lambda L_{-1}} = (1-\lambda z)^{-2h}V(\psi, z(1-\lambda z)^{-1}). \tag{2.19}$$

Durch Ableiten erhält man dann für quasiprimäre Zustände ψ zusammen mit (2.10) und (2.17)

$$[L_n, V(\psi, z)] = z^{-n}\left(z\partial_z - (n-1)h\right)V(\psi, z),\ n = -1, 0, 1. \tag{2.20}$$

Felder, die Gleichung (2.20) erfüllen, heißen ebenfalls *quasiprimär* (zum Gewicht h).
Für quasiprimäre Felder kann man nun auch die Dreipunktfunktionen berechnen:

$$\begin{aligned} &\langle V(\psi_1, z_1)V(\psi_2, z_2)V(\psi_3, z_3)\rangle = \\ &\quad \prod_{i<j}\left(\tfrac{w_i-w_j}{z_i-z_j}\right)^{h_{ij}} \langle V(\psi_1, w_1)V(\psi_2, w_2)V(\psi_3, w_3)\rangle, \end{aligned} \tag{2.21}$$

wobei $h_j\psi_j := L_0\psi_j$ und $h_{ij} := h_i + h_j - h_{6-i-j}$. Wir wollen zunächst annehmen, daß $\mathcal{F}$ die Summe von irreduziblen Tiefstgewichtsdarstellungen der Möbiusgruppe ist. Dann sei die Graduierung 2.2 von $\mathcal{F}$ nun über die Eigenräume von L_0 implementiert, d.h. $\mathcal{F} = \bigoplus_\lambda \mathcal{F}_\lambda$, wobei $\mathcal{F}_\lambda :=$ Eigenraum(L_0, λ). Wir werden allerdings später sehen (Abschnitt 2.6), daß wir auch verallgemeinerte Eigenräume von L_0 hinzunehmen müssen, auf denen L_0 als Jordanblock zum Eigenwert λ operiert (für Theorien, die Elementarteilchen beschreiben sollen, hat man jedoch mit analogen Argumenten, wie sie noch in Kapitel 3 erläutert werden, Diagonalisierbarkeit von L_0 und damit eine Zerlegung in echte Eigenräume).
Aus der Hermitezitätsbedingung $L_n^\dagger = L_{-n}$ sowie Gleichung (2.20) folgt für quasiprimäre Zustände ψ, daß

$$V^\dagger(\psi, z) := z^{-2h}\left(V(\psi, 1/z^*)\right)^\dagger \tag{2.22}$$

ebenfalls ein quasiprimäres Feld vom Gewicht h ist. Man fordert, daß für jeden quasiprimären Zustand ψ der Grenzwert

$$\psi^\dagger := \lim_{\varepsilon\to 0} V^\dagger(\psi, \varepsilon) \tag{2.23}$$

existiert und daß $V^\dagger(\psi, z)$ lokal bezüglich $\mathcal{V}$ ist. Die Eindeutigkeit (Lemma 2.1.3) impliziert dann

$$V^\dagger(\psi, z) = V(\psi^\dagger, z). \tag{2.24}$$

Ein quasiprimärer Vektor ψ heißt *reell*, falls $\psi^\dagger = \psi$, und es ist im Raum aller quasiprimären Vektoren zum Gewicht h immer möglich, eine reelle Basis zu finden. Das Feld $V(\psi, z) = V(\psi^\dagger, z) = V^\dagger(\psi, z)$ heißt dann ebenfalls reell. Analog werden imaginäre Vektoren und Felder definiert.
Für die Zweipunktfunktion eines quasiprimären Feldes zum Gewicht h erhält man

$$\langle V(\psi^\dagger, z)V(\psi, \zeta)\rangle = \left(\frac{x-\xi}{z-\zeta}\right)^{2h} \langle V(\psi^\dagger, x)V(\psi, \xi)\rangle \tag{2.25}$$

also insbesondere für lokale Systeme $2h \in \mathbb{Z}$. Lokale Vertexoperatoren sind also entweder bosonisch ($\varepsilon_{\psi\psi} = 1 \Leftrightarrow h \in \mathbb{Z}$) oder fermionisch ($\varepsilon_{\psi\psi} = -1 \Leftrightarrow h \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$).

2.3 Operatorproduktentwicklung

Der Begriff einer Operatorproduktentwicklung (OPE) wurde zuerst von K.G. Wilson [56, 58] eingeführt, um einen Lagrangefunktionsfreien Zugang zu Quantenfeldtheorien zu gewinnen. Die Idee ist, daß ein System von Observablen $\{\Phi_i(z); i \in I\}$, insbesondere lokaler Operatoren, eine assoziative Algebra bildet, solange die Punkte, an denen die Operatoren lokalisiert sind, sehr nahe beieinander liegen. Ein Produkt zweier solcher Operatoren sollte dann eine asymptotische Entwicklung in jeweils mit analytischen Funktionen multiplizierten Observablen besitzen:

$$\Phi_a(x)\Phi_b(y) \approx \sum_{i\in I} \frac{f^i_{ab}(x-y)}{((x-y)^2)^{(d_a+d_b-d_i)/2}}\Phi_i(y) \tag{2.26}$$

Dabei sind die d_i die sogenannten *Skalen*- oder Massendimensionen der Felder Φ_i und die f^i_{ab} in einer Umgebung von 0 nicht divergente Funktionen (evtl. muß man logarithmische Divergenzen hinzunehmen). "Nahe beieinander liegend" heißt in diesem Zusammenhang, daß $(x-y)$ raumartig mit $(x-y) \approx 0$ ist.

Obwohl dieser Zugang sehr elegant zu sein scheint, ist es in allgemeinen Quantenfeldtheorien nicht möglich, eine Operatorproduktentwicklung mathematisch sauber zu definieren. Dies ist im Falle zweidimensionaler CFTen glücklicherweise anders.
Dazu seien die (Fourier-) Moden V_n eines Feldes $V(\psi, z)$ mit $L_0\psi = h\psi$ über die Entwicklung

$$V(\psi, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}+h} V_n(\psi)z^{n-h} \tag{2.27}$$

definiert. Gemäß Definition 2.1.1 muß dann offensichtlich

$$\psi = V_h(\psi)\Psi_0 \;\text{ und }\; V_n(\psi)\Psi_0 = 0\;\forall n < h \tag{2.28}$$

gelten. Nach dem im vorangehenden Kapitel gesagten ist klar, daß bosonische Felder ganz- und fermionische halbzahlige Moden haben. Gleichung (2.20) lautet damit in Modenschreibweise

$$[L_m, V_n(\psi)] = (n - m(h-1))V_{m+n}(\psi);\ m = -1, 0, 1 \tag{2.29}$$

und insbesondere bedeutet $[L_0, V_n(\psi)] = nV_n(\psi)$, daß $V_n(\psi)$ die Räume $\mathcal{F}_\lambda$ nach $\mathcal{F}_{\lambda+n}$ abbildet.
Wendet man die Entwicklung nach Moden nun auf Gleichung (2.12) an, so gelangt man zu folgendem Ergebnis:

Satz 2.3.1 (Operatorproduktentwicklung) *Seien $V(\psi, z), V(\phi, \zeta) \in \mathcal{V}$ Vertexoperatoren zu den Zuständen $\psi \in \mathcal{F}_{h_\psi}, \phi \in \mathcal{F}_{h_\phi}$. Dann ist für alle $|z| > |\zeta|$ ihre Operatorproduktentwicklung gegeben durch*

$$V(\psi, z)V(\phi, \zeta) = \sum_{\substack{r \geq 0 \\ r \in \mathbb{Z}+h_\psi+h_\phi}} (z-\zeta)^{r-h_\psi-h_\phi} V(\chi_r, \zeta) \tag{2.30}$$

wobei die Felder auf der rechten Seite durch

$$\chi_r := V_{r-h_\phi}(\psi)\phi \in \mathcal{F}_r \tag{2.31}$$

definiert sind.

Damit haben wir das Produkt zweier lokaler Vertexoperatoren als Summe über andere lokale Operatoren geschrieben, wobei der singuläre Teil nur endlich viele Terme enthält. Die Kommutatoren der Moden zweier Vertexoperatoren sind offenbar allein durch den singulären Teil der OPE bestimmt und können daraus über Konturintegrale gewonnen werden.
Als Bemerkung zu den Moden eines Vertexoperators sei noch gesagt, daß $V_n(\psi)^\dagger = V_{-n}(\psi^\dagger)$ ist und damit für reelles ψ die Moden der Hermitezitätsbedingung $V_n(\psi)^\dagger = V_{-n}(\psi)$ genügen.

2.4 Konforme Symmetrie

In der Einleitung hatten wir angekündigt, daß die konforme Gruppe in zwei Dimensionen unendlichdimensional ist. Dies ist so nicht ganz richtig, wie wir gleich sehen werden: Im Euklidischen ist die konforme Gruppe in zwei Dimensionen gerade durch die holomorphen und antiholomorphen Funktionen gegeben. Auf der Riemannschen Zahlenkugel sind die global definierten konformen Transformationen damit gerade durch die in Abschnitt 2.2 diskutierten Möbius-Transformationen gegeben. Erst im Raum $S^1 \times S^1$ wird die konforme Gruppe unendlichdimensional, nämlich gerade $Diff(S^1) \times Diff(S^1)$, wobei $Diff(S^1)$ durch die Witt-Algebra $\{L_n := z^{n+1}\partial_z;\ n \in \mathbb{Z}\}$ der linksinvarianten Vektorfelder auf S^1 mit Vertauschungsrelationen

$$[L_m, L_n] = (n-m)L_{n+m} \tag{2.32}$$

generiert wird [35]. Fordert man allerdings Kovarianz der Theorie auch bezüglich *lokaler* konformer Abbildungen, so hat man dieselbe Symmetriealgebra auch für andere Anschauungsräume.

2.4.1 Energie-Impuls-Tensor

Wir nehmen an, es gäbe einen quasiprimären Zustand ω_c mit $h_{\omega_c} = 2$, den *konformen Zustand*, dessen Vertexoperator die Modenentwicklung

$$T(z) := V(\omega_c, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{n-2} \tag{2.33}$$

besitzt, wobei L_n für $n = -1, 0, 1$ die weiter oben definierten Erzeugenden der Möbius-Transformationen sind. Sei o.B.d.A. ω_c reell (falls es ein wie oben beschaffenes nicht reelles ω_c gibt, so erfüllt $\frac{1}{2}(\omega_c + \omega_c^\dagger)$ obige Bedingungen auch und ist reell). Dann ist $L_n^\dagger = L_{-n}\ \forall n \in \mathbb{Z}$. Aus (2.28) erhält man $\omega_c = L_2\Psi_0$. $T(z)$ ist der Generator der konformen Transformationen und ist eine Komponente des Energie-Impuls-Tensors.
Der Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ einer Feldtheorie ist eine symmetrische, divergenzfreie Größe (für Feldtheorien, die über eine Lagrangedichte definiert sind, ist er gerade der Noether-Strom zu den Raum-Zeit-Translationen) und generiert wegen der Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu T^{\mu\nu}$ Erhaltungsgrößen der Form $\int T^{0\nu} d^D x$ (e_0 gebe die Zeitrichtung an, D die *Raum*-Dimension). In skaleninvarianten Theorien ist der Energie-Impuls-Tensor außerdem spurfrei.
In zwei Dimensionen bedeutet dies mit den komplexen chiralen Koordinaten (2.1), daß $T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0$ und $T_{zz} = T(z)$ sowie $T_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{T}(\bar{z})^{(ii)}$, also $T_{\mu\nu}dx^\mu \otimes dx^\nu = T(z)dz \otimes dz + \bar{T}(\bar{z})d\bar{z} \otimes d\bar{z}$. Das Verhalten chiraler Felder unter einer (infinitesimalen) Transformation $z \mapsto z(1+\varepsilon(z))$ ist dann durch den Kommutator $\delta_\varepsilon\phi(\zeta) = [Q_\varepsilon, \phi(\zeta)]$ mit den "Ladungen"

$$Q_\varepsilon = \oint dz\ \varepsilon(z)T(z) \tag{2.34}$$

gegeben, wobei das Integral längs eines geschlossenen Weges um den Ursprung zu nehmen ist.
Die OPE des Energie-Impuls-Tensors mit sich selbst ergibt sich nach Gleichung (2.30) und mit $L_{-2}L_2\Psi_0 = \frac{c}{2}\Psi_0$, also $c = 2||\omega_c||$, zu

$$T(z)T(\zeta) \approx \frac{c/2}{(z-\zeta)^4} + \frac{2T(\zeta)}{(z-\zeta)^2} + \frac{1}{z-\zeta}\frac{dT(\zeta)}{d\zeta} + \text{nicht singuläre Terme.} \tag{2.35}$$

Damit kann man dann die Kommutatoren der Moden des Energie-Impuls-Tensors berechnen. Man erhält so

Satz 2.4.1 (Virasoro-Algebra) *Seien L_n, $n \in \mathbb{Z}$, die Moden eines Vertexoperators zu einem konformen Zustand. Dann ist der Kommutator gegeben durch*

$$[L_m, L_n] = (n-m)L_{m+n} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{m,-n}. \tag{2.36}$$

*Die Zahl c wird auch **konforme Anomalie** oder **zentrale Ladung** genannt.*

$^{(ii)}\bar{T}(\bar{z})$ ist *nicht* das komplex Konjugierte von $T(z)$.

Die Verbindung zur weiter oben definierten Witt-Algebra ergibt sich darüber, daß wir eigentlich nicht auf einem Hilbertraum, sondern wegen der Normierungsbedingung an die Zustände auf einem projektiven Hilbertraum arbeiten. Statt projektiven Darstellungen der Witt-Algebra kann man jedoch auch lineare Darstellungen von zentralen Erweiterungen (man erweitert das Zentrum der Algebra um ein weiteres Element) betrachten.
Die zentrale Erweiterung der Witt-Algebra ist eindeutig,heißt *Virasoro-Algebra*, und wird im folgenden immer mit $\mathcal{L}$ bezeichnet. Die Kommutatorrelationen sind durch

$$\begin{array}{rcl} [L_m, L_n] & = & (n-m)L_{m+n} + \frac{C}{12}(n^3-n)\delta_{m,-n} \\ [C, L_n] & = & 0 \end{array} \tag{2.37}$$

gegeben, wobei C das zusätzliche zentrale Element bezeichnet. Dieses ist natürlich in einer beliebigen Darstellung durch einen Operator gegeben, nach dem Lemma von Schuur ist dieser aber in jeder unzerlegbaren Darstellung als Vielfaches der $\mathbb{1}$ gegeben (siehe auch Kapitel 3).

2.4.2 Primäre Felder

Die Ergebnisse aus Abschnitt 2.2 können nun auf die größere Algebra $\mathcal{L}$ verallgemeinert werden. Als *primäre* oder *$\mathcal{L}$-Tiefstgewichtszustände* (zum Gewicht h) wollen wir analog zu den quasiprimären Zuständen aus 2.2 solche Zustände ψ bezeichnen, für die

$$L_0\psi = h\psi, \quad L_n\psi = 0 \ \forall n < 0 \tag{2.38}$$

gilt. Den Raum aller Zustände, für die Gleichung (2.38) (zu festem h) erfüllt ist, bezeichnen wir mit $\mathcal{F}^{\mathcal{P}}(h)$. Die OPE des Energie-Impuls-Tensors mit einem Vertexoperator zu einem primären Zustand $\psi \in \mathcal{F}^{\mathcal{P}}(h)$ ist dann nach Satz 2.3.1 durch

$$T(z)V(\psi,\zeta) = \frac{h}{(z-\zeta)^2}V(\psi,\zeta) + \frac{1}{(z-\zeta)}\frac{d}{d\zeta}V(\psi,\zeta) + \text{nicht singuläre Terme} \tag{2.39}$$

gegeben. Daraus können wir mit (2.10) und (2.38) den Kommutator

$$[L_m, V(\psi,z)] = z^{-m}\left(z\partial_z - (m-1)h\right)V(\psi,z); \ m \in \mathbb{Z} \tag{2.40}$$

berechnen, was Gleichung (2.20) auf die komplette Virasoro-Algebra ausdehnt. In Modenschreibweise verallgemeinert dies Gleichung (2.29) zu

$$[L_m, V_n(\psi)] = (n - m(h-1))V_{m+n}(\psi); \ m \in \mathbb{Z}. \tag{2.41}$$

Ein Feld, das Gleichung (2.40) bzw. (2.41) erfüllt, heißt *primäres Feld* (vom Gewicht h).

2.4.3 Konforme Feldtheorie

Wir können nun definieren, was wir in dieser Arbeit unter einer (chiralen) konformen Feldtheorie verstehen wollen:

Definition 2.4.2 *Eine* ***chirale (meromorphe) konforme Feldtheorie*** *ist ein Quadrupel* $(\mathcal{H}, \mathcal{F}, \mathcal{V}, T)$, *wobei* ($\mathcal{H}$ *ein Hilbertraum,* $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ *ein dichter Teilraum wie oben beschrieben,* $\mathcal{V} = \{V(\psi, z), \psi \in \mathcal{F}, \varepsilon_{\psi\psi'} = \pm 1\}$ *ein lokales System von Vertexoperatoren und* T *eine konforme Struktur ist, die durch die Moden eines spurfreien Energie-Impuls-Tensors* $T(z)$ *gegeben ist.*

Zwei konforme Feldtheorien $(\mathcal{H}, \mathcal{F}, \mathcal{V}, T)$, $(\mathcal{H}', \mathcal{F}', \mathcal{V}', T')$ *heißen* ***äquivalent****, falls es einen Hilbertraum-Isomorphismus* $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ *gibt, so daß*

$$U(\mathcal{F}) = \mathcal{F}',\ UV(\psi, z)U^{-1} = V'(U\psi, z),\ UT(z)U^{-1} = T'(z).$$

Bisher haben wir nur chirale CFTs betrachtet. Im allgemeinen Fall hat man als Symmetrie-Algebra zwei Kopien der Virasoro-Algebra, die auf den holomorphen bzw. antiholomorphen Anteilen der Felder mit (meist identischen) zentralen Ladungen c und $\bar{c}$ dargestellt sind. Der Raum aller Felder zerfällt dann in die direkte Summe der Räume aller Felder mit holomorphem Anteil zum Gewicht h und antiholomorphem Anteil zum Gewicht $\bar{h}$. Es bedeutet also keine Einschränkung, nur chirale Algebren zu betrachten, denn der allgemeine Fall läßt sich aus solchen leicht rekonstruieren.

2.5 $\mathcal{W}$-Algebren

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit speziellen chiralen Feldalgebren, den sogenannten *$\mathcal{W}$-Algebren*[(iii)], beschäftigen. Es wird sich herausstellen, daß in diesem Fall die OPE dieselbe Information enthält wie die Kommutatoren der Fouriermoden der Felder, da ihr regulärer Teil (die Kommutatoren sind ja bereits durch den singulären Teil bestimmt) durch die im singulären Teil auftretenden Felder bereits vollständig festgelegt ist.
Wie in Abschnitt 2.2 wollen wir davon ausgehen, daß alle Zustände durch (iteriertes) Anwenden von L_1 aus quasiprimären erzeugt werden. Wegen des über die Vertexoperatoren gegebenen Isomorphismus $\psi \leftrightarrow V(\psi, z)$ können dann auch alle Felder aus quasiprimären erzeugt werden. Wir nehmen nun an, daß in $\mathcal{V}$ ein Erzeugendensystem aus reellen oder imaginären Feldern $\Phi_i(z) := V(\phi_i, z)$ mit $L_0\phi_i = h_i\phi_i$ ausgewählt sei. Ihre Moden bezeichnen wir mit $\Phi_{i,n}$. Daraus erhält man dann die sogenannten *derivativen Felder*

$$V(L_1^k\phi_i, z) = \partial_z^k \Phi_i(z). \tag{2.42}$$

Für quasiprimäre Felder kann man nun eine explizitere Form der Zwei- und Dreipunktfunktionen (2.18) und (2.21) angeben, indem man die Fourierentwicklung explizit einsetzt. Man erhält so

$$\begin{aligned} \langle \Phi_i(z)\Phi_j(\zeta)\rangle &= \frac{d_{ij}}{(z-\zeta)^{h_i+h_j}} \quad \text{und} && (2.43)\\ \langle \Phi_i(z_i)\Phi_j(z_j)\Phi_k(z_k)\rangle &= \prod_{i'<j'} \frac{1}{(z_{i'}-z_{j'})^{2(h_{i'}+h_{j'})-H}} C_{ijk}, && (2.44) \end{aligned}$$

[(iii)] Das "$\mathcal{W}$" steht im übrigen vermutlich für **W**igner, siehe auch [4]. Die Herkunft ist aber nicht wirklich geklärt.

wobei

$$
\begin{aligned}
H &:= h_i + h_j + h_k, && (2.45)\\
d_{ij} &:= \langle \Psi_0, \Phi_{i,-h_i}\Phi_{j,h_j}\Psi_0\rangle \quad \text{und} && (2.46)\\
C_{ijk} &:= \langle \Psi_0, \Phi_{i,-h_i}\Phi_{j,h_i-h_k}\Phi_{k,h_k}\Psi_0\rangle = \langle \Phi_i(\infty)\Phi_j(1)\Phi_k(0)\rangle. && (2.47)
\end{aligned}
$$

Man sieht leicht, daß $d_{ij} = 0$ falls $h_i \neq h_j$. Mit dieser Bilinearform kann nun das Erzeugendensystem zu einer Basis reduziert werden, in der die Form nicht degeneriert ist. Wir wollen im folgenden davon ausgehen, daß dies bereits geschehen ist.
Die d_{ij} und die über $C_{ijk} = C_{ij}^{k'} d_{k'k}$ gegebenen C_{ij}^k heißen *Strukturkonstanten* der Operatoralgebra. Die d_{ij} sind offensichtlich symmetrisch, während die C_{ijk} invariant unter zyklischen Vertauschungen der Indizes sind und bei ungeraden Permutationen ihr Vorzeichen um $(-)^{\lfloor h_i\rfloor+\lfloor h_j\rfloor+\lfloor h_k\rfloor}$ ändern, wie man aus Definition 2.1.2 und Gleichung (2.21) folgert.
Für eine solche Basis von quasiprimären Feldern kann nun auch der reguläre Teil der OPE

$$\Phi_i(z)\Phi_j(\zeta) = \sum_{r\geq -h_i-h_j} (z-\zeta)^r V(\Phi_{i,h_i+r}\Phi_{j,h_j}\Psi_0,\zeta) \qquad (2.48)$$

aus Gleichung (2.30) angegeben werden. Dazu benötigen wir noch:

Definition 2.5.1 *Die* ***Normalgeordneten Produkte (NOPs*** [iv]***)*** *zweier chiraler Felder $\phi(z)$, $\psi(z)$ sind für alle $m \in \mathbb{Z}$ definiert durch*

$$
\begin{aligned}
N^{(m)}(\phi,\psi)(z) &:= \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{n-h_\phi-h_\psi} N^{(m)}(\phi,\psi)_n && (2.49)\\
N^{(m)}(\phi,\psi)_n &:= \varepsilon_{\phi\psi} \sum_{k=-\infty}^{m-1} \phi_{n-k}\psi_k + \sum_{k=m}^{\infty} \psi_k\phi_{n-k}. && (2.50)
\end{aligned}
$$

Dabei sei für ein derivatives Feld $\phi'(z) = (\partial_z^r\phi)(z)$ die Dimension $h_{\phi'} := h_\phi + r$. Felder, die nicht *aus derivativen Feldern sowie normalgeordneten Produkten linearkombiniert werden können, heißen* ***einfache Felder****. Die Ableitungen eines primären Feldes und seine normalgeordneten Produkte mit dem Virasorofeld (also dem Energie-Impuls-Tensor) sowie Linearkombinationen davon heißen seine* ***descendanten Felder****. Die Menge aller dieser Felder heißt seine* ***konforme Familie****.*

Mit dieser Definition hat man $V(\Phi_{i,h_i+r}\Phi_{j,h_j}\Psi_0, z) = \frac{1}{r!}N^{(h_i+r)}(\partial^r\Phi_i,\Phi_j)(z)$, und die OPE (2.48) hat nun die Form

$$\Phi_i(z)\Phi_j(\zeta) = \text{singuläre Terme } + \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}(z-\zeta)^r N^{(h_i+r)}(\partial^r\Phi_i,\Phi_j)(z)(\zeta). \qquad (2.51)$$

Der Unterschied zwischen verschiedenen NOPs ist relativ gering, da sich $N^{(m)}$ und $N^{(m')}$ nur durch endlich viele lokale Terme unterscheiden. Konkret gilt nämlich $N^{(m+1)}(\phi,\psi)_n - N^{(m)}(\phi,\psi)_n = [\phi_{n-m},\psi_m]$.

[iv] engl.: **N**ormal **O**rdered **P**roducts

Wie schon erwähnt, können alle Felder als Linearkombination von Ableitungen quasiprimärer Felder geschrieben werden:

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}^0} \bigoplus_{n\in\mathbb{N}^0/2} \partial^k \mathcal{F}^Q(n), \tag{2.52}$$

wobei $\mathcal{F}^Q(n)$ der Raum der quasiprimären Felder der Dimension n ist. Wir führen mit der obigen Zerlegung drei Projektoren ein: Sei zunächst $\mathcal{Q}(k,n)$ der Projektor auf $\partial^k\mathcal{F}^Q(n)$. Dann ist der Projektor auf alle Felder der homogenen Dimension n gerade

$$\mathcal{Q}(n) := \sum_{k=0}^{\lfloor n\rfloor} \mathcal{Q}(k, n-k), \tag{2.53}$$

wohingegen der Projektor auf alle quasiprimären Felder durch

$$\mathcal{P} := \sum_n \mathcal{Q}(0,n) \tag{2.54}$$

gegeben ist.
Die quasiprimäre Projektion $\mathcal{P}\mathcal{Q}(h_\phi + h_\psi)N^{(m)}(\phi,\psi)$ ist für zwei beliebige Felder ϕ,ψ damit unabhängig von m, da der Kommutator von ϕ und ψ nur nicht derivative Felder mit Dimension $h < h_\phi + h_\psi$ enthalten kann. Wir können damit *die* quasiprimäre Projektion der NOPs als

$$\mathcal{N}(\phi,\psi) := \mathcal{P}\mathcal{Q}(h_\phi + h_\psi)N^{(0)}(\phi,\psi) \tag{2.55}$$

definieren. Führt man die Projektionen explizit aus, so kann die OPE wie folgt angegeben werden:

Satz 2.5.2 *Seien Φ_i und Φ_j zwei Elemente einer quasiprimären Basis der Felder. Mit den Notationen $h_{ijk} := h_i + h_j - h_k$ und $a^r_{ijk} := \binom{2h_k+r-1}{r}^{-1}\binom{h_k+h_i-h_j+r-1}{r}$ ist dann die OPE in quasiprimären Feldern gegeben durch*

$$\begin{aligned}\Phi_i(z)\Phi_j(\zeta) = \quad & \sum_{\{k|h_{ijk}\geq 1\}} (z-\zeta)^{-h_{ijk}} C^k_{ij} \sum_{r=0}^{\infty} a^r_{ijk} \tfrac{1}{r!}(z-\zeta)^r \partial^r \Phi_k(\zeta) \\ & + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} \tfrac{a^r_{ijn'}}{n!r!}(z-\zeta)^{n+r}\partial^r \mathcal{N}(\Phi_j, \partial^n\Phi_i)(\zeta),\end{aligned} \tag{2.56}$$

wobei die $h_{n'} := h_i + h_j + n$ in $a^r_{ijn'}$ die Dimensionen der quasiprimären normalgeordneten Produkte sind.

Satz 2.5.3 *Die normalgeordneten Produkte in Satz 2.5.2 haben die Gestalt*

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\Phi_j, \partial^n\Phi_i) = \quad & \sum_{r=0}^{n} (-)^r \tbinom{n}{r} \tbinom{2(h_i+h_j+n-1)}{r}^{-1} \tbinom{2h_i+n-1}{r} \partial^r N^{(h_i+n-r)}(\Phi_j, \partial^{n-r}\Phi_i) \\ & -(-)^n \sum_{\{k|h_{ijk}\geq 1\}} C^k_{ij} \tbinom{h_{ijk}+n-1}{n} \tbinom{2(h_i+h_j+n-1)}{n}^{-1} \\ & \qquad \times \tbinom{2h_i+n-1}{h_{ijk}+n} \tbinom{\sigma_{ijk}-1}{h_{ijk}-1}^{-1} \frac{\partial^{h_{ijk}+n}\Phi_k}{(\sigma_{ijk}+n)(h_{ijk}-1)!}\end{aligned} \tag{2.57}$$

mit $\sigma_{ijk} := h_i + h_j + h_k - 1$ und h_{ijk} wie in Satz 2.5.2. Diese NOPs sind (anti-) kommutativ, d.h. $\mathcal{N}(\phi,\psi) = \varepsilon_{\phi\psi}\mathcal{N}(\psi,\phi)$, aber nicht assoziativ. Außerdem gilt $\mathcal{N}(\phi,\partial\psi) = -\mathcal{N}(\partial\phi,\psi)$. Falls eines der beiden Felder das Virasoro-Feld ist, so vereinfacht sich Gleichung (2.57) stark zu

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\Phi_j,\partial^n T) = & \sum_{r=0}^{n}(-)^r \tbinom{2(h_j+n+1)}{r}^{-1}\tbinom{n+3}{r}\partial^r N^{(2+n-r)}(\Phi_j,\partial^{n-r}T) \\ & -(-)^n \tbinom{2(h_j+n+1)}{n}^{-1}\tfrac{(n+1)(n+3)}{2(2h_j+1+n)}\partial^{n+2}\Phi_j\end{aligned} \tag{2.58}$$

Wie beim Energie-Impuls-Tensor kann man nun aus der OPE die Kommutatoren der Fouriermoden der beteiligten Felder extrahieren, indem man $\Phi_{i,m} = \frac{1}{2\pi i}\oint dz z^{h_i-m-1}\Phi_i(z)$ verwendet, wobei der Integrationsweg den Ursprung mit positivem Sinn umläuft. Man erhält damit den wichtigen Struktursatz

Satz 2.5.4 (Lie-Algebra chiraler Feldalgebren) *Sei $\{\Phi_i(z), i \in I\}$ ein Erzeugendensystem quasiprimärer Felder. Sei h_i die Dimension des Feldes $\Phi_i(z)$, das reell sei für $\lfloor h_i \rfloor \in 2\mathbb{Z}$ und imaginär für $\lfloor h_i \rfloor \in 2\mathbb{Z}+1$. Seien ferner die Strukturkonstanten C_{ij}^k und d_{ij} wie oben definiert. Dann hat die Lie-Algebra der linkschiralen Felder die Form*

$$[\Phi_{i,m},\Phi_{j,n}]_{\varepsilon_{ij}} = \sum_{k\in I} C_{ij}^k p_{ijk}(m,n)\Phi_{k,m+n} + d_{ij}\delta_{n,-m}\binom{n+h_i-1}{2h_i-1}. \tag{2.59}$$

*Die $p_{ijk}(m,n)$ heißen **universelle Polynome** und haben mit den Abkürzungen*

$$h_{ijk} := h_i + h_j - h_k \qquad und \tag{2.60}$$

$$b_{ijk}^{rs} := (-)^r \frac{(2h_k-1)!s!r!}{(h_i+h_j+h_k-2)!}\binom{2h_i-2-r}{s}\binom{2h_j-2-s}{r} \tag{2.61}$$

die Form

$$p_{ijk}(m,n) = \sum_{\substack{r,s\in\mathbb{N}^0 \\ r+s=h_{ijk}-1}} b_{ijk}^{rs}\binom{m+h_i-1}{r}\binom{n+h_j-1}{s}. \tag{2.62}$$

Die Strukturkonstanten C_{ij}^k und d_{ij} sind reell.

Wir können jetzt definieren, was wir unter einer $\mathcal{W}$-Algebra verstehen wollen. Die Hauptidee ist, daß man als Generatoren der Algebra nicht mehr (wie in Satz 2.5.4) alle quasiprimären Felder nimmt, dafür aber die quasiprimären NOPs zur Erzeugung der Algebra zuläßt.

Definition 2.5.5 ($\mathcal{W}$-Algebren) *Eine (endlich erzeugte) **$\mathcal{W}$-Algebra** ist eine chirale meromorphe konforme Feldtheorie $(\mathcal{H},\mathcal{F},\mathcal{W},T)$, in der eine ausgezeichnete (endliche) Menge von einfachen quasiprimären Feldern $\mathcal{B}_\mathcal{W} = \{\Phi_i(z); i \in I\} \cup \{T(z)\}$ existiert, so daß das lokale System $\mathcal{W}$ allein durch die Operationen ∂ (Ableiten) und $\mathcal{N}$ (normalgeordnete Produkte) aus $\mathcal{B}_\mathcal{W}$ erzeugt wird. Die so generierte Algebra wird mit $\mathcal{W}(2,h_1,h_2,\ldots)$ bezeichnet.*

Ist $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ ein *minimales* Erzeugendensystem im obigen Sinne, so ist es bis auf linearen Basiswechsel eindeutig bestimmt. Die Lie-Algebra der Fourier-Moden erfüllt offensichtlich die Jacobi-Identitäten. Da wir die Felder (bis auf den Energie-Impuls-Tensor) frei normieren können, wählen wir die Normierung

$$d_{ij} = \frac{c}{h_i}\delta_{ij} \tag{2.63}$$

was insbesondere konsistent mit $d_{TT} = c/2$ ist.
Neben der expliziten Konstruktion von $\mathcal{W}$-Algebren mit Hilfe von Lie-Algebra-Methoden oder der OPE (z.B. [7, 39]) gibt es auch allgemeinere Konstruktionsverfahren – als Stichworte seien nur Casimir-Algebren [1, 9, 10] und die Coset-Konstruktion [1, 9, 11, 30] genannt, die beide auf Kac-Moody-Algebren aufbauen. Ein wichtiger Punkt ist, daß $\mathcal{W}$-Algebren im allgemeinen nur für bestimmte Werte der zentralen Ladung konsistent zu definieren sind.

Eines der einfachsten Beispiele einer $\mathcal{W}$-Algebra (außer der reinen Virasoro-Algebra) ist die generisch existierende $\mathcal{W}(2,3)$, die bereits 1985 von A.B. Zamolodchikov [57] konstruiert wurde. Sie ist durch die folgenden Kommutatorrelationen gegeben:

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (n-m)L_{m+n} + \tfrac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n,-m} \\ [L_m, W_n] &= (n-2m)W_{m+n} \\ [W_m, W_n] &= C_{WW}^T p_{332}(m,n)L_{m+n} + C_{WW}^{\Lambda} p_{334}(m,n)\Lambda_{m+n} + \tfrac{c}{3}\tbinom{n+2}{5}\delta_{n,-m} \end{aligned} \tag{2.64}$$

mit

$$\begin{gathered} \Lambda := \mathcal{N}(T,T) = N^{(2)}(T,T) - \tfrac{3}{10}\partial^2 T \\ C_{WW}^T = 2, \qquad C_{WW}^{\Lambda} = \tfrac{32}{5c+22} \\ p_{334}(m,n) = \tfrac{n-m}{2}, \qquad p_{332}(m,n) = \tfrac{n-m}{60}(2m^2 - mn + 2n^2 - 8) \end{gathered} \tag{2.65}$$

2.6 Vierpunktfunktionen

Die volle konforme Kovarianz einer Theorie gestattet es uns, außer Zwei- und Dreipunktfunktionen auch Vierpunktfunktionen weitgehend zu bestimmen. Allgemein gilt, daß sich eine N-Punkt-Funktion quasiprimärer Felder Ψ_k (zu den Gewichten h_k und $\bar{h}_k$) vermittels projektiver Invarianz (also Möbius-Transformationen) zu

$$\langle \textstyle\prod_{i=1}^N \Psi_{l_i}(z_i,\bar{z}_i)\rangle = \displaystyle\prod_{i<j}(z_i - z_j)^{\gamma_{ij}}(\bar{z}_i - \bar{z}_j)^{\bar{\gamma}_{ij}} Y(x_{ij}^{kl}, \bar{x}_{ij}^{kl}) \tag{2.66}$$

reduziert, wobei $\{\gamma_{ij}\}$ eine beliebige Lösung des Gleichungssystems $\sum_{i\neq j}\gamma_{ij} = 2h_i$ ist und $x_{ij}^{kl} := \frac{(z_i-z_j)(z_k-z_l)}{(z_i-z_l)(z_k-z_j)}$ einen der $(N-3)$ *anharmonischen Quotienten* (oder auch Kreuzungsverhältnis) bezeichnet, von denen Y als sonst durch projektive Invarianz nicht weiter festgelegte Funktion abhängt (analog für $\bar{\gamma}_{ij}$ und $\bar{x}_{ij}^{kl}$). Die Zahl $(N-3)$ rührt daher, daß vermittels Möbius-Transformationen immer drei Punkte festgelegt werden können.

Für den Fall $N = 4$ definieren wir die Funktionen

$$G^{lk}_{nm}(x,\bar{x}) := \langle \Phi_k(\infty,\infty)\Phi_l(1,1)\Phi_n(x,\bar{x})\Phi_m(0,0)\rangle \tag{2.67}$$

als reduzierte Vierpunktfunktionen von vier primären Feldern, auf die sich (unter der Voraussetzung, daß $\mathcal{F}$ in Tiefstgewichtsdarstellungen der Virasoro-Algebra zerfällt) alle Vierpunktfunktionen zurückführen lassen. Aus der Assoziativität der OPE folgt ([3] Appendix C) die Kreuzungs-Symmetrie der Vierpunktfunktionen:

$$G^{lk}_{nm}(x,\bar{x}) = G^{mk}_{nl}(1-x,1-\bar{x}) = x^{-2h_n}\bar{x}^{-2\bar{h}_n}G^{lm}_{nk}(\frac{1}{x},\frac{1}{\bar{x}}). \tag{2.68}$$

Setzt man die OPE explizit ein, so erhält man die Partialwellenzerlegung

$$G^{lk}_{nm}(x,\bar{x}) = \sum_p C^p_{nm}C_{lkp}\mathcal{F}^{lk}_{nm}(p|x)\bar{\mathcal{F}}^{lk}_{nm}(p|\bar{x}), \tag{2.69}$$

die in rechts- und linkschirale Anteile faktorisiert. Die Funktionen $\mathcal{F}^{lk}_{nm}(p|x)$, die von den fünf konformen Dimensionen der Felder $\Phi_l, \Phi_k, \Phi_l, \Phi_m$ und Φ_p abhängen, heißen *konforme Blöcke*, da alle N-Punkt-Funktionen aus ihnen aufgebaut sind. Aus der Kreuzungs-Symmetrie (2.68) folgt dann

$$\sum_p C^p_{nm}C_{lkp}\mathcal{F}^{lk}_{nm}(p|x)\bar{\mathcal{F}}^{lk}_{nm}(p|\bar{x}) = \sum_q C^q_{nl}C_{mkq}\mathcal{F}^{mk}_{nl}(q|1-x)\bar{\mathcal{F}}^{mk}_{nl}(q|1-\bar{x}), \tag{2.70}$$

so daß die Kenntnis aller konformen Blöcke ein Gleichungssystem zur Folge hat, das die Strukturkonstanten bestimmt. Leider ist die exakte Form der konformen Blöcke gewöhnlich schwer zu ermitteln.
Günstiger ist die Situation, wenn die primären Felder Φ_k degenerierte Darstellungen der Virasoro-Algebra aufspannen, d.h. solche Tiefstgewichtsdarstellungen, in denen bestimmte nichttriviale Kombinationen von positiven Virasoro-Moden, angewandt auf das Feld Φ_k, Null ergeben (siehe auch Kapitel 3). In diesen Fällen liefern diese sogenannten Nullvektor-Relationen Differentialgleichungen an die Vierpunktfunktionen (nach Gleichung (2.40) kann die Wirkung von Virasoro-Moden als Differentialoperatoren geschrieben werden).
Diese sind gerade die Differentialgleichungen für die verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen [16]. Für bestimmte Kombinationen von Gewichten und zentralen Ladungen kann es nun vorkommen, daß diese Differentialgleichungen entarten. V. Gurarie [34] berechnete z.B., daß im Fall $c = -2$ die Vierpunktfunktion $\langle\mu(z_1)\mu(z_2)\mu(z_3)\mu(z_4)\rangle$ des Operators μ mit konformer Dimension $-\frac{1}{8}$ einer Differentialgleichung genügen muß, deren beiden linear unabhängigen Lösungen beide zu konformem Gewicht 0 gehören. Darüber hinaus hat eine der beiden Lösungen eine logarithmische Singularität bei 0. Man könnte nun meinen, dieses Problem sei dadurch zu lösen, daß man die logarithmische Lösung ignoriert und nur mit der bei 0 regulären arbeitet. Dies hilft aber nicht, denn die andere Lösung hat eine logarithmische Singularität bei 1. Berechnet man die OPE von μ mit sich selbst mit der logarithmischen Lösung, so folgt die Existenz eines Feldes zum konformen Gewicht 0, das nicht die Identität ist, sondern dessen Zweipunktfunktion logarithmisch

divergiert und das zusammen mit der Identität einen zweidimensionalen Raum aufspannt, auf dem L_0 als Jordanblock operiert. Das Vakuum (das ja zur Identität korrespondiert) bleibt dabei weiterhin (bis auf Vielfache) der einzige $SL(2,\mathbb{C})$-invariante Vektor.

Dadurch und durch die Ergebnisse in Kapitel 4 motiviert, wollen wir im folgenden Kapitel Darstellungen der Virasoro-Algebra näher untersuchen, wobei besonderes Gewicht auf Darstellungen der obigen Form gelegt wird.

Kapitel 3

Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra

3.1 Grundbegriffe

Die Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra $\mathcal{L}$

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (n-m)L_{m+n} + \tfrac{C}{12}(n^3-n)\delta_{m,-n} \\ [C, L_n] &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

läuft in weiten Teilen völlig analog zur Darstellungstheorie endlichdimensionaler Lie-Algebren. Diese wird im folgenden als bekannt vorausgesetzt (für eine Einführung siehe z.B. [37]). Außerdem werden wir des öfteren zwischen der Sprache der Darstellungen und der (äquivalenten) der Moduln über einer Algebra wechseln.

Definition 3.1.1 *Ein $\mathcal{L}$-Modul V heißt* ***irreduzibel****, falls er keinen echten Untermodul besizt. Er heißt* ***unzerlegbar****, falls es keine Untermoduln $V_1, V_2 \subset V$ gibt, so daß $V = V_1 \oplus V_2$.*

3.1.1 Die universelle Einhüllende

Das Studium der Darstellungen von $\mathcal{L}$ wird wie im Falle der endlichdimensionalen Lie-Algebren durch den Übergang zu einer assoziativen Algebra mit 1 erleichtert. Man definiert

Definition 3.1.2 *Die* ***universelle Einhüllende*** *$\mathcal{U}$ der Virasoro-Algebra ist eine assoziative Algebra mit 1 zusammen mit einer Einbettung $\mathcal{L} \to \mathcal{U}$, die folgende universelle Eigenschaft besitzt: Für jede Darstellung $\rho : \mathcal{L} \to gl(V)$ existiert ein eindeutiger Algebrenhomomorphismus $\phi : \mathcal{U} \to gl(V)$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[dr, "\phi"] & \\ \mathcal{L} \arrow[u] \arrow[r, "\rho"] & gl(V) \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

In der Modul-Formulierung bedeutet dies natürlich, daß jeder $\mathcal{L}$-Modul in eindeutiger Weise zu einem $\mathcal{U}$-Modul wird.
Im folgenden werden nun die wichtigsten Eigenschaften der universellen Einhüllenden zitiert, wobei auf die Beweise verzichtet wird (sie laufen völlig analog zum Fall der endlichdimensionalen Lie-Algebren).

Satz 3.1.3 *Die universelle Einhüllende existiert und ist eindeutig.*

Satz 3.1.4 (Poincaré-Birkhoff-Witt) *Führt man auf den Erzeugenden der Virasoro-Algebra eine Ordnung ein, so ist eine Basis der universellen Einhüllenden gegeben durch die geordneten Monome in den Erzeugenden. Eine solche Basis heißt* ***PBW-Basis****. Wählt man insbesondere $L_n < L_m :\Leftrightarrow n > m$, $C < L_n \forall n \in \mathbb{Z}$, so erhält man als Basis die Monome*

$$\left\{L_{n_1}^{i_1} \ldots L_{n_k}^{i_k} C^{i_c};\ k, i_j \in \mathbb{N}^0, n_j \in \mathbb{Z}, n_1 > n_2 > \ldots > n_k\right\}. \tag{3.3}$$

Wenn wir im folgenden von einer PBW-Basis reden, ohne die Ordnung explizit anzugeben, so ist stets diese spezielle PBW-Basis gemeint. Mit $N \in \mathbb{N}$ heißt das lineare Erzeugnis aller Monome der Form

$$\left\{L_{n_1} \ldots L_{n_k} C^i;\ k, i \in \mathbb{N}^0, n_j \in \mathbb{Z}, n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k, \sum_{j=1}^{k} n_j = N\right\} \tag{3.4}$$

N-ter Level *von $\mathcal{U}$ und wird im folgenden mit $\mathcal{U}_N$ bezeichnet.*

Bemerkung 3.1.5 *Da das zentrale Element C offenbar im Zentrum von $\mathcal{U}$ liegt, ist es nach dem Lemma von Schur in jeder nicht zerlegbaren Darstellung als Vielfaches der $\mathbb{1}$ dargestellt. Der Eigenwert c von C heißt dann* ***zentrale Ladung****. Dem bei Physikern üblichen Sprachgebrauch folgend, werden wir deshalb nachstehend häufiger von Theorien bei einer bestimmten zentralen Ladung oder auch von der Virasoro-Algebra (respektive ihrer universellen Einhüllenden) bei einem festen Wert der zentralen Ladung sprechen und C tatsächlich als Vielfaches der $\mathbb{1}$ betrachten. Die so resultierende verkleinerte universelle Einhüllende mit Basis*

$$\left\{L_{n_1}^{i_1} \ldots L_{n_k}^{i_k};\ k, i_j \in \mathbb{N}^0, n_j \in \mathbb{Z}, n_1 > n_2 > \ldots > n_k\right\} \tag{3.5}$$

besitzt dann offenbar die universelle Eigenschaft nurmehr für Darstellungen mit der entsprechenden zentralen Ladung.
Obwohl dieser Sprachgebrauch dem Mathematiker widerstreben mag, wird die explizite Einschränkung auf fest gewählte Vielfache der $\mathbb{1}$ spätestens dann sinvoll, wenn man $\mathcal{W}$-Algebren, betrachtet, die ja i.a. nur für bestimmte Werte der zentralen Ladung konsistent zu definieren sind.

Es wird sich im folgenden als nützlich erweisen, neben der universellen Einhüllenden $\mathcal{U}$ von $\mathcal{L}$ auch die Unteralgebren $\mathcal{L}^+ := \mathrm{span}\{L_k; k > 0\}$ und $\mathcal{L}^- := \mathrm{span}\{L_k; k < 0\}$ sowie deren universelle Einhüllende $\mathcal{U}^+$ und $\mathcal{U}^-$ mit Basen

$$\left\{L_{n_1}^{i_1} \ldots L_{n_k}^{i_k};\ k, i_j \in \mathbb{N}^0, n_j \in \mathbb{N}^{\gtrless 0}, n_1 > n_2 > \ldots > n_k\right\} \tag{3.6}$$

zu definieren.

3.1.2 Casimir-Operatoren

In der Darstellungstheorie endlichdimensionaler Lie-Algebren hat sich ein genaueres Studium des Zentrums der universellen Einhüllenden, den sogenannten Casimir-Elementen, als äußerst fruchtbar erwiesen. Da nach dem weiter oben bereits zitierten Lemma von Schur auf unzerlegbaren Darstellungen diese Casimir-Elemente als Zahlen dargestellt werden, ist eine Klassifikation der Darstellungen anhand des Wertes eines Casimir-Elements möglich. Leider ist die Situation im Falle der Virasoro-Algebra weniger günstig:

Lemma 3.1.6 *Das Zentrum der universellen Einhüllenden U besteht nur aus Polynomen in C.*

Beweis: Angenommen, es gäbe ein nichttriviales zentrales Element $\mathcal{Z}$. Dies müßte ein Polynom in den Erzeugenden L_n und C sein. Führe nun eine Ordnung auf der PBW-Basis aus Satz 3.1.4 ein:

(i) Ein Monom ist größer als ein anderes, falls seine Länge $\sum_{k \neq c} i_k$ größer ist.

(ii) Falls zwei Monome gleiche Länge haben, so ist das größer, welches das größte n_k besitzt. Bei Gleichheit vergleicht man den zweitgrößten Index u.s.w.

Da $\mathcal{Z}$ ein Polynom ist, ist die Anzahl der vorkommenden Erzeugenden beschränkt. Bilde nun $[L_N, \mathcal{Z}]$, wobei $N > n$ für alle in $\mathcal{Z}$ vorkommenden Erzeugenden L_n ist. Da $\mathcal{Z}$ nun nicht nur Polynom in C ist, hat das größte Monom in $\mathcal{Z}$ die Form $aL_n^m \ldots$, und man sieht leicht, daß das größte Monom in $[L_N, \mathcal{Z}]$ dann durch $am(n-N)L_{n+N}L_n^{m-1} \ldots \neq 0$ gegeben ist (Kommutieren verkürzt die Länge).

q.e.d.

Vervollständigt man aber $\mathcal{U}_0$ in geeigneter Weise, indem man nach B.L. Feigin und D.B. Fuks [21] Reihen der Form

$$\sum L_{i_q} \cdots L_{i_1} F_J^I(L_0, C) L_{-j_1} \cdots L_{-j_r} \tag{3.7}$$

betrachtet, wobei die Summe über Multiindizes $I = \{i_1, \ldots, i_q\}$, $J = \{j_1, \ldots, j_r\}$ mit $|I| = |J|$ ($|I| := \sum_k i_k$) und $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_q$, $j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_r$ läuft und die F_J^I ganze Funktionen von zwei komplexen Variablen sind, so kann man als *zentrale Reihen* solche Reihen definieren, die in einer bestimmten Klasse von Darstellungen[(i)] mit $\mathcal{U}$ vertauschen und die damit ein Analogon zu den Casimir-Operatoren im endlichdimensionalen Fall liefern. Die zentralen Reihen bilden natürlich wie die Casimir-Operatoren im endlichdimensionalen Fall einen Ring.
Ohne auf die Details einzugehen (dies würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen), sei bemerkt, daß insbesondere alle Darstellungen zu obiger Klasse gehören, in denen L_0 diagonalisierbar ist und die Realteile seiner Eigenwerte nach unten beschränkt sind. Ein

[(i)] nämlich solchen Darstellungen $\rho : \mathcal{U} \to gl(V)$, in denen es für jedes $v \in V$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\mathcal{U}_n.v = 0\ \forall n \leq -N$, und in denen V eine additive Basis aus Eigenvektoren von L_0 besitzt.

Beispiel für eine solche zentrale Reihe ist durch

$$F_0^0(h,c) = \exp \pi i \sqrt{\left(\left(13 - c + \sqrt{(c-1)(c-25)}\right)/12\right)((24h+1-c)/6)} \tag{3.8}$$

gegeben[(ii)]. Die übrigen Funktionen F_J^I sind dadurch eindeutig festgelegt.

3.1.3 L_0-Graduierung

Aus physikalischen Gründen sind nur solche Darstellungen interessant, in denen eine Graduierung nach den Eigenwerten von L_0 möglich ist, diese reell und nach unten beschränkt sind und die zugehörigen Unterräume endliche Dimension besitzen. Insbesondere wollen wir L_0 als Energieoperator (für minkowskische Theorien) bzw. als infinitesimale radiale Transfermatrix (für euklidische Theorien) auffassen, und andernfalls wäre keine sinnvolle Thermodynamik möglich. Aus Gründen, die später noch genauer erläutert werden, fordern wir aber nicht die Diagonalisierbarkeit von L_0, sondern beschränken uns auf die Forderung, daß L_0 eine Jordan-Zerlegung

$$L_0 = L_0^d + L_0^n \tag{3.9}$$

mit $[L_0^d, L_0^n] = 0$ besitzt, wobei L_0^d diagonalisierbar ist und L_0^n nilpotent auf den endlichdimensionalen Eigenräumen von L_0^d operiert. Man berechnet leicht, daß

$$(L_0 - h - k)^m L_k = L_k (L_0 - h)^m, \tag{3.10}$$

und damit folgt

$$[L_0^d, L_k] = k L_k,\ [L_0^n, L_k] = 0. \tag{3.11}$$

Bezeichne die Kategorie aller $\mathcal{L}$-Moduln, die obigen Bedingungen genügen, mit $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}$. $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}$ ist offensichtlich eine abelsche Kategorie und läßt sich in die Kategorie $\mathrm{Vec}_{\mathbb{C}}$ der $\mathbb{C}$-Vektorräume einbetten.
Sei nun $V \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}$ ein solcher $\mathcal{L}$-Modul (bzw. Darstellungsraum einer Darstellung, die obigen Bedingungen genügt). Dann gilt offenbar

$$V = \bigoplus_{h \geq h_{min}} \mathrm{Eigenraum}(L_0^d, h). \tag{3.12}$$

Wegen Gleichung (3.11) gilt dann

$$L_k : \mathrm{Eigenraum}(L_0^d, h) \to \mathrm{Eigenraum}(L_0^d, h+k). \tag{3.13}$$

Für unzerlegbare Darstellungen V gilt also

$$V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Eigenraum}(L_0^d, h_{min} + n). \tag{3.14}$$

Wir definieren nun $V_n := \mathrm{Eigenraum}(L_0^d, h_{min} + n)$. V_0 heißt **Tiefstgewichtsraum**, V_n allgemein **n-ter Level** von V.

[(ii)] Man bemerke die Ähnlichkeit zur Kac-Determinantenformel (3.25)

3.1.4 Charaktere

Definition 3.1.7 *Als Charakter eines unzerlegbaren $\mathcal{L}$-Moduls V definiert man*

$$\chi_V(\tau) := \mathrm{tr} e^{2\pi i\tau(L_0 - \frac{c}{24})}. \tag{3.15}$$

Mit der Abkürzung $q := e^{2\pi i\tau}$ folgt dann

$$\chi_V(q) = q^{-\frac{c}{24}} \sum_h q^h \dim \mathrm{Eigenraum}(L_0^d, h). \tag{3.16}$$

3.1.5 Filtrierung durch $\mathbf{L_0^n}$

Ist L_0^n auf V nicht nur auf den Eigenräumen von L_0^d, sondern auf ganz V nilpotent, so gibt es ein kleinstes $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$(L_0^n)^N.V = 0. \tag{3.17}$$

Offenbar ist es wegen Gleichung (3.11) hinreichend, aber nicht notwendig, daß der $\mathcal{L}$-Modul V als $\mathcal{U}$-Modul endlich erzeugt ist.
Damit hat man mit der Definition $\bar{V}^{(k)} := \ker((L_0^n|_V)^k)$ eine Filtrierung

$$V = \bar{V}^{(N)} \hookleftarrow \ldots \hookleftarrow \bar{V}^{(1)} \hookleftarrow \bar{V}^{(0)} = 0. \tag{3.18}$$

Die ganze Zahl N heißt **Nilpotenzlänge** von V, und auf den Faktormoduln $V^{(k)} := \bar{V}^{(k+1)}/\bar{V}^{(k)}$ operiert L_0 offensichtlich diagonal.
Falls L_0 *nicht* auf ganz V nilpotent ist (d.h. V hat Nilpotenzlänge ∞), so haben wir immerhin noch Untermoduln $\bar{V}^{(k)} := \ker((L_0^n|_V)^k)$ und Einbettungen

$$\bar{V}^{(1)} \hookrightarrow \bar{V}^{(2)} \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \bar{V}^{(\infty)} = V. \tag{3.19}$$

3.2 Tiefstgewichtsdarstellungen

Genau wie in der Darstellungstheorie endlichdimensionaler Lie-Algebren definiert man eine Tiefstgewichtsdarstellung als Darstellung, die einen zyklischen Vektor enthält, der (in $\mathrm{Vec}_{\mathbb{C}}$) den Tiefstgewichtsraum der Darstellung aufspannt.

Definition 3.2.1 *Sei V ein $\mathcal{L}$-Modul. $v \in V$ heißt* ***primär****, falls $\mathcal{U}^-.v = 0$.*

Definition 3.2.2 *Ein* ***$\mathcal{L}$-Tiefstgewichtsmodul*** *(bzw. eine* ***Tiefstgewichtsdarstellung (TGD)*** *von $\mathcal{L}$) ist ein $\mathcal{L}$-Modul V mit einem Vektor $v \in V$, so daß folgendes gilt:*

(i) *v ist primär.*

(ii) $C.v = cv,\ c \in \mathbb{C}$.

(iii) $L_0.v = hv,\ h \in \mathbb{C}$.

(iv) $\mathcal{U}.v = V$.

*v heißt **Tiefstgewichtsvektor**, h **Tiefstgewicht** und c wie zuvor zentrale Ladung der Darstellung.*

Sei nun V ein $\mathcal{L}$-Tiefstgewichtsmodul. Auf dem Dualraum V^* kann eine Darstellung durch

$$\left.\begin{array}{rl} (L_n\phi)(w) := & \phi(L_{-n}.w) \\ (C\phi)(w) := & \phi(C.w) \end{array}\right\} \forall \phi \in V^*, v \in V \tag{3.20}$$

definiert werden. Sei v ein Tiefstgewichtsvektor von V und $v^\dagger \in V^*$ gegeben durch $v^\dagger.v := 1$, $v^\dagger.w = 0 \forall w \in V_k, k > 0$. Dann ist $V^\dagger := \mathcal{U}.v^\dagger$ Tiefstgewichtsdarstellung zum Tiefstgewicht h mit Tiefstgewichtsvektor $v^\dagger$ und zentraler Ladung c und heißt die zu V *duale Darstellung*.

3.2.1 Verma-Moduln und irreduzible Tiefstgewichtsmoduln

Definition 3.2.3 *Ein $\mathcal{L}$-Tiefstgewichtsmodul V zum Tiefstgewicht h (und mit zentraler Ladung c) heißt **Verma-Modul**, falls er folgende universelle Eigenschaft besitzt: Für jeden $\mathcal{L}$-Tiefstgewichtsmodul W zum Tiefstgewicht h (mit zentraler Ladung c) existiert ein (bis auf skalare Vielfache) eindeutiger $\mathcal{L}$-Epimorphismus $\phi : V \to W$.*

Satz 3.2.4 *Der Verma-Modul $V(h,c)$ zum Tiefstgewicht h und mit zentraler Ladung c existiert und ist (bis auf $\mathcal{L}$-Isomorphie) eindeutig.*

Beweis: Die Eindeutigkeit ist wegen der universellen Eigenschaft klar. Die Existenz zeigen wir durch Konstruktion: Die universelle Einhüllende $\mathcal{U}$ ist via Linksmultiplikation ein $\mathcal{L}$-Modul. Sei $I \subset \mathcal{U}$ das Linksideal, das von $\{L_0 - h, C - c\} \cup \mathcal{U}^-$ erzeugt wird. Dann ist $\mathcal{U}/I$ offenbar ein Tiefstgewichtsmodul mit Tiefstgewicht h, zentraler Ladung c und Tiefstgewichtsvektor $1 + I$. Wegen der universellen Eigenschaft von $\mathcal{U}$ ist klar, daß dies der gesuchte Verma-Modul ist.

q.e.d.

Korollar 3.2.5 *Eine Basis von $V(h,c)$ ist gegeben durch*

$$\left\{L_{n_1}^{i_1} \ldots L_{n_k}^{i_k}.v;\ k, i_j \in \mathbb{N}^0, n_j \in \mathbb{N}, n_1 > n_2 > \ldots > n_k\right\}, \tag{3.21}$$

wobei v ein Tiefstgewichtsvektor von $V(h,c)$ ist.

Beweis: klar. q.e.d.

Korollar 3.2.6 *Teilt man aus einem Verma-Modul $V(h,c)$ den maximalen echten Untermodul heraus (dieser ist gerade die Summe aller echten Untermoduln), so erhält man den (offensichtlich ebenfalls bis auf Isomorphie eindeutigen) **irreduziblen** oder auch **einfachen** $\mathcal{L}$-Tiefstgewichtsmodul $M(h,c)$ zum Tiefstgewicht h (mit zentraler Ladung c).*

Definition 3.2.7 *Ist ein Verma-Modul* nicht *irreduzibel, so heißt er **degeneriert**.*

3.2.2 Shapovalov-Form und Kac-Determinante

Sei v ein Tiefstgewichtsvektor in $V(h,c)$. Dann ist die Abbildung

$$\phi : \left\{ \begin{array}{lll} V(h,c) & \to & V(h,c)^* \\ u.v & \mapsto & u.v^\dagger \ \forall u \in \mathcal{U}^+ \end{array} \right. \tag{3.22}$$

offenbar ein $\mathcal{L}$-Homomorphismus. Die natürliche Paarung zwischen $V(h,c)$ und $V(h,c)^*$ liefert dann eine symmetrische Bilinearform $\langle .,. \rangle$ auf $V(h,c)$, die sogenannte **Shapovalov-Form**.

Beweis: Zu zeigen ist nur die Symmetrie. Mit

$$(L_{n_1}^{i_1} \dots L_{n_k}^{i_k})^\dagger := L_{-n_k}^{i_k} \dots L_{-n_1}^{i_1} \tag{3.23}$$

gilt $\forall u, \tilde{u} \in \mathcal{U}^+$: $(\tilde{u}^\dagger u.v^\dagger)v = \langle u.v, \tilde{u}.v \rangle \overset{!}{=} \langle \tilde{u}.v, u.v \rangle = v^\dagger(\tilde{u}^\dagger u.v)$. Es genügt also zu zeigen, daß $\forall u \in \mathcal{U} : \langle u.v, v \rangle = \langle v, u.v \rangle$. Da v primär ist, ist dies für alle Monome u klar, die nicht Polynome in L_0 und C sind. Für diese beiden Elemente gilt es aber per definitionem.

q.e.d.

Bemerkung 3.2.8 *Die oben definierte Shapovalov-Form läßt sich leicht in eine bezüglich der Involution $L_n \mapsto L_{-n}$ kontravariante Sesquilinearform umwandeln, indem man noch die Involution*

$$\left\{ \begin{array}{lll} V^* & \to & \overline{V^*} \\ \sum \alpha_I m^I & \mapsto & \sum \alpha_I^* m^I \end{array} \right. \tag{3.24}$$

zwischenfügt, wobei $\alpha_I \in \mathbb{C}$, m^I die Elemente der Basis aus Corollar 3.2.5 und '' komplexe Konjugation bedeuten. Die Matrizen dieser Sesquilinearform (eingeschränkt auf die einzelnen Levels) sind natürlich dieselben wie für die ursprüngliche Bilinearform.*

Lemma 3.2.9 *Das Radikal $\mathfrak{Rad}(\langle .,. \rangle)$ ist genau der maximale echte Untermodul M_{max} von $V(h,c)$.*

Beweis: Sei $w \in M_{max}$. Dann gilt offensichtlich $\nexists u \in \mathcal{U} : u.w = v$, und damit hat man $w \in \mathfrak{Rad}(\langle .,. \rangle)$. Sei nun andererseits $w \in \mathfrak{Rad}(\langle .,. \rangle)$. Wieder hat man $\nexists u \in \mathcal{U} : u.w = v$ und damit $U.w \subset M_{max}$.

q.e.d.

Aus Lemma 3.2.9 folgt, daß die Abbildung ϕ aus (3.22) genau die Faktorabbildung $V(h,c) \to M(h,c)$ ist. Sie ist also in analoger Form für alle Tiefstgewichtsmoduln ein $\mathcal{L}$-Homomorphismus und erlaubt daher die Definition der Shapovalov-Form für alle Tiefstgewichtsmoduln. Insbesondere ist diese Form auf $M(h,c)$ nicht entartet.
Man sieht leicht, daß $\langle V_n, V_m \rangle = 0$ für $m \neq n$. Daher macht es Sinn, $\langle .,. \rangle$ auf die einzelnen Levels V_n einzuschränken, und aus der Determinante der Matrix von $\langle .,. \rangle_n$ kann man dann leicht ablesen, für welche n der maximale Untermodul von V einen nichttrivialen Schnitt mit V_n besitzt. Nun ist es V.G. Kac gelungen, eine explizite Formel für diese Determinante anzugeben [38], die später von B.L. Feigin und D.B. Fuks bewiesen wurde [18]:

Satz 3.2.10 *Die Determinante* $\det_n(h,c)$ *der Matrix von* $\langle .,.\rangle_n$ *auf* $V(h,c)$ *ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} det_n(h,c) &= K_n \prod_{\substack{r,s\in\mathbb{N}\\ rs\leq n}} (h-h_{c;r,s})^{p(n-rs)} \\ h_{c;r,s} &= \tfrac{1}{48}\Big((13-c)(r^2+s^2)+\sqrt{(c-1)(c-25)}(r^2-s^2)-24rs-2+2c\Big) \end{aligned} \tag{3.25}$$

Dabei sind die $\mathrm{p}(n)$ *die* ***Partitionen*** *von* n *mit erzeugender Funktion*

$$\left(\prod_{n\in\mathbb{N}^0}(1-q^n)\right)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}^0}\mathrm{p}(n)q^n \tag{3.26}$$

und die K_n *nichtverschwindende Konstanten.*

3.2.3 Einbettungsstruktur

Falls das Radikal der Shapovalov-Form auf einem Verma-Modul nur aus der 0 besteht, so ist dieser Verma-Modul bereits irreduzibel. Da sich der maximale Untermodul eines Verma-Moduls offensichtlich immer als Summe von Verma-Moduln schreiben läßt, genügt im anderen Falle die Kenntnis, welche anderen Verma-Moduln in den betrachteten Modul eingebettet werden können$^{(iii)}$. Zur Beantwortung dieser Frage parametrisieren wir die zentrale Ladung durch

$$c = 1-24k, \tag{3.27}$$

was für die Gewichte

$$h_{r,s} = -k+\frac{1}{4}\Big((2k+1)(r^2+s^2)+2\sqrt{k(k+1)}(r^2-s^2)-2rs\Big) \tag{3.28}$$

zur Folge hat. Mit der Konvention $V_{r,s} = V(h_{r,s},c)$ können nach [19, 20] die folgenden Fälle unterschieden werden:

Satz 3.2.11 *Die degenerierten Darstellungen von* $\mathcal{L}$ *zerfallen genau in die folgenden durch* k*,* $k' := \sqrt{k(k+1)}$ *gegebenen Klassen:*

(i) $k,k'\in\mathbb{Q}$*. Hier hat* k *die Form* $\frac{(p-q)^2}{4pq}$ *mit* $p,q\in\mathbb{N}$ *teilerfremd, also* $c = 1-6\frac{(p-q)^2}{pq}$*. Außerdem ist* $h_{r,s}\in\mathbb{Q}\ \forall r,s\in\mathbb{Z}$*. Man unterscheidet drei Untervarianten:*

- $q>p>1$ *(Minimale Modelle). Es ist* $h_{r,s} = \frac{(pr-qs)^2-(p-q)^2}{4pq}$*. Auf den Verma-Moduln* $V_{r,s}$ *mit* $1\leq r\leq q-1$*,* $1\leq s\leq p-1$ *bauen folgende Einbettungsgitter auf:*

$$V_{r,s}\ \begin{array}{ccccccccc} \swarrow & V_{-r,s} & \leftarrow & V_{r+2q,s} & \leftarrow & V_{-r-2q,s} & \leftarrow & V_{r+4q,s} & \cdots \\ & & \times & & \times & & \times & & \\ \nwarrow & V_{2q-r,s} & \leftarrow & V_{r-2q,s} & \leftarrow & V_{4q-r,s} & \leftarrow & V_{r-4q,s} & \cdots \end{array} \tag{3.29}$$

$^{(iii)}$Für einen gegebenen Verma-Modul $V(h,c)$ ist die Frage, ob er in einen anderen eingebettet werden kann, im übrigen äquivalent zu der Frage, ob der Verma-Modul $V(26-c,1-h)$ echte Untermoduln besitzt [19, 20].

- *$q > p = 1$ (Logarithmische Modelle). Hier gilt $h_{r,s} = \frac{(r-qs)^2-(q-1)^2}{4q}$. Wie man sieht, wird diese Menge schon von den Gewichten der Form $h_{r,1}$ ausgeschöpft. Auf den Verma-Moduln $V_{r,1}$ mit $r \in \{1, \ldots, q-1, q, 2q\}$ bauen folgende Einbettungsketten auf:*

$$\begin{array}{lllllllllll} V_{r,1} & = & V_{2q-r,1} & \leftarrow & V_{2q+r,1} & \leftarrow & V_{4q-r,1} & \leftarrow & V_{4q+r,1} & \cdots & (r \notin q\mathbb{N}) \\ V_{r,1} & \leftarrow & V_{r+2q,1} & \leftarrow & V_{r+4q,1} & \leftarrow & V_{r+6q,1} & \leftarrow & V_{r+8q,1} & \cdots & (r = q, 2q) \end{array} \tag{3.30}$$

- *$p = q$, d.h. $c = 1$ (Gauß'sche Modelle). Die Einbettungsstruktur ist für alle degenerierten Darstellungen durch $V_{r,s} \leftarrow V_{-r,s}$ gegeben.*

(ii) $k \in \mathbb{Q}$, $k' \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$ (Parabolische Modelle). c ist weiterhin rational, von den Gewichten sind genau $h_{r,\pm r} \in \mathbb{Q}\ \forall r \in \mathbb{Z}$. Die Einbettungsstruktur ist für alle degenerierten Darstellungen $V_{r,s} \leftarrow V_{-r,s}$.

(iii) $k \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Q}$. Weder c noch die Gewichte (bis auf $h_{1,1} = 0$) sind rational. Wieder ist die Einbettungsstruktur $V_{r,s} \leftarrow V_{-r,s}$.

3.2.4 Charaktere

Die Charaktere von Verma-Moduln sind leicht zu berechnen. Durch Einsetzen in die Definition erhält man

$$\chi_{V(h,c)} = q^{h-\frac{c}{24}} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{p}(k) q^k. \tag{3.31}$$

Unter Verwendung der Dedekind'schen η-Funktion $\eta(q) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n\in\mathbb{N}^0}(1-q^n)$ schreibt sich dies als

$$\chi_{V(h,c)} = \frac{q^{\frac{1-c}{24}}}{\eta(q)} q^h. \tag{3.32}$$

Handelt es sich nicht um degenerierte Darstellungen, so sind damit natürlich auch die Charaktere der entsprechenden irreduziblen $\mathcal{L}$-Moduln gegeben. Andernfalls können die Charaktere $\chi_{r,s}$ der irreduziblen Tiefstgewichtsmoduln $M(h_{r,s}, c)$ leicht aus den Einbettungsstrukturen in Satz 3.2.11 abgelesen werden.
Für die minimalen Modelle erhält man so z.B. mit $1 \leq r \leq q-1$, $1 \leq s \leq p-1$ die sogenannten *Rocha-Caridi-Charaktere* [51, 52]

$$\chi_{r,s} = \frac{q^{\frac{1-c}{24}}}{\eta(q)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(q^{h_{r+2qk,s}} - q^{h_{-r-2qk,s}} \right). \tag{3.33}$$

Numeriert man für die logarithmischen Modelle die Gewichte in den Einbettungsketten (3.30) von links durch, so erhält man hier die Charaktere der $M(h_i, c)$ durch

$$\chi_i = \frac{q^{\frac{1-c}{24}}}{\eta(q)} \left(q^{h_i} - q^{h_{i+1}} \right), \tag{3.34}$$

und in den übrigen Fällen sind die Charaktere der $M(h_{c;r,s}, c)$ einfach durch

$$\chi_{r,s} = \frac{q^{\frac{1-c}{24}}}{\eta(q)} \left(q^{h_{r,s}} - q^{h_{-r,s}} \right) \tag{3.35}$$

gegeben.

3.2.5 Minimale Modelle

Ihre besondere Bedeutung erhalten die minimalen Modelle dadurch, daß die irreduziblen Tiefstgewichtsdarstellungen $M_{r,s}$ zu den genannten Tiefstgewichten $h_{r,s} = \frac{(pr-qs)^2-(p-q)^2}{4pq}$, $1 \leq r \leq q-1$, $1 \leq s \leq p-1$, unter Fusion (siehe Kapitel 4) mit der Formel [3]

$$M_{r,s} \star M_{r',s'} = \sum_{\substack{n=|r-s|+1 \\ n+r+s \ \ in 2\mathbb{N}+1}}^{\min(q-1,r+s-1)} \sum_{\substack{n'=|r'-s'|+1 \\ n'+r'+s' \ \ in 2\mathbb{N}+1}}^{\min(p-1,r'+s'-1)} M_{n,n'} \tag{3.36}$$

schließen. Solche Theorien, in denen bereits ein endlicher Satz von irreduziblen Tiefstgewichtsdarstellungen der Symmetriealgebra (hier die reine Virasoro-Algebra) unter Fusion schließt, heißen **rational**.

Auf Charakter-Ebene spiegelt sich die Rationalität darin wieder, daß die Charaktere der irreduziblen Tiefstgewichtsdarstellungen eine endlichdimensionale Darstellung der Modul-Gruppe $SL(2,\mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$ bilden (siehe auch Abschnitt 5.1).
Wie D. Friedan et al. [27, 28] zeigten, liefern genau die minimalen Modelle mit $q = p+1 > 2$ unitäre Theorien (siehe Abschnitt 3.3).

3.3 Unitäre Darstellungen

Der Name „unitäre Darstellung“ ist etwas irreführend, da er nicht Unitarität der Bilder der Elemente der Algebra unter der Darstellung fordert. Betrachtet man vielmehr Symmetrietransformationen einer Theorie, so ist eine unitäre Theorie eine solche, in der die Elemente der Symmetriegruppe durch unitäre Transformationen dargestellt sind. Dies entspricht auf der Ebene der entsprechenden Lie-Algebra einer Darstellung durch (anti-) hermitesche[(iv)] Operatoren. Da wir Darstellungen der Komplexifizierung der Algebra betrachten, müssen diese dann allgemein durch *normale* Operatoren dargestellt sein.
In der Teilchenphysik bedeutet Unitarität Wahrscheinlichkeitserhaltung und ist somit wichtiger Bestandteil der Theorie. Alle vorkommenden Darstellungen müssen daher vollständig reduzibel sein. Aus den zuvor genannten Gründen sind also alle Darstellungen direkte Summen irreduzibler Tiefstgewichtsdarstellungen. Für diese Darstellungen ist aber die in Abschnitt 3.2.2 definierte kontravariante Sesquilinearform nicht entartet, und offenbar sind L_0 sowie die Kombinationen $L_n + L_{-n}$ sowie $i(L_n - L_{-n})$ bezüglich dieser Form hermitesch. Als *unitäre Tiefstgewichtsdarstellungen* wollen wir also solche bezeichnen, in

[(iv)] je nachdem, ob man $G = e^L$ oder $G = e^{iL}$ schreibt denen diese Form positiv definit ist. *Unitäre Theorien* sind dann solche, in denen der Hilbertraum direkte Summe unitärer Tiefstgewichtsdarstellungen ist.

Da wir uns im folgenden nicht mit diesem (relativ einfachen) Fall beschäftigen, sei nur folgendes noch bemerkt: Notwendige Bedingung für die Unitarität einer irreduziblen TGD ist offensichtlich $c \geq 0$ und auch $h \geq 0$ (sonst ist schon $\langle L_1.v, L_1.v\rangle = 2\langle v, L_0.v\rangle = 2h < 0$). Dies ist im allgemeinen jedoch nicht hinreichend. Für $c < 1$ erhält man aus der Forderung nach Unitarität genau die unitäre Serie der minimalen Modelle (3.2.5).

3.4 Nichtunitäre Darstellungen

3.4.1 Allgemeines

Obwohl die Darstellungen im nichtunitären Fall i.a. erheblich komplizierter sind, können wir ihre Struktur doch in weiten Teilen auf die von Tiefstgewichtsmoduln zurückführen. Neben der Filtrierung durch den nilpotenten Anteil von L_0 (3.1.5) wollen wir noch zwei weitere Filtrierungen einführen.
Für jeden $\mathcal{L}$-Modul $M \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}$ hat man die Einbettungskette

$$M =: M^0 \hookleftarrow M^1 \hookleftarrow M^2 \hookleftarrow \dots \tag{3.37}$$

wobei M^{k+1} jeweils ein maximaler echter Untermodul von M^k ist. Die Faktormoduln $V^k := M^k/M^{k+1}$ sind dann offenbar irreduzibel.

Definition 3.4.1 *Bricht die Kette (3.37) ab, d.h.* $\exists n \in \mathbb{N} : \; M^n = 0$*, so heißt das kleinste* $n \in \mathbb{N}$ *mit dieser Eigenschaft* ***Länge*** *des Moduls. Andernfalls ist die Länge* ∞*.*

Lemma 3.4.2 *Jeder* $\mathcal{L}$*-Modul* $M \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}$ *besitzt einen Untermodul, der Tiefstgewichtsmodul ist.*

Beweis: Sei o.B.d.A. M unzerlegbar. Sei ferner M_0 der Tiefstgewichtsraum von M. Dann besitzt L_0 mindestens einen Eigenvektor $v \in M_0$. $\mathcal{U}.v = \mathcal{U}^+.v \subset M$ ist folglich Tiefstgewichtsmodul.

q.e.d.

Korollar 3.4.3 *Jeder irreduzible* $\mathcal{L}$*-Modul* $M \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}$ *ist Tiefstgewichtsmodul.*

Da schon die Länge vieler Verma-Moduln ∞ ist, benötigen wir noch ein weiteres, in gewissem Sinne „gröberes" Maß für die Komplexität einer Darstellung. Hierzu benutzt man Lemma 3.4.2 und betrachtet Sequenzen der Form

$$M =: N^0 \twoheadrightarrow N^1 \twoheadrightarrow N^2 \twoheadrightarrow \dots, \tag{3.38}$$

wobei jeweils $N^k = N^{k-1}/V^{k-1}$ und die $V^k \subset M^k$ Tiefstgewichtsmoduln sind. Üblicherweise gibt es natürlich beliebig viele Sequenzen dieser Form; man kann aber dennoch definieren

Definition 3.4.4 *Das kleinste $n \in \mathbb{N}$, für das es eine Sequenz der Form (3.38) mit $M^n = 0$ gibt, heißt **Tiefstgewichtslänge** von M. Erfüllt kein n diese Bedingung, so ist die Tiefstgewichtslänge ∞.*

Wir werden uns im folgenden auf die sogenannten *logarithmischen Modelle* mit zentraler Ladung $c_{1,q}$, $q \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ (siehe Satz 3.2.11) beschränken. Dies hat drei Gründe:

- Zum einen hat man bei diesen Theorien Türme von Gewichten mit ganzzahligen Abständen, so daß nach V. Gurarie [34] die Einführung von Darstellungen mit Nilpotenzlänge > 1 notwendig ist, um die Konsistenz von OPE und konformen Blöcken sicherzustellen (siehe Abschnitt 2.6). Diese Notwendigkeit zeigt sich auch, wenn man das Fusionsprodukt (siehe Kapitel 4) zweier Tiefstgewichtsdarstellungen berechnet.
- Zum zweiten finden Theorien mit diesen zentralen Ladungen Anwendung in verschiedenen physikalisch interessanten Bereichen, wie z.B. dem fraktionalen Quanten-Hall-Effekt [55], zweidimensionalen Polymersystemen und 2D random walks [17, 53, 14] sowie, etwas abstrakter, dem Phänomen der vereinheitlichenden $\mathcal{W}$-Algebren [5, 6, 8].
- Der dritte Grund ist ein technischer: Die relativ einfache Einbettungsstruktur der Verma-Moduln (Gleichung (3.30)) im Vergleich z.B. zu den minimalen Modellen vereinfacht das Studium von Darstellungen mit Nilpotenzlänge > 1 erheblich.

3.4.2 Jordan-Tiefstgewichtsmoduln

Zunächst wenden wir uns dem einfachsten Fall von Darstellungen mit Nilpotenzlänge > 1 zu, der Erweiterung eines Tiefstgewichtsmoduls um n Kopien seiner selbst mit Nilpotenzlänge n. Analog zu den Tiefstgewichtsdarstellungen definieren wir

Definition 3.4.5 *Ein $\mathcal{L}$-Modul M heißt **Jordan-Tiefstgewichtsmodul (JTGM)** vom Rang k, falls es k linear unabhängige Vektoren $v^{(0)}, \dots, v^{(k-1)} \in M$ gibt, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $C.v = c\, v \qquad \forall v \in M$

(ii) $L_0.v^{(n)} = h\, v^{(n)} + v^{(n-1)} \;\; \forall n \in \{1, \dots, k-1\} \quad \textit{und} \quad L_0.v^{(0)} = h\, v^{(0)}$

(iii) $L_{-n}.v^{(m)} = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, m \in \{0, \dots, k-1\}$

(iv) $M = \mathcal{U}.v^{(k-1)}$

*h heißt **Tiefstgewicht** des Moduls und die $v^{(n)}$ seine **Tiefstgewichtsvektoren**. Im Fall $k = 2$ heißt $v^{(1)}$ **oberer** und $v^{(0)}$ **unterer** Tiefstgewichtsvektor.*

Im folgenden beschränken wir uns der Einfachheit halber auf Darstellungen mit Nilpotenzlänge 2. Die meisten der folgenden Resultate gelten analog für höhere Nilpotenzlängen, die notwendigen Modifikationen sind in den meisten Fällen offensichtlich.

Definition 3.4.6 *Ein* ***Jordan-Verma-Modul (JVM)*** *(zum Tiefstgewicht h) ist ein JTGM V mit Tiefstgewicht h, der die folgende universelle Eigenschaft besitzt: Für jeden JTGM M mit Tiefstgewicht h existiert ein (bis auf skalare Vielfache) eindeutiger $\mathcal{L}$-Epimorphismus $\phi : V \to M$.*

Satz 3.4.7 *Für alle $h \in \mathbb{C}$ existiert ein (bis auf $\mathcal{L}$-Isomorphie eindeutiger) JVM zum Tiefstgewicht h.*

Beweis: Mit der universellen Eigenschaft ist die Eindeutigkeit klar. Die Existenz beweisen wir wie zuvor durch Konstruktion:

Sei $\tilde{V} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ via Linksmultiplikation ein $\mathcal{L}$-Modul. Sei ferner $M \subset \tilde{V}$ das Linksideal, das von $\{(L_0 - h, -1), (0, L_0 - h), (0, L_{-n}), (L_{-n}, 0); n \in \mathbb{N}\}$ aufgespannt wird. Offenbar ist $V := \tilde{V}/M$ der gesuchte JVM (mit Tiefstgewichtsvektoren $(1, 0)$ und $(0, 1)$).

q.e.d.

Definition 3.4.8 *Sei M ein JTGM (Rang 2). Dann heißt $M^{(0)} := \ker L_0^n$* ***unterer*** *und $M^{(1)} := M/M^{(0)}$* ***oberer Modul*** *von M.*

Korollar 3.4.9 *Seien M, $M^{(0)}$ und $M^{(1)}$ wie oben. Dann gilt (in $\mathrm{Vec}_{\mathbb{C}}$) $M = M^{(0)} \oplus M^{(1)}$. Falls M ein JVM ist, so sind $M^{(0)}$ und $M^{(1)}$ Verma-Moduln.*

Beweis: siehe Konstruktion des JVM im Beweis von Satz 3.4.7. q.e.d.

Satz 3.4.10 *Sei V der JVM mit Tiefstgewicht h und Tiefstgewichtsvektoren $v^{(0)}$ und $v^{(1)}$. Dann ist eine Basis von V gegeben durch*

$$\left\{ L_{k_n} \ldots L_{k_1}.v^{(j)}; n \in \mathbb{N}^0, j \in \{0, 1\}, 0 < k_1 \leq \ldots \leq k_n \right\}. \tag{3.39}$$

Beweis: Nach Corollar 3.2.5 ist $\{L_{k_n} \ldots L_{k_1}.v^{(0)}; n \in \mathbb{N}^0, 0 < k_1 \leq \ldots \leq k_n\}$ eine Basis von $V^{(0)}$, während $\{L_{k_n} \ldots L_{k_1}.(v^{(1)} + V^{(0)}); n \in \mathbb{N}^0, 0 < k_1 \leq \ldots \leq k_n\}$ eine Basis von $V^{(1)}$ ist. Mit $V = V^{(0)} \oplus V^{(1)}$ (Corollar 3.4.9) folgt die Behauptung.

q.e.d.

3.4.3 Shapovalov-Form und minimale JTGMn

Sei V ein JVM mit Tiefstgewicht h, zentraler Ladung c und Tiefstgewichtsvektoren $v^{(0)}, \ldots, v^{(k-1)}$. Wie in Abschnitt 3.2 wird der Dualraum V^* durch

$$\left. \begin{array}{ll} (L_n\phi)(w) := & \phi(L_{-n}.w) \\ (C\phi)(w) := & \phi(C.w) \end{array} \right\} \forall \phi \in V^*, v \in V \tag{3.40}$$

zu einem $\mathcal{L}$-Modul. Sei $(v^{(n)})^\dagger.v^{(m)} := \delta_{m,n}$, $(v^{(n)})^\dagger.w = 0 \forall w \in V_k, k > 0$. Es gilt

$$(L_0.(v^{(n)})^\dagger).v^{(m)} = (v^{(n)})^\dagger.L_0.v^{(m)} = h\delta_{n,m} + \delta_{n,m-1} = (h(v^{(n)})^\dagger + (v^{(n+1)})^\dagger).v^{(m)}. \tag{3.41}$$

Damit ist offenbar $V^\dagger := \mathcal{U}.(v^{(0)})^\dagger$ Jordan-Tiefstgewichtsmodul zum Tiefstgewicht h mit Tiefstgewichtsvektoren

$$\left\{v^*_{(n)} := (v^{(k-1-n)})^\dagger;\ n \in \{0, \ldots, k-1\}\right\} \tag{3.42}$$

und zentraler Ladung c. Der $\mathcal{L}$-Homomorphismus

$$\phi : \left\{ \begin{array}{lll} V & \rightarrow & V^\dagger \\ u.v^{k-1} & \mapsto & u.v^*_{(k-1)} \ \ \forall u \in \mathcal{U}^+ \end{array} \right. \tag{3.43}$$

zusammen mit der natürlichen Paarung zwischen V und V^* liefert dann wie in Abschnitt 3.2.2 die symmetrische Shapovalov-Form $\langle .,. \rangle$ auf V. Startet man umgekehrt mit der Forderung nach Symmetrie und Kontravarianz bezüglich der Involution $L_n \mapsto L_{-n}$, so wird man, wie man leicht explizit nachrechnet, auf dieselbe Form geführt, wobei die Freiheit in der Wahl der Matrix von $\langle .,. \rangle_0$ genau der immer mögliche allgemeinste Basiswechsel

$$v^{(n)} \mapsto \sum_{j=0}^{n} \alpha_j v^{(n-j)};\ \alpha_j \in \mathbb{C}, \alpha_0 \neq 0 \tag{3.44}$$

ist, der ein System von Tiefstgewichtsvektoren auf ein anderes abbildet.
Das Radikal von $\langle .,. \rangle$ ist nun offensichtlich *nicht* mehr der maximale echte Untermodul von V. In der Tat ist der Quotient eines JVMs durch seinen maximalen echten Untermodul relativ uninteressant, da er nach Lemma 3.4.3 genau der irreduzible $\mathcal{L}$-Tiefstgewichtsmodul zum Tiefstgewicht h ist. Als interessanteres Analogon zu maximalen echten Untermoduln und irreduziblen Faktormoduln definieren wir

Definition 3.4.11 *Sei M ein JTGM mit Tiefstgewicht h. Ein Untermodul $I \subset M$ heißt (die Nilpotenzlänge*[(v)]*)* ***erhaltender*** *Untermodul, falls $I \cap M_0 = 0$*[(vi)]*. Ein erhaltender Untermodul I heißt* ***maximal****, falls für jeden erhaltenden Untermodul $J \subset M :\ J \subseteq I$.*

Definition 3.4.12 *Ein JTGM heißt* ***minimal****, falls er keinen erhaltenden Untermodul besitzt.*

Korollar 3.4.13 *Der minimale JTGM zu gegebenem Tiefstgewicht h existiert und ist bis auf $\mathcal{L}$-Isomorphie eindeutig. Er ist gegeben durch $M_{min} := V/I_{max}$, wobei V der JVM zum Tiefstgewicht h und I_{max} sein maximaler erhaltender Untermodul ist.*

Man sieht leicht, daß das Radikal der Shapovalov-Form auf einem gegebenen JVM gerade dessen maximaler erhaltender Untermodul ist. Mit der universellen Eigenschaft ist klar, daß jeder JTGM mit Tiefstgewicht h isomorph zu einem Faktormodul V/I ist, wobei V der JVM zum Tiefstgewicht h und I ein erhaltender Untermodul ist. Damit ist klar, daß die Shapovalov-Form für jeden JTGM auf die oben gegebene Weise zu definieren und ihr

[(v)] Gehört einer der Tiefstgewichtsvektoren von M zu I, so ist $M^{(0)} \subset I$, was bedeutet, daß M/I geringere Nilpotenzlänge hat als M.
[(vi)] Zur Erinnerung: M_0 ist der 0-te Level bzw. Tiefstgewichtsraum von M.

Radikal auch jeweils der maximale erhaltende Untermodul ist. Daraus folgt natürlich, daß die Shapovalov-Form auf einem minimalen JTGM nicht entartet ist.
Leider sieht man genauso leicht, daß die Matrix A_n der Einschränkung $\langle .,. \rangle_n$ der Shapovalov-Form auf den n-ten Level des JVM V zum Tiefstgewicht h gerade durch

$$A_n = \begin{pmatrix} \tilde{A}_n & * \\ 0 & \tilde{A}_n \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

gegeben ist, wobei $\tilde{A}_n$ die Matrix der Einschränkung der Shapovalov-Form auf den n-ten Level des Verma-Moduls zum Tiefstgewicht h ist. Ihre Determinante ist damit eine Potenz der Determinante von $\tilde{A}_n$ und liefert so keine neue Information über die möglichen erhaltenden Untermoduln von V. Dies war allerdings zu erwarten, da ohnehin alle echten Untermoduln von $V^{(0)}$ auch Untermoduln von V sind. Um also alle möglichen erhaltenden Untermoduln von V zu bestimmen, müssen wir andere Mittel als die Shapovalov-Form zu Hilfe ziehen.

3.4.4 Untermoduln

Der Einfachheit halber beschränken wir uns wieder auf den Fall der Nilpotenzlänge 2 bei $c = c_{1,q}$. Außerdem gilt

Lemma 3.4.14 *Sei M der JVM zum Tiefstgewicht h mit $h \neq h_{r,s}$ $\forall r, s \in \mathbb{N}$ (siehe Satz 3.2.11). Dann besitzt M keine erhaltenden Untermoduln.*

Beweis: Angenommen, $J \subset M$ sei erhaltender Untermodul. Dann sind offensichtlich $J^{(0)} := J \cap M^{(0)}$ und $J^{(1)} := J/J^{(0)}$ Untermoduln von $M^{(0)}$ bzw. $M^{(1)}$. Da $h \neq h_{r,s}$ $\forall r, s \in \mathbb{N}$, besitzen diese aber keine echten Untermoduln, was im Widerspruch zur Annahme steht, J sei erhaltend.

q.e.d.

Lemma 3.4.15 *Sei M der JVM zum Tiefstgewicht $h_{r,s}, r, s \in \mathbb{N}$, und $J \subset M$ ein Untermodul. $J^{(0)} := J \cap M^{(0)}$ und $J^{(1)} := J/M^{(0)}$ sind wie in Lemma 3.4.14 Untermoduln von $M^{(0)}$ bzw. $M^{(1)}$. Sei ferner $V^{\infty} := 0$ und $V(h, c_{1,q}) =: V^1 \leftarrow V^2 \leftarrow V^3 \leftarrow V^4 \ldots$ die Einbettungskette von Verma-Moduln gemäß Satz 3.2.11. Dann gilt $J^{(1)} = V^n$ und $J^{(0)} = V^m$ mit $n, m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

Beweis: siehe Satz 3.2.11.

q.e.d.

Lemma 3.4.16 *Seien M, J, $J^{(1)} = V^n$ und $J^{(0)} = V^m$ wie in Lemma 3.4.15. Dann gilt $n \geq m$. Falls J ein echter Untermodul ist, gilt $n > 1$. Ist J erhaltend, dann gilt $m > 1$.*

Beweis: Sei $v^{(1)} + J^{(0)}$, $v^{(1)} \in J$, Tiefstgewichtsvektor von $J^{(1)}$. Sei h_k das Tiefstgewicht von V^k. Trivialerweise gilt $k < l \;\Leftrightarrow\; h_k < h_l$. Damit gilt $0 \neq (L_0 - h_n).v^{(1)} \in M_{h_n - h} \;\Rightarrow\; m \leq n$. Der Rest ist klar.

q.e.d.

Die Bedingungen, die ein Untermodul nach Lemma 3.4.16 erfüllen muß, sind zwar notwendig, im allgemeinen aber nicht hinreichend für seine Existenz. Dies wird schnell klar, wenn man folgende Beispiele betrachtet:

Beispiel 3.4.17 *Sei* $c = c_{1,q} = 1 - 6\frac{(q-1)^2}{q}$, $q \in \{2, 3, \ldots\}$, *und* V *der JVM mit Tiefstgewicht* 0 *und Tiefstgewichtsvektoren* $v^{(0)}, v^{(1)}$. *Sei* J *sein maximaler erhaltender Untermodul. Dann ist offenbar* $J^{(0)} = V^2$ *der Verma-Modul mit Tiefstgewicht 1. Wir werden jetzt zeigen, daß* $J^{(1)} = V^n$ *mit* $n > 2$. *Angenommen,* $J^{(1)} = V^2$ *mit Tiefstgewichtsvektor* $L_1.v^{(1)} + J^{(0)}$. *Man berechnet*

$$\begin{aligned} L_{-1}.(L_1.v^{(1)} + \alpha L_1.v^{(0)}) &= [L_{-1}, L_1].(v^{(1)} + \alpha v^{(0)}) \\ &= 2L_0.(v^{(1)} + \alpha v^{(0)}) \\ &= 2v^{(0)}. \end{aligned}$$

Es folgt, daß $J^{(0)} = V^{(0)}$, *was im Widerspruch dazu steht,* J *sei erhaltend.*

Beispiel 3.4.18 *Sei jetzt* $q = 2$ $(c = -2)$. *Wir zeigen jetzt* $J^{(1)} = V^3$*: Sei*

$$w := (2L_2L_1 - L_1^3).v^{(1)} - \tilde{w}, \quad \tilde{w} \in V_3^{(0)}$$

In $V/J^{(0)}$ *berechnet man leicht (*$[w]$ *bezeichne die Restklasse von* w*):*

$$L_0.[w] = 3[w].$$

Das Gleichungssystem

$$L_{-k}.[w] = 0, \qquad k \in \{1, 2, 3\}$$

wird eindeutig von

$$[\tilde{w}] = [L_3.v^{(0)}]$$

gelöst. Außerdem berechnet man

$$L_{-2}.w = -15L_1.v^{(0)}.$$

Damit gilt

$$J = \mathcal{U}.w, \quad J^{(0)} = V^2 \quad \text{und} \quad J^{(1)} = V^3.$$

J in Beispiel 3.4.18 ist offensichtlich weder ein JTGM noch ein Tiefstgewichtsmodul, noch die (in $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}$) direkte Summe von solchen. Wir werden also dazu geführt, eine etwas größere Klasse von $\mathcal{L}$-Moduln zu betrachten, bei denen eine nichttriviale Jordan-Zerlegung von L_0 erst auf höheren Levels auftaucht. In der Tat bemerkte H.G. Kausch, daß bei der Fusion von Tiefstgewichtsmoduln bei $c = -2$ zwingend nicht nur Jordan-Tiefstgewichtsmoduln, sondern auch Moduln von dieser Gestalt auftauchen, die *nicht* Untermoduln von Jordan-Tiefstgewichtsmoduln sind [40]. Daher werden wir Moduln dieser Form auch unabhängig von Jordan-Tiefstgewichtsdarstellungen betrachten.

3.4.5 Gestufte Moduln

Definition 3.4.19 *Sei $c = c_{1,q} = 1 - 6\frac{(q-1)^2}{q}$. Ein $\mathcal{L}$-Modul M heißt* ***gestufter Modul*** *(mit Tiefstgewichten $h^{(1)}$ und $h^{(0)}$), falls es ein Paar $v^{(1)}, v^{(0)} \in M$ gibt, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(i) $V^{(0)} := \mathcal{U}.v^{(0)}$ *ist Tiefstgewichtsmodul mit Tiefstgewichtsvektor $v^{(0)}$ und Tiefstgewicht $h^{(0)}$.*

(ii) $V^{(1)} := M/V^{(0)}$ *ist Tiefstgewichtsmodul mit Tiefstgewichtsvektor $v^{(1)} + V^{(0)}$ und Tiefstgewicht $h^{(1)}$.*

(iii) $0 \neq (L_0 - h^{(1)}).v^{(1)} =: v_0 \in V^{(0)}_{h^{(1)}-h^{(0)}}$.

(iv) $L_{-1}.v^{(1)} =: v_1 \in V^{(0)}_{h^{(1)}-h^{(0)}-1}$.

(v) $L_{-2}.v^{(1)} =: v_2 \in V^{(0)}_{h^{(1)}-h^{(0)}-2}$.

$h^{(1)}$ ($h^{(0)}$) heißt oberes (unteres) Tiefstgewicht und $v^{(1)}$ ($v^{(0)}$) oberer (unterer) Tiefstgewichtsvektor. Falls $h^{(1)} > h^{(0)}$, heißt der Modul ***echt gestuft****.*

Lemma 3.4.20 *Sei M gestufter Modul, $h^{(0)}$, $h^{(1)}$, $v^{(0)}$, $v^{(1)}$, v_0, v_1 und v_2 wie oben. Dann ist v_0 primär.*

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} L_{-1}.v_0 &= L_{-1}(L_0 - h^{(1)}).v^{(1)} = (L_0 - h^{(1)}).v_1 + [L_{-1}, L_0].v^{(1)} \\ &= (L_0 - h^{(1)}).v_1 + v_1 = 0. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Analog berechnet man $L_{-2}.v_0 = 0$. Mit

$$[\underbrace{L_{-1}[L_{-1}...[L_{-1}}_{n \text{ mal}}, L_{-2}]...]] = (-)^n n! L_{-2-n} \tag{3.47}$$

folgt die Behauptung.

q.e.d.

Aus Lemma 3.4.20 folgt insbesondere, daß für $h^{(1)}, h^{(0)} \notin \{h_{r,s}; r, s \in \mathbb{N}\}$ keine echt gestuften Moduln existieren können. Genauer: Sei $V^1 \leftarrow V^2 \leftarrow \ldots$ eine Einbettungskette von Verma-Moduln wie in Satz 3.2.11 und $h^1, h^2, \ldots$ die entsprechenden Tiefstgewichte. Zu gegebenem unteren Tiefstgewicht h^k können nur gestufte Moduln mit oberem Tiefstgewicht h^m mit $m \geq k$ existieren. Mindestens einen solchen Modul gibt es dann natürlich immer, nämlich den entsprechenden Untermodul des Jordan-Verma-Moduls zum Tiefstgewicht h^k.

Definition 3.4.21 *Ein gestufter Modul V heißt* **vermaartig**, *falls er folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Wenn M ein gestufter Modul mit denselben Tiefstgewichten und $\phi : M \to V$ ein $\mathcal{L}$-Epimorphismus ist, dann ist ϕ ein $\mathcal{L}$-Isomorphismus. Anders ausgedrückt: Für jede exakte Sequenz*

$$M \xrightarrow{\phi} V \to 0$$

ist auch die Sequenz

$$0 \to M \xrightarrow{\phi} V \to 0$$

exakt.

Wir haben die universelle Eigenschaft in diesem Fall "andersherum" als bisher formuliert, da nichtisomorphe vermaartige Moduln zwar immer verschiedene $\{v_0, v_1, v_2\}$ haben, der Umkehrschluß aber nicht gilt.

Kommen wir nun zurück zur Frage nach allen möglichen Untermoduln eines gegebenen Jordan-Verma-Moduls. Wir hatten bereits gesehen, daß ein gestufter Untermodul gewisse Bedingungen an die Tiefstgewichte erfüllen muß (Lemma 3.4.16). Wir wollen nun zeigen, daß die beiden Tiefstgewichte einen Untermodul bereits eindeutig festlegen.

Lemma 3.4.22 *Sei M der JVM mit Tiefstgewicht h und $V^n, n \in \mathbb{N}$, wie in den Lemmata 3.4.15 und 3.4.16. Seien $I \subset M$ and $J \subset M$ gestufte Untermoduln mit $I^{(1)} \cong J^{(1)}$ und $I^{(0)} \cong J^{(0)}$. Dann ist $I = J$.*

Beweis: Offensichtlich ist $I^{(0)} = J^{(0)}$ (Satz 3.2.11). Wir nehmen an, daß $I \neq J$. Seien v_I und v_J obere Tiefstgewichtsvektoren von I bzw. J. Sei weiter $w = \alpha v_I - v_J$ so gewählt, daß $w + M^{(0)} = 0 + M^{(0)}$ (wegen Satz 3.2.11 sind die Tiefstgewichtsvektoren von $I^{(1)} \cong J^{(1)} \subset M^{(1)}$ bis auf skalare Vielfache eindeutig). Wegen $I \neq J$ haben wir $w \notin I^{(0)}$ (sonst wäre auch $v_J \in I$). Da $v_I + I^{(0)}$ und $v_J + I^{(0)}$ primär in $M/I^{(0)}$ sind, gilt dies auch für $w + I^{(0)}$. Nun enthält aber $M^{(0)}/I^{(0)}$ keine primären, nichtverschwindenden Vektoren auf dem betrachteten Level, womit wir einen Widerspruch haben.

q.e.d.

Bemerkung 3.4.23 *Analoges gilt offensichtlich selbst dann, wenn M kein JVM, sondern ein echt gestufter Modul ist.*

3.4.6 Modul-Räume

Sei $V^1 \leftarrow V^2 \leftarrow \ldots$ eine Einbettungskette von Verma-Moduln gemäß Satz 3.2.11 und h^k das Tiefstgewicht von V^k. Weiter sei $N_k := h^k - h^1$. In Abschnitt 3.4.5 blieb die Frage unbeantwortet, wieviele unterschiedliche (d.h. nicht $\mathcal{L}$-isomorphe) echt gestufte vermaartige Moduln es zu gegebenen Tiefstgewichten $h^{(0)} = h^1$, $h^{(1)} = h^N, N \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, gibt.
Insbesondere stellt sich zunächst die Frage, welche Wahlen von v_0, v_1, v_2 als Daten eines gestuften Moduls vorkommen. Seien also $v_0, v_1, v_2 \in V^1$ fest gewählt und nehmen wir an,

es existiere ein vermaartiger gestufter Modul mit diesen Daten. Dann können wir diesen sicher folgendermaßen konstruieren:
Sei $\tilde{V} := \mathcal{U} \oplus V^1$, wobei $\mathcal{U}$ via Linksmultiplikation ein $\mathcal{L}$-Modul ist. Sei ferner $I \subset \tilde{V}$ das Linksideal, das von $\{(L_{-1}, -v_1), (L_{-2}, -v_2), (L_0 - h^{(1)}, -v_0)\}$ aufgespannt wird, und sei $V := \tilde{V}/I$. Offensichtlich muß dies der gesuchte Modul sein.
Die Frage, welche Wahlen von v_0, v_1 und v_2 vorkommen, reduziert sich jetzt zu der Frage, ob das oben konstruierte V ein gestufter Modul ist. Da $I^{(1)} \subset \mathcal{U}$ gerade das Ideal ist, das aus $\mathcal{U}$ herausgeteilt wird, um V^N zu erhalten, ist das einzige, was dies verhindern könnte, $\tilde{v} \in I$, wobei $\tilde{v}$ Tiefstgewichtsvektor von $V^{N-1} \subset V^1$ ist (in diesem Falle folgt in V, daß $v_0 = 0$). Im folgenden untersuchen wir die Umstände, unter denen dies passieren kann.
Betrachten wir zunächst exemplarisch den Fall $N = 2$. Sei $v^{(0)}$ ein Tiefstgewichtsvektor von V^1. Damit $v^{(0)} \in I$ sein kann, muß es $\tilde{\xi}, \tilde{\psi} \in \mathcal{U}$ geben, so daß

$$(\tilde{\xi}.L_{-1} - \tilde{\psi}.L_{-2}, -\tilde{\xi}.v_1 + \tilde{\psi}.v_2) = (0, v^{(0)}). \tag{3.48}$$

Entwickelt man die linke Seite dieser Gleichung nach einer PBW-Basis von $\mathcal{U}$, bei der negative Moden nach rechts sortiert sind, so folgt daraus, daß es sogar $\xi, \psi \in \mathcal{U}^-$ geben muß, so daß

$$(\xi.L_{-1} - \psi.L_{-2}, -\xi.v_1 + \psi.v_2) = (0, v^{(0)}). \tag{3.49}$$

Sei nun $\mathcal{U}^-_n$ der n-te Level von $\mathcal{U}^-$ (d.h. das lineare Erzeugnis von Monomen der Form $L_{-k_1} \ldots L_{-k_m}$ mit $\sum_{i=1}^m k_i = n$). Sei ferner $S := \mathcal{U}^-.L_{-1} \cap \mathcal{U}^-.L_{-2} \subset \mathcal{U}^-$. Wir wollen nun $\dim S_n$ bestimmen ($S_n := S \cap \mathcal{U}^-_n$).
Zunächst machen wir uns klar, daß $\mathcal{U}^-.L_{-1} + \mathcal{U}^-.L_{-2} = \mathcal{U}^-$, was aus Gleichung (3.47) folgt. Deshalb ist

$$\dim S_n = \dim(\mathcal{U}^-.L_{-1})_n + \dim(\mathcal{U}^-.L_{-2})_n - \dim \mathcal{U}^-_n = \mathrm{p}(n-1) + \mathrm{p}(n-2) - \mathrm{p}(n). \tag{3.50}$$

Wir definieren jetzt eine lineare Abbildung

$$\phi : \begin{cases} S & \longrightarrow \quad \mathcal{U}^- \times \mathcal{U}^- \\ \psi = \psi^1.L_{-1} = \psi^2.L_{-2} & \longmapsto \quad (\psi^1, \psi^2) \end{cases} \tag{3.51}$$

und definieren dann $\tilde{L} := \phi(S)$ und $\tilde{L}_n := \phi(S_n)$. ϕ ist wohldefiniert (Poincaré, Birkhoff, Witt für $\mathcal{U}^-$) und offensichtlich ein Vektorraum-Isomorphismus. Deshalb gilt $\dim \tilde{L}_n = \dim S_n$. Definiere nun $\rho : \tilde{L}_n \to \mathrm{Hom}(V^1_{k-1} \times V^1_{k-2}, V^1_{k-n})$ durch

$$\rho\left((\psi^1, \psi^2)\right)(v, w) := \psi^1.v - \psi^2.w. \tag{3.52}$$

Dann ist $v^{(0)} \in I$ äquivalent zu

$$(v_1, v_2) \notin \ker \rho(\tilde{L}_{N_2})|_{V^1_{N_2-1} \times V^1_{N_2-2}}, \tag{3.53}$$

wobei $\ker \rho(\tilde{L}_{N_2})|_{V^1_{N_2-1} \times V^1_{N_2-2}}$ der Schnitt der Kerne aller Elemente ist. Jetzt beweisen wir noch, daß

$$\dim \rho(\tilde{L}_{N_2})|_{V^1_{N_2-1} \times V^1_{N_2-2}} = \dim \tilde{L}_{N_2}. \tag{3.54}$$

Dazu nehmen wir an, es gäbe ein $0 \neq (\chi, \psi) \in \tilde{L}_{N_2}$, so daß $\chi.v - \psi.w = 0 \ \forall (v, w) \in V^1_{N_2-1} \times V^1_{N_2-2}$. Mit der Involution (3.23) folgt, daß $\chi^\dagger.v^{(0)}, \psi^\dagger.v^{(0)} \in \mathfrak{Rad}(\langle .,. \rangle)$. Daraus folgt aber mit Satz 3.2.11, daß $(\chi, \psi) = 0$, was im Widerspruch zur Annahme steht. Damit können wir die Dimension des erlaubten Parameterraumes für (v_1, v_2) berechnen. Da $\rho(\tilde{L}_{N_2})|_{V^1_{N_2-1} \times V^1_{N_2-2}} \subset \mathrm{Hom}(V^1_{N_2-1} \times V^1_{N_2-2}, \mathbb{C})$, ist sie nach (3.50)

$$\dim V^1_{N_2-1} + \dim V^1_{N_2-2} - \dim \tilde{L}_{N_2} = \mathrm{p}(N_2). \tag{3.55}$$

Wir wenden uns jetzt dem allgemeinen Fall zu. Seien also v^k Tiefstgewichtsvektoren von $V^k \subset V^1$. Dann ist $v^{N-1} \in I$ äquivalent zu

$$\exists \tilde{\xi}, \tilde{\psi} \in \mathcal{U} : \ (\tilde{\xi}.L_{-1} - \tilde{\psi}.L_{-2}, -\tilde{\xi}.v_1 + \tilde{\psi}.v_2) = (0, v^{N-1}). \tag{3.56}$$

Entwickelt man wieder die linke Seite nach einer PBW-Basis von $\mathcal{U}$, bei der negative Moden nach rechts sortiert sind, so folgt, daß es sogar $\xi, \psi \in \mathcal{U}^-$ geben muß, so daß

$$\exists k \in \{1, \ldots, N-1\} : \ (\xi.L_{-1} - \psi.L_{-2}, -\xi.v_1 + \psi.v_2) = (0, v^k). \tag{3.57}$$

Gilt nämlich $(\xi.L_{-1} - \psi.L_{-2}, -\xi.v_1 + \psi.v_2) = (0, v)$ für einen beliebigen Vektor $v \neq 0$ mit $\xi, \psi \in \mathcal{U}^-$, so kann man durch Anwenden weiterer negativer Moden immer zu einem Tiefstgewichtsvektor absteigen. Dann ist $v^{N-1} \notin I$ äquivalent zu

$$(v_1, v_2) \in \bigcap_{k=1}^{N-1} \ker \rho(\tilde{L}_{N_N - N_k})|_{V^1_{N_N-1} \times V^1_{N_N-2}}. \tag{3.58}$$

Wir können jetzt das folgende Lemma beweisen:

Lemma 3.4.24 *Seien V^i, h^i, N_i wie bisher und v^i Tiefstgewichtsvektoren von V^i. Dann gibt es einen gestuften Modul mit Tiefstgewichten h^1, h^N ($N \in \mathbb{N}^{\geq 2}$) mit v_1, v_2 genau dann, wenn*

$$(v_1, v_2) \in \tilde{\mathcal{V}} := \bigcap_{k=1}^{N-1} \ker \rho(\tilde{L}_{N_N - N_k})|_{V^1_{N_N-1} \times V^1_{N_N-2}}. \tag{3.59}$$

Es gilt

$$\dim \tilde{\mathcal{V}} \leq \mathrm{p}(N_N). \tag{3.60}$$

Falls $N = 2$, so gilt sogar[(vii)]

$$\dim \tilde{\mathcal{V}} = \mathrm{p}(N_N). \tag{3.61}$$

Beweis: Der erste Teil der Aussage ist nach der vorhergehenden Diskussion klar. Die Dimensionsformel beweisen wir durch vollständige Induktion über N.

Induktionsanfang: Im Fall $N = 2$ ist die Aussage bereits in (3.55) bewiesen.

[(vii)]Wir werden später sehen, daß dies für alle N gilt.

Induktionsschluß: Berechne zunächst $\dim \rho(\tilde{L}_{N_N})|_{V^1_{N_N-1}\times V^1_{N_N-2}}$. Dazu sei

$$\chi \in \ker(\rho : \tilde{L}_{N_N} \to \mathrm{Hom}(V^1_{N_N-1} \times V^1_{N_N-2}, V^1_0)).$$

Es folgt, daß

$$\langle v^1, \chi.(\tilde{v}, \tilde{w})\rangle = \langle v^1, \chi^1.\tilde{v}\rangle + \langle v^1, \chi^2.\tilde{w}\rangle = 0 \;\; \forall \tilde{v} \in V^1_{N_N-1}, \tilde{w} \in V^1_{N_N-2}.$$

Damit sind

$$\chi^{1\dagger} v^1, \chi^{2\dagger} v^1 \in \mathfrak{Rad}(\langle .,.\rangle)$$

bzw.

$$\chi^{1\dagger} v^1 \in V^2_{N_N-N_2-1} \text{ und } \chi^{2\dagger} v^1 \in V^2_{N_N-N_2-2}.$$

Damit gilt

$$L_1 \chi^{1\dagger} v^1 = L_2 \chi^{2\dagger} v^1 \in V^2_{N_N-N_2-2}.$$

Mit $v^2 =: \psi^\dagger v^1$ gilt natürlich umgekehrt

$$L_1 \xi^{1\dagger} v^2 = L_2 \xi^{2\dagger} v^2 \Rightarrow (\psi\xi^1, \psi\xi^2) \in \tilde{L}_{N_N}$$

und ferner

$$(\psi\xi^1, \psi\xi^2) \in \ker(\rho : \tilde{L}_{N_N} \to \mathrm{Hom}(V^1_{N_N-1} \times V^1_{N_N-2}, V^1_0)).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} &\dim \rho(\tilde{L}_{N_N})|_{V^1_{N_N-1}\times V^1_{N_N-2}} \\ &\quad = \dim \tilde{L}_{N_N} - \dim \left\{ L_1\tilde{v} = L_2\tilde{w};\ \tilde{v} \in V^2_{N_N-N_2-1}, \tilde{w} \in V^2_{N_N-N_2-2} \right\}. \end{aligned}$$

Analog zu Gleichung (3.50) gilt

$$\begin{aligned} &\dim \left\{ L_1\tilde{v} = L_2\tilde{w};\ \tilde{v} \in V^2_{N_N-N_2-1}, \tilde{w} \in V^2_{N_N-N_2-2} \right\} \\ &\quad = \mathrm{p}(N_N - N_2 - 1) + \mathrm{p}(N_N - N_2 - 2) - \mathrm{p}(N_N - N_2) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} &\dim \rho(\tilde{L}_{N_N})|_{V^1_{N_N-1}\times V^1_{N_N-2}} \\ &\quad = \quad \mathrm{p}(N_N - 1) + \mathrm{p}(N_N - 2) - \mathrm{p}(N_N) \\ &\qquad -\mathrm{p}(N_N - N_2 - 1) - \mathrm{p}(N_N - N_2 - 2) + \mathrm{p}(N_N - N_2). \end{aligned} \tag{3.62}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\dim \bigcap_{k=2}^{N-1} \ker \rho(\tilde{L}_{N_N-N_k})|_{V^2_{N_N-N_2-1}\times V^2_{N_N-N_2-2}} \leq \mathrm{p}(N_N - N_2), \tag{3.63}$$

und mit $V^2_{N_N-N_2-1} \times V^2_{N_N-N_2-2} \subseteq \ker \rho(\tilde{L}_{N_N})|_{V^1_{N_N-1}\times V^1_{N_N-2}}$ und Gleichung (3.62) folgt

$$\begin{aligned}
\dim \tilde{\mathcal{V}} &\leq \dim \ker \rho(\tilde{L}_{N_N})|_{V^1_{N_N-1}\times V^1_{N_N-2}} - \dim(V^2_{N_N-N_2-1} \times V^2_{N_N-N_2-2}) \\
&\quad + \dim \bigcap_{k=2}^{N-1} \ker \rho(\tilde{L}_{N_N-N_k})|_{V^2_{N_N-N_2-1}\times V^2_{N_N-N_2-2}} \\
&= \dim(V^1_{N_N-1} \times V^1_{N_N-2}) - \dim \rho(\tilde{L}_{N_N})|_{V^1_{N_N-1}\times V^1_{N_N-2}} \\
&\quad - \dim(V^2_{N_N-N_2-1} \times V^2_{N_N-N_2-2}) \\
&\quad + \dim \bigcap_{k=2}^{N-1} \ker \rho(\tilde{L}_{N_N-N_k})|_{V^2_{N_N-N_2-1}\times V^2_{N_N-N_2-2}} \\
&\leq \mathrm{p}(N_N-1) + \mathrm{p}(N_N-2) \\
&\quad - \Big(\mathrm{p}(N_N-1) + \mathrm{p}(N_N-2) - \mathrm{p}(N_N) - \mathrm{p}(N_N-N_2-1) \\
&\qquad\qquad - \mathrm{p}(N_N-N_2-2) + \mathrm{p}(N_N-N_2)\Big) \\
&\quad - \Big(\mathrm{p}(N_N-N_2-1) + \mathrm{p}(N_N-N_2-2)\Big) + \mathrm{p}(N_N-N_2) \\
&= \mathrm{p}(N_N)
\end{aligned}$$

q.e.d.

Wir wenden uns jetzt der Frage zu, wie groß der Raum aller möglichen nichtisomorphen vermaartigen gestuften Moduln zu gegebenen Tiefstgewichten ist. Dazu starten wir mit dem Parameterraum $\tilde{\mathcal{V}}$ aus Lemma 3.4.24 und bemerken zunächst, daß die Daten $\{v_0, v_1, v_2\}$ eines gegebenen gestuften Moduls ohnehin immer nur bis auf einen skalaren Faktor gegeben sind, der durch die Freiheit in der Wahl der Tiefstgewichtsvektoren (Vielfache von Tiefstgewichtsvektoren sind auch Tiefstgewichtsvektoren) gegeben ist. Da der Raum der primären Vektoren auf einem bestimmten Level eines Verma-Moduls höchstens eindimensional ist, können wir also für alle gestuften Moduln $v_0 \neq 0$ auf den gleichen Vektor festlegen.
Die übrigen Freiheiten in der Wahl der Tiefstgewichtsvektoren sind durch $v^{(1)'} = v^{(1)} + \tilde{v}, \tilde{v} \in V^1_{N_N}$, gegeben. Sei nun

$$\hat{\mathcal{V}} := \{(L_{-1}.w, L_{-2}.w);\ w \in V^1_{N_N}\}. \tag{3.64}$$

Dann sind zwei gestufte Moduln mit Daten $\{v_1, v_2\}, \{v'_1, v'_2\}$ ($v_0 = v'_0$ wie oben beschrieben festgelegt) genau dann $\mathcal{L}$-isomorph, wenn $(v_1 - v'_1, v_2 - v'_2) \in \hat{\mathcal{V}}$. Daraus folgern wir

Lemma 3.4.25 *Der Raum aller nichtisomorphen vermaartigen gestuften Moduln zu den Tiefstgewichten h^1, h^N ist isomorph zum Vektorraum $\mathcal{V} = \tilde{\mathcal{V}}/\hat{\mathcal{V}}$.*

Wir wollen jetzt noch die Dimension von $\mathcal{V}$ bestimmen. Da diese einfach durch

$$\dim \mathcal{V} = \dim \tilde{\mathcal{V}} - \dim \hat{\mathcal{V}} \tag{3.65}$$

gegeben ist, benötigen wir dazu die Dimension von $\dim \hat{\mathcal{V}}$. Diese ist jedoch leicht zu bestimmen. Sei

$$\phi : \begin{cases} V^1_{N_N} & \to \quad \hat{\mathcal{V}} \\ v & \mapsto \quad (L_{-1}.v, L_{-2}.v). \end{cases} \tag{3.66}$$

Dann ist der Kern von ϕ gerade der Raum der primären Vektoren auf Level N_N von V^1, der nach Satz 3.2.11 eindimensional ist. Damit folgt, daß $\dim \hat{\mathcal{V}} = \dim V^1_{N_N} - 1 = \mathrm{p}(N_N) - 1$. Damit und mit Lemma 3.4.24 folgt

$$\dim \mathcal{V} \leq 1 \tag{3.67}$$

bzw. $\dim \mathcal{V} = 1$, wenn $N = 2$.

Schließlich zeigen wir noch, daß $\dim \mathcal{V} \geq 1$ (und damit $\dim \mathcal{V} = 1$): Für $N = 2$ ist dies bereits gezeigt. Im anderen Falle betrachte eine Wahl von $(v_1, v_2) \in V^{N-1}_{N_N - N_{N-1} - 1} \times V^{N-1}_{N_N - N_{N-1} - 2}$, die zu einem gestuften Modul mit Tiefstgewichten h^{N-1} und h^N gehört, zu dem aber nicht die Wahl $(0, 0)$ gehört (einen solchen Modul gibt es ja immer). Zunächst ist klar, daß $(v_1, v_2) \in \tilde{\mathcal{V}}$. Wir zeigen nun, daß der gestufte Modul mit Tiefstgewichten h^1, h^N, der von (v_1, v_2) induziert wird, nicht isomorph zu dem ist, der von $(0, 0)$ induziert wird. Wäre dies nämlich der Fall, so gäbe es $v \in V^1_{N_N} \setminus V^{N-1}_{N_N - N_{N-1}}$, so daß $v_1 = L_{-1}.v$ und $v_2 = L_{-2}.v$. Insbesondere würde gelten, daß $\mathcal{F} \circ L_{-n}.v = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$, wobei $\mathcal{F}$ die Faktorabbildung $V^1 \to V^1 / V^{N-1}$ ist. Dies ist für $v \notin V^{N-1}$ aber nach Satz 3.2.11 nicht möglich. Damit ist die Existenz von zwei verschiedenen Elementen von $\mathcal{V}$ gezeigt und damit die Behauptung.

Damit können wir nun das Ergebnis von Lemma 3.4.24 verbessern. Dazu bemerken wir, daß in der Umkehrung von Gleichung (3.65) folgt, daß

$$\dim \tilde{\mathcal{V}} = \dim \mathcal{V} + \dim \hat{\mathcal{V}} = \mathrm{p}(N_N). \tag{3.68}$$

Zusammenfassend haben wir damit gezeigt:

Satz 3.4.26 *Seien V^i, v^i, h^i, N_i wie bisher. Dann gibt es einen gestuften Modul mit Tiefstgewichten h^1, h^N ($N \in \mathbb{N}^{\geq 2}$) mit v_1, v_2 genau dann, wenn*

$$(v_1, v_2) \in \tilde{\mathcal{V}} = \bigcap_{k=1}^{N-1} \ker \rho(\tilde{L}_{N_N - N_k})|_{V^1_{N_N - 1} \times V^1_{N_N - 2}}. \tag{3.69}$$

Es gilt

$$\dim \tilde{\mathcal{V}} = \mathrm{p}(N_N). \tag{3.70}$$

Der Raum aller vermaartigen gestuften Moduln mit Tiefstgewichten h^1, h^N ist ein Vektorraum $\mathcal{V}$ mit

$$\dim \mathcal{V} = 1. \tag{3.71}$$

Betrachten wir nun noch $\mathcal{L}$-Moduln V mit $V^1 \subset V$, $V/V^1 = V^N$, Nilpotenzlänge 1 und $V \neq V^1 \oplus V^N$. Seien hier wieder v^1 ein Tiefstgewichtsvektor von V^1 und $v^{(1)} \in V$ so gewählt, daß mit $V^{(0)} := V^1$ der Vektor $v^{(1)} + V^{(0)}$ Tiefstgewichtsvektor von V/V^1 ist. Wir nennen h^1 und h^N die Tiefstgewichte des Moduls. Studieren wir den Raum aller solcher Moduln zu gegebenen Tiefstgewichten h^1, h^N, so sind mit $v_0 = 0$ offenbar alle Resultate der obigen Diskussion anwendbar bis auf die Tatsache, daß die Skalierung des oberen Tiefstgewichtsvektors nicht mehr über v_0 festlegbar ist. Wir müssen daher zu einem projektiven Raum übergehen und erhalten damit das Resultat

Satz 3.4.27 *Der Raum aller nichtisomorphen $\mathcal{L}$-Moduln V mit $V^1 \subset V$, $V/V^1 = V^N$ und Nilpotenzlänge 1 ist gegeben durch den projektiven Raum $\mathbb{P}\mathcal{V}$ mit $\mathcal{V}$ dem Vektorraum aus Satz 3.4.26. Also besteht er nur aus einem Element.*

Beide Ergebnisse zusammen können wir auch in der Sprache der Extensionen formulieren. Der Begriff der Extension ist für beliebige abelsche Kategorien definiert; im Spezialfall der Kategorie $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}$ lautet er:

Definition 3.4.28 *Seien U, V, W, W' Objekte in $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}$. Zwei kurze exakte Sequenzen $0 \to V \xrightarrow{\imath} W \xrightarrow{\pi} U \to 0$ und $0 \to V \xrightarrow{\imath'} W' \xrightarrow{\pi'} U \to 0$ seien äquivalent, falls es einen $\mathcal{L}$-Isomorphismus $\alpha : W \to W'$ gibt, so daß das Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V & \xrightarrow{\imath} & W & \xrightarrow{\pi} & U & \to & 0 \\ & & || & & \downarrow^{\alpha} & & || & & \\ 0 & \to & V & \xrightarrow{\imath'} & W' & \xrightarrow{\pi'} & U & \to & 0 \end{array}$$

kommutiert. Dann ist der Raum $\mathrm{Ext}^{\mathbf{1}}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ der ***Extensionen*** *von U durch V definiert als die Menge der Isomorphieklassen solcher kurzer exakter Sequenzen. $\mathrm{Ext}^1(U, V)$ ist mit der Addition*

$$W \boxplus W' := \{(w, w') \in W \oplus W' \mid \pi(w) = \pi'(w')\} / \{(\imath(v), \imath'(v));\ v \in V\},$$

$$\imath \boxplus \imath' : \left\{ \begin{array}{lll} V & \to & W \boxplus W' \\ v & \mapsto & (v, 0) + \{(\imath(v), \imath'(v));\ v \in V\} \end{array} \right.$$

und

$$\pi \boxplus \pi' : \left\{ \begin{array}{lll} W \boxplus W' & \to & U \\ (w, w') + \{(\imath(v), \imath'(v));\ v \in V\} & \mapsto & \pi(w) = \pi(w') \end{array} \right.$$

eine abelsche Gruppe. Das neutrale Element ist $U \oplus V$, und das Inverse zur Äquivalenzklasse von $0 \to V \xrightarrow{\imath} W \xrightarrow{\pi} U \to 0$ ist die von $0 \to V \xrightarrow{\imath} W \xrightarrow{-\pi} U \to 0$.

Der wesentliche Unterschied zwischen $\mathrm{Ext}^1(V^1, V^N)$ und der Vereinigung der obigen Modul-Räume und $\{V^1 \oplus V^N\}$ ist der folgende: Zu einem gegebenen Modul $W \in \mathcal{V} \cup \mathbb{P}\mathcal{V}$ gibt es durchaus *mehrere* Isomorphieklassen von kurzen exakten Sequenzen. Die Menge aller möglichen kurzen exakten Sequenzen

$$0 \to V^1 \xrightarrow{\imath} W \xrightarrow{\pi} V^N \to 0$$

ist nämlich mit $v^k, w^{(0)}, w^{(1)}$ fest gewählten Tiefstgewichtsvektoren von V^k, W gegeben durch

$$\left\{\imath : V^1 \to W \mid \imath(v^1) = zw^{(0)}; z \in \mathbb{C}^*\right\} \times \left\{\pi : W \to V^N \mid \pi(w^{(1)}) = \xi v^N; \xi \in \mathbb{C}^*\right\}.$$

Davon sind nur die äquivalent, für die $z = \xi$ (W ist unzerlegbar!). Dies hebt gerade die Freiheit in der Wahl der Skalierung auf, und wir erhalten zusammen mit der offensichtlichen Bedingung $v_0 \in \mathbb{C}v^N$ das Ergebnis

$$\mathrm{Ext}^1(V^1, V^N) = \mathcal{V} \oplus \mathbb{C}v^N, \tag{3.72}$$

wobei die Addition "$\boxplus$" in $\mathrm{Ext}^1(V^1, V^N)$ genau mit der üblichen Addition in $\mathcal{V} \oplus \mathbb{C}v^N$ zusammenfällt. Wir folgern außerdem

$$\dim \mathrm{Ext}^1(V^1, V^N) = 2. \tag{3.73}$$

3.4.7 Explizite Rechnungen

Der Einfachheit halber wenden wir uns wieder den JVMn und ihren Untermoduln zu. In den Beispielen 3.4.17 und 3.4.18 konnte die Bedingung aus Lemma 3.4.16 zu $n \geq m + 1$ verschärft werden. Weiterhin zeigte sich, daß diese verschärfte Bedingung in Beispiel 3.4.18 bereits hinreichend war.
Um zu überprüfen, ob diese Ergebnisse für alle JVMn anwendbar sind, wurden für eine Reihe verschiedener JVMn mit unterschiedlichen Werten sowohl der zentralen Ladung als auch des Tiefstgewichts explizite Rechnungen durchgeführt.
Der dafür verwendete Algorithmus funktioniert folgendermaßen: Sei V_n der n-te Level des JVMs und B_n seine Basis nach Satz 3.4.10. Für $n < n_0$ sei $P_m := \mathbb{1}_{V_n}$. Beginnend auf Level n_0 berechnet man dann die Matrix von $(P_{n-1} \circ L_{-1}, P_{n-2} \circ L_{-2})$. Danach wird ihr Kern K_n bestimmt$^{(viii)}$. Unter Verwendung eines Basiswechsel-Algorithmus erhält man dann eine Basis von V_n/K_n und den Projektor $P_n : V_n \to V_n/K_n$.
Offensichtlich sind die K_n dann die Levels des maximalen Untermoduls K, dessen Schnitt mit den ersten n_0 Levels nur die 0 ist. Indem man also n_0 fest wählt, kann man den unteren Modul $K^{(0)}$ des Untermoduls festlegen. Der erste Level, auf dem $K_n \cap V^{(1)} \neq 0$, liefert dann den maximal möglichen$^{(ix)}$ $K^{(0)}$ für diese Wahl von $K^{(0)}$.
Für alle Werte von c, h, die untersucht wurden, sei V der entsprechende JVM und $V_h = V^1 \leftarrow V^2 \leftarrow \ldots$ die Einbettungskette von Verma-Moduln, die mit dem Verma-Modul V_h zum Tiefstgewicht h beginnt. Bezeichne mit $J_{n,m}$ einen Untermodul von V mit $J^{(1)}_{m,n} = V^m$ und $J^{(0)}_{n,m} = V^n$. Mit obigem Algorithmus wurde für verschiedene Wahlen von n das kleinstmögliche m bestimmt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3.1 zusammengefaßt, für die Details siehe Anhang A.

$^{(viii)}$Bei diesen beiden Schritten wird aus Geschwindigkeitsgründen verwendet, daß $\sum_{k<n} \mathcal{U}^+_{n-k}.K_k \subset K_n$.
$^{(ix)}$Natürlich sind alle Untermoduln von $K^{(1)}$ ebenfalls möglich.

c		-2							-7				$-\frac{25}{2}$	$-\frac{91}{5}$
h		$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{15}{8}$	3	$\frac{35}{8}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{7}{4}$	0	0
n	2	3	3	2	3	2	3	2	3	3	3	3	3	3
	3		4	3						4				
	4		5											
h^1		$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{15}{8}$	3	$\frac{35}{8}$	$-\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{7}{4}$	0	0
h^2		$\frac{15}{8}$	1	$\frac{35}{8}$	3	$\frac{63}{8}$	6	$\frac{99}{8}$	$\frac{7}{4}$	1	5	$\frac{15}{4}$	1	1
h^3		$\frac{63}{8}$	3	$\frac{99}{8}$	6	$\frac{143}{8}$	10	$\frac{195}{8}$	$\frac{15}{4}$	5	8	$\frac{39}{4}$	7	9
h^4		$\frac{143}{8}$	6	$\frac{195}{8}$	10	$\frac{255}{8}$	15	$\frac{323}{8}$	$\frac{39}{4}$	8	16		10	12
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabelle 3.1: *minimales m bei gegebenem n*

3.4.8 Einbettungsstruktur

Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 3.4.7 gelangen wir zu folgender Vermutung:

Vermutung 3.4.29 *Sei $c = c_{1,q} = 1 - 6\frac{(q-1)^2}{q}$, $q \in \{2, 3, \ldots\}$, und V der JVM mit Tiefstgewicht $h_{1,n} = \frac{1}{4q}\big((q-n)^2 - (q-1)^2\big)$, $n \in \mathbb{N}$. Mit der Konvention $V^\infty := 0$ sei $V_{h_{1,n}} = V^1 \leftarrow V^2 \leftarrow V^3 \leftarrow \ldots$ die Einbettungskette von Verma-Moduln gemäß Satz 3.2.11. Sei ferner h^j das Tiefstgewicht von V^j. Dann gehört V zu einer der beiden folgenden Klassen:*

(a) Der größte Untermodul $J \subset V$ mit $J^{(0)} = V^m, m \in \mathbb{N}$, ist ein gestufter Modul mit Tiefstgewichten h^m und h^{m+1}.

oder

(b) Der maximale erhaltende Untermodul $J \subset V$ ist ein JVM mit Tiefstgewicht h^2, und J gehört ebenfalls zur Klasse (b).

Korollar 3.4.30 *Mit denselben Bezeichnungen wie in Vermutung 3.4.29 enthält V neben den Untermoduln von $V^{(0)}$ die gestuften Untermoduln $J_{m,n}$ mit $J^{(0)}_{m,n} = V^m$ und $J^{(1)}_{m,n} = V^n$, $m, n \in \mathbb{N}$ und $n > m$ im Fall (a) oder $n \geq m$ im Fall (b) von Vermutung 3.4.29. Dies sind alle Untermoduln von V, und ihre Einbettungsstruktur ist durch folgende Diagramme gegeben:*

Fall (a):

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & & & \vdots & & \\
 & & & & & & & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & & & J_{4,5} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & J_{4,\infty} & = & V^4 \\
 & & & & & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & J_{3,4} & \leftarrow & J_{3,5} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & J_{3,\infty} & = & V^3 \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & & & J_{2,3} & \leftarrow & J_{2,4} & \leftarrow & J_{2,5} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & J_{2,\infty} & = & V^2 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
V & \leftarrow & J_{1,2} & \leftarrow & J_{1,3} & \leftarrow & J_{1,4} & \leftarrow & J_{1,5} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & J_{1,\infty} & = & V^1
\end{array}
\tag{3.74}
$$

Fall (b):

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & & & \vdots & & \\
 & & & & & & & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & & & J_{5,5} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & J_{5,\infty} & = & V^5 \\
 & & & & & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & J_{4,4} & \leftarrow & J_{4,5} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & J_{4,\infty} & = & V^4 \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & & & J_{3,3} & \leftarrow & J_{3,4} & \leftarrow & J_{3,5} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & J_{3,\infty} & = & V^3 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & J_{2,2} & \leftarrow & J_{2,3} & \leftarrow & J_{2,4} & \leftarrow & J_{2,5} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & J_{2,\infty} & = & V^2 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
V & \leftarrow & J_{1,2} & \leftarrow & J_{1,3} & \leftarrow & J_{1,4} & \leftarrow & J_{1,5} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & J_{1,\infty} & = & V^1
\end{array}
\tag{3.75}
$$

Bemerkung 3.4.31 *Einen Teil der Vermutung 3.4.29 können wir mit Satz 3.4.26 beweisen: Da der Modul-Raum* aller *gestuften Moduln mit gegebenen Tiefstgewichten eindimensional ist, gilt immer, falls* $v + V^{(0)}$ *Tiefstgewichtsvektor in* V^{m+1} *ist, daß die Vektoren* v_0, v_1 *des gestuften Untermoduls, der von* v *aufgespannt wird, in* V^m *liegen (modulo Umparametrisierungen der Form* $v_{1,2} \mapsto v_{1,2} + L_{-1,-2}.w$ *mit* $w \in V^1_{N_{m+1}}$*, siehe auch den Beweis von Satz 3.4.26). Damit existiert zu gegebenem* m *immer ein Untermodul mit Tiefstgewichten* h^m *und* h^{m+1}*. Die abgeschwächte Version von Korollar 3.4.30, die wir damit bewiesen haben, fordert lediglich Einbettungsstrukturen*

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & & & \vdots & & \\
 & & & & & & & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & & & (J_{5,5}) & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & J_{5,\infty} & = & V^5 \\
 & & & & & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & (J_{4,4}) & \leftarrow & J_{4,5} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & J_{4,\infty} & = & V^4 \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & & & (J_{3,3}) & \leftarrow & J_{3,4} & \leftarrow & J_{3,5} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & J_{3,\infty} & = & V^3 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & (J_{2,2}) & \leftarrow & J_{2,3} & \leftarrow & J_{2,4} & \leftarrow & J_{2,5} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & J_{2,\infty} & = & V^2 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
V & \leftarrow & J_{1,2} & \leftarrow & J_{1,3} & \leftarrow & J_{1,4} & \leftarrow & J_{1,5} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & J_{1,\infty} & = & V^1,
\end{array}
\tag{3.76}
$$

wobei die Existenz der eingeklammerten Untermoduln $J_{n,n}$*,* $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ *nicht gesichert ist.*

Warnung: Die obige Notation ist insofern irreführend, als der gestufte Modul $J_{m,n}$ kein universelles Objekt ist, sondern außer von m, n noch vom Jordan-Verma-Modul V abhängt, in den er eingebettet ist. Dies ist im Grunde wegen Satz 3.4.26 klar, man könnte höchstens noch annehmen, daß alle gestuften Moduln mit denselben Tiefstgewichten, die als Untermoduln von JVMn auftauchen, in derselben Isomorphieklasse gemäß Satz 3.4.26 liegen. Eine solche Annahme wird aber durch folgendes Beispiel widerlegt:

Sei $c = -2$, V der JVM zum Tiefstgewicht 0 und W der JVM zum Tiefstgewicht 1. Beide JVMn enthalten einen gestuften Untermodul mit Tiefstgewichten 1 und 3. Obwohl die beiden natürlich isomorph in $\mathrm{Vec}_{\mathbb{C}}$ sind, sind sie es *nicht* in $\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}$:

Seien $v^{(1)}$, $v^{(0)}$, $w^{(1)}$ und $w^{(0)}$ die Tiefstgewichtsvektoren der beiden Untermoduln, die durch

$$
\begin{aligned}
v^{(1)} &= 2L_2L_1.\tilde{v}^{(1)} - L_1^3.\tilde{v}^{(1)} - L_3.\tilde{v}^{(0)} \\
v^{(0)} &= L_1.\tilde{v}^{(0)} \\
w^{(1)} &= 2L_2.\tilde{w}^{(1)} - L_1^2.\tilde{w}^{(1)} \\
w^{(0)} &= \tilde{w}^{(0)}
\end{aligned}
\tag{3.77}
$$

gegeben sind, wobei $\tilde{v}^{(1)}$, $\tilde{v}^{(0)}$, $\tilde{w}^{(1)}$ und $\tilde{w}^{(0)}$ die Tiefstgewichtsvektoren von V bzw. W sind.

Man prüft leicht nach, daß

$$\begin{aligned} L_0.v^{(1)} &= 3v^{(1)} + (2L_2 - L_1^2).v^{(0)} \\ L_{-1}.v^{(1)} &= -6L_1.v^{(0)} \\ L_{-2}.v^{(1)} &= -15v^{(0)}, \end{aligned} \tag{3.78}$$

wohingegen

$$\begin{aligned} L_0.w^{(1)} &= 3w^{(1)} + (2L_2 - L_1^2).w^{(0)} \\ L_{-1}.w^{(1)} &= -4L_1.w^{(0)} \\ L_{-2}.w^{(1)} &= 2w^{(0)}. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Die einzige Freiheit bei der Wahl des oberen Tiefstgewichtsvektors eines gestuften Moduls ist durch die Abbildung $w^{(1)} \mapsto \hat{w}^{(1)} := \alpha w^{(1)} + \hat{w}$ mit $\alpha \neq 0$ und $\hat{w} \in W^{(0)}$ gegeben. Ein $\mathcal{L}$-Isomorphismus zwischen V and W würde implizieren, daß es ein $\hat{w}^{(1)}$ gibt, so daß

$$\begin{aligned} L_0.\hat{w}^{(1)} &= 3\hat{w}^{(1)} + (2L_2 - L_1^2).w^{(0)} \\ L_{-1}.\hat{w}^{(1)} &= -6L_1.w^{(0)} \\ L_{-2}.\hat{w}^{(1)} &= -15w^{(0)}. \end{aligned} \tag{3.80}$$

Die allgemeine Lösung der letzten beiden Gleichungen lautet

$$\hat{w}^{(1)} = -\frac{3}{2}w^{(1)} - 2\nu L_2.w^{(0)} - \mu L_1^2.w^{(0)}, \qquad \nu + \mu = 2. \tag{3.81}$$

Damit aber folgt

$$L_0.\hat{w}^{(1)} = 3\hat{w}^{(1)} - \frac{3}{2}(2L_2 - L_1^2).w^{(0)} \tag{3.82}$$

im Widerspruch zur ersten Gleichung. Damit können die beiden gestuften Moduln nicht $\mathcal{L}$-isomorph sein.

3.4.9 Charaktere

Mit den Ergebnissen der beiden vorhergehenden Abschnitte und unter Verwendung der Charaktere aus Abschnitt 3.2.4 lassen sich die Charaktere der minimalen Jordan-Tiefstgewichtsmoduln sofort angeben.
Offensichtlich ist nach Definition des Charakters und mit der Basis aus Satz 3.4.10 der Charakter des Jordan-Verma-Moduls V_h^* zum Tiefstgewicht h gerade durch

$$\chi_{V_h^*} = 2\frac{q^{\frac{1-c}{24}}}{\eta(q)}q^h \tag{3.83}$$

gegeben. Analog ist der Charakter eines beliebigen vermaartigen gestuften Moduls J_{h^0,h^1} mit Tiefstgewichten h^0, h^1 durch

$$\chi_{J_{h^0,h^1}} = \frac{q^{\frac{1-c}{24}}}{\eta(q)}(q^{h^0} + q^{h^1}) \tag{3.84}$$

gegeben.

Der Charakter eines minimalen Jordan-Tiefstgewichtsmoduls M mit den Tiefstgewichten h^0, h^1 ist dann gerade

$$\chi_M = \chi_V - \chi_I, \tag{3.85}$$

wobei χ_V der Charakter des JVMs zu den Tiefstgewichten h^0, h^1 und χ_I der Charakter seines maximalen erhaltenden Untermoduls ist.
Sei zum Beispiel M der minimale JVM zum Tiefstgewicht 0 bei $c = -2$. Dann lautet sein Charakter:

$$\chi_{0^*} = \frac{q^{\frac{1}{8}}}{\eta(q)}(2 - q - q^3) \tag{3.86}$$

Kapitel 4

Fusion

Der Begriff der Fusion zweier Darstellungen der Symmetriealgebra (also Virasoro- bzw. allgemeiner $\mathcal{W}$-Algebra) einer CFT ersetzt den Begriff des Tensorprodukts zweier Darstellungen endlichdimensionaler Lie-Algebren. Dabei hat das Fusionsprodukt zweier Darstellungen zur selben zentralen Ladung c wieder zentrale Ladung c, während die zentrale Ladung des üblichen Tensorproduktes zweier Darstellungen gerade die Summe der zentralen Ladungen der ursprünglichen Darstellungen ist.

Der einfachste (und natürlich nur für ein anschauliches Verständnis geeignete) Zugang zur Fusion ist, daß die Fusion zweier Darstellungen der Symmetriealgebra angibt, welche Felder in der OPE der den Darstellungen entsprechenden Felder auftauchen können.

4.1 Definition und Folgerungen

Um dies genauer zu definieren, folgen wir den Argumentationen in [46] und teilweise [29] (vgl. auch [45]).

Betrachte die Riemann-Sphäre mit drei markierten Punkten z_1, z_2 und z_3. Zwei Darstellungen V_1, V_2, die bei z_1, z_2 lokalisiert sind, produzieren eine Darstellung V_3^α bei z_3. Das Fusionsprodukt V_{12} von V_1 und V_2 sollte ein universeller Modul sein, der alle möglichen Moduln V_3^α als Faktormoduln enthält, jedoch nicht unnötig groß ist.

Aufgrund von Linearität sollte V_{12} als Vektorraum Faktormodul einer geeigneten Vervollständigung von $V_1(z_1) \otimes V_2(z_2)$ sein. Während letzteres als Vektorraum einfach $V_1 \otimes V_2$ ist, hängt die Darstellung der $\mathcal{W}$-Algebra jedoch von z_1, z_2 und z_3 ab (verschiedene Wahlen von z_1, z_2 und z_3 produzieren hingegen isomorphe Produkte, da sie über Möbiustransformationen ineinander überführt werden können). Um eine geeignete Darstellung der $\mathcal{W}$-Algebra, im folgenden $\mathcal{A}$ genannt, auf dem Tensorprodukt definieren zu können, sei C ein kleiner Kreis um z_3. Für holomorphes $\phi \in \mathcal{A}$ muß der Vektor $\phi(z).v,\ v \in V_1 \otimes V_2$, holomorph von z abhängen bis auf mögliche Pole bei z_1, z_2. Für 1-Formen $d\omega$, die außer bei z_1, z_2 holomorph sind, muß also

$$\oint_C \phi(z)(v_1(z_1) \otimes v_2(z_2))d\omega = (\oint_{C_1} \phi(z)v_1(z_1)d\omega) \otimes v_2(z_2) + v_1(z_1) \otimes (\oint_{C_2} \phi(z)v_2(z_2)d\omega) \quad (4.1)$$

gelten, wobei C_1, C_2 kleine Kreise um z_1, z_2 sind. Die Integrale auf der rechten Seite sind dann durch die Darstellung der $\mathcal{W}$-Algebra auf den Moduln V_1, V_2 bestimmt. Damit kann man schon zeigen [46], daß Fusion mit der Vakuumdarstellung die Identität liefert. Wir wollen nun eine “natürliche” Darstellung von $\mathcal{A}$ auf dem Tensorprodukt definieren. Zunächst ist für $m \geq 0$

$$z^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} z_i^{m-k}(z-z_i)^k. \tag{4.2}$$

Seien nun $\mathcal{A}_<$ das lineare Erzeugnis von $\{\phi_m \mid \phi \in \mathcal{A}, m < h_\phi\}$ und $\mathcal{A}_{++}$ das von $\{\phi_m \mid \phi \in \mathcal{A}, m \geq h_\phi\}$. Dann folgt für $\phi_m \in \mathcal{A}_<$ mit (4.2) und $\phi_m = \frac{1}{2\pi i}\oint z^{h_\phi-m-1}\phi(z)dz$

$$\begin{aligned}
&\phi_m.(v_1(z_1)\otimes v_2(z_2))\\
&\quad = \Big(\tfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\phi(z)v_1(z_1)\Big(\sum_{k=0}^{h_\phi-m-1}\tbinom{h_\phi-m-1}{k} z_1^{h_\phi-m-1-k}(z-z_1)^k\Big)dz\Big)\otimes v_2(z_2)\\
&\qquad + v_1(z_1)\otimes\Big(\tfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\phi(z)v_2(z_2)\Big(\sum_{k=0}^{h_\phi-m-1}\tbinom{h_\phi-m-1}{k} z_2^{h_\phi-m-1-k}(z-z_2)^k\Big)dz\Big)\\
&\quad = \sum_{k=m}^{h_\phi-1}\tbinom{h_\phi-1-m}{h_\phi-1-k} z_1^{k-m}(\phi(z_1)_k.v_1(z_1))\otimes v_2(z_2)\\
&\qquad + \sum_{k=m}^{h_\phi-1}\tbinom{h_\phi-1-m}{h_\phi-1-k} z_2^{k-m} v_1(z_1)\otimes(\phi(z_2)_k.v_2(z_2))
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Für $\phi_m \in \mathcal{A}_{++}$ sieht die Situation etwas schwieriger aus. Es ist für $n > 0$

$$\begin{aligned}
z^{-n} &= \sum_{k=n}^{\infty}(-)^{k+n}\binom{k-1}{n-1} z_i^{k-n}(z-z_i)^{-k} &(4.4)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-)^{k}\binom{n+k-1}{k} z_i^{k+n}(z-z_i)^{k}, &(4.5)
\end{aligned}$$

wobei die beiden Reihen unterschiedliche Konvergenzbereiche haben. Setzen wir jeweils eine der beiden formalen Entwicklungen (4.4), (4.5) ein, so erhalten wir für $\phi_m \in \mathcal{A}_{++}$

$$\begin{aligned}
&\phi_m.(v_1(z_1)\otimes v_2(z_2))\\
&\quad = \sum_{k=m}^{\infty}\tbinom{k-h_\phi}{m-h_\phi}(-z_1)^{k-m}(\phi(z_1)_k.v_1(z_1))\otimes v_2(z_2)\\
&\qquad + \sum_{k=-(h_\phi-1)}^{\infty}(-)^{k+h_\phi-1}\tbinom{m+k-1}{k+h_\phi-1} z_2^{-(m+k)} v_1(z_1)\otimes(\phi(z_2)_{-k}.v_2(z_2))
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Wir hätten natürlich genauso gut die andere Reihenfolge verwenden können und dabei

$$\begin{aligned}
&\phi_m.(v_1(z_1)\otimes v_2(z_2))\\
&\quad = \sum_{k=-(h_\phi-1)}^{\infty}(-)^{k+h_\phi-1}\tbinom{m+k-1}{k+h_\phi-1} z_1^{-(m+k)}(\phi(z_1)_{-k}.v_1(z_1))\otimes v_2(z_2)\\
&\qquad + \sum_{k=m}^{\infty}\tbinom{k-h_\phi}{m-h_\phi}(-z_2)^{k-m} v_1(z_1)\otimes(\phi(z_2)_k.v_2(z_2))
\end{aligned} \tag{4.7}$$

erhalten. Daher *fordern* wir die Gleichheit von (4.6) und (4.7) auf Darstellungsebene und erhalten so eine Darstellung auf dem Tensorprodukt modulo der durch die obigen Formeln gegebenen Relationen (der Beweis der Darstellungseigenschaft findet sich in [29]). Wir wollen diesen Raum zusammen mit der oben definierten Darstellung mit $V_1 \star V_2$ bezeichnen. Um das Fusionsprodukt zweier Darstellungen zu berechnen, muß man also obige Darstellung (auf dem Tensorprodukt modulo Relationen) in unzerlegbare Darstellungen aufspalten. Da dies in der Regel einen sehr hohen Rechenaufwand erfordert, ist es nützlich, noch weitere Überlegungen anzustellen. Seien also $V_{1,2}$ wie oben und $V_3 := V_1 \star V_2$. Seien ferner $V_i^a := \mathcal{A}_{++} V_i$. Ein *spezieller Unterraum* $V_i^s \subset V_i$ ist ein Unterraum von V_i, so daß $V_i^s \oplus V_i^a$ dicht in V_i liegt[(i)].

Lemma 4.1.1 *Seien $V_1^s \subset V_1$ und $V_2^s \subset V_2$ fest gewählte spezielle Unterräume. Dann enthält $V_1^s \star V_2^s$ einen speziellen Unterraum V_3^s.*

Beweis: Bezeichne im folgenden Gleichheit modulo V_3^a mit „$\equiv$“. Wir zeigen die Behauptung durch einen expliziten Reduktionsalgorithmus, der jeden Vektor in dem dichten Unterraum von V_3, der von Vektoren $\{v_1 \otimes v_2; v_1 \in V_{1,k}, v_2 \in V_{1,l}\}$ aufgespannt wird, in eine Summe von Vektoren in V_3^a und $V_1^s \star V_2^s$ aufspaltet. Sei der *Grad* $\#v_i$ definiert als $\#v_i := n$ falls $v_i \in V_{i,n}$ und $\#(v_1 \otimes v_2) := \#v_1 + \#v_2$.

Wir zerlegen zunächst jedes $v_1 \otimes v_2$ in Komponenten in $V_1^s \star V_2$ bzw. $V_1^a \star V_2$. Wir bemerken zunächst, daß für meromorphes $f(z)$ mit $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ offenbar $\oint_C \phi(z) f(z) dz\, v \in V_3^a\ \forall v \in V_1(z_1) \otimes V_2(z_2)$. Deshalb ist

$$\phi_{n+h_\phi} v_1 \otimes v_2 \equiv -v_1 \otimes \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} dz (z - z_1)^{-n-1} \phi(z) v_2. \tag{4.8}$$

Die rechte Seite kann man dann ausrechnen und erhält

$$\phi_{n+h_\phi} v_1 \otimes v_2 \equiv v_1 \otimes \sum_{k=1}^{\infty} (-)^n \binom{n+k-1}{k-1} (z_1 - z_2)^{-n-k} \phi_{h_\phi - k} v_2. \tag{4.9}$$

Offenbar ist der Grad aller Summanden auf der rechten Seite kleiner als der der linken Seite.

Analog kann man dann Vektoren in $V_1^s \star V_2$ in Komponenten in $V_1^s \star V_2^s$ und $V_1^s \star V_2^a$ zerlegen.

q.e.d.

Insbesondere gilt natürlich, daß

$$\dim V_3^s \le \dim V_1^s \, \dim V_2^s.$$

[(i)] Aus ästhetischen Gründen wäre es schöner, statt spezieller Unterräume den Faktorraum V_i / V_i^a zu betrachten, für explizite Rechnungen ist die Unterraumformulierung allerdings besser geeignet. Dimensionsargumente werden dadurch natürlich nicht berührt.

Damit ist die Kategorie aller $\mathcal{A}$-Moduln V mit $\dim V^s < \infty$ offenbar unter Fusion abgeschlossen. Solche Moduln heißen *quasirational*.
Man ist für einfache Rechnungen besonders am Tiefstgewichtsraum des Fusionsproduktes von V_1 und V_2 interessiert. Sei daher $\mathcal{A}_+$ das lineare Erzeugnis von $\{\phi_m \mid \phi \in \mathcal{A}, m > 0\}$. Sei weiter $V_i^A := \mathcal{A}_+ V_i$ und $V_i^l \subset V_i$ ein beliebiger Unterraum, so daß $V_i^l \oplus V_i^A$ dicht in V_i liegt. Letzteres ist dann zwar nicht unbedingt Tiefstgewichtsraum von V_i, wohl aber lineares Erzeugnis von Repräsentanten von Tiefstgewichtsvektoren einer minimalen Filtrierung nach Tiefstgewichtsmoduln (vgl. Kapitel 3). Das Symbol „$\equiv$“ bezeichne nun Gleichheit modulo V_3^A.

Lemma 4.1.2 *Seien $V_1^s \subset V_1$ und $V_2^l \subset V_2$ fest gewählt. Dann gilt*

$$V_3 \equiv V_1^s \otimes V_2^l.$$

Beweis: Setze der Einfachheit halber $z_2 = 0$. Sei $v_1 \otimes v_2$ wie oben homogener Vektor. Wir zerlegen ihn zunächst in Komponenten in $V_1 \otimes V_2^l$ und $V_1 \otimes V_2^A$. Dafür sei $v_2 = \phi_n v_2'$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) $n \geq h_\phi$: Aus Gleichung (4.7) folgt

$$v_1 \otimes v_2 \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (-)^k \binom{n+k-h_\phi-1}{k-1} z_1^{-n+h_\phi-k} \phi_{h_\phi-k} v_1 \otimes v_2' \tag{4.10}$$

(ii) $0 < n < h_\phi$: Hier folgt aus Gleichung (4.3)

$$v_1 \otimes v_2 \equiv -\sum_{k=1}^{h_\phi-n} \binom{h_\phi-n-1}{k-1} z_1^{-n+h_\phi-k} \phi_{h_\phi-k} v_1 \otimes v_2' \tag{4.11}$$

In beiden Fällen wird der Grad von v_2 reduziert, so daß der Algorithmus abbricht. Wir müssen nun noch Vektoren in $V_1 \otimes V_2^l$ in Komponenten in $V_1^s \otimes V_2^l$ und $V_1^a \otimes V_2^l$ zerlegen. Sei dafür $v_1 = \phi_{h_\phi+n} v_1'$. Dann ist nach Gleichung (4.9)

$$\begin{aligned}
v_1 \otimes v_2 &\equiv v_1' \otimes \sum_{k=0}^{\infty} (-)^n \binom{n+k}{n} z_1^{-n-k-1} \phi_{h_\phi-k-1} v_2 \\
&= v_1' \otimes \sum_{k=h_\phi-1}^{\infty} (-)^n \binom{n+k}{n} z_1^{-n-k-1} \phi_{h_\phi-k-1} v_2 \\
&\quad + (-)^n \underbrace{v_1' \otimes \sum_{k=0}^{h_\phi-2} (-)^n \binom{n+k}{n} z_1^{-n-k-1} \phi_{h_\phi-k-1} v_2}_{=:A}
\end{aligned}$$

Mit Gleichung (4.3) folgt dann, daß

$$\begin{aligned}
A &\equiv -\sum_{k=0}^{h_\phi-2} \sum_{l=0}^{k} \binom{n+k}{n} \binom{k}{k-l} z_1^{l-n-k-1} \phi_{l+h_\phi-k-1} v_1' \otimes v_2 \\
&= -\sum_{l=0}^{h_\phi-2} \sum_{k=0}^{h_\phi-2-l} \frac{(n+l+k)!}{n!\,l!\,k!} z_1^{-n-l-1} \phi_{h_\phi-l-1} v_1' \otimes v_2
\end{aligned}$$

und zusammen

$$
\begin{aligned}
v_1 \otimes v_2 \quad &\equiv \quad v_1' \otimes \sum_{k=h_\phi-1}^{\infty} (-)^n \binom{n+k}{n} z_1^{-n-k-1} \phi_{h_\phi-k-1} v_2 \\
&+(-)^{n+1} \sum_{l=0}^{h_\phi-2} \sum_{k=0}^{h_\phi-2-l} \frac{(n+l+k)!}{n!l!k!} z_1^{-n-l-1} \phi_{h_\phi-l-1} v_1' \otimes v_2 \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

In jedem Summand wird der Grad in V_1 bei gleichem oder niedrigerem Grad in V_2 erniedrigt, so daß auch dieser Algorithmus abbricht.

q.e.d.

Die Darstellung der Nullmoden-Algebra $\mathcal{A}_0 := \langle \phi_0;\ \phi \in \mathcal{A} \rangle$ auf $V_1^s \otimes V_2^l$ kann dann mit Gleichung (4.3), also

$$
\phi_0(v_1 \otimes v_2) = \sum_{k=0}^{h_\phi-1} \binom{h_\phi - 1}{k} z_1^k \phi_k v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes \phi_0 v_2, \qquad (4.13)
$$

explizit ausgerechnet werden.

4.2 Rechnungen

Die im vorangehenden Abschnitt beschriebenen Rechnungen wurden für $\mathcal{A} = \mathcal{L}$ für einige uns besonders interessierende Darstellungen durchgeführt. Insbesondere sind dies für $c = -2$ die Fusionen zwischen den irreduziblen Tiefstgewichtsdarstellungen mit $h = -\frac{1}{8}, \frac{3}{8}$ sowie der minimalen Jordan-Tiefstgewichtsdarstellung zum Tiefstgewicht 0 und für $c = -7$ die Fusion des irreduziblen TGMs zum (tiefsten vorkommenden) Gewicht $-\frac{1}{3}$. Exemplarisch sei hier ein Beispiel vorgeführt:
Sei V der irreduzible TGM zum Tiefstgewicht $h = -\frac{1}{8}$ und zentraler Ladung $c = -2$ mit Tiefstgewichtsvektor v. Wegen des Nullvektors auf Level 2 ist eine Basis eines speziellen Unterraums durch $\{v, L_1 v\}$ gegeben. Explizit gilt in $V^s \otimes V^l$ mit Gleichung (4.12)

$$
\begin{aligned}
L_1^2 v \otimes v \quad &= \quad \frac{1}{2} L_2 v \otimes v \\
&\equiv \quad \frac{1}{2}(-z_1^{-1} L_1 v \otimes v + \sum_{k=1}^{\infty} z_1^{-k-1} v \otimes L_{1-k} v) \\
&= \quad -\frac{1}{2} z_1^{-1} L_1 v \otimes v + \frac{1}{2} z_1^{-2} v \otimes L_0 v \\
&= \quad -\frac{1}{2} z_1^{-1} L_1 v \otimes v - \frac{1}{16} z_1^{-2} v \otimes v.
\end{aligned}
$$

Damit und mit Gleichung (4.13) gilt

$$
L_0(v \otimes v) \quad = \quad -\frac{1}{4} v \otimes v + z_1 L_1 v \otimes v \qquad \text{und}
$$

$$\begin{aligned} L_0(L_1 v \otimes v) &= \frac{3}{4} L_1 v \otimes v + z_1 L_1^2 v \otimes v \\ &= \frac{1}{4} L_1 v \otimes v - \frac{1}{16} z_1^{-1} v \otimes v. \end{aligned}$$

L_0 operiert also auf $V^s \otimes V^l$ via der Matrix

$$L_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{16} z_1^{-1} \\ z_1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

die die folgende Jordan-Normalform besitzt:

$$L_0^J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Ergebnisse der übrigen Rechnungen finden sich in Anhang B. Man sieht aber schon am hier aufgeführten Beispiel, daß man auch über Fusionsrechnungen auf die Notwendigkeit zur Einbeziehung von Darstellungen mit Nilpotenzlänge > 1 geführt wird.

Kapitel 5

Rationale Theorien

Rationale Theorien sind dadurch definiert, daß bereits eine endliche Anzahl von Darstellungen der Symmetriealgebra unter Fusion schließt bzw. die Zustandssumme der Theorie bereits aus endlich vielen Charakteren zusammengesetzt ist. Für die minimalen Modelle hatten wir gesehen, daß man bereits bezüglich der Virasoro-Algebra rationale Theorien erhält. Bei anderen Werten der zentralen Ladung ist es unter Umständen möglich, rationale Theorien bezüglich einer erweiterten Symmetriealgebra, also einer $\mathcal{W}$-Algebra, zu konstruieren. Insbesondere interessieren wir uns für rationale Theorien bei zentralen Ladungen in der von uns betrachteten logarithmischen Serie $c = c_{1,q}$. In seiner Doktorarbeit ([25], siehe auch [26]) konstruierte M. Flohr solche rationalen Modelle. Die zugrundeliegende Symmetriealgebra war dabei jeweils eine $\mathcal{W}(2,(2q-1)^3)$. Diese Serie von $\mathcal{W}$-Algebren hatte H.G. Kausch [41] gefunden, als er die Möglichkeit untersuchte, die Virasoro-Algebra um ein Multiplett von Feldern gleicher Dimension zu erweitern. Neben einigen sporadischen Lösungen fand er dabei gerade die obige Serie, in denen $\mathcal{L}$ um ein Triplett von Feldern ungerader Dimension erweitert ist, das eine $SO(3)$-Struktur aufweist. Die dazugehörige OPE lautet

$$W^j(z)W^k(\zeta) = \frac{c}{h_W}\delta^{jk}\frac{1}{(z-\zeta)^{2h}} + C_{WW}^{W} i\varepsilon^{jkl}\frac{W^l(\zeta)}{(z-\zeta)^h} + \text{reguläre Terme}, \tag{5.1}$$

wobei $c = c_{1,q}$ und $h_W = 2q-1$ sind. Diese Algebren enthalten jeweils eine $\mathcal{W}(2, 2q-1)$ als Unteralgebra, die vom Virasoro-Feld und der Summe der drei Felder aufgespannt wird. M. Flohr zeigte zunächst, daß die Singulett-Algebra $\mathcal{W}(2, 2q-1)$ nicht ausreicht, um eine rationale Theorie zu erhalten, da der Orbit des Vakuumcharakters unter modularen Transformationen einen unendlichdimensionalen Raum aufspannt. Er zeigte aber weiter, daß der Charakter der Vakuum-Darstellung der Triplettalgebra unter Modul-Transformationen einen endlichdimensionalen Raum aufspannt und konstruierte daraus Zustandssumme und Charaktere einer Theorie mit endlich vielen Darstellungen der Symmetriealgebra. Nachteil der Konstruktion war aber, daß in seinen Charakteren Logarithmen auftauchten, die zumindest mit der üblichen Definition des Charakters nicht zu vereinbaren sind.
Wir werden in diesem Kapitel sehen, daß es (zumindest auf einer heuristischen Basis) möglich ist, rationale Modelle zu konstruieren, ohne dabei auf logarithmische Charaktere zurückgreifen zu müssen. Zunächst folgt aber noch ein kleiner Exkurs über modulares

Verhalten von Charakteren.

5.1 Modulare Invarianz

Definiert man konforme Feldtheorien nicht auf der Riemannschen Zahlenkugel, sondern auf dem Torus, so kann man das Verhalten der n-Punkt-Funktionen unter modularen Transformationen studieren. Ein Torus ist nämlich gerade durch die komplexe Ebene modulo eines Gitters gegeben, entlang dem für die Felder (anti-) periodische Randbedingungen gefordert werden. Das Gitter ist dabei ein $\mathbb{Z}$-Modul. Seien ω_1, ω_2 eine Basis davon. Die Modul-Gruppe $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$ ist dann gerade durch die orientierungserhaltenden Basistransformationen gegeben und wird von den beiden Elementen $T = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ und $S = \left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ frei erzeugt mit den Relationen $S^2 = (ST)^3 = \mathbb{1}$. Sei im folgenden mit $\tau \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}\tau > 0$, der modulare Parameter $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ des Torus bezeichnet. Dann lautet die Operation von Γ auf der oberen Halbebene der komplexen Zahlen:

$$T : \tau \longrightarrow \tau + 1 \tag{5.2}$$
$$S : \tau \longrightarrow -\frac{1}{\tau} \tag{5.3}$$

Modulare Invarianz (richtiger: modulare Kovarianz) einer CFT bedeutet nun, daß die n-Punkt-Funktionen auf dem Torus Darstellungsräume von Γ aufspannen.
Wie in der Einleitung erwähnt, ist die Zustandssumme einer statistischen CFT auf dem Torus gerade durch

$$Z(\tau,\bar{\tau}) = (q\bar{q})^{\frac{c}{24}}\mathrm{tr}(q^{L_0}\bar{q}^{\bar{L}_0}) \tag{5.4}$$

gegeben, wobei wir die üblichen Definitionen $q := \exp(2\pi i\tau)$ und $\bar{q} := \exp(-2\pi i\bar{\tau})$ verwendet haben. Das erstaunliche Resultat von J.L. Cardy [12], das dann von W. Nahm bewiesen wurde [50], ist nun, daß konforme Invarianz einer Quantenfeldtheorie auf S^2 bereits zwingend modulare Invarianz der Zustandssumme auf dem Torus impliziert. Der Beweis ist zwar streng genommen nur für Theorien mit diagonalisierbarem L_0 gültig, das Resultat sollte aber auch in unserem Fall gelten$^{(i)}$.
Definiert man nun den (Virasoro-)Charakter einer $\mathcal{W}$-Darstellung W wie in Kapitel 3 (da $\mathcal{L} \subset \mathcal{W}$ gilt, ist jede $\mathcal{W}$-Darstellung natürlich auch $\mathcal{L}$-Darstellung), so sieht man leicht, daß die Zustandssumme unter Verwendung der Aufspaltung des Hilbertraumes in unzerlegbare $\mathcal{W}$-Darstellungen (die Menge dieser Darstellungen sei mit der Indexmenge Λ indiziert) als

$$Z(\tau,\bar{\tau}) = \sum_{\lambda,\lambda'\in\Lambda} N_{\lambda,\lambda'}\chi_\lambda(\tau)\chi^*_{\lambda'}(\bar{\tau}) \tag{5.5}$$

geschrieben werden kann, wobei die $N_{\lambda,\lambda'} \in \mathbb{N}^0$ sind. Invarianz der Zustandssumme korrespondiert also dazu, daß die Charaktere für rationale Theorien eine (bezüglich der durch $(N_{\lambda,\lambda'})_{\lambda,\lambda'}$ gegebenen Sesquilinearform) unitäre, endlichdimensionale Darstellung der Modul-Gruppe aufspannen.

$^{(i)}$So hoffen wir – für Theorien, die über ein Funktionalintegral definiert sind, ist es aber immerhin klar.

Obwohl wir dies in dieser Arbeit nicht verwenden werden, sei noch bemerkt, daß bei Kenntnis der führenden Terme der Charaktere (durch explizite Berechnung der Dimensionen der entsprechenden Levels der Darstellungen) die übrigen Koeffizienten aus einer Differentialgleichung bestimmt werden können [42, 43].

5.2 Quantendimensionen

Als Analogon zur Dimension einer Darstellung einer endlichdimensionalen Lie-Algebra wollen wir noch kurz den Begriff der *Quantendimension* einer $\mathcal{W}$-Darstellung V einführen. Da die Dimension einer solchen Darstellung stets unendlich ist, wollen wir ein regularisiertes Maß für ihre Größe konstruieren.
Wäre V endlichdimensional, so wäre $\dim V = \chi_V(0)$, da die Koeffizienten der Potenzreihe in q ja gerade die Dimensionen der Eigenräume von L_0^d sind. Bezeichne nun V^{min} die $\mathcal{W}$-Darstellung mit dem kleinsten Tiefstgewicht und χ_{min} ihren Charakter. Seien die übrigen Darstellungen mit $V^\lambda, \lambda \in \Lambda$ und ihre Charaktere mit χ_λ bezeichnet. Dann definieren wir als die *Quantendimension* der Darstellung V^λ den Quotienten

$$d_\lambda := \lim_{i\tau \nearrow 0} \frac{\chi_\lambda(\tau)}{\chi_{min}(\tau)}. \tag{5.6}$$

Lax gesprochen vergleichen wir also die (unendliche) Dimension der Darstellung V^λ mit der (unendlichen) Dimension von V^{min}.
Ist die Matrix $(S_{i,j})$ der modularen Transformation S (5.3) auf den Charakteren bekannt, so lassen sich die Quantendimensionen leicht ausrechnen:

$$d_\lambda = \lim_{i\tau \nearrow 0} \frac{\sum_{j\in\Lambda} S_{j,\lambda}\chi_j(-\frac{1}{\tau})}{\sum_{k\in\Lambda} S_{k,min}\chi_k(-\frac{1}{\tau})} = \lim_{q\to 0} \frac{\sum_{j\in\Lambda} S_{j,\lambda}\chi_j(q)}{\sum_{k\in\Lambda} S_{k,min}\chi_k(q)} = \frac{S_{\min,\lambda}}{S_{min,min}}. \tag{5.7}$$

5.3 Rationales Modell bei c = −2

Die Aufspaltung der Vakuumdarstellung der $\mathcal{W}(2,3)$ bei $c = -2$ in unzerlegbare $\mathcal{L}$-Moduln ist über den Isomorphismus zwischen Feldern und Zuständen explizit bekannt [24] und durch

$$V_0^{\mathcal{W}(2,3)} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}^0} M(h_{4n+3,1}, -2) \tag{5.8}$$

gegeben. Bezeichnen wir mit $\chi_i^{\mathcal{L}}$ den Charakter von $M(h_{i,1}, -2)$ (siehe Abschnitt 3.2.4), so folgt für den Charakter

$$\chi_0^{\mathcal{W}(2,3)} = \sum_{n\in\mathbb{N}^0} \chi_{4n+3}^{\mathcal{L}}. \tag{5.9}$$

Berücksichtigt man die Multiplizitäten durch die horizontale $\mathfrak{su}(2)$-Algebra, so folgt für die Vakuumdarstellung der $\mathcal{W}(2,3,3,3)$

$$V_0^{\mathcal{W}(2,3,3,3)} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \bigoplus_{j=1}^{2n+1} M(h_{4n+3,1}, -2), \tag{5.10}$$

und der Charakter ergibt sich damit zu

$$\chi_0^{\mathcal{W}(2,3,3,3)} = \sum_{n\in\mathbb{N}^0} (2n+1)\chi^{\mathcal{L}}_{4n+3}. \tag{5.11}$$

Während der Orbit von $\chi_0^{\mathcal{W}(2,3)}$ unter Γ eine unendlichdimensionale Darstellung von Γ aufspannt, spannt $\chi_0^{\mathcal{W}(2,3,3,3)}$ eine endlichdimensionale Darstellung auf [25]. Leider wird man dabei aber zwingend auf “Charaktere” mit logarithmischen Termen geführt.
Wir wollen nun einen anderen Ansatz wählen und starten nicht mit der Vakuumdarstellung, sondern mit einer Extension davon, wie es ja auch von den Ergebnissen aus den Abschnitten 2.6 und 4.2 nahegelegt wird.
Im allgemeinen ist schon für gewöhnliche $\mathcal{W}$-Vermamoduln die Aufspaltung in unzerlegbare $\mathcal{L}$-Moduln kompliziert, die einfache Struktur (5.8) bzw. (5.10) erhält man erst auf der Ebene der irreduziblen Darstellung. Wir wenden uns also daher direkt dem minimalen $\mathcal{W}(2,3)$-JTGM $V_{0*}^{\mathcal{W}(2,3)}$ zum Tiefstgewicht 0 mit Eigenwert 0 von W_0 auf dem Tiefstgewichtsraum zu, wobei ein $\mathcal{W}$-JTGM analog zu den $\mathcal{L}$-JTGMn aus Kapitel 3 definiert sei. Mit dem gleichen Algorithmus wie in Abschnitt 3.4.7 unter Verwendung von Satz 2.5.4 können wir die ersten Levels von $V_{0*}^{\mathcal{W}(2,3)}$ explizit berechnen und mit den Ergebnissen von Kapitel 3 die unzerlegbaren $\mathcal{L}$-Moduln identifizieren, aus denen sie aufgebaut sind.
Aus Gründen der Rechenkapazität konnten wir dieses Programm nur bis einschließlich Level 8 durchführen (die Dimension des achten Levels des entsprechenden $\mathcal{W}$-Verma-Moduls ist schon 370, die des minimalen Moduls immerhin noch 44 – die Berechnungen benötigten auf einem Pentium90-Rechner ca. 1 Woche). Um das Ergebnis kurz aufschreiben zu können, benötigen wir noch einige Konventionen: Bezeichne mit (s,r) einen gestuften vermaartigen $\mathcal{L}$-Modul mit Tiefstgewichten $h^{(0)} = h_{s,1}$ und $h^{(1)} = h_{r,1}$. Dann läßt sich z.B. der minimale $\mathcal{L}$-JTGM zum Tiefstgewicht 0 als $\frac{(3,3)}{(5,7)}$ schreiben. Damit ergab die explizite Rechnung:

$$V_{0*}^{\mathcal{W}(2,3)} = \frac{(3,3)}{(5,7)} \oplus \frac{(5,7)}{(9,?)} \oplus \frac{(9,?)}{(?,?)} \oplus \dots \tag{5.12}$$

Es drängt sich also die Vermutung auf, daß $V_{0*}^{\mathcal{W}(2,3)}$ gerade die Summe von minimalen gestuften $\mathcal{L}$-Moduln ist, wobei die Summanden von $V_0^{\mathcal{W}(2,3)} \subset V_{0*}^{\mathcal{W}(2,3)}$ jeweils (bis auf den ersten Summand echte) Untermoduln des unteren Moduls des entsprechenden gestuften Moduls sind. Mit dieser Vermutung können wir (5.12) in geschlossener Form schreiben:

$$V_{0*}^{\mathcal{W}(2,3)} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \frac{(5+4(k-1), 3+4k)}{(5+4k, 3+4(k+1))} \tag{5.13}$$

Man beachte dabei, daß $h_{1,1} = h_{3,1} = 0$. Bringen wir wieder die entsprechenden $\mathfrak{su}(2)$-Multiplizitäten an, so erhalten wir damit das Resultat

$$V_{0*}^{\mathcal{W}(2,3,3,3)} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigoplus_{j=1}^{2k+1} \frac{(5+4(k-1), 3+4k)}{(5+4k, 3+4(k+1))}. \tag{5.14}$$

Mit Abschnitt 3.4.9 können wir jetzt den Charakter dieser Darstellung als Summe von unzerlegbaren $\mathcal{L}$-Charakteren schreiben. Für das Studium seines modularen Transformationsverhaltens ist es allerdings günstiger, ihn mit Hilfe der sogenannten *Jacobi-Riemannschen Theta-Funktionen*

$$\Theta_{\lambda,k}(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{(2kn+\lambda)^2}{4k}} \tag{5.15}$$

mit Symmetrien $\Theta_{\lambda,k} = \Theta_{-\lambda,k} = \Theta_{\lambda+2k,k}$ zu schreiben, und wir erhalten damit das einfache Ergebnis

$$\chi_{0*}^{\mathcal{W}(2,3,3,3)}(q) = \frac{2}{\eta(q)}\Theta_{1,2}(q). \tag{5.16}$$

Weiterhin benötigen wir noch die sogenannten *affinen Theta-Funktionen*

$$(\partial\Theta)_{\lambda,k}(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(2kn+\lambda) q^{\frac{(2kn+\lambda)^2}{4k}} \tag{5.17}$$

mit $(\partial\Theta)_{\lambda,k} = -(\partial\Theta)_{-\lambda,k}$ und $(\partial\Theta)_{0,k} = (\partial\Theta)_{k,k} = 0$. Das Transformationsverhalten von Eta-, Theta- und affinen Theta-Funktionen unter modularen Transformationen ist durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned}
(S\eta)(\tau) &= \sqrt{-i\tau}\,\eta(\tau) \\
(T\eta)(\tau) &= e^{\frac{i\pi}{12}}\eta(\tau) \\
(S\Theta_{\lambda,k})(\tau) &= \sqrt{\frac{-i\tau}{2k}}\sum_{\lambda'=0}^{2k-1} e^{i\pi\frac{\lambda\lambda'}{k}}\Theta_{\lambda',k}(\tau) \\
(T\Theta_{\lambda,k})(\tau) &= e^{i\pi\frac{\lambda^2}{2k}}\Theta_{\lambda,k}(\tau) \\
(S(\partial\Theta)_{\lambda,k})(\tau) &= \sqrt{\frac{1}{2k}}(-i\tau)^{\frac{3}{2}}\sum_{\lambda'=1}^{2k-1} e^{i\pi\frac{\lambda\lambda'}{k}}(\partial\Theta)_{\lambda',k}(\tau) \\
(T(\partial\Theta)_{\lambda,k})(\tau) &= e^{i\pi\frac{\lambda^2}{2k}}(\partial\Theta)_{\lambda,k}(\tau).
\end{aligned}$$

Damit sieht man leicht, daß die von $\chi_{0*}^{\mathcal{W}(2,3,3,3)}$ aufgespannte Darstellung von Γ dreidimensional ist und eine Basis durch

$$\left\{\chi_{-1/8}^{\mathcal{W}(2,3,3,3)}, \chi_{0*}^{\mathcal{W}(2,3,3,3)}, \chi_{3/8}^{\mathcal{W}(2,3,3,3)}\right\} \tag{5.18}$$

gegeben ist, wobei

$$\chi_{-1/8}^{\mathcal{W}(2,3,3,3)}(q) := \frac{1}{\eta(q)}\Theta_{0,2}(q) \qquad \text{und} \tag{5.19}$$

$$\chi_{3/8}^{\mathcal{W}(2,3,3,3)}(q) := \frac{1}{\eta(q)}\Theta_{2,2}(q). \tag{5.20}$$

Schreibt man $\chi_{-1/8}^{\mathcal{W}(2,3,3,3)}$ und $\chi_{3/8}^{\mathcal{W}(2,3,3,3)}$ in irreduziblen $\mathcal{L}$-Charakteren aus, so erhält man

$$\chi_{-1/8}^{\mathcal{W}(2,3,3,3)} = \sum_{k\geq 0}(2k+1)\chi_{4k+2}^{\mathcal{L}} \qquad \text{und} \tag{5.21}$$

$$\chi_{3/8}^{\mathcal{W}(2,3,3,3)} = \sum_{k\geq 0}(2k+2)\chi_{4k+4}^{\mathcal{L}}. \tag{5.22}$$

Dies sind gerade die Charaktere der (bekannten) Darstellungen der $\mathcal{W}(2,3,3,3)$ zu den Tiefstgewichten $h_{2,1} = -\frac{1}{8}$ und $h_{4,1} = \frac{3}{8}$ mit W-Eigenwerten 0 bzw. $\frac{1}{2\sqrt{6}}$ auf den Tiefstgewichtsräumen. Während die Darstellung zu $h = -\frac{1}{8}$ eine Tiefstgewichtsdarstellung ist, besteht der Tiefstgewichtsraum der Darstellung zu $h = \frac{3}{8}$ bei diagonalisierbarem L_0 aus einem Dublett bezüglich der horizontalen $\mathfrak{su}(2)$-Algebra. Anhand des Charakters allein kann allerdings nicht ausgeschlossen werden, daß die „richtige" Darstellung zu $h = \frac{3}{8}$ nichtdiagonales L_0 auf dem Tiefstgewichtsraum besitzt, da gerade bei diesem Gewicht Fall (b) von Vermutung 3.4.29 auftritt.
Die Matrizen von S und T berechnen sich in der Basis (5.18) zu

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\pi}{12}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{6}} & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-\frac{i\pi}{12}} \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

Diese Matrizen sind genau bezüglich des durch

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

(bzw. Vielfachen davon) gegebenen Skalarprodukts unitär, so daß wir die (bis auf skalare Vielfache eindeutige) modulinvariante Zustandssumme

$$Z = |\chi_{-1/8}^{\mathcal{W}(2,3,3,3)}|^2 + \frac{1}{2}|\chi_{0*}^{\mathcal{W}(2,3,3,3)}|^2 + |\chi_{3/8}^{\mathcal{W}(2,3,3,3)}|^2 \tag{5.24}$$

erhalten. Der Faktor $\frac{1}{2}$ vor dem mittleren Term rührt von der bereits von V. Gurarie [34] festgestellten Tatsache her, daß in der vollen Theorie der obere (untere) Tiefstgewichtsvektor von $V_{0*}^{\mathcal{W}(2,3,3,3)}$ gerade der untere (obere) Tiefstgewichtsvektor von $\overline{V_{0*}^{\mathcal{W}(2,3,3,3)}}$ ist.
Die Quantendimensionen der drei Darstellungen berechnen sich nach Gleichung (5.7) zu

$$\begin{aligned} d_{-1/8} &= 1 \quad \text{(trivial)}, \\ d_{0*} &= 2 \quad \text{und} \\ d_{3/8} &= 1, \end{aligned} \tag{5.25}$$

während die Quantendimension der Vakuumdarstellung mit Charakter

$$\chi_0^{\mathcal{W}(2,3,3,3)}(q) = \frac{1}{2\eta(q)}(\Theta_{1,2}(q) + (\partial\Theta)_{1,2}(q)) \tag{5.26}$$

(der nicht in der Darstellung liegt) durch

$$d_0 = \lim_{q\nearrow 1} \frac{\Theta_{1,2}(q) + (\partial\Theta)_{1,2}(q)}{\Theta_{0,2}(q)} = \lim_{q\searrow 0} \frac{\frac{1}{i\pi}\log q(\partial\Theta)_{1,2}(q) + \Theta_{0,2}(q) - \Theta_{2,2}(q))}{2(\Theta_{0,2}(q) - 2\Theta_{1,2}(q) + \Theta_{2,2}(q))} = \frac{1}{2} \tag{5.27}$$

gegeben ist.

Die Fusionsstruktur der beteiligten Darstellungen ist schwer zu bestimmen, da die Formel von E. Verlinde [44, 54] nicht verwendbar ist. Dies liegt im wesentlichen daran, daß diese Formel voraussetzt, daß eine der Darstellungen die Vakuumdarstellung ist. Auch ist es fraglich, in welcher Form das Konzept einer Fusionsalgebra überhaupt verwendbar ist, wenn man es mit Theorien zu tun hat, in denen die Darstellungen nicht irreduzibel sind. Es kann nämlich durchaus vorkommen, daß die Fusion zweier Darstellungen gemäß Kapitel 4 als Faktormodul nicht eine der unzerlegbaren Darstellungen beinhaltet, sondern lediglich einen Untermodul davon. Als Beleg dafür, daß zumindest keine einfache Verallgemeinerung der Verlinde-Formel

$$N_{ij}^{k} = \sum_{l} \frac{S_{jl} S_{lk} S_{il}}{S_{0l}} \tag{5.28}$$

in unserem Falle Sinn macht, sei erwähnt, daß daraus unter Vernachlässigung der teilweise verschwindenden Nenner folgen würde, daß das Feld zum Tiefstgewicht $-\frac{1}{8}$ ein sogenannter einfacher Strom ist, d.h. Fusion damit den Raum der Darstellungen bijektiv in sich abbildet. Die Ergebnisse in Anhang B deuten aber darauf hin, daß dies nicht der Fall ist. Da sich die (auf die Vakuumdarstellung normierten) Quantendimensionen multiplikativ unter Fusion verhalten sollten, können wir mit den Virasoro-Fusionsrechnungen aus Anhang B aber immerhin mit großer Sicherheit sagen, daß z.B. die Fusion der Darstellung zu $h = -\frac{1}{8}$ mit sich selbst gerade die erweiterte Vakuum-Darstellung liefert $((2\times 1)\times(2\times 1) = 2\times 2)$. Um wirkliche Aussagen machen zu können, müßte man aber Fusion bezüglich der vollen $\mathcal{W}$-Algebra berechnen (und auch das nicht nur auf Tiefstgewichtsraum-Ebene), was unsere derzeitigen Möglichkeiten an Rechenleistung übersteigt. Eine erste Vermutung über die Struktur des Fusionrings (so er Sinn macht, s.o.) anhand der Quantendimensionen und der Virasoro-Rechnungen in Anhang B lautet

$$\begin{array}{ccccl}
[-\frac{1}{8}] & \star & [-\frac{1}{8}] & = & [0^*], \\
[-\frac{1}{8}] & \star & [0^*] & = & 2\,[-\frac{1}{8}] \oplus 2\,[\frac{3}{8}], \\
[-\frac{1}{8}] & \star & [\frac{3}{8}] & = & [0^*], \\
[0^*] & \star & [0^*] & = & 4\,[0^*], \\
[0^*] & \star & [\frac{3}{8}] & = & 2\,[-\frac{1}{8}] \oplus 2\,[\frac{3}{8}] \;\; \text{und} \\
[\frac{3}{8}] & \star & [\frac{3}{8}] & = & [0^*].
\end{array}$$

Diese Ergebnisse sind aber aus offensichtlichen Gründen nur mit großen Vorbehalten zu werten. Nimmt man das Ergebnis ernst, so folgt daraus eine „Verlinde“-Formel

$$(N_{ij}^{k})_{kj} = S\,\Lambda_i\,S$$

mit

$$\Lambda_{-\frac{1}{8}} = \Lambda_{\frac{3}{8}} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Lambda_{0*} = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 0 & \\ & & 4 \end{pmatrix}.$$

Wie die Λ_i mit S zusammenhängen, ist allerdings unklar.

Kapitel 6

Polymere

Wir wollen nun noch kurz auf ein konkretes physikalisches System eingehen, in dem unsere bisher gemachten Überlegungen Relevanz haben. Wir werden allerdings keine erschöpfende Diskussion geben können, sondern uns darauf beschränken, die möglichen Konsequenzen aus unseren Rechnungen anzureißen.
Es ist allgemein bekannt, daß das zweidimensionale Polymersystem als $n \to 0$-Limes des $O(n)$-Modells beschrieben wird. Die mittlere Polymerlänge divergiert für $T \leq T_c$, wobei T_c die kritische Temperatur des Systems ist. Daher erwarten wir hier konforme Invarianz des Systems. Der mittlere Anteil f der Gesamtfläche, der von Polymeren bedeckt ist, ergibt sich zu $f = 0$ für $T = T_c$ (verdünnte Polymere) und $f \in [0, 1[$ für $T < T_c$ (dichte Phase). Während die zentrale Ladung des $O(n)$-Modells am kritischen Punkt $T = T_c$ im Limes $n \to 0$ durch $c = 0$ gegeben ist, erhält man für die dichte Phase $T < T_c$ den Wert $c = -2$ [16, 17]. Dies ist der Fall, mit dem wir uns im folgenden beschäftigen wollen.
Schon in einer frühen Veröffentlichung zeigten B. Duplantier und H. Saleur [17], daß die volle Zustandssumme des zweidimensionalen Polymersystems auf dem Torus identisch Null ist. Definiert man hingegen auf dem quadratischen Gitter die Zustandssummen

$$Z^g := \left\{ \begin{array}{l} \text{Summe über dichte Überdeckungen des Gitters durch eine} \\ \textit{gerade} \text{ Anzahl von Polymeren, die nicht homotop zu 0 sind,} \\ \text{mit Gewichtungsfaktor } 2^{\#Polymere} \end{array} \right\} \tag{6.1}$$

und

$$Z^u := \left\{ \begin{array}{l} \text{Summe über dichte Überdeckungen des Gitters durch eine} \\ \textit{ungerade} \text{ Anzahl von Polymeren, die nicht homotop zu 0 sind,} \\ \text{mit Gewichtungsfaktor } 2^{\#Polymere} \end{array} \right\}, \tag{6.2}$$

so zeigte H. Saleur später [53] durch explizite Gitterrechnungen, daß erstere im Kontinuum-Limes durch

$$Z^g(q) = \frac{1}{|\eta(q)|^2} \left(|\Theta_{0,2}(q)|^2 + 2|\Theta_{1,2}(q)|^2 + |\Theta_{2,2}(q)|^2 \right) \tag{6.3}$$

gegeben ist, was gerade unsere Zustandssumme (5.24) ist. Für Z^u bemerkt man, daß die getwistete $\mathcal{W}(2, 3, 3, 3)$ (man fordert antiperiodische Randbedingungen an die W-Felder, die dadurch halbzahlige Moden erhalten) höchstens zwei Darstellungen zuläßt, nämlich zu den Gewichten $h = -\frac{3}{32}$ bzw. $h = \frac{5}{32}$ (die getwistete $\mathcal{W}(2,3)$ besitzt zwei Darstellungen mit genau diesen Gewichten [36]). Nimmt man nun an, daß deren Charaktere durch

$$\chi^{W(2,3,3,3)}_{-3/32}(q) = \frac{1}{\eta(q)}\Theta_{\frac{1}{2},2}(q) \tag{6.4}$$

und

$$\chi^{W(2,3,3,3)}_{5/32}(q) = \frac{1}{\eta(q)}\Theta_{\frac{3}{2},2}(q) \tag{6.5}$$

gegeben sind, so erhält man damit gerade Z^u. Man sieht also, daß sich die vollständige Zustandssumme

$$Z = Z^g + Z^u \tag{6.6}$$

mit Hilfe unseres rationalen Modells aus Abschnitt 5.3 erklären läßt. Betrachten wir nun die L-Bein-Operatoren Φ_L mit konformen Gewichten $h_L = \frac{L^2}{32} - \frac{1}{8}$ [53] (der L-Bein-Operator $\Phi_L(r)$ projiziert auf Zustände, bei denen an der Stelle r L Polymerketten entspringen). Für alle $k \in \mathbb{N}$ fallen diese jetzt offenbar in die folgenden $\mathcal{W}$-Darstellungen:

$$\begin{array}{rcl}
\Phi_{8k} & \in & V^{W(2,3,3,3)}_{-1/8} \\
\Phi_{8k+4} & \in & V^{W(2,3,3,3)}_{3/8} \\
\Phi_{4k+2} & \in & V^{W(2,3,3,3)}_{0*} \\
\Phi_{8k\pm1} & \in & V^{W(2,3,3,3)}_{-3/32} \\
\Phi_{8k\pm3} & \in & V^{W(2,3,3,3)}_{5/32}
\end{array}$$

Die Interpretation der Felder, die zu den Zuständen im oberen Modul von $V^{W(2,3,3,3)}_{0*}$ gehören, ist allerdings ein noch offenes Problem.

Kapitel 7
Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit war mit der Zielsetzung begonnen worden, die wegen der Entartung des Grundzustandes seltsam anmutende Zustandssumme des in Kapitel 6 diskutierten zweidimensionalen Polymersystems gerade im Hinblick auf die Ergebnisse von V. Gurarie [34] besser zu verstehen. Einiges ist in dieser Richtung erreicht worden, die Ergebnisse werfen allerdings mehr Fragen auf, als sie beantworten.
Zunächst konnten wir in Kapitel 3 einiges über die Struktur der uns in diesem Zusammenhang interessierenden (noch relativ einfachen) Darstellungen der Virasoro-Algebra aussagen, wobei ein Beweis von Teil (b) der Vermutung 3.4.29 allerdings noch aussteht. In diesem Zusammenhang stellt sich insbesondere die auch darüber hinaus interessante Frage, bei welchen Gewichten dieses Phänomen bei den übrigen Werten der zentralen Ladung, also $c = c_{1,q}, q > 2$, auftaucht.
Weiterhin stellte sich bei dem Versuch, die Untersuchung von Darstellungen mit Nilpotenzlänge > 1 auf $\mathcal{W}$-Algebra-Darstellungen auszudehnen, die Frage nach der Existenz von rationalen Modellen. Auf einer heuristischen Ebene ist uns die Beantwortung dieser Frage für den Fall $c = -2$ gelungen, auf den wir uns im Hinblick auf das Poymersystem konzentriert hatten. In dieser Richtung stellen sich nun viele neue Fragen. Exemplarisch seien genannt:

- Wie läßt sich die Konstruktion aus Abschnitt 5.3 auf die übrigen c-Werte in der logarithmischen Serie verallgemeinern?
- Wie ist die genaue Fusionsstruktur dieser Darstellungen?
- Gibt es eine hier anwendbare Verallgemeinerung der Verlinde-Formel?
- Läßt sich die $\mathcal{W}$-Algebra um das „logarithmische“ Feld zum oberen Tiefstgewichtsvektor des $\mathcal{W}$-JTGM zum Gewicht 0 erweitern, wobei diese Darstellung dann zu einer echten Vakuum-Darstellung würde (die Definitionen müßten hierfür geeignet erweitert werden)?

Schließlich sahen wir in Kapitel 6, daß das von uns gefundene rationale Modell bei $c = -2$ gerade die gewünschte Zustandssumme für das Polymersystem liefert und konnten die L-Bein-Operatoren den verschiedenen $\mathcal{W}$-Darstellungen zuordnen. Als wichtige Fragestellung verbleibt jedoch, wie die übrigen Operatoren (insbesondere die zum oberen Modul von V_{0*}) im Polymer-Zusammenhang zu interpretieren sind und ob daraus neue Voraussagen für das System abgeleitet werden können.

Anhang A

Explizite Einbettungsergebnisse

Im folgenden sind die Tiefstgewichtsvektoren für die c- und h-Werte aus Tabelle 3.1 explizit aufgelistet. In den Fällen, wo unterschiedliche gestufte Untermoduln betrachtet wurden, sind alle betrachteten Fälle angegeben.

A.1 $\mathbf{c = -2}$

A.1.1 $\mathbf{h = -\frac{1}{8}}$

Die Tiefstgewichtsvektoren sind

$$\begin{aligned} w^{(1)} = \; & -32768L_1^8.v^{(0)} + 11891248L_8.v^{(0)} + 12039456L_7L_1.v^{(0)} + 6570880L_6L_1^2.v^{(0)} \\ & +2406912L_5L_1^3.v^{(0)} + 761856L_4L_1^4.v^{(0)} - 275360L_4^2.v^{(0)} + 221184L_3L_1^5.v^{(0)} \\ & -583840L_5L_3.v^{(0)} - 641024L_4L_3L_1.v^{(0)} - 220416L_3^2L_1^2.v^{(0)} \\ & +16L_1^8.v^{(1)} - 1176L_8.v^{(1)} + 204L_7L_1.v^{(1)} + 240L_6L_1^2.v^{(1)} + 384L_5L_1^3.v^{(1)} \\ & -1152L_4L_1^4.v^{(1)} + 912L_4^2.v^{(1)} + 288L_3L_1^5.v^{(1)} - 676L_5L_3.v^{(1)} - 96L_4L_3L_1.v^{(1)} \\ & -144L_3^2L_1^2.v^{(1)} - 288L_2L_1^6.v^{(1)} - 664L_6L_2.v^{(1)} + 896L_5L_2L_1.v^{(1)} \\ & +3456L_4L_2L_1^2.v^{(1)} - 1056L_3L_2L_1^3.v^{(1)} + 544L_3^2L_2.v^{(1)} + 1176L_2^2L_1^4.v^{(1)} \\ & -1696L_4L_2^2.v^{(1)} - 312L_3L_2^2L_1.v^{(1)} - 968L_2^3L_1^2.v^{(1)} + 225L_2^4.v^{(1)} \end{aligned}$$

und

$$w^{(0)} = \; L_2.v^{(0)} - 2L_1^2.v^{(0)}$$

A.1.2 $\mathbf{h = 0}$

Die Tiefstgewichtsvektoren sind

$$w^{(1)} = \; 2L_2L_1.v^{(1)} - L_1^3.v^{(1)} - L_3.v^{(0)}$$

und

$$w^{(0)} = \; L_1.v^{(0)}$$

bzw.

$$\begin{aligned} w^{(1)} = \; & L_1^6.v^{(1)} + 4L_5L_1.v^{(1)} - 12L_4L_1^2.v^{(1)} + 6L_3L_1^3.v^{(1)} - 10L_2L_1^4.v^{(1)} \\ & -8L_3L_2L_1.v^{(1)} + 16L_2^2L_1^2.v^{(1)} \\ & +4L_1^6.v^{(0)} - 8L_6.v^{(0)} - 56L_5L_1.v^{(0)} - 48L_4L_1^2.v^{(0)} - 54L_3L_1^3.v^{(0)} \\ & +12L_3^2.v^{(0)} - 16L_4L_2.v^{(0)} \end{aligned}$$

und

$$w^{(0)} = \; 2L_2L_1.v^{(0)} - L_1^3.v^{(0)}$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
w^{(1)} = \; & +L_1^10.v^{(1)} + 1952L_9L_1.v^{(1)} - 3168L_8L_1^2.v^{(1)} + 408L_7L_1^3.v^{(1)} + 240L_6L_1^4.v^{(1)} \\
& +180L_5L_1^5.v^{(1)} - 288L_4L_1^6.v^{(1)} - 816L_5L_4L_1.v^{(1)} + 2448L_4^2L_1^2.v^{(1)} \\
& +42L_3L_1^7.v^{(1)} + 2176L_6L_3L_1.v^{(1)} - 1856L_5L_3L_1^2.v^{(1)} - 744L_4L_3L_1^3.v^{(1)} \\
& -144L_3^2L_1^4.v^{(1)} - 608L_3^3L_1.v^{(1)} - 30L_2L_1^8.v^{(1)} - 576L_7L_2L_1.v^{(1)} \\
& -2048L_6L_2L_1^2.v^{(1)} - 208L_5L_2L_1^3.v^{(1)} + 2520L_4L_2L_1^4.v^{(1)} - 360L_3L_2L_1^5.v^{(1)} \\
& +1376L_4L_3L_2L_1.v^{(1)} + 1504L_3^2L_2L_1^2.v^{(1)} + 252L_2^2L_1^6.v^{(1)} + 528L_5L_2^2L_1.v^{(1)} \\
& -4336L_4L_2^2L_1^2.v^{(1)} + 312L_3L_2^2L_1^3.v^{(1)} - 680L_2^3L_1^4.v^{(1)} - 288L_3L_2^3L_1.v^{(1)} \\
& +576L_2^4L_1^2.v^{(1)} \\
& -768L_10.v^{(0)} + 2612L_9L_1.v^{(0)} + 1760L_8L_1^2.v^{(0)} - 1128L_7L_1^3.v^{(0)} \\
& +1080L_6L_1^4.v^{(0)} + 396L_5L_1^5.v^{(0)} + 1344L_5^2.v^{(0)} + 45L_4L_1^6.v^{(0)} \\
& -1568L_6L_4.v^{(0)} - 2316L_5L_4L_1.v^{(0)} - 1884L_4^2L_1^2.v^{(0)} - 15L_3L_1^7.v^{(0)} \\
& -32L_7L_3.v^{(0)} + 3632L_6L_3L_1.v^{(0)} - 400L_5L_3L_1^2.v^{(0)} + 2970L_4L_3L_1^3.v^{(0)} \\
& -870L_3^2L_1^4.v^{(0)} - 16L_4L_3^2.v^{(0)} - 396L_3^3L_1.v^{(0)} - 960L_8L_2.v^{(0)} \\
& -960L_7L_2L_1.v^{(0)} - 2272L_6L_2L_1^2.v^{(0)} - 4200L_5L_2L_1^3.v^{(0)} - 330L_4L_2L_1^4.v^{(0)} \\
& +1984L_4^2L_2.v^{(0)} + 174L_3L_2L_1^5.v^{(0)} - 2880L_5L_3L_2.v^{(0)} - 1792L_4L_3L_2L_1.v^{(0)} \\
& +1764L_3^2L_2L_1^2.v^{(0)} + 1248L_6L_2^2.v^{(0)} + 5856L_5L_2^2L_1.v^{(0)} + 432L_3^2L_2^2.v^{(0)} \\
& -576L_4L_2^3.v^{(0)} - 576L_3L_2^3L_1.v^{(0)}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
w^{(0)} = \; & L_1^6.v^{(0)} + 4L_5L_1.v^{(0)} - 12L_4L_1^2.v^{(0)} + 6L_3L_1^3.v^{(0)} - 10L_2L_1^4.v^{(0)} \\
& -8L_3L_2L_1.v^{(0)} + 16L_2^2L_1^2.v^{(0)}
\end{aligned}
$$

A.1.3 $\mathbf{h = \frac{3}{8}}$

Die Tiefstgewichtsvektoren sind

$$
\begin{aligned}
w^{(1)} = \; & 36L_1^4.v^{(1)} - 54L_4.v^{(1)} + 36L_3L_1.v^{(1)} - 180L_2L_1^2.v^{(1)} + 81L_2^2.v^{(1)} \\
& -64L_1^4.v^{(0)} - 12L_4.v^{(0)} - 16L_3L_1.v^{(0)} + 224L_2L_1^2.v^{(0)}
\end{aligned}
$$

und

$$
w^{(0)} = \; 4L_1^4.v^{(0)} - 6L_4.v^{(0)} + 4L_3L_1.v^{(0)} - 20L_2L_1^2.v^{(0)} + 9L_2^2.v^{(0)}
$$

A.1.4 $\mathbf{h = 1}$

Die Tiefstgewichtsvektoren sind

$$
\begin{aligned}
w^{(1)} = \; & +3L_1^5.v^{(1)} + 12L_5.v^{(1)} - 36L_4L_1.v^{(1)} + 18L_3L_1^2.v^{(1)} - 30L_2L_1^3.v^{(1)} \\
& -24L_3L_2.v^{(1)} + 48L_2^2L_1.v^{(1)} \\
& +4L_1^5.v^{(0)} - 60L_5.v^{(0)} - 84L_4L_1.v^{(0)} - 42L_3L_1^2.v^{(0)}
\end{aligned}
$$

und

$$
w^{(0)} = \; -1L_1^2.v^{(0)} + 2L_2.v^{(0)}
$$

A.1.5 $\mathbf{h = \frac{15}{8}}$

Die Tiefstgewichtsvektoren sind

$$
\begin{aligned}
w^{(1)} = \; & -120L_1^6.v^{(1)} + 1800L_6.v^{(1)} - 5880L_5L_1.v^{(1)} + 6840L_4L_1^2.v^{(1)} - 2520L_3L_1^3.v^{(1)} - 2700L_3^2.v^{(1)} \\
& +2100L_2L_1^4.v^{(1)} - 9900L_4L_2.v^{(1)} + 10860L_3L_2L_1.v^{(1)} - 7770L_2^2L_1^2.v^{(1)} + 3375L_2^3.v^{(1)} \\
& +64L_1^6.v^{(0)} + 7650L_6.v^{(0)} - 4424L_5L_1.v^{(0)} - 228L_4L_1^2.v^{(0)} - 336L_3L_1^3.v^{(0)} - 6300L_3^2.v^{(0)} \\
& -640L_2L_1^4.v^{(0)} + 450L_4L_2.v^{(0)} + 7048L_3L_2L_1.v^{(0)} + 304L_2^2L_1^2.v^{(0)}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
w^{(0)} = \quad & -8L_1^6.v^{(0)} + 120L_6.v^{(0)} - 392L_5L_1.v^{(0)} + 456L_4L_1^2.v^{(0)} - 168L_3L_1^3.v^{(0)} \\
& -180L_3^2.v^{(0)} + 140L_2L_1^4.v^{(0)} - 660L_4L_2.v^{(0)} + 724L_3L_2L_1.v^{(0)} - 518L_2^2L_1^2.v^{(0)} \\
& +225L_2^3.v^{(0)}
\end{aligned}
$$

A.1.6 h = 3

Die Tiefstgewichtsvektoren sind

$$
\begin{aligned}
w^{(1)} = \quad & -16L_1^7.v^{(1)} - 3840L_7.v^{(1)} + 5120L_6L_1.v^{(1)} - 5120L_5L_1^2.v^{(1)} + 3264L_4L_1^3.v^{(1)} - 896L_3L_1^4.v^{(1)} \\
& +9984L_4L_3.v^{(1)} - 4864L_3^2L_1.v^{(1)} + 448L_2L_1^5.v^{(1)} + 9216L_5L_2.v^{(1)} - 15872L_4L_2L_1.v^{(1)} \\
& +8448L_3L_2L_1^2.v^{(1)} - 3136L_2^2L_1^3.v^{(1)} - 6912L_3L_2^2.v^{(1)} + 4608L_2^3L_1.v^{(1)} \\
& -3L_1^7.v^{(0)} - 4064L_7.v^{(0)} - 320L_6L_1.v^{(0)} - 4432L_5L_1^2.v^{(0)} - 184L_4L_1^3.v^{(0)} + 420L_3L_1^4.v^{(0)} \\
& +9664L_4L_3.v^{(0)} - 2640L_3^2L_1.v^{(0)} + 8256L_5L_2.v^{(0)} - 2304L_3L_2^2.v^{(0)}
\end{aligned}
$$

und

$$
w^{(0)} = \quad -L_1^3.v^{(0)} - 12L_3.v^{(0)} + 8L_2L_1.v^{(0)}
$$

A.1.7 $\mathbf{h = \frac{35}{8}}$

Die Tiefstgewichtsvektoren sind

$$
\begin{aligned}
w^{(1)} = \quad & 25200L_1^8.v^{(1)} - 244755000L_8.v^{(1)} + 119164500L_7L_1.v^{(1)} \\
& -74466000L_6L_1^2.v^{(1)} + 37497600L_5L_1^3.v^{(1)} - 15195600L_4L_1^4.v^{(1)} \\
& +138253500L_4^2.v^{(1)} + 3175200L_3L_1^5.v^{(1)} + 190732500L_5L_3.v^{(1)} \\
& -236703600L_4L_3L_1.v^{(1)} + 54205200L_3^2L_1^2.v^{(1)} - 1058400L_2L_1^6.v^{(1)} \\
& +166257000L_6L_2.v^{(1)} - 220248000L_5L_2L_1.v^{(1)} + 163069200L_4L_2L_1^2.v^{(1)} \\
& -54583200L_3L_2L_1^3.v^{(1)} - 104076000L_3^2L_2.v^{(1)} + 12436200L_2^2L_1^4.v^{(1)} \\
& -151924500L_4L_2^2.v^{(1)} + 146248200L_3L_2^2L_1.v^{(1)} - 40685400L_2^3L_1^2.v^{(1)} \\
& +17364375L_2^4.v^{(1)} \\
& -15872L_1^8.v^{(0)} - 220365600L_8.v^{(0)} + 101194080L_7L_1.v^{(0)} \\
& -33788640L_6L_1^2.v^{(0)} - 6105216L_5L_1^3.v^{(0)} + 3936096L_4L_1^4.v^{(0)} \\
& +171902640L_4^2.v^{(0)} - 911232L_3L_1^5.v^{(0)} - 47017600L_5L_3.v^{(0)} \\
& -93328224L_4L_3L_1.v^{(0)} + 13618368L_3^2L_1^2.v^{(0)} + 532224L_2L_1^6.v^{(0)} \\
& +49063280L_6L_2.v^{(0)} + 31503680L_5L_2L_1.v^{(0)} - 8933472L_4L_2L_1^2.v^{(0)} \\
& +6813312L_3L_2L_1^3.v^{(0)} + 2366560L_3^2L_2.v^{(0)} - 4593792L_2^2L_1^4.v^{(0)} \\
& -48963880L_4L_2^2.v^{(0)} - 7612512L_3L_2^2L_1.v^{(0)} + 9907264L_2^3L_1^2.v^{(0)}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
w^{(0)} = \quad & 16L_1^8.v^{(0)} - 155400L_8.v^{(0)} + 75660L_7L_1.v^{(0)} - 47280L_6L_1^2.v^{(0)} \\
& +23808L_5L_1^3.v^{(0)} - 9648L_4L_1^4.v^{(0)} + 87780L_4^2.v^{(0)} + 2016L_3L_1^5.v^{(0)} \\
& +121100L_5L_3.v^{(0)} - 150288L_4L_3L_1.v^{(0)} + 34416L_3^2L_1^2.v^{(0)} - 672L_2L_1^6.v^{(0)} \\
& +105560L_6L_2.v^{(0)} - 139840L_5L_2L_1.v^{(0)} + 103536L_4L_2L_1^2.v^{(0)} - 34656L_3L_2L_1^3.v^{(0)} \\
& -66080L_3^2L_2.v^{(0)} + 7896L_2^2L_1^4.v^{(0)} - 96460L_4L_2^2.v^{(0)} + 92856L_3L_2^2L_1.v^{(0)} \\
& -25832L_2^3L_1^2.v^{(0)} + 11025L_2^4.v^{(0)}
\end{aligned}
$$

A.2 c = −7

A.2.1 $\mathbf{h = -\frac{1}{4}}$

Die Tiefstgewichtsvektoren sind

$$
\begin{aligned}
w^{(1)} = \quad & 3L_1^4.v^{(1)} - 2L_4.v^{(1)} - 2L_3L_1.v^{(1)} - 10L_2L_1^2.v^{(1)} + 3L_2^2.v^{(1)} \\
& +8L_3L_1.v^{(0)}
\end{aligned}
$$

und

$$w^{(0)} = \quad L_2.v^{(0)} - 3L_1^2.v^{(0)}$$

A.2.2 h = 0

Die Tiefstgewichtsvektoren sind

$$\begin{aligned} w^{(1)} = \quad & L_1^5.v^{(1)} - 36L_4L_1.v^{(1)} - 6L_3L_1^2.v^{(1)} - 60L_2L_1^3.v^{(1)} + 64L_2^2L_1.v^{(1)} \\ & +12L_5.v^{(0)} - 32L_3L_2.v^{(0)} \end{aligned}$$

und

$$w^{(0)} = \quad L_1.v^{(0)}$$

bzw.

$$\begin{aligned} w^{(1)} = \quad & -216L_1^8.v^{(1)} + 2880L_7L_1.v^{(1)} - 11520L_6L_1^2.v^{(1)} - 4608L_5L_1^3.v^{(1)} \\ & +10368L_4L_1^4.v^{(1)} - 2016L_3L_1^5.v^{(1)} + 7488L_4L_3L_1.v^{(1)} - 4896L_3^2L_1^2.v^{(1)} \\ & +4032L_2L_1^6.v^{(1)} + 5760L_5L_2L_1.v^{(1)} - 32256L_4L_2L_1^2.v^{(1)} + 14976L_3L_2L_1^3.v^{(1)} \\ & -18816L_2^2L_1^4.v^{(1)} - 9216L_3L_2^2L_1.v^{(1)} + 18432L_2^3L_1^2.v^{(1)} \\ & -1863L_1^8.v^{(0)} - 5760L_8.v^{(0)} + 149488L_7L_1.v^{(0)} + 168800L_6L_1^2.v^{(0)} \\ & +148424L_5L_1^3.v^{(0)} + 88848L_4L_1^4.v^{(0)} + 9216L_4^2.v^{(0)} + 52686L_3L_1^5.v^{(0)} \\ & -8640L_5L_3.v^{(0)} - 186400L_4L_3L_1.v^{(0)} - 110960L_3^2L_1^2.v^{(0)} + 9396L_2L_1^6.v^{(0)} \\ & -4608L_6L_2.v^{(0)} - 170304L_5L_2L_1.v^{(0)} - 149248L_4L_2L_1^2.v^{(0)} - 121152L_3L_2L_1^3.v^{(0)} \\ & +13824L_3^2L_2.v^{(0)} - 18432L_4L_2^2.v^{(0)} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} w^{(0)} = \quad & 9L_1^5.v^{(0)} - 36L_4L_1.v^{(0)} - 6L_3L_1^2.v^{(0)} \\ & -60L_2L_1^3.v^{(0)} + 64L_2^2L_1.v^{(0)} \end{aligned}$$

A.2.3 h = 1

Die Tiefstgewichtsvektoren sind

$$\begin{aligned} w^{(1)} = \quad & 5760L_7.v^{(1)} - 432L_1^7.v^{(1)} - 23040L_6L_1.v^{(1)} - 9216L_5L_1^2.v^{(1)} \\ & +20736L_4L_1^3.v^{(1)} - 4032L_3L_1^4.v^{(1)} + 14976L_4L_3.v^{(1)} - 9792L_3^2L_1.v^{(1)} \\ & +8064L_2L_1^5.v^{(1)} + 11520L_5L_2.v^{(1)} - 64512L_4L_2L_1.v^{(1)} + 29952L_3L_2L_1^2.v^{(1)} \\ & -37632L_2^2L_1^3.v^{(1)} - 18432L_3L_2^2.v^{(1)} + 36864L_2^3L_1.v^{(1)} \\ & -1863L_1^7.v^{(0)} + 153904L_7.v^{(0)} + 169568L_6L_1.v^{(0)} + 148616L_5L_1^2.v^{(0)} \\ & +104976L_4L_1^3.v^{(0)} + 48942L_3L_1^4.v^{(0)} - 191392L_4L_3.v^{(0)} - 96176L_3^2L_1.v^{(0)} \\ & +9396L_2L_1^5.v^{(0)} - 177216L_5L_2.v^{(0)} - 210688L_4L_2L_1.v^{(0)} - 106944L_3L_2L_1^2.v^{(0)} \end{aligned}$$

und

$$w^{(0)} = \quad 9L_1^4.v^{(0)} - 36L_4.v^{(0)} - 6L_3L_1.v^{(0)} - 60L_2L_1^2.v^{(0)} + 64L_2^2.v^{(0)}$$

A.2.4 $\mathbf{h = \frac{7}{4}}$

Die Tiefstgewichtsvektoren sind

$$\begin{aligned} w^{(1)} = \quad & 2187L_1^8.v^{(1)} - 1041012L_8.v^{(1)} - 406782L_7L_1.v^{(1)} + 524880L_6L_1^2.v^{(1)} \\ & +237168L_5L_1^3.v^{(1)} - 288684L_4L_1^4.v^{(1)} + 551124L_4^2.v^{(1)} + 61236L_3L_1^5.v^{(1)} \\ & +438858L_5L_3.v^{(1)} - 1259712L_4L_3L_1.v^{(1)} + 389772L_3^2L_1^2.v^{(1)} - 61236L_2L_1^6.v^{(1)} \\ & -489888L_6L_2.v^{(1)} - 956448L_5L_2L_1.v^{(1)} + 2027592L_4L_2L_1^2.v^{(1)} - 763992L_3L_2L_1^3.v^{(1)} \\ & -530712L_3^2L_2.v^{(1)} + 479682L_2^2L_1^4.v^{(1)} - 1245132L_4L_2^2.v^{(1)} + 1460916L_3L_2^2L_1.v^{(1)} \\ & -1046196L_2^3L_1^2.v^{(1)} + 297675L_2^4.v^{(1)} \\ & -4096L_1^8.v^{(0)} + 8243856L_8.v^{(0)} + 10369512L_7L_1.v^{(0)} + 6168960L_6L_1^2.v^{(0)} \\ & +2052864L_5L_1^3.v^{(0)} + 744192L_4L_1^4.v^{(0)} - 2574720L_4^2.v^{(0)} + 211968L_3L_1^5.v^{(0)} \\ & -4565160L_5L_3.v^{(0)} - 6473088L_4L_3L_1.v^{(0)} - 1674432L_3^2L_1^2.v^{(0)} \end{aligned}$$

und

$$w^{(0)} = \quad -L_1^2.v^{(0)} + 3L_2.v^{(0)}$$

A.3 $\mathbf{c = -\frac{25}{2}}$

A.3.1 $\mathbf{h = 0}$

Die Tiefstgewichtsvektoren sind

$$\begin{aligned} w^{(1)} = \quad & -16L_1^7.v^{(1)} - 460L_6L_1.v^{(1)} + 28L_5L_1^2.v^{(1)} + 408L_4L_1^3.v^{(1)} + 56L_3L_1^4.v^{(1)} - 73L_3^2L_1.v^{(1)} \\ & +224L_2L_1^5.v^{(1)} - 872L_4L_2L_1.v^{(1)} - 120L_3L_2L_1^2.v^{(1)} - 784L_2^2L_1^3.v^{(1)} + 576L_2^3L_1.v^{(1)} \\ & +115L_7.v^{(0)} + 202L_4L_3.v^{(0)} + 156L_5L_2.v^{(0)} - 288L_3L_2^2.v^{(0)} \end{aligned}$$

und

$$w^{(0)} = \quad L_1.v^{(0)}$$

A.4 $\mathbf{c = -\frac{91}{5}}$

A.4.1 $\mathbf{h = 0}$

Die Tiefstgewichtsvektoren sind

$$\begin{aligned} w^{(1)} = \quad & 15625L_1^9.v^{(1)} - 12676560L_8L_1.v^{(1)} + 516480L_7L_1^2.v^{(1)} + 5388000L_6L_1^3.v^{(1)} - 204000L_5L_1^4.v^{(1)} \\ & -1359000L_4L_1^5.v^{(1)} + 2704656L_4^2L_1.v^{(1)} - 157500L_3L_1^6.v^{(1)} + 433640L_5L_3L_1.v^{(1)} \\ & +771960L_4L_3L_1^2.v^{(1)} + 711900L_3^2L_1^3.v^{(1)} - 375000L_2L_1^7.v^{(1)} - 12153280L_6L_2L_1.v^{(1)} \\ & +414800L_5L_2L_1^2.v^{(1)} + 9468000L_4L_2L_1^3.v^{(1)} + 1110000L_3L_2L_1^4.v^{(1)} - 1491200L_3^2L_2L_1.v^{(1)} \\ & +2730000L_2^2L_1^5.v^{(1)} - 10397440L_4L_2^2L_1.v^{(1)} - 1219200L_3L_2^2L_1^2.v^{(1)} - 6560000L_2^3L_1^3.v^{(1)} \\ & +3686400L_2^4L_1.v^{(1)} \\ & +4447632L_9.v^{(0)} - 901552L_5L_4.v^{(0)} + 1283680L_6L_3.v^{(0)} + 187200L_3^3.v^{(0)} + 2396480L_7L_2.v^{(0)} \\ & +3464960L_4L_3L_2.v^{(0)} + 1155840L_5L_2^2.v^{(0)} - 1843200L_3L_2^3.v^{(0)} \end{aligned}$$

und

$$w^{(0)} = \quad L_1.v^{(0)}$$

Anhang B

Fusionsrechnungen

B.1 $\mathbf{c = -2}$

Wir betrachten drei verschiedene Moduln: Sei $V_{-1/8}$ der irreduzible TGM zum Tiefstgewicht $-\frac{1}{8}$ mit Tiefstgewichtsvektor $v_{-1/8}$, $V_{3/8}$ der zum Tiefstgewicht $\frac{3}{8}$ mit Tiefstgewichtsvektor $v_{3/8}$ und V_0 der minimale JTGM zum Tiefstgewicht 0 mit Tiefstgewichtsvektoren $v_0^{(0)}, v_0^{(1)}$.
Basen spezieller Unterräume sind gegeben durch

$$\{v_{-1/8}, L_1 v_{-1/8}\},$$

$$\{v_{3/8}, L_1 v_{3/8}, L_1^2 v_{3/8}, L_1^3 v_{3/8}\}$$

und

$$\{v_0^{(0)}, v_0^{(1)}, L_1 v_0^{(1)}, L_1^2 v_0^{(1)}\}.$$

Die Jordan-Normalformen von L_0 auf den Räumen $V_i^s \otimes V_j^l$ lauten (Nullen außerhalb der Jordanblöcke sind fortgelassen):

- $V_{-1/8}^s \otimes V_{-1/8}^l$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $V_{-1/8}^s \otimes V_0^l$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & & & \\ & -\frac{1}{8} & & \\ & & \frac{3}{8} & 1 \\ & & 0 & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

- $V_{-1/8}^s \otimes V_{3/8}^l$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

- $V_0^s \otimes V_{-1/8}^l$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & & & \\ & -\frac{1}{8} & & \\ & & \frac{3}{8} & 1 \\ & & 0 & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

- $V_0^s \otimes V_0^l$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 0 & & & & \\ & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & 0 & & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $V_0^s \otimes V_{3/8}^l$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & & & \\ & \frac{3}{8} & & \\ & & \frac{3}{8} & \\ & & & \frac{15}{8} \end{pmatrix}$$

- $V_{3/8}^s \otimes V_{-1/8}^l$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $V_{3/8}^s \otimes V_0^l$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & & & & & & & \\ & -\frac{1}{8} & & & & & & \\ & & \frac{3}{8} & 1 & & & & \\ & & 0 & \frac{3}{8} & & & & \\ & & & & \frac{3}{8} & 1 & & \\ & & & & 0 & \frac{3}{8} & & \\ & & & & & & \frac{15}{8} & 1 \\ & & & & & & 0 & \frac{15}{8} \end{pmatrix}$$

- $V_{3/8}^s \otimes V_{3/8}^l$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}$$

B.2 $\mathbf{c = -7}$

Sei V der irreduzible TGM zum (niedrigsten) Tiefstgewicht $h = -\frac{1}{3}$ mit Tiefstgewichtsvektor v. Dann ist eine Basis eines speziellen Unterraums von V gegeben durch

$$\{v, L_1 v, L_1^2 v\}.$$

Die Jordan-Normalform der Matrix von L_0 auf $V^s \otimes V^l$ ist gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & & \\ & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Literaturverzeichnis

[1] F.A. Bais, P. Bouwknegt, K. Schoutens, M. Surridge,
"Coset construction for extended Virasoro algebras", Nucl. Phys. B304 (1988) 371

[2] H. Bateman, "The transformation of electrodynamical equations", Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 8 (1910) 223

[3] A. Belavin, A. Polyakov, A. Zamolodchikov,
"Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory", Nucl. Phys. B241 (1984) 333

[4] L.C. Biedenharn, J.D. Louck,
"The Racah-Wigner algebra in quantum theory", Encyclopedia of Mathematics Vol. 9 (1980)

[5] R. Blumenhagen, W. Eholzer, A. Honecker, K. Hornfeck, R. Hübel,
"Unifying $\mathcal{W}$-Algebras", Phys. Lett. B332 (1994) 51

[6] R. Blumenhagen, W. Eholzer, A. Honecker, K. Hornfeck, R. Hübel,
"Coset Realization of Unifying $\mathcal{W}$-Algebras", Int. J. Mod. Phys. A10 (1995) 2367

[7] R. Blumenhagen, M. Flohr, A. Kliem, W. Nahm, A. Recknagel, R. Varnhagen,
"$\mathcal{W}$-algebras with two and three generators", Nucl. Phys. B361 (1991) 255

[8] R. Blumenhagen, A. Wisskirchen,
"Extension of the $N = 2$ Virasoro algebra by two primary fields of dimension 2 and 3", Phys. Lett. B343 (1995) 168

[9] P. Bouwknegt,
"Extended conformal algebras from Kac-Moody algebras", in "Infinite-dimensional Lie-Algebras and Lie-groups", V. Kac (hrsg.), Proc. CIRM-Luminy conf., 1988, World Scientific (1989)

[10] P. Bouwknegt, K.Schoutens,
"$\mathcal{W}$-symmetry in conformal field theory", Phys. Rep. 223 (1993) 183

[11] P. Bowcock, P. Goddard,
"Coset construction and extended conformal algebra", Nucl. Phys. B305 (1988) 685

[12] J.L. Cardy,
"Operator Content of Two-Dimensional Conformally Invariant Theories", Nucl. Phys. B270 (1986) 186

[13] J.L. Cardy,
"Conformal Invariance and Statistical Mechanics", in "Champs, Cordes et Phénomènes Critiques: Fields, Strings and Critical Phenomena", Proc. Les Houches, Session XLIX, 1988, E. Brézin, J. Zinn-Justin (Hrsg.

[14] J.L. Cardy, A.J. Guttmann,
"Universal Amplitude Combinations for Self-Avoiding Walks, Polygons and Trails", cond-mat/9303035

[15] E. Cunningham, "The principle of relativity in electrodynamics and an extension thereof", Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 8 (1910) 77

[16] V.S. Dotsenko, V.A. Fateev,
"Conformal Algebra and Multipoint Correlation Functions in 2d Statistical Models", Nucl. Phys. B240 (1984) 312

[17] B. Duplantier, H. Saleur,
"Exact Critical Properties of Two-Dimensional Dense Self-Avoiding Walks", Nucl. Phys. B290 (1987) 291

[18] B.L. Feigin, D.B. Fuks,
"Invariant skew-symmetric differential operators on the line and the Verma modules over the Virasoro algebra", Funkt. Anal. Appl. 16 (1982) 114

[19] B.L. Feigin, D.B. Fuks,
"Verma Modules over the Virasoro Algebra", Funkt. Anal. Appl. 17 (1983) 241

[20] B.L. Feigin, D.B. Fuks,
"Verma Modules over the Virasoro Algebra", in "Topology", Proc. Leningrad 1982, L.D. Faadev, A.A.Mal'cev (Hrsg.), Lecture Notes Math. 1060, Springer-Verlag (1984) 230

[21] B.L. Feigin, D.B. Fuks,
"Casimir Operators in Modules over the Virasoro Algebra", Soviet Math. Dokl. Vol. 27, No. 2 (1983) 465

[22] G. Felder,
"BRST Approach to Minimal Models", Nucl. Phys. B317 (1989) 215, *Erratum*, Nucl. Phys. B324 (1989) 548

[23] G. Felder, J. Fröhlich, G. Keller,
"Braid Matrices and Structure Constants for Minimal Conformal Models", Commun. Math. Phys. 124 (1989) 647

[24] M. Flohr,
"$\mathcal{W}$-Algebras, New Rational Models and the Completeness of the $c = 1$ Classification", Commun. Math. Phys. 157 (1993) 179

[25] M. Flohr,
"Die rationalen konformen Quantenfeldtheorien in zwei Dimensionen mit effektiver zentraler Ladung $c_{\text{eff}} \leq 1$", BONN-IR-94-11 (Doktorarbeit) (1994)

[26] M. Flohr,
"On Modular Invariant Partition Functions of Conformal Field Theories with Logarithmic Operators", hep-th/9509166 (1995)

[27] D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker,
"Conformal invariance, unitarity and critical exponents in two dimensions", Phys. Rev. Lett. 52 (1984) 1575

[28] D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker,
"Vertex operators in Field Theory and Statistical Mechanics", proc. conf. Nov 10-17 (1983) 419

[29] M. Gaberdiel,
"Fusion in conformal field theory as the tensor product of the symmetry algebra", Int. J. Mod. Phys. A9 (1994) 4636

[30] P. Goddard, A. Kent, D. Olive,
"Virasoro algebras and coset space models", Phys. Lett. B152 (1985) 111

[31] P. Goddard,
"Meromorphic Conformal Field Theory", in "Infinite Dimensional Lie Algebras and Lie Groups", Proc. CIRM-Luminy, Marseille Conf. 1988, V.G. Kac (Hrsg.), World Scientific (1989) 556

[32] M. Green, J.H. Schwarz, E. Witten,
"Superstring theory I+II", Cambridge Univ. Press (1987)

[33] D.J. Gross, J.A. Harvey, E. Martinec. R. Rohm, "Heterotic string theory (I)+(II)", Nucl. Phys. B256 (1985) 253, Nucl. Phys. B267 (1985) 75

[34] V. Gurarie,
"Logarithmic Operators in Conformal Field Theory", Nucl. Phys. B410 (1993) 535

[35] S. Helgason,
"Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces", Pure and Appl. Math. Vol. 80, Academic Press (1978)

[36] A. Honecker,
"Automorphisms of $\mathcal{W}$-Algebras and Extended Rational Conformal Field Theories", Nucl. Phys. B400 (1993) 574

[37] J.E. Humphreys,
"Introduction to Lie Algebras and Representation Theory", Springer-Verlag (1972)

[38] V.G. Kac,
"Contravariant Form for the Infinite-Dimensional Lie-Algebras and Superalgebras", Lecture Notes in Physics 94, Springer-Verlag (1979) 441

[39] H.G. Kausch, G.M.T. Watts,
"A study of $\mathcal{W}$-algebras using Jacobi identities", Nucl. Phys. B354 (1991) 740

[40] H.G. Kausch, in preparation

[41] H.G. Kausch,
"Extended Conformal Algebras Generated by a Multiplet of Primary Fields",
Phys. Lett. B259 (1991) 448

[42] S.D. Mathur, S. Mukhi, A. Sen, "On the Classification of Rational Conformal Field Theories", Phys. Lett. B213 (1988) 303

[43] S.D. Mathur, S. Mukhi, A. Sen, "Reconstruction of Conformal Field Theories from Modular Geometry on the Torus", Nucl. Phys. B318 (1989) 483

[44] G. Moore, N. Seiberg, "Polynomial Equations for Rational Conformal Field Theories", Phys. Lett. B212 (1988) 451

[45] G. Moore, N. Seiberg, "Classical and Quantum Conformal Field Theory",
Commun. Math. Phys. 123 (1989) 177

[46] W. Nahm,
"Quasi-rational fusion products", Int. J. Mod. Phys. B8 (1994) 3693

[47] W. Nahm,
"Conformal Quantum Field Theory in Two Dimensions", World Scientific (in Vorbereitung)

[48] W. Nahm,
"Quantum Field Theories in One and Two Dimensions", Duke Math. J. 54 (1987) 579

[49] W. Nahm,
"Chiral Algebras of Two-Dimensional Chiral Field Theories and their Normal Ordered Products", in Proc. Trieste Conf. "Recent Developments in Conformal Field Theories", Trieste, Oct. 1989, S. Randjbar-Daemi, E. Sezgi

[50] W. Nahm,
"A proof of modular invariance", Int. J. Mod. Phys. A6 (1991) 2837

[51] A. Rocha-Caridi,
"Vacuum Vector Representations of the Virasoro Algebra", Vertex Operators in Mathematics and Physics (1984) 451

[52] A. Rocha-Caridi,
"On Highest Weight and Fock Space Representations of the Virasoro Algebra",
Proc. Symp. Pure Math 49, Part I (1989) 259

[53] H. Saleur,
"Polymers and percolation in two dimensions and twisted $N = 2$ supersymmetry", Nucl. Phys. B382 (1992) 486

[54] E. Verlinde,
"Fusion Rules and Modular Transformations in 2D Conformal Field Theory",
Nucl. Phys. B300 (1988) 360

[55] X.-G. Wen, Y.-S. Wu, Y. Hatsugai,
"Chiral operator product algebra and edge excitations of a fractional quantum Hall droplet", Nucl. Phys. B422 (1994) 476

[56] K.G. Wilson,
"Non-Lagrangian Models of Current Algebra", Phys. Rev. 179 (1969) 1499

[57] A.B. Zamolodchikov,
"Infinite additional symmetries in two dimensional conformal quantum field theory", Theor. Math. Phys. 65 (1986) 1205

[58] W. Zimmermann,
"Normal Products and the Short Distance Expansion in the Perturbation Theory of Renormalizable Interactions", Ann. Phys. 77 (1973) 570