Universität Bonn
Physikalisches Institut

Nicht-frei erzeugte W-Algebren & Konstruktion von N=2 Super W-Algebren

von
Ralph Blumenhagen*

Abstract

Firstly, we investigate the origin of the bosonic $\mathcal{W}$-algebras $\mathcal{W}(2,3,4,5)$[2], $\mathcal{W}(2,4,6)$[3] and $\mathcal{W}(2,4,6)$[4] found earlier by direct construction. We present a coset construction for all three examples leading to a new type of finitely, non-freely generated quantum $\mathcal{W}$-algebras, which we call *unifying $\mathcal{W}$-algebras*. Secondly, we develop a manifest covariant formalism to construct $N=2$ super $\mathcal{W}$-algebras explicitly on a computer. Applying this algorithm enables us to construct the first four examples of $N=2$ super $\mathcal{W}$-algebras with two generators and the $N=2$ super $\mathcal{W}_4$ algebra involving three generators. The representation theory of the former ones shows that all examples could be divided into four classes, the largest one containing the $N=2$ special type of spectral flow algebras. Besides the $\mathcal{W}$-algebra of the $CP(3)$ Kazama-Suzuki coset model, the latter example with three generators discloses a second solution which could also be explained as a unifying $\mathcal{W}$-algebra for the $CP(n)$ models.

Post address:
Nußallee 12
D-53115 Bonn
Germany
e-mail:
*ralph@avzw01.physik.uni-bonn.de

BONN-IR-94-10
Bonn University
July 1994
(ISSN-0172-8741)

Universität Bonn
Physikalisches Institut

Nicht-frei erzeugte W-Algebren
&
Konstruktion von N=2 Super W-Algebren

von
R. Blumenhagen

Dieser Forschungsbericht wurde als Dissertation von der Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn angenommen.

Angenommen am:	4.7.1994
Referent:	Prof. Dr. W. Nahm
Korreferent:	Prof. Dr. G. von Gehlen

In memoriam
meiner Mutter

Wirf dich weg! Sonst bist Du nicht
meiner Art und meines Blutes.
Wehe, wachst du zagen Mutes
über deinem Lebenslicht,
dessen Flamme gar nichts wert
wenn sie nicht ihr Wachs - verzehrt.

Brenne durstig himmelan!
Brenne still hinab! Doch - brenne!
Daß dein Los von dem sich trenne,
der sich nicht verschwenden - kann.
Laß ihm seine Angst und Not!
Du verstehe nur den - Tod.

C. Morgenstern

Inhalt

1. Einleitung

Das Auftreten von konformer Invarianz in zweidimensionalen Systemen aus ganz verschiedenen Gebieten der Physik hat in den vergangenen zehn Jahren [10] die zweidimensionale konforme Quantenfeldtheorie (KFT) als eigenständiges Gebiet der mathematischen Physik entstehen lassen. Ihre Anwendung reicht von der Super-String Theorie [52] über die Theorie kritischer Phänomene in der statistischen Physik [34] bis zur Beschreibung zweidimensionaler Phänomene in der Festkörperphysik. Darüberhinaus hat sie infolge ihrer interessanten mathematischen Struktur der traditionellen Verflechtung von Physik und Mathematik einen neuen Auftrieb gegeben.

Das Hauptproblem der KFT, nämlich ihre vollständige Klassifikation oder zumindest die Klassifikation geeigneter Unterklassen, stellt sich nicht allein aus mathematischen Gründen, sondern resultiert direkt aus ihren Anwendungen. In der Sprache der Super-String-Theorie ist es äquivalent zu der Klassifikation aller möglichen String-Vakua oder in der Sprache der statistischen Physik zu der Klassifikation aller Universalitätsklassen zweidimensionaler Phasenübergänge zweiter Ordnung. In der Festkörperphysik treten bei der Beschreibung von Polymeren [38] und des fraktionalen Quanten-Hall-Effekts [70,33,49] hingegen nur spezielle KFTen auf. Die Hoffnung, ein derartig ehrgeiziges Ziel überhaupt erreichen zu können, gründet sich darauf, daß die Symmetriegruppe der konformen Transformationen in zwei Dimensionen die besondere Eigenschaft hat, unendlich dimensional zu sein. Die minimale Symmetriealgebra KFTen ist somit die direkte Summe zweier Virasoro Algebren, deren Darstellungstheorie den Hilbertraum und im Falle sogenannter rationaler KFTen selbst die N-Punkt Funktionen determiniert. Diese rationalen KFTen, deren Hilbertraum in eine endliche Summe von Darstellungen zerfällt, sind mithin exakt lösbar und zum Teil klassifiziert. So liefert die Darstellungstheorie der Virasoro Algebra selbst alle unitären, rationalen KFTen mit zentraler Ladung $c < 1$. Rationale Modelle mit $c \geq 1$ resultieren aus erweiterten Symmetrien, die mathematisch durch die in dieser Arbeit behandelten $\mathcal{W}$-Algebren beschrieben werden. Das erste von A.B. Zamalodchikov [89] behandelte Beispiel, die Erweiterung der Virasoro Algebra durch ein primäres Feld der Dimension drei, hat gezeigt, daß diese Algebren eine über die linearen Lie-Algebren hinausreichende Struktur haben, nämlich eine Multiplikation der Felder, die dem aus der Quantenfeldtheorie allseits bekannten normalgeordneten Produkt entspricht. Diese $\mathcal{W}$-Algebren haben, außer der Möglichkeit, neue rationale Modelle zu liefern, vielerlei weitere Anwendungen gefunden, z.B. als Symmetriealgebren von Toda-Feldtheorien [14], zweidimensionaler Quantengravitation [75] oder in der Theorie integrabler Hierarchien nichtlinearer Differentialgleichungen [53].

Bislang wurden im wesentlichen drei unterschiedliche Methoden zum Studium von $\mathcal{W}$-Algebren entwickelt, deren erste, die systematische Fortsetzung des Ansatzes von Zamolodchikov, die Algebren explizit konstruiert [16,66]. Man startet dabei mit einem festgelegten Satz von Generatoren, schreibt dann den allgemeinsten Ansatz für die Kommutatoren dieser Felder hin und überprüft, wann dieser Ansatz eine Lie-Algebra-Struktur zuläßt, d.h. wann alle möglichen Jacobi-Identitäten erfüllt sind. Die Erweiterungen der Virasoro-Algebra durch bosonische Felder der Dimension $\{h_2, \ldots, h_n\}$ bezeichen wir mit $\mathcal{W}(2, h_1, \ldots, h_n)^{[i]}$, wobei der Index i die verschiedenen Lösungen abzählt. Es können dabei zwei Typen von $\mathcal{W}$-Algebren unterschieden werden, solche, die für beliebigen Wert der zentralen Ladung c existieren und solche, bei denen dies lediglich für wenige isolierte Werte der Fall ist. Erstere bezeichnet man als generische $\mathcal{W}$-Algebren, letztere als exotische. Die bislang bekannten exotischen $\mathcal{W}$-Algebren legen die Vermutung nahe, daß sich diese entweder als Trunkierung oder als Erweiterung mit einem einfachen Strom aus den generischen ableiten lassen. Dem Nachteil der Methode der direkten Konstruktion, daß trotz immensen Computereinsatzes die Anzahl der Generatoren recht beschränkt bleibt, steht der Vorteil gegenüber, daß sie jeweils eine vollständige Klassifikation aller $\mathcal{W}$-Algebren mit einem festen Satz von Generatoren liefert.

Die beiden anderen Methoden benutzen die unendlich-dimensionalen Erweiterungen der gewöhnlichen Lie-Algebren, sogenannte Kac-Moody-Algebren, für die Konstruktion von KFTen und insbesondere von $\mathcal{W}$-Algebren. In der Quanten-Drinfeld-Sokolov-Reduktion [37,11,12,45,46], führt man auf der Kac-Moody-Algebra Zwangsbedingungen ein und quantisiert das System à la BRST, wobei die BRST-invarianten Größen dann die Felder der $\mathcal{W}$-Algebra bilden. Auf diese Weise lassen sich insbesondere die Casimir-Algebren aller einfacher Lie-Algebren konstruieren. In der Lagrange-Formulierung liefert das Einführen der Zwangsbedingungen gerade den Übergang vom WZNW-Modell der Lie-Algebra g zum dazugehörigen Toda-Modell [7].

In der Coset-Konstruktion [54,5,26,29] teilt man aus einer Kac-Moody-Algebra $\widehat{g}$ eine Unteralgebra $\widehat{h}$ heraus, so daß die Felder in der Kommutanten von $\widehat{h}$ in $\widehat{g}$ eine $\mathcal{W}$-Algebra bilden. Der Vorteil der letzten beiden Methoden ist zum einen, daß sie eine große Klasse von $\mathcal{W}$-Algebren liefern, die niemals mit der ersten Methode berechnet werden können, und zum anderen, daß es wesentlich einfacher ist, die Darstellungstheorie der $\mathcal{W}$-Algebren aufzuklären.

Es ist nun keineswegs so, daß alle drei Methoden bisher kompatible Resultate geliefert hätten. Vielmehr existierten einige aus der direkten Konstruktion gewonnene Algebren, für die bislang weder eine Drinfeld-Sokolov-Reduktion noch eine Coset-Konstruktion bekannt waren. Darüberhinaus ist für die Casimir-Algebren nicht-einfach-geschnürter Lie-Algebren bislang keine Coset Realisierung bekannt.

Die Frage nach der Identifizierung der bosonischen, generischen $\mathcal{W}$-Algebren $\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[2]}$, $\mathcal{W}(2,4,6)^{[3]}$ und $\mathcal{W}(2,4,6)^{[4]}$ wird uns im ersten Teil dieser Arbeit beschäftigen [22]. Wir werden für alle drei Algebren Coset-Realisierungen angeben, deren klassische Analoga nicht endlich erzeugt sind. Wir werden entgegen vorherigen Mutmaßungen [6] zeigen, daß trotzdem die Quantenversionen endlich generierte $\mathcal{W}$-Algebren liefern. Alle diese $\mathcal{W}$-Algebren haben die gemeinsame Eigenschaft, Trunkierungen von Serien von Casimir-Algebren bei jeweils bestimmten Werten der zentralen Ladung zu sein, weshalb wir diesen neuen Typ als *Vereinigende $\mathcal{W}$-Algebren* bezeichnen. Es kann demnach ein und dasselbe rationale Modell als Darstellung ganz verschiedener generischer $\mathcal{W}$-Algebren auftreten, was zu der ernüchternden Feststellung führt, daß die Kategorie der generischen $\mathcal{W}$-Algebren "feiner" ist als die Kategorie der rationalen Modelle. Oder anders ausgedrückt: Jedes rationale Modell hat eine maximale exotische $\mathcal{W}$-Algebra, die aber auf unterschiedliche Weise zu generischen $\mathcal{W}$-Algebren zusammengefaßt werden können.

Als zusätzliches Ergebnis erhalten wir zumindest für eine Teilmenge aller rationaler Modelle nicht-einfach-geschnürter Lie-Algebren eine Coset-Realisierung. Der erste Teil dieser

Arbeit stellt damit zumindest implizite Methoden zur Untersuchung der Beziehung der drei Konstruktionsmethoden bereit, welche sicherlich im Zuge einer Klassifikation von $\mathcal{W}$-Algebren vorab zu klären ist.

Im zweiten Teil dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit $N=2$ supersymmetrischen konformen Feldtheorien (SKFTen), die vor allem für die Anwendung in der Hochenergiephysik wichtig sind. Dabei werden wir insbesondere die kovariante Struktur holomorpher SKFTen untersuchen und die Ergebnisse für die Konstruktion von $N=2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebren ausnutzen.

Die wesentliche Motivation dieses Unterfangens ist die Bedeutung $N=2$ SKFTen in der Kompaktifizierung von Super-String Modellen auf realistische vier Raum-Zeit-Dimensionen [8]. Solange eine allumfassende String-Feld-Theorie, in welcher das Vakuum explizit berechnet werden könnte, noch nicht formuliert ist, bedient man sich perturbativer Methoden und versucht, die Anzahl der möglichen Vakua durch phänomenologische Bedingungen einzuschränken. Eine dieser Bedingungen, die insbesondere eine Lösung des Eich-Hierarchie-Problems involviert, ist das Vorliegen von $N=1$ Raum-Zeit Supersymmetrie im Energiebereich oberhalb der Brechungsskala der elektroschwachen Wechselwirkung. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn der sechsdimensionale kompaktifizierte Raum eine sogenannte Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit ist [31], deren topologische Struktur zudem auch die Eichgruppe und die Anzahl der Teilchengenerationen determiniert. In der Interpretation der String-Theorie als KFT auf der zweidimensionalen String-Weltfläche ist diese geometrische Bedingung äquivalent dazu, daß der String durch eine $N=2$ SKFT mit $c=9$ beschrieben wird. Die drei besonderen Eigenschaften $N=2$ SKFTen, nämlich die Existenz des $U(1)$ Stromes j, des spektralen Fluß-Automorphimus' [84] und des chiralen Ringes [63], sind dabei direkt korreliert mit der GSO-Projektion, der Raum-Zeit-Superladung und des Dolbeaultschen Kohomologie-Ringes der komplexen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit. D. Gepner hat in [52] ein Verfahren vorgestellt, unter Verwendung von Tensorprodukten unitärer Darstellungen der $N=2$ Super Virasoro Algebra eine GSO-projizierte, modular invariante String-Zustandssumme zu konstruieren. Auf diese Weise wurden eine Menge bekannter und neuer String-Vakua inklusive solcher mit drei Nettogenerationen [82] gefunden. Eine vollständige Klassifikation aller String-Vakua ist somit äquivalent einer Klassifikation aller $N=2$ SKFTen mit ganzzahliger $U(1)$ Ladung und zentraler Ladung $c=9$. Unitäre, rationale Modelle mit $c\geq 3$ erhält man aus den $N=2$ supersymmetrischen Coset-Modellen $N=1$ supersymmetrischer Kac-Moody-Algebren, den sogenannten Kazama-Suzuki-Modellen [68]. Ob diese Konstruktion tatsächlich alle rationalen Modelle liefert, ist eine noch offene Frage. Ein anderer Ansatz zur Klassifikation $N=2$ SKFTen geht über die Lagrange-Formulierung einer zunächst sehr speziellen Klasse SKFTen, den sogenannten Landau-Ginzburg-Modellen [85]. Diese werden an dem Fixpunkt ihrer Renormierungsgruppe, der lediglich von dem Potential des jeweiligen Landau-Ginzburg-Modells abhängt, durch eine $N=2$ SKFT beschrieben.

Neben ihrer Bedeutung für die String-Theorie finden $N=2$ SKFTen aber auch Anwendung in der Beschreibung des Geister-Sektors von zwei-dimensionalen Quantengravitations-Theorien [13] und in der topologischen Feldtheorie [40].

In dieser Arbeit steht der Aspekt der Symmetrie-Algebren $N=2$ SKFTen im Vordergrund. Als einzig korrekt berechnetes Beispiel war nur die Erweiterung der $N=2$ Super-

Virasoro-Algebra durch ein Superfeld der Dimension zwei, die $\mathcal{SW}(1,2)$, bekannt [80], deren Berechnung mittels eines nicht manifest kovarianten Algorithmus' recht umfangreich war. Die $\mathcal{SW}(1,2)$ Algebra ist im übrigen die generische Symmetrie-Algebra des CP(2) Kazama-Suzuki-Modells [61]. In dieser Arbeit wird in der Superraum-Formulierung ein manifest kovarianter Formalismus entwickelt, der es erlaubt, den Aufwand bei der Konstruktion von $N = 2$ Super $\mathcal{W}$-Algebren erheblich zu minimieren und die Rechnungen in einem erträglichen Rahmen zu halten [20]. Die Suche nach neuen rationalen Modellen im Hinterkopf werden wir die computerisierte Form des Algorithmus' zunächst auf die Konstruktion von Super $\mathcal{W}$-Algebren mit zwei Generatoren anwenden. Dabei werden wir alle $\mathcal{SW}(1,H)$ Algebren mit $H \in \{3/2, 2, 5/2, 3\}$ berechnen, wobei sich einzig die bekannte $\mathcal{SW}(1,2)$ als generische $\mathcal{W}$-Algebra herausstellen wird. Die restlichen exotischen Lösungen lassen sich allerdings in vier verschiedene Klassen einteilen, von denen aber nur eine (bereits bekannte) rationale Modelle enthält. Eine dieser Klassen enthält die insbesondere in der String-Theorie kanonisch auftretenden Erweiterungen mit Operatoren des spektralen Flusses [39,73,74].
Abschließend wird als hoffentlich überzeugende Demonstration der Funktionstüchtigkeit unseres kovarianten Ansatzes die Super $\mathcal{W}_4$ Algebra, die Symmetriealgebra des CP(3) Kazama-Suzuki Modells, konstruiert [23]. Es wird sich zeigen, daß allerdings der allgemeine Ansatz einer $\mathcal{SW}(1,2,3)$ Algebra zwei Lösungen zuläßt, deren zweite wir wiederum als Vereinigende Super $\mathcal{W}$-Algebra der CP(n) Modelle identifizieren werden. Trotz erheblicher Anstrengung haben wir leider keine neuen rationalen, unitären SKFTen gefunden, dafür aber neue Einblicke zum einen in die allgemeine Struktur von $N = 2$ Super $\mathcal{W}$-Algebren, zum anderen, verglichen mit den $N = 0$ und $N = 1$ Fällen, in die teilweise Andersartigkeit der Menge aller Super $\mathcal{W}$-Algebren, eröffnet.

Mein Dank für das "ans Licht treten" dieser Arbeit gilt Prof. W. Nahm für seine Motivation, Unterstützung und liberale Führung, meinen Kollegen W. Eholzer, L. Fehér, A. Honecker, K. Hornfeck, R. Hübel für die Zusammenarbeit am ersten Teil dieser Arbeit, meinem Schützling A. Wißkirchen für seine Geduld bei der Berechnung der $\mathcal{SW}(1,2,3)$, R. Schimmrigk und M. Terhoeven für manches Gespräch über String-Theorie und J. Figueroa-O'Farrill, M. Flohr, J. Kellendonk, A. Kliem, N. Mohammedi, A. Recknagel, M. Rösgen, S. Stanciu, R. Varnhagen für so manchen Hinweis und dem Mitwirken an der angenehmen Atmosphäre in unserer Arbeitsgruppe.
Aber all dies hätte nichts bewirkt, wäre nicht auch die liebevolle Unterstützung meiner Freunde und ganz besonders meiner Eltern und Großmutter gewesen.

2. Methoden zur Konstruktion von W-Algebren

Nach einer kurzen Einführung in die KFT stellen wir in diesem Kapitel die drei bisher am weitesten entwickelten Methoden zur Konstruktion von $\mathcal{W}$-Algebren vor, die direkte Konstruktion, die Drinfeld-Sokolov Reduktion und die Coset-Konstruktion.

2.1. Einführung in die KFT

Wie der Name bereits sagt, sind zwei-dimensionale KFTen symmetrisch unter der Gruppe aller konformen Transformationen. Da in zwei Dimensionen nach Einführen komplexer Koordinaten $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$ alle holomorphen Funktionen $z \to w(z)$, $\overline{z} \to \overline{w}(\overline{z})$ konforme Abbildungen sind, hat die konforme Gruppe in diesem Fall die besondere Eigenschaft unendlich dimensional zu sein. Die zugehörige Symmetrie-Algebra ist die direkte Summe zweier de-Wit Algebren, deren zentrale Erweiterung die *Virasoro-Algebra* $Vir(c)$ ist:

$$[L_m, L_n] = (n-m)L_{m+n} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{m+n,0}. \tag{2.1}$$

Die Generatoren der Möbius-Transformationen $\{L_{-1}, L_0, L_1\}$ bilden eine $su(1,1)$ Unteralgebra der Virasoro-Algebra. Weiterhin sind die Generatoren L_n genau die Laurent-Moden des Energie-Impuls Tensors $L(z)$:

$$L(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} L_m z^{m-2}, \qquad L_m = \oint_{\mathcal{C}_0} \frac{dz}{2\pi i} z^{-m+1} L(z). \tag{2.2}$$

Die Kommutatorrelation (2.1) der Moden läßt sich in den Feldformalismus übertragen, in dem sie isomorph zum singulären Teil der folgenden Operator-Produkt-Entwicklung (OPE) ist:

$$L(z)L(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2L(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial L(w)}{z-w} + \text{reg.}, \tag{2.3}$$

für radial geordnete Felder $|z| < |w|$.
Unter den Feldern einer KFT sind solche ausgezeichnet, die sich wie folgt tensoriell transformieren:

$$\phi'_{h,\overline{h}}(z,\overline{z}) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^h \left(\frac{d\overline{w}}{d\overline{z}}\right)^{\overline{h}} \phi_{h,\overline{h}}(w(z), \overline{w}(\overline{z})). \tag{2.4}$$

Die Definition eines solchen *primären Feldes* der Dimension $(h, \overline{h})$ ist äquivalent zu der folgenden OPE

$$L(z)\phi(w) = \frac{h\phi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\phi(w)}{z-w} + \text{reg.}. \tag{2.5}$$

Gilt (2.4) nur für Möbius Transformationen, so heißt $\phi(z)$ *quasiprimär*. Insbesondere ist der Energie-Impuls Tensor $L(z)$ ($\overline{L}(\overline{z})$) selbst ein quasiprimäres Feld der Dimension $(2,0)$ ($(0,2)$). Im folgenden seien die wichtigsten Eigenschaften der besonderen Klasse der *(anti-) holomorphen Felder*, definiert durch $\partial_{\overline{z}}\phi(z,\overline{z}) = 0$ bzw. $\partial_{z}\phi(z,\overline{z}) = 0$, zusammengefaßt.

Die OPE zweier holomorpher, quasiprimärer Felder läßt sich wieder durch quasiprimäre Felder und deren Ableitungen ausdrücken, wobei die Kopplungen an die derivativen Felder universell sind, d.h. sie hängen nur von den Dimensionen der involvierten Felder ab [16,18]:

$$\phi_i(z)\phi_j(w) = \sum_k C_{ij}^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{ijk}^n}{n!} \frac{\partial^n \phi_k(w)}{(z-w)^{h_i+h_j-h_k-n}} + \frac{d_{ij}}{(z-w)^{h_i+h_j}} \tag{2.6}$$

mit

$$a_{ijk}^n = \binom{2h_k+n-1}{n}^{-1} \binom{h_i+h_k+h_j+n-1}{n}. \tag{2.7}$$

Über den regulären Teil der OPE lassen sich auf kanonische Weise normalgeordnete Produkte (NOPe) definieren:

$$\phi_i(z)\phi_j(w) = \text{sing.Terme} + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(z-w)^n N(\phi_j \partial^n \phi_i)(w) \tag{2.8}$$

mit der Modenentwicklung

$$N(\phi_j\phi_i)_n = \epsilon \sum_{m<h_i} \phi_{j,n-m}\phi_{i,m} + \sum_{m\geq h_i} \phi_{i,m}\phi_{j,n-m}, \tag{2.9}$$

wobei $\epsilon = -1$ für zwei fermionische Felder und sonst $\epsilon = 1$. Weiterhin ist durch

$$\phi(z) \to \lim_{z\to 0} \phi(z)|0\rangle \tag{2.10}$$

eine Abbildung von dem Raum aller holomorphen Felder $\mathcal{F}$ auf einen *charakteristischen Hilbertraum* $\mathcal{H}$ definiert. Man erhält z.B.

$$\phi(z) \to \phi_h|0\rangle, \qquad N(\phi_j\phi_i)(z) \to \phi_{i,h_i}\phi_{j,h_j}|0\rangle. \tag{2.11}$$

Mathematisch werden Erweiterungen der konformen Symmetrie beschrieben durch Erweiterungen der Virasoro-Algebra mit holomorphen, (quasi-)primären Feldern. Da der Kommutator zweier Felder im allgemeinen NOPe enthält, sind diese erweiterten Algebren keine Lie-Algebren im üblichen Sinne, sondern sogenannte $\mathcal{W}$-Algebren im Sinne der folgenden Definition.

Definition: Eine *endlich erzeugte, bosonische Quanten $\mathcal{W}$-Algebra* $\mathcal{W}(2, h_2, \ldots, h_N)$ besteht aus einer endlichen Menge holomorpher, (quasi-)primärer Felder $\{W_i(z)\}_{i=1}^N$, $h_i \in \mathbb{Z}_+$ mit der Modenentwicklung

$$W_i(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{n-h_i} W_{i,n}, \tag{2.12}$$

wobei $W_1(z) = L(z)$, und zweier Abbildungen f, $[.,.]$ mit den folgenden Eigenschaften:

a.) Die Abbildung

$$f : \mathcal{F} \to \mathcal{H} \quad \text{mit} \quad f(\phi) = \phi_h|0\rangle \tag{2.13}$$

ist ein *Isomorphismus*, wobei der charakteristische Hilbertraum $\mathcal{H}$ aus allen Monomen lexikographisch geordneter Laurent-Moden angewandt auf das $su(1,1)$-invariante Vakuum $|0\rangle$ besteht.

b.) Die Abbildung

$$[.,.] : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F} \tag{2.14}$$

definiert eine Lie-Algebra auf den Moden der Felder in $\mathcal{F}$.

Während Forderung a.) impliziert, daß der Raum aller Felder $\mathcal{F}$ duch quasiprimäre Felder und deren Ableitungen aufgespannt wird, müssen gemäß Forderung b.) $\mathcal{W}$-Algebren nicht linear in den Generatoren schließen, sondern der Kommutator von zwei Feldern kann NOPe enthalten. Das einfachste nicht-lineare Beispiel ist die ursprünglich von A.B. Zamolodchikov eingeführte $\mathcal{W}(2,3)$ [89], die im Kommutator der beiden Generatoren mit Dimension drei das NOP $N(LL)$ enthält. Die obige Definition einer $\mathcal{W}$-Algebren kann auf verschiedene Weise abgeschwächt werden:

- Die $\mathcal{W}$-Algebra kann auch unendlich generiert sein, so daß die Definition auch die verschiedenen $\mathcal{W}_\infty$-Algebren mit einschließt.
- Die Definition kann ohne Schwierigkeiten auf supersymmetrische $\mathcal{W}$-Algebren ausgedehnt werden, wobei der charakteristische Hilbertraum dann auch von den halbzahligen Moden der fermionischen Felder erzeugt wird. Die Abbildung $[.,.] : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ soll ferner die $\mathbb{Z}_2$- Graduierung von $\mathcal{F}$ respektieren, d.h. sie definiert eine Super-Lie-Algebra auf $\mathcal{F}$.
- Insbesondere in supersymmetrischen KFTen treten zwangsläufig sogenannte getwistete Sektoren auf, welche zu veränderten Randbedingungen der Felder korrespondieren. Beispielsweise tragen die Fermionen im antiperiodischen Sektor, dem sogenannten Ramond-Sektor, ganzzahlige Moden.

Sei nun angenommen, die Symmetrie-Algebra $\mathcal{A} \oplus \overline{\mathcal{A}}$ einer KFT sei bekannt. Dann läßt sich der gesamte Hilbertraum in Darstellungen der Symmetrie-Algebra zerlegen, wobei die physikalisch relevanten Darstellungen ein nach unten beschränktes Energie-Spektrum haben müssen, d.h. es sind sogenannte Höchstgewichtsdarstellungen. Es gibt demnach einen Höchstgewichtszustand $|h\rangle$ mit den Eigenschaften

$$L_0|h\rangle = h|h\rangle, \qquad W_{i,n}|h\rangle = 0,\ n < 0.$$

Im allgemeinen ist der auf $|h\rangle$ aufbauende Verma-Modul $M(h,c)$ der lexikographisch geordneten Monome in den Moden der Generatoren der Symmetrie-Algebra nicht irreduzibel. Die Hermitizitätseigenschaft der Generatoren $W_i(z)$

$$W_{i,n}^{+} = (-1)^{h_i} W_{i,-n}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2.15}$$

und $\langle h, h\rangle = 1$ definiert eine symmetrische Bilinearform auf $M(h,c)$, mit welcher man nach Herausteilen des Radikals von $\langle\ ,\ \rangle$, d.h. aller Zustände mit Norm null, irreduzible Darstellungen $L(h,c)$ der Symmetrie-Algebra erhält. Eine KFT heißt *rational*, wenn es endlich viele Darstellungen der Symmetrie-Algebra gibt, deren OPEen schließen. Im Falle der Virasoro-Algebra sind die rationalen Modelle klassifiziert [51]:

$$c = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}, \qquad p, q \in \mathbb{Z}^+, (p,q) = 1 \tag{2.16}$$
$$h_{r,s} = \frac{(ps-qr)^2 - (p-q)^2}{4pq}, \qquad 0 < r < p,\ 0 < s < q.$$

Alle diese sogenannten *minimalen Modelle* der Virasoro-Algebra haben demnach $c < 1$. Eine Hauptmotivation für das Studium erweiterter Symmetrie-Algebren ist das Auffinden und wenn möglich die Klassifikation rationaler Modelle mit $c \geq 1$ als deren minimale Modelle.
Information über die Anzahl von Zuständen bei den jeweiligen Energie-Leveln ist kodiert in dem *Charakter* $\chi_i(\tau)$ einer Darstellung $L(h_i, c)$:

$$\chi_i(\tau) = Tr_{\mathcal{H}_i}(q^{L_0 - \frac{c}{24}}), \qquad q = e^{2\pi i\tau}. \tag{2.17}$$

Dies ist eine holomorphe Funktion in der oberen komplexen Halbebene $\{\tau \in \mathbb{C} : Im(\tau) > 0\}$. Interpretiert man τ als modularen Parameter eines Torus', so liefert die Forderung nach Invarianz unter globalen konformen Transformationen auf dem Torus noch weitere Einschränkungen an die KFT. Die Gruppe dieser *modularen Transformationen* ist isomorph zu $SL(2, \mathbb{Z})$ und wird generiert durch

$$T : \tau \to \tau + 1, \qquad S : \tau \to -\frac{1}{\tau} \tag{2.18}$$

mit den Relationen

$$S^2 = (TS)^3 = 1. \tag{2.19}$$

Die Charaktere einer rationalen KFT bilden eine endliche Darstellung dieser modularen Gruppe. Die *Zustandssumme* einer KFT, definiert als

$$Z(q, \overline{q}) = Tr_{\mathcal{H}\times\overline{\mathcal{H}}}\left(q^{L_0 - \frac{c}{24}}\overline{q}^{\overline{L}_0 - \frac{c}{24}}\right), \tag{2.20}$$

kann nun als bilinearer Ausdruck in den Charakteren geschrieben werden

$$Z(q, \overline{q}) = \sum_{h,\overline{h}} \chi_h(q) \mathcal{N}_{h\overline{h}}\, \overline{\chi}_{\overline{h}}(\overline{q}), \tag{2.21}$$

so daß die Forderung nach modularer Invarianz der Zustandssumme starke Restriktionen an die möglichen Kopplungen des holomorphen und des antiholomorphen Sektors liefert. Für die minimalen Modelle der Virasoro-Algebra sind alle modularen Invarianten in ein A-D-E Schema klassifiziert [32].
Im Falle der rationalen KFTen ist somit, zumindest implizit, die gesamte Feldtheorie, d.h. die Zustandssumme, bereits vollständig durch die $\mathcal{W}$-Algebra determiniert.

Im nächsten Kapitel stellen wir diese $\mathcal{W}$-Algebren expliziter vor, wobei wir zunächst die Methode der direkten Konstruktion dieser recht komplexen Algebren erörtern.

2.2. Direkte Konstruktion von $\mathcal{W}$-Algebren

In diesem Kapitel werden kurz die strukturellen Eigenschaften holomorpher KFTen und deren Anwendung in der expliziten Konstruktion von $\mathcal{W}$-Algebren dargestellt. Weiterhin geben wir einen Überblick über die bislang mit dieser Methode konstruierten generischen Beispiele bosonischer $\mathcal{W}$-Algebren.

2.2.1. Struktur holomorpher KFTen

Die universelle Struktur der OPE holomorpher, quasiprimärer Felder haben wir bereits in (2.6-2.7) vorgestellt. Die Entwicklung dieser Formeln nach Moden induziert auf der Menge der holomorphen, quasiprimären Felder die folgende Lie-Algebra Struktur [16]:

$$[\phi_{i,m}, \phi_{j,n}] = \sum_{k:h_k<h_i+h_j} C_{ij}^k p_{ijk}(m,n)\phi_{k,m+n} + d_{ij}\binom{n+h_j-1}{2h_j-1}\delta_{m+n,0}, \tag{2.22}$$

wobei die $p_{ijk}(m,n)$ universelle Polynome sind, die nur von den Dimensionen $\{h_i, h_j, h_k\}$ abhängen. Weiterhin lassen sich die Strukturkonstanten d_{ij}, C_{ij}^k der Zweipunkt- und Dreipunkt-Funktionen wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \langle 0|\phi_{j,-h_j}\phi_{i,h_i}|0\rangle \\ C_{ijk} &= \langle 0|\phi_{j,-h_j}\phi_{k,h_j-h_i}\phi_{i,h_i}|0\rangle \\ C_{ijk} &= C_{ij}^l d_{lk}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Um die Gleichungen (2.22-2.23) für die Berechnung von $\mathcal{W}$-Algebren nutzbar zu machen, benötigt man noch die Projektion von den i.a. nicht quasiprimären NOPen $N(\phi_j\phi_i)$ auf deren quasiprimären Anteil $\mathcal{N}(\phi_j\phi_i)$. Unter Benutzung der beiden Gleichungen (2.6), (2.8) erhält man die folgende Beziehung zwischen den beiden Typen NOPe:

$$\begin{aligned} N(\phi_j\partial^n\phi_i)(w) = &\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m} a_{i,j,i+j+n-m}^m \partial^m\mathcal{N}(\phi_j\partial^{n-m}\phi_i)(w) \\ &+ \sum_{0<h_k<h_i+h_j} C_{ij}^k a_{ijk}^{i+j-k+n}\frac{n!}{(h_i+h_j-h_k+n)!}\partial^{h_i+h_j-h_k+n}\phi_k(w). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Iteration nach n erlaubt es, die quasiprimären NOPs durch die anderen auszudrücken.

Damit hat man einen algorithmisierbaren Formalismus zur expliziten Konstruktion von $\mathcal{W}$-Algebren mit wenigen Generatoren an der Hand. Startend mit einem festen Satz von Generatoren vorher festgelegter konformer Dimensionen berechnet man für alle auftretenden quasiprimären NOPe die Strukturkonstanten und prüft schließlich alle Jacobi-Identitäten zwischen den Generatoren nach, wobei wegen der $su(1,1)$-Invarianz Jacobi-Identitäten, die $L(z)$ involvieren, automatisch erfüllt sind. Die Rechnung liefert eine *vollständige* Klassifikation aller $\mathcal{W}$-Algebren mit einem festen Satz von Generatoren. Nach Prüfung aller Jacobi-Identitäten lassen sich zwei Klassen von $\mathcal{W}$-Algebren unterscheiden: solche, die für beliebige zentrale Ladung c existieren, sogenannte *generische $\mathcal{W}$-Algebren*, und solche, die nur für wenige isolierte Werte von c konsistent sind, sogenannte *exotische $\mathcal{W}$-Algebren*. Alle bislang gefundenen exotischen $\mathcal{W}$-Algebren mit zwei und drei Generatoren lassen sich aus der Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra oder als *Trunkierung* von generischen $\mathcal{W}$-Algebren mit mehr Generatoren verstehen. Unter einer Trunkierung einer Algebra $\mathcal{W}(2, h_2, \ldots, h_n)$ auf eine Algebra $\mathcal{W}(2, h_2, \ldots, h_m)$ verstehen wir, daß die Felder $\{\phi_{m+1}, \ldots, \phi_n\}$ aus den Kommutatoren der Felder $\{L, \phi_2, \ldots, \phi_m\}$ entkoppeln und diese selber nach Renormierung der unendlichen Kopplungskonstanten Nullfelder werden. Exotische $\mathcal{W}$-Algebren werden uns erst wieder in Kapitel 4. im Zusammenhang mit $N = 2$ Super $\mathcal{W}$-Algebren interessieren, im weiteren Verlauf dieses Kapitels konzentrieren wir uns auf generische bosonische $\mathcal{W}$-Algebren.

2.2.2. Beispiele generischer $\mathcal{W}$-Algebren

Im folgenden stellen wir die explizit berechneten generischen $\mathcal{W}$-Algebren noch einmal zusammen:

(i) $\mathcal{W}$(2,3)[89]

Diese Algebra wurde zuerst von A.B. Zamolodchikov konstruiert und als Casimir-Algebra von A_2 identifiziert.

(ii) $\mathcal{W}$(2,4)[57]

Diese Algebra enthält noch eine weitere Selbstkopplungskonstante des primären Feldes mit Dimension vier, für die man aus den Jacobi-Identitäten die Konsistenzbedingung

$$(C_{44}^4)^2 = \frac{54(c+24)(c^2-172c+196)}{(5c+22)(2c-1)(7c+68)} \tag{2.25}$$

erhält. Weiterhin ist diese Algebra die Casimir-Algebra von B_2 bzw. C_2.

(iii) $\mathcal{W}$(2,6)[47]

Für die Selbstkopplung dieser Casimir-Algebra von G_2 erhält man eine ähnliche Bedingung wie (2.25).

(iv) $\mathcal{W}$(2,3,4)[16]

Es existieren keine weiteren generischen $\mathcal{W}$-Algebren mit zwei Generatoren. $\mathcal{W}$-Algebren mit drei Generatoren haben die neue Eigenschaft, daß NOPe der zusätzlichen Generatoren auftreten, die die Rechnungen erheblich komplizierter machen. Die eindeutige Lösung der $\mathcal{W}$(2,3,4) ist die Casimir-Algebra von A_3.

(v) $\mathcal{W}$(2,4,6)[16,66]

Bei der Berechnung dieser Algebra tritt ein neues Phänomen auf, nämlich die Existenz von vier unabhängigen Lösungen für die Strukturkonstanten. Die ersten beiden $\mathcal{W}(2,4,6)^{[1],[2]}$

gehören zu den Casimir-Algebren von B_3 und C_3, die dritte $\mathcal{W}(2,4,6)^{[3]}$ konnte als bosonischer Sektor der $N=1$ Super Virasoro-Algebra identifiziert werden. Für die vierte Lösung $\mathcal{W}(2,4,6)^{[4]}$, deren Herkunft lange Zeit unbekannt war, wird in Kapitel 3. eine Konstruktion als Coset

$$\frac{\widehat{su}(2)_{-\frac{1}{2}} \times \widehat{su}(2)_k}{\widehat{su}(2)_{k-\frac{1}{2}}} \tag{2.26}$$

angegeben. Für spätere Zwecke geben wir für die letzten beiden Lösungen die Kopplungskonstanten der Generatoren explizit an:
$\mathcal{W}(2,4,6)^{[3]}$:

$$\begin{aligned}
(C_{44}^4)^2 &= \frac{54(10c^2+47c-82)^2}{(10c-7)(5c+22)(4c+21)} \\
(C_{66}^4)^2 &= \frac{50(7c+68)^2(3c+20)^2(2c-1)^2}{3(10c-7)(5c+22)(4c+21)(c+24)^2} \\
(C_{44}^6)^2 &= \frac{144(14c+11)(5c+22)^2(c+11)(c-1)^2}{(10c-7)(7c+68)(4c+21)(2c-1)(c+24)} \\
(C_{66}^6)^2 &= \frac{400(616c^4+19106c^3+183931c^2+574876c+724096)^2(c-1)^2}{9(14c+11)(10c-7)(7c+68)(4c+21)(2c-1)(c+24)^3(c+11)}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$\mathcal{W}(2,4,6)^{[4]}$:

$$\begin{aligned}
(C_{44}^4)^2 &= -\frac{(5c^2+309c-14)^2}{(5c+22)(5c+3)(c-26)} \\
(C_{66}^4)^2 &= -\frac{100(7c+68)^2(2c-1)^2(c+50)^2}{81(5c+22)(5c+3)(c+24)^2(c-26)} \\
(C_{44}^6)^2 &= -\frac{2(14c+11)(5c+22)^2(c+76)(c+49)(c-1)}{3(7c+68)(5c+3)(2c-1)(c+24)(c-26)} \\
(C_{66}^6)^2 &= \\
&-\frac{50(1106c^5+72355c^4+839120c^3-574940c^2-1961680c-2510336)^2(c+49)}{243(14c+11)(7c+68)(5c+3)(2c-1)(c+76)(c+24)^3(c-1)(c-26)}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

(vi) $\mathcal{W}$(2,3,4,5)[58]

Diese mit einem erheblichen Rechenaufwand verbundene Algebra wurde kürzlich von K. Hornfeck konstruiert. Es existieren ähnlich wie bei der $\mathcal{W}$(2,4,6) zwei unabängige Lösungen, deren eine, $\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[1]}$, die Casimir-Algebra von A_4 ist. Für die uns im folgenden interessierende zweite Lösung $\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[2]}$ sind in [58] folgende Strukturkonstanten berechnet worden:

$$\left(C_{33}^4\right)^2 = \frac{16(5c-4)(c+10)^2(c+2)}{3(5c+22)(2c-1)(c+7)}$$

$$\begin{aligned}
\left(C_{44}^{4}\right)^2 &= \frac{27(5c^3+45c^2-6c-64)^2}{(5c+22)(5c-4)(2c-1)(c+7)(c+2)} \\
\left(C_{35}^{4}\right)^2 &= \frac{16}{25}\left(C_{34}^{5}\right)^2 = \frac{16(5c+22)(c+13)(c-1)}{(7c+114)(2c-1)} \\
\left(C_{55}^{4}\right)^2 &= \frac{12(85c^3+1076c^2-188c-2304)^2(c+7)}{(7c+114)^2(5c+22)(5c-4)(2c-1)(c+2)}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Im Kapitel 3. werden wir diese Algebra als Symmetrie-Algebra der Parafermionen

$$\frac{\widehat{su}(2)_k}{\widehat{u}(1)} \tag{2.30}$$

identifizieren.

(vii) $\mathcal{W}(2,3,4,5,6)$[58]

In diesem Fall existiert lediglich eine Lösung, die zur Lie-Algebra A_5 korrespondiert.

Es ist zu betonen, daß erst diese recht umfangreichen Rechnungen den Anlaß für die Untersuchungen des Kapitels 3. gaben, und daß im Gegensatz zu den in den beiden folgenden Kapiteln vorgestellten Methoden bisher einzig die direkte Konstruktion Information, nicht nur über die Existenz von $\mathcal{W}$-Algebren, sondern auch auch über deren Vollständigkeit liefert.
Die Berechnung der Kac-Determinanten ist allein durch die explizite Kenntnis der $\mathcal{W}$-Algebra sehr schwierig. Diese Aufgabe kann allerdings dadurch erleichtert werden, daß man eine Freifeldkonstruktion oder eine Coset-Konstruktion für die entsprechende $\mathcal{W}$-Algebra findet. In Referenz [41] sind Methoden entwickelt worden, mit welchen sich zumindest unter Umständen entscheiden läßt, ob eine $\mathcal{W}$-Algebra bei einem bestimmten Wert der zentralen Ladung c eine rationale KFT liefert. Dabei wird zum einen ausgenutzt, daß aus dem Verschwinden von Null-Feldern in den Höchstgewichtsmoduln Bedingungen an die erlaubten Höchstgewichte abgeleitet werden können. Zum anderen werden direkt Jacobi-Identitäten auf den Höchstgewichtsmoduln ausgewertet, welche ebenfalls notwendige Bedingungen an die Darstellungen liefern. Reduziert diese Analyse die erlaubten Höchstgewichte auf eine endliche Anzahl, so ist das Modell bei diesem c Wert rational. Für die Darstellungstheorie generischer $\mathcal{W}$-Algebren ist diese Methode allerdings nicht sonderlich effektiv.
Im folgenden Kapitel stellen wir Methoden zur Konstruktion von $\mathcal{W}$-Algebren vor, die sich aus der Reduktion und der Nebenklassenbildung einfacher Kac-Moody-Algebren ergeben.

2.3. Kac-Moody-Algebren und Drinfeld-Sokolov-Reduktion

Die direkte Konstruktion hat den Nachteil, daß die durchzuführenden Rechnungen mit Zunahme der Anzahl der Generatoren sehr komplex werden. Es existieren aber zwei Methoden, die beide die Theorie der Kac-Moody-Algebren benutzen, um auch KFTen mit komplizierteren $\mathcal{W}$-Algebren zu konstruieren. Die genaue Kenntnis der $\mathcal{W}$-Algebra mit all ihren Strukturkonstanten steht dabei zunächst im Hintergrund, vielmehr interessiert man sich für den Feldgehalt der impliziten $\mathcal{W}$-Algebra und deren Darstellungen. Im folgenden geben wir einen Überblick über die Theorie der Kac-Moody-Algebren, soweit diese in den restlichen Kapiteln dieser Arbeit benötigt wird. Anschließend präsentieren wir eine exemplarische Einführung in die Methode der Drinfeld-Sokolov-Reduktion, wobei wir uns, da diese Methode in dieser Arbeit nicht explizit angewandt wird, mit einer knappen Beschreibung der Methode und der Darstellung der Resultate begnügen.

2.3.1. Kac-Moody-Algebren

Kac-Moody-Algebren spielen eine wichtige Rolle in der Konstruktion von KFTen, da sie zum einen selber KFTen sind, deren Symmetrie-Algebren aus primären Feldern der Dimension eins, sogenannten *Strömen*, bestehen und da zum anderen Methoden entwickelt worden sind, aus ihnen nichtlineare, generische $\mathcal{W}$-Algebren zu konstruieren. Es ist eine bislang nicht bewiesene Vermutung, daß alle KFTen aus Kac-Moody-Algebren mittels der Methode der Drinfeld-Sokolov-Reduktion und/oder der Coset-Konstruktion erhalten werden können.
Kac-Moody-Algebren sind unendlich dimensionale Verallgemeinerungen von Lie Algebren, definiert durch die Kommutatorrelationen:

$$[J_m^a, J_n^b] = f_c^{ab} J_{m+n}^c + kmd^{ab}\delta_{m+n,0}, \tag{2.31}$$

wobei f_c^{ab} die Strukturkonstanten einer Lie Algebra g bezeichnet und d^{ab} die Killing Form von g. Für $m, n \in \mathbb{Z}$ heißt obige Algebra eine (ungetwistete) *affine Kac-Moody-Algebra* $\widehat{g}$. Der normalgeordnete Casimir-Operator der Ordnung zwei von $\widehat{g}$

$$L(z) = \frac{1}{2(k+h^\vee)} d_{ab} N(J^a J^b)(z) \tag{2.32}$$

erfüllt die Virasoro-Algebra mit zentraler Ladung

$$c = c(g,k) = \frac{k\,\dim(g)}{k+h^\vee}, \tag{2.33}$$

wobei $h^\vee$ die duale Coxeter-Zahl der Lie-Algebra g bezeichnet. Bezüglich des sogenannten *Sugawara* Energie-Impuls Tensors (2.32) transformieren sich die Stöme $\{J^a(z)\}_{a=1}^{\dim(g)}$ wie primäre Felder der konformen Dimension eins.
Es seien nun noch einige Bezeichnungen aus der Theorie der Lie-Algebren eingeführt. Die Generatoren einer einfachen Lie-Algebra g vom Rang l in der Cartan-Weyl-Basis werden mit $\{H^i\}_{i=1}^l$ für die Cartan-Unteralgebra und mit $\{E^{\pm\vec{\alpha}}\}_{\vec{\alpha}\in\Delta_+}$ für die Schiebeoperatoren bezeichnet, wobei Δ_+ die Menge aller positiven und Δ_0 die Menge aller einfachen Wurzeln enthält. Ferner ist der Weyl-Vektor $\vec{\rho}$ definiert durch

$$\vec{\rho} = \frac{1}{2}\sum_{\vec{\alpha}\in\Delta_+}\vec{\alpha}. \tag{2.34}$$

Die einfachen Kac-Moody-Algebren $\{A_n, B_n.C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, G_2, F_4\}$ haben für ganzzahligen, positiven Level k nur endlich viele unitäre, irreduzible Höchstgewichtsdarstellungen $\vec{\Lambda} \in P_+^{(k)}$, die die folgende Bedingung erfüllen müssen:

$$\frac{2(\vec{\theta}, \vec{\Lambda})}{\vec{\theta}^2} \leq k, \qquad \vec{\theta} : \text{längste Wurzel von } g. \tag{2.35}$$

Die konforme Dimension einer solchen sogenanten *integrablen* Darstellung mit Höchstgewicht $\vec{\Lambda}$ ist

$$h_{\vec{\Lambda}} = \frac{(\vec{\Lambda}, \vec{\Lambda} + 2\vec{\rho})}{2(k + h^\vee)}. \tag{2.36}$$

Mit anderen Worten ausgedrückt, die einfachen Kac-Moody-Algebren zu ganzzahligem, positivem Level k sind rationale, unitäre konforme Feldtheorien. Der Charakter einer Darstellung, definiert als

$$\chi_{\vec{\Lambda}}(\tau, \vec{\theta}) = Tr_{\mathcal{H}_{\vec{\Lambda}}} \left(e^{2\pi\tau\left(L_0 - \frac{c}{24}\right)} e^{2\pi i \vec{\theta} \vec{H}} \right), \tag{2.37}$$

kann für die integrablen Darstellungen durch Theta-Funktionen ausgedrückt werden. Wir kommen später im Spezialfall $\widehat{su}(2)_k$ darauf zurück. Im Grenzfall $k \to \infty$ enthalten die Darstellungen keine Null-Zustände und die Charaktere können mithin geschrieben werden als

$$\chi^k_{\vec{\Lambda}}(q, \vec{\theta}) = \frac{q^{-\frac{\dim(g)}{24}}}{\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^l \prod_{\vec{\alpha}\in\Delta}(1 - e^{2\pi i \vec{\theta}\vec{\alpha}} q^n)} \chi_{\vec{\Lambda}}(\vec{\theta}), \tag{2.38}$$

wobei wir hier nicht zwischen einem Gewicht von $\widehat{g}$ und dessen Projektion auf das Gewichtsgitter P_+ von g unterscheiden. Die Aufspaltung der Charaktere nach den g-Gewichten $\vec{\lambda}$ führt auf die Definition der *Kac-Peterson String-Funktionen*

$$\chi^k_{\vec{\Lambda}}(q, \vec{\theta}) = \sum_{\vec{\lambda}\in P_+} c^{\vec{\Lambda}}_{\vec{\lambda}}(q)\; q^{\frac{1}{2k}|\vec{\lambda}|^2} e^{2\pi i \vec{\theta}\vec{\lambda}}. \tag{2.39}$$

Für integrable Darstellungen gibt es nur eine endliche Anzahl unabhängiger String-Funktionen, insbesondere sind diese für die einfach-geschnürten Algebren aus der A-D-E Serie mit Level $k = 1$ gegeben durch

$$c^{\vec{\Lambda}}_{\vec{\lambda}}(q) = \eta(q)^{-l}, \qquad \eta(q) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n\geq 1}(1 - q^n). \tag{2.40}$$

Neben den String-Funktionen definieren wir noch die *Branching-Funktionen* $b^{\vec{\Lambda}}_{\vec{\lambda}}$ einer Darstellung von $\widehat{g}_k$ nach Darstellungen der horizontalen Unteralgebra g:

$$\chi^k_{\vec{\Lambda}}(q, \vec{\theta}) = \sum_{\vec{\lambda}\in P_+} b^{\vec{\Lambda}}_{\vec{\lambda}}(q)\; \chi_{\vec{\lambda}}(\theta). \tag{2.41}$$

Diese Branching-Funktionen lassen sich durch die String-Funktionen ausdrücken

$$b_{\vec{\lambda}}^{\vec{\Lambda}}(q) = \sum_{w \in W} \epsilon(w) c^{\vec{\Lambda}}_{-w(\vec{\lambda})+\vec{\rho}}(q)\ q^{\frac{1}{2k}|-w(\vec{\lambda})+\vec{\rho}|^2}. \tag{2.42}$$

W bezeichnet die endliche *Weyl-Gruppe* von g. In der Terminologie der Coset-Konstruktion sind die Branching-Funktionen nichts anders als die Charaktere des Cosets $\widehat{g}_k/g$.
Abschließend sei in diesem Kapitel noch erwähnt, daß für die KFT auch Darstellungen von Kac-Moody-Algebren mit rationalem Level k wichtig sind. In diesem Fall haben Kac-Wakimoto [65] gezeigt, daß man zumindest noch eine endliche Auswahl aus den unendlich vielen irreduziblen, nicht-unitären Darstellungen treffen kann, die eine endliche Darstellung der Modulgruppe bilden. Auf diese sogenannten *zulässigen Darstellungen* werden wir in dem Kapitel über das Coset $\widehat{su}(2)_{-\frac{1}{2}} \times \widehat{su}(2)_k/\widehat{su}(2)_{k-\frac{1}{2}}$ noch näher eingehen.

2.3.2. Casimir-Algebren und Drinfeld-Sokolov-Reduktion

Eine spezielle Klasse von $\mathcal{W}$-Algebren, von denen lange Zeit geglaubt wurde, es seien die einzigen generischen $\mathcal{W}$-Algebren, sind die Casimir-Algebren [4,26,28]. Für die A-D-E Serie sind es direkte Verallgemeinerungen der Sugawara-Konstruktion auf die Casimir-Operatoren höherer Ordnung der zugrunde liegenden einfachen Lie-Algebra g:

$$W^{(s_i)}(z) = \frac{1}{s_i!}\eta^{(s_i)}(\widehat{g},k) \sum_{a,b,c,\ldots} d_{abc\ldots}(J^a(J^b(J^c(\ldots))))(z), \tag{2.43}$$

wobei $\eta^{(s_i)}(\widehat{g},k)$ eine Normierungskonstante bezeichnet und $d_{abc\ldots}$ den total symmetrischen spurlosen g-invarianten Tensor der Ordnung s_i. Die obigen Generatoren bildet zunächst die Casimir-Algebra von $\widehat{g}_k$ für $k = 1$ und $c = l$, die generische Algebra ergibt sich dann analog zur Virasoro-Algebra durch Coset-Konstruktion. Eine Lie-Algebra vom Rang l hat eine Basis von genau l unabhängigen Casimir-Operatoren, deren Ordnungen jeweils um eins größer sind als die Exponenten e_i der Lie Algebra. In der folgenden Tabelle sind die Exponenten der einfachen Lie-Algebren aufgelistet

g	$e_i + 1$
A_n	$2, 3, \ldots, n+1$
B_n	$2, 4, 6, \ldots, 2n$
C_n	$2, 4, 6, \ldots, 2n$
D_n	$2, 4, 6, \ldots, 2n-2, n$
E_6	$2, 5, 6, 8, 9, 12$
E_7	$2, 6, 8, 10, 12, 14, 18$
E_8	$2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30$
F_4	$2, 6, 8, 12$
G_2	$2, 6$

Tabelle 2.1

Eine allgemeinere Konstruktion der Casimir-Algebren, die auch die nicht-einfach-geschnürten Lie-Algebren mit einschließt, liefert die *Drinfeld-Sokolov-Reduktion* [37,11,12,45], welche im folgenden für diesen Spezialfall kurz beschrieben wird.
Man startet mit einer einfachen Kac-Moody-Algebra $\widehat{g}_k$ und einer $su(2)$ Einbettung, welche beschrieben wird durch einen *definierenden Vektor* $\vec{\delta}$:

$$J^3(z) = \vec{\delta}\vec{H}(z), \qquad J^{\pm}(z) = J^{\pm\vec{\alpha}}(z), \quad \text{mit } \vec{\alpha} = \frac{\vec{\delta}}{(\vec{\delta},\vec{\delta})}, \tag{2.44}$$

wobei man für die uns interessierenden Casimir-Algebren die *prinzipale Einbettung*, welche definiert ist durch den *dualen Weyl-Vektor* $\vec{\delta} = \vec{\rho}^{\vee}$, wählt. Die positiven Wurzeln lassen sich per Definition durch die einfachen Wurzeln $\Delta_0 = \{\vec{\alpha}_i\}_{i=1}^{l}$ ausdrücken

$$\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^{l} n_i \vec{\alpha}_i, \qquad \text{mit } n_i \in \mathbb{Z}_{+}^{0}. \tag{2.45}$$

Es gilt für den dualen Weyl-Vektor und jede positive Wurzel

$$(\vec{\rho}^{\vee}, \vec{\alpha}) = \sum_{i=1}^{l} n_i. \tag{2.46}$$

Weiterhin zerfällt für die prinzipale Einbettung die adjungierte Darstellung von g in $su(2)$-Darstellungen $g = n_- \oplus h \oplus n_+$ vom Gewicht $j_i = e_i$, $i = 1, \ldots, l$.
Nun werden die folgenden Zwangsbedingungen eingeführt

$$E^{-\vec{\alpha}}(z) = \begin{cases} 1, & \vec{\alpha} \in \Delta_0 \\ 0, & \vec{\alpha} \in \Delta_+ \backslash \Delta_0 \end{cases} \tag{2.47}$$

und à la BRST quantisiert, d.h. es wird für jedes $\vec{\alpha} \in \Delta_+$ ein Geist-Antigeist Paar $(b_{\vec{\alpha}}(z), c_{\vec{\alpha}}(z))$ eingeführt:

$$b_{\vec{\alpha}}(z) c_{\vec{\beta}}(w) = \frac{\delta_{\vec{\alpha}\vec{\beta}}}{(z-w)} + \text{reg.}. \tag{2.48}$$

Dann läßt sich der folgende BRST Operator

$$Q_{BRST} = \oint \frac{dz}{2\pi i} j_{BRST}(z), \tag{2.49}$$

mit

$$j_{BRST} = -\sum_{\vec{\alpha}\in\Delta_0} c_{\vec{\alpha}} + \sum_{\vec{\alpha}\in\Delta_+} (c_{\vec{\alpha}} E^{-\vec{\alpha}}) + \frac{1}{2} \sum_{\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\in\Delta_+} f^{\vec{\alpha}\vec{\beta}\vec{\gamma}} (b_{\vec{\gamma}} c_{\vec{\alpha}} c_{\vec{\beta}}) \tag{2.50}$$

definieren, der durch die Forderung nach BRST-Invarianz des Energie-Impuls Tensors, $[L, Q_{BRST}] = 0$, eindeutig festgelegt ist. Die Geist-Felder $(b_{\vec{\alpha}}(z), c_{\vec{\alpha}}(z))$ müssen konforme Dimension $(1 - (\vec{\rho}^{\vee}, \vec{\alpha}), (\vec{\rho}^{\vee}, \vec{\alpha}))$ tragen, so daß sich $L(z)$ ergibt als

$$\begin{aligned} L(z) &= L^{Sug} + \vec{\rho}^{\vee} \partial \vec{H}(z) + L^{gh}(z) \\ L^{gh}(z) &= \sum_{\vec{\alpha}\in\Delta_+} ((\vec{\rho}^{\vee}, \vec{\alpha}) - 1) N(\partial c_{\vec{\alpha}} b_{\vec{\alpha}})(z) + (\vec{\rho}^{\vee}, \vec{\alpha}) N(c_{\vec{\alpha}} \partial b_{\vec{\alpha}})(z). \end{aligned} \tag{2.51}$$

Bezüglich dieses Virasoro-Feldes haben die Ströme $J^{e_i}(z)$ konforme Dimension $e_i + 1$. In [45] wurde gezeigt, daß die BRST-Kohomologie mit verschwindender Geistzahl generiert wird von l Feldern mit den Dimensionen $e_i + 1$, die die Casimir-Algebra von g bilden. Die zentrale Ladung von $L(z)$ ist dann

$$c = l - \frac{\dim(g)h^\vee}{k + h^\vee} - \frac{12}{h^\vee}(k + h^\vee) \sum_{\vec{\alpha} \in \Delta_+} (\vec{\rho}^\vee, \vec{\alpha})^2 + 12 \sum_{\vec{\alpha} \in \Delta_+} (\vec{\rho}^\vee, \vec{\alpha}). \tag{2.52}$$

Dies kann auch kompakter geschrieben werden als:

$$c = l - \frac{12|\vec{\rho}|^2}{k + h^\vee} - 12(k + h^\vee)|\vec{\rho}^\vee|^2 + 24(\vec{\rho}^\vee, \vec{\rho}). \tag{2.53}$$

Frenkel-Kac-Wakimoto [50] haben die Darstellungstheorie dieser $\mathcal{W}$-Algebren untersucht und gezeigt, daß die minimalen Modelle der Casimir-Algebren aus den zulässigen Darstellungen der Kac-Moody-Algebra $\widehat{g}_k$ mit Level $k + h^\vee = p/q$ durch eine Kohomologie-Konstruktion gewonnen werden können . Hier seien lediglich die minimale Serie und die zugehörigen Höchstgewichtsdarstellungen angegeben:

$$c_{p,q} = l - \frac{12|p\vec{\rho} - q\vec{\rho}^\vee|^2}{pq}, \quad (p,q) = 1,\ p \geq h,\ q \geq h^\vee \tag{2.54}$$

$$h_{p,q}(\vec{\lambda}, \vec{\mu}) = \frac{1}{2pq} \left(|p(\vec{\lambda} + \vec{\rho}) - q(\vec{\mu} + \vec{\rho}^\vee)|^2 - |p\vec{\rho} - q\vec{\rho}^\vee|^2 \right), \quad (\vec{\lambda}, \vec{\mu}) \in P_+^{p-h^\vee} \times P_+^{\vee\, q-h}.$$

Da der Parameterraum der Höchstgewichtsdarstellungen $P_+^{p-h^\vee} \times P_+^{\vee\, q-h}$ noch redundant ist, muß noch eine endlichen Symmetriegruppe $\widetilde{W}_+$ herausgeteilt werden. Für die einfach geschnürten Kac-Moody-Algebren erhält man mit $\vec{\rho}^\vee = \vec{\rho}$ und $|\vec{\rho}|^2 = \frac{lh^\vee(h^\vee+1)}{12}$ die bekannten minimalen Serien:

$$c_{p,q} = l \left(1 - \frac{h^\vee(h^\vee + 1)(p - q)^2}{pq} \right). \tag{2.55}$$

Abschließend sind in der folgenden Tabelle einige Daten einfacher Lie-Algebren zusammengestellt:

g	$\dim(g)$	$h^\vee$	$\sum_{\vec{\alpha} \in \Delta_+} (\vec{\rho}^\vee, \alpha)$	$\sum_{\vec{\alpha} \in \Delta_+} (\vec{\rho}^\vee, \alpha)^2$
A_l	$l(l+2)$	$l+1$	$l(l+1)(l+2)/6$	$l(l+1)^2(l+2)/12$
B_l	$l(2l+1)$	$2l-1$	$l(l+1)(4l-1)/6$	$l(l+1)(2l-1)(2l+1)/6$
C_l	$l(2l+1)$	$l+1$	$l(l+1)(4l-1)/6$	$l(l+1)(2l-1)(2l+1)/6$
D_l	$l(2l-1)$	$2(l-1)$	$l(l-1)(2l-1)/3$	$l(l-1)^2(2l-1)/3$
E_6	78	12	156	936
E_7	133	18	399	3591
E_8	248	30	1240	18600
G_2	14	4	16	56
F_4	52	9	110	702

Tabelle 2.2

2.4. Coset-Konstruktion

Neben der Drinfeld-Sokolov-Reduktion gibt es noch eine weitere Methode, KFTen aus Kac-Moody-Algebren zu konstruieren, die Coset-Konstruktion. Dabei teilt man aus einer Kac-Moody-Algebra $\widehat{g}_k$ eine Unteralgebra $\widehat{h}_m$ heraus, wobei insbesondere die Differenz der beiden Sugawara Energie-Impuls Tensoren in der Kommutante von $\widehat{h}_m$ liegt. Die weiteren Felder in der Einhüllenden von $\widehat{g}_k$, die mit $\widehat{h}_m$ kommutieren, bilden eine geschlossene Algebra, die alle Bedingungen der Definition einer $\mathcal{W}$-Algebra erfüllt, außer der Möglichkeit, daß sie eventuell nicht endlich erzeugt ist. Allerdings werden wir in Kapitel 3. zeigen, daß diejenigen Coset-Theorien, von denen geglaubt wurde, sie seien unendlich erzeugt, durchaus endlich erzeugt sind. Es ist im allgemeinen nicht einfach, die Kommutante von $\widehat{h}_m$ explizit zu konstruieren. Allerdings läßt sich über die Darstellungstheorie der Kac-Moody-Algebren zumeist der generische charakteristische Hilbertraum bestimmen, aus welchem man zumindest den minimalen Satz von $\mathcal{W}$-Algebra-Generatoren ablesen kann. In allen uns bekannten Beispielen liefert diese Methode das richtige Ergebnis. Die bislang am intensivsten studierten Cosets sind die sogenannten Goddard-Kent-Olive (GKO) Cosets [54], in welchen man aus der direkten Summe zweier Kac-Moody-Algebren die diagonale Unteralgebra herausteilt. Im Falle der einfach geschnürten Kac-Moody-Algebren, wobei einer der Level gleich eins zu wählen ist, liefert dies genau die Casimir-Algebren. Über die im Zuge einer Klassifizierung von $\mathcal{W}$-Algebren zu klärende Beziehung zwischen der Drinfeld-Sokolov-Reduktion und der Coset-Konstruktion ist bisher noch sehr wenig bekannt.

2.4.1. Einführung

Zu einer Einbettung vom Dynkin-Index j von $\widehat{h}_m$ in $\widehat{g}_k$, wobei $m = jk$ dann festgelegt ist, liegt die Differenz der beiden Sugawara Energie-Impuls Tensoren

$$L^{\widehat{g}/\widehat{h}}(z) = L^{\widehat{g}}(z) - L^{\widehat{h}}(z) \tag{2.56}$$

in der Kommutante von $\widehat{h}_m$ in $\widehat{g}_k$, liefert also den Virasoro Generator des Cosets mit zentraler Ladung

$$c(\widehat{g}/\widehat{h}, k) = c(\widehat{g}, k) - c(\widehat{h}, m). \tag{2.57}$$

Gilt $c(\widehat{g}/\widehat{h}, k) = 0$, so spricht man von einer *konformen Einbettung*. Wie bereits gesagt, bilden alle Felder der Einhüllenden von $\widehat{g}_k$, die mit $\widehat{h}_m$ kommutieren, eine $\mathcal{W}$-Algebra $\mathcal{W}_c[\widehat{g}/\widehat{h}, k]$, die in allen bekannten Fällen endlich erzeugt ist. Für generischen Level k erhält man eine generische $\mathcal{W}$-Algebra, die für einige spezielle Werte des Levels auf eine kleinere Algebra trunkiert.

Ein Vorteil der Coset-Konstruktion gegenüber der direkten Konstruktion ist, daß sie durch die Zerlegung der Darstellungen von $\widehat{g}_k$ in solche von $\widehat{h}_m$ und der Kommutante Darstellungen der $\mathcal{W}$-Algebra liefert. Die irreduziblen Höchstgewichtsdarstellungen $L^{\widehat{g}}_{\Lambda}$ von $\widehat{g}_k$ lassen sich nach irreduziblen Darstellungen $L^{\widehat{h}}_{\Lambda'}$ von $\widehat{h}$ zerlegen:

$$L^{\widehat{g}}_{\Lambda} = \bigoplus_{\Lambda'} \left(L^{\widehat{g}/\widehat{h}}_{\Lambda,\Lambda'} \otimes L^{\widehat{h}}_{\Lambda'} \right). \tag{2.58}$$

Die Charaktere der Darstellungen $L^{\widehat{g}/\widehat{h}}_{\Lambda,\Lambda'}$ sind die sogenannten *Branching-Funktionen* des Cosets:

$$\chi^{\widehat{g}}_{\Lambda}(q,z) = \sum_{\Lambda'} b^{\Lambda}_{\Lambda'}(q)\chi^{\widehat{h}}_{\Lambda'}(q,z'), \tag{2.59}$$

wobei die Abhängigkeit $z'(z)$ durch die Einbettung bestimmt wird. Es ist nicht allgemein bekannt, unter welchen Umständen die Darstellungen $L^{\widehat{g}/\widehat{h}}_{\Lambda,\Lambda'}$ wirklich irreduzible Darstellungen von $\mathcal{W}_c[\widehat{g}/\widehat{h},k]$ sind. In $L^{\widehat{g}/\widehat{h}}_{0,0}$ liegen alle Felder der Einhüllenden von $\widehat{g}$, die Singletts bezüglich $\widehat{h}$ sind, woraus folgt, daß das zu diesem Singlett korrespondierende Feld mit allen Feldern aus $\widehat{h}$ kommutiert. Damit ist per Definition der $\mathcal{W}$-Algebra eines Cosets $b^0_0(q)$ der irreduzible Vakuumcharakter von $\mathcal{W}_c[\widehat{g}/\widehat{h},k]$, d.h. die Vakuumdarstellung liefert den charakteristischer Hilbertraum von $\mathcal{W}_c[\widehat{g}/\widehat{h},k]$. Dies ist eine Rechtfertigung für die Anwendung des sogenannten *Charakterarguments* zur Bestimmung der Generatoren von $\mathcal{W}_c[\widehat{g}/\widehat{h},k]$. Zunächst stellen wir aber das Standardbeispiel der GKO-Cosets vor.

2.4.2. GKO-Konstruktion

Die GKO-Cosets sind eine bestimmte Klasse von KFTen, für die man folgende Wahl trifft:

$$\widehat{g} = \widehat{g}_{k_1} \oplus \widehat{g}_{k_2}, \qquad \widehat{h} = \widehat{g}_{k_1+k_2}, \tag{2.60}$$

wobei die diagonale Einbettung $J^a_{k_1+k_2} = J^a_{k_1} + J^a_{k_2}$ mit Dynkin-Index eins zu wählen ist. Wir nennen die Symmetrie-Algebra dieses Cosets $\mathcal{W}[\widehat{g}\oplus\widehat{g}/\widehat{g},(k_1,k_2)]$. Eine nützliche Eigenschaft dieses GKO-Cosets ist, daß es im Grenzfall $k_2 \to \infty$ in das Coset $\widehat{g}_{k_1}/g$ übergeht. In [29] wurde gezeigt, daß die Abbildung

$$P_0 : \mathcal{W}[\widehat{g}\oplus\widehat{g}/\widehat{g},(k_1,k_2)] \to \mathcal{W}[\widehat{g}/g,(k_1)], \tag{2.61}$$

im Limes $k_2 \to \infty$ injektiv ist, wobei P_0 die Projektion eines Zustandes aus dem Coset $\widehat{g}\oplus\widehat{g}/\widehat{g}$ auf den Eigenraum mit $L_0(\widehat{g}_{k_2}) = 0$ bezeichnet. Die Surjektivität liefert ein Charakterargument. Die Branching-Funktionen des GKO-Cosets sind für integrable Darstellungen beliebiger Kac-Moody-Algebren bekannt:

$$b^{\vec{\Lambda}_1}_{\vec{\Lambda}_2,\vec{\Lambda}_3}(q) = \sum_{w\in\widehat{W}} \epsilon(w) c^{\vec{\Lambda}_1}_{\vec{\Lambda}3-w*\vec{\Lambda}_2}(q) q^{\frac{[w(\vec{\Lambda}_2+\vec{\rho})(k_1+k_2+h^\vee)-(\vec{\Lambda}_3+\vec{\rho})(k_2+h^\vee)]^2}{2k_1(k_2+h^\vee)(k_1+k_2+h^\vee)}}, \tag{2.62}$$

mit $w*\vec{\Lambda} = w(\vec{\Lambda}+\vec{\rho})-\vec{\rho}$. Im Limes $k_2 \to \infty$ tragen in obiger Formel nur die Elemente der Weyl-Gruppe von g bei, da die Elemente mit nichtverschwindendem Translationsteil von der Ordnung $\mathcal{O}(q^{k_2})$ sind. Aus dem allgemeinen Fall

$$b^{\vec{\Lambda}_1}_{\vec{\Lambda}_2,\vec{\Lambda}_3}(q) \stackrel{k_2\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{w\in W} \epsilon(w) c^{\vec{\Lambda}_1}_{\vec{\Lambda}_3-w*\vec{\Lambda}_2}(q)\; q^{\frac{1}{2k_1}|\vec{\Lambda}_3-w*\vec{\Lambda}_2|^2}, \tag{2.63}$$

erhält man insbesondere für $b^0_{0,0}$ genau den Vakuumcharakter (2.42) des Cosets $\widehat{g}_{k_1}/g$, d.h. die beiden charakteristischen Hilberträume haben dieselbe Energie-Entartung und damit ist die Abbildung (2.61) ein Isomorphismus. Der charakteristische Hilbertraum des Cosets $\widehat{g}_{k_1}/g$ ist im allgemeinen einfacher zu bestimmen als der des ursprünglichen GKO-Cosets und liefert bereits genug Information, um mit dem folgenden Charakterargument die konformen Dimensionen der Generatoren des generischen Cosets abzuschätzen.

2.4.3. Das Charakterargument

Angenommen, der charakteristische Hilbertraum $\mathcal{H}$ eines Cosets sei bekannt. Dann läßt sich durch folgende Entwicklung der minimale Satz von $\mathcal{W}$-Algebra Generatoren abschätzen [26,28]:

$$\chi_0(q) = Tr_{\mathcal{H}} q^{L_0-\frac{c}{24}} = \frac{q^{-\frac{c}{24}}}{F_2(q)F_{h_2}(q)\dots F_{h_n}(q)} \left(1 - a_1 q^{h_n+m} - a_2 q^{h_n+m+1} - \dots\right), \quad (2.64)$$

mit $a_1, m > 0$ und

$$F_h(q) = \prod_{n=h}^{\infty}(1-q^n). \quad (2.65)$$

Weiterhin sei h_n die minimale Dimension, für die $a_1 > 0$ ist. Der charakteristische Hilbertraum kann demnach erzeugt werden von n Generatoren der Dimension $\{2, h_1, \dots, h_n\}$, wobei das erste generische Nullfeld bei Dimension $h_n + m$ liegt. Da bei dieser Betrachtung vorausgesetzt wird, daß kein Nullfeld mit einer Dimension $h \leq h_n$ existiert, liefert dieses *Charakterargument* natürlich keinen Beweis dafür, daß die Kommutante tatsächlich von den obigen Generatoren erzeugt wird, führt allerdings in allen uns bekannten Beispielen auf das richtige Ergebnis. Es ist klar, daß jeder charakteristische Hilbertraum, der aus einer Coset-Konstruktion von Kac-Moody-Algebren mit endlichem Rang resultiert, auf die obige Weise mit *endlich* vielen $\mathcal{W}$-Algebra-Generatoren geschrieben werden kann. Dies legt die Vermutung nahe, daß alle diese Coset-Konstruktionen endlich erzeugte $\mathcal{W}$-Algebren liefern, was sich im übrigen auch durch die Beispiele des nächsten Kapitels bestätigt.
Für die GKO-Cosets einfach geschnürter Kac-Moody-Algebren

$$\frac{\widehat{g}_1 \oplus \widehat{g}_{k_2}}{\widehat{g}_{k_2+1}} \quad (2.66)$$

existiert nur eine String-Funktion $c_0^0(q) = 1/\eta^l(q)$, so daß sich die Branching-Funktionen mittels (2.42) schreiben lassen als

$$b_0^0(q) = \frac{q^{-\frac{l}{24}}}{\prod_{i=1}^{l} F_{e_i+1}(q)}. \quad (2.67)$$

Das Charakterargument impliziert demnach, daß diese Cosets keine generischen Nullfelder haben und genau die Casimir-Algebren liefern.
Für die nicht einfach geschnürten Kac-Moody-Algebren gilt dies nicht, so daß bislang nicht klar war, ob für diese überhaupt eine Coset-Konstruktion existiert. Wir werden im nächsten Kapitel über *Vereinigende $\mathcal{W}$-Algebren* auf diese Frage zurückkommen. Im Falle

der B_l Serie erhält man zum Beispiel für den generischen Vakuumcharakter des Cosets $\widehat{so}(2l+1)_1/so(2l+1)$:

$$b_0^0(q) = \frac{q^{-\frac{l}{24}}}{\prod_{i=1}^{l} F_{e_i+1}(q)} \frac{1}{2} \left(\prod_{n\geq l}(1+q^{n+\frac{1}{2}}) + \prod_{n\geq l}(1-q^{n+\frac{1}{2}}) \right), \tag{2.68}$$

welcher gerade die bosonische Projektion einer fermionischen $\mathcal{W}(2,4,\ldots,2l,l+1/2)$ Algebra ist [87]. Für $l=1$ erhält man insbesondere die $N=1$ Super-Virasoro-Algebra $SVir_{N=1}(c)$. Die minimalen Darstellungen der A-D-E Casimir-Algebren lassen sich aus den Branching-Funktionen des GKO-Cosets ableiten, wobei k_2 aus der Menge der zulässigen Darstellungen à la Kac-Wakimoto zu wählen ist: $k_2 + h^\vee = p/(p-q)$.
In [17] haben wir bereits das allgemeine GKO-Coset

$$\frac{\widehat{su}(2)_{k_2}}{su(2)}, \qquad k_2 \in \{1,2,\ldots\} \tag{2.69}$$

untersucht, wobei für $k_2 \geq 2$ generische Nullfelder existieren und im Limes $k_2 \to \infty$ der Vakuumcharakter wie folgt entwickelt werden kann:

$$\begin{aligned} b_0^0(q) &\stackrel{k_2\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\phi_0(q) - 2q\phi_1(q) + q^2\phi_2(q)}{\eta^3(q)} \\ &= \frac{q^{-\frac{1}{8}}}{F_2F_4F_6^2F_8^2F_9F_{10}^2F_{12}} \left(1 - q^{13} - 3q^{14} - 7q^{15} - \ldots .\right), \end{aligned} \tag{2.70}$$

mit den im weiteren Verlauf noch häufig auftretenden Reihen

$$\phi_n(q) = \sum_{m\geq 0} (-1)^m q^{\frac{m(m+1)}{2}+nm}, \qquad \phi_{-n}(q) = q^n \phi_n(q) \tag{2.71}$$

und der Eigenschaft

$$\frac{1}{\prod_{m\geq 1}(1-e^{2\pi i\theta}q^m)\prod_{m\geq 0}(1-e^{-2\pi i\theta}q^m)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\phi_n(z)}{\prod_{m>0}(1-q^m)^2} e^{-2\pi i\theta n}. \tag{2.72}$$

Es ist demnach zu erwarten, daß das in k_1 und k_2 generische Coset

$$\frac{\widehat{su}(2)_{k_1} \oplus \widehat{su}(2)_{k_2}}{\widehat{su}(2)_{k_1+k_2}}, \tag{2.73}$$

eine $\mathcal{W}(2,4,6_2,8_2,9,10_2,12)$ als Symmetrie-Algebra hat. Für $k_1 = 1$ sollte diese Algebra auf die Virasoro-Algebra trunkieren, für $k_1 = 2$ auf den bosonischen Sektor der $N=1$ Super-Virasoro-Algebra $SVir_{N=1}(c)/\mathbb{Z}_2$. Die Frage, ob verschiedene Cosets immer verschiedene KFTen liefern, wird durch die Existenz der im nächsten Abschnitt behandelten *dualen Coset-Paare* verneint.

2.4.4. Duale Coset-Paare

Man kann fragen, wann die Branching-Funktionen zweier Coset-Konstruktionen identisch sind. Eine Möglichkeit dies zu erreichen liefern die sogennanten *L-äquivalenten Coset-Paare* [3]. Angenommen zu zwei Cosets $\widehat{g}/\widehat{h}$, $\widehat{g}'/\widehat{h}'$ existiert eine Kac-Moody-Algebra $\widehat{g}''$, so daß $\widehat{g} \oplus \widehat{h}' \subset \widehat{g}''$ und $\widehat{g}' \oplus \widehat{h} \subset \widehat{g}''$ konforme Einbettungen sind. Dann sind die Energie-Impuls Tensoren der beiden Cosets äquivalent:

$$L^{\widehat{g}/\widehat{h}}(z) = L^{\widehat{g}'/\widehat{h}'}(z). \tag{2.74}$$

Hieraus kann nicht direkt darauf geschlossen werden, daß die beiden Cosets dual zueinander sind. Es folgt allerdings, daß die Branching-Funktionen eine lineare Relation der Art

$$\sum_{\Lambda} n_{\Lambda\lambda'} b^{\Lambda}_{\lambda}(\widehat{g}/\widehat{h}) = \sum_{\Lambda'} n_{\Lambda'\lambda} b^{\Lambda'}_{\lambda'}(\widehat{g}'/\widehat{h}') \tag{2.75}$$

erfüllen. In der folgenden Tabelle sind einige Beispiele L-äquivalenten Coset-Paare aufgelistet.

$\widehat{g}''$	$\widehat{g}/\widehat{h}$	$\widehat{g}'/\widehat{h}'$
$\widehat{so}(4mn)_1$	$\widehat{su}(2n)_m/\widehat{sp}(2n)_m$	$\widehat{su}(2m)_n/\widehat{u}(m)_n$
$\widehat{su}((m+n)N)_1$	$\widehat{su}(N)_m \oplus \widehat{su}(N)_n/\widehat{su}(N)_{m+n}$	$\widehat{su}(m+n)_N/\widehat{su}(m)_N \oplus \widehat{u}(n)_N$
$\widehat{so}((m+n)N)_1$	$\widehat{so}(N)_m \oplus \widehat{so}(N)_n/\widehat{so}(N)_{m+n}$	$\widehat{so}(m+n)_N/\widehat{so}(m)_N \oplus \widehat{so}(n)_N$
$\widehat{sp}(4(m+n)N)_1$	$\widehat{sp}(2N)_m \oplus \widehat{sp}(2N)_n/\widehat{sp}(2N)_{m+n}$	$\widehat{sp}(2(m+n))_N/\widehat{sp}(2m)_N \oplus \widehat{sp}(2n)_N$

Tabelle 2.3

Die zweite Klasse von Coset-Paaren mit $m=1$ wird uns noch besonders interessieren:

$$\frac{\widehat{su}(N)_1 \oplus \widehat{su}(N)_n}{\widehat{su}(N)_{n+1}} \cong \frac{\widehat{su}(n+1)_N}{\widehat{su}(n)_N \oplus \widehat{u}(1)}. \tag{2.76}$$

Sie liefern eine Relation zwischen den n-ten unitären Modellen der $\mathcal{WA}_{N-1}$ Algebren und den unitären Modellen des CP(n) Cosets, wobei im Falle $n=1$ die duale Äquivalenz, d.h. die Gleichheit der Branching-Funktionen, der beiden Cosets bewiesen ist [3]. Im nächsten Kapitel werden wir unter anderem der Frage nachgehen, was die generische $\mathcal{W}$-Algebra der CP(n)-Cosets ist, von welchen bisher stets angenommen wurde, sie sei nicht endlich erzeugt.

3. Vereinigende W-Algebren

Das Ziel dieses Kapitels ist die Aufklärung des Ursprungs der im letzten Kapitel vorgestellten $\mathcal{W}$-Algebren $\mathcal{W}(2,4,6)^{[3]}$, $\mathcal{W}(2,4,6)^{[4]}$ und $\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[2]}$, d.h. wir wollen verstehen, ob und wie sich diese direkt konstruierten Algebren in das Bild der Drinfeld-Sokolov-Reduktion und Coset-Konstruktion einordnen lassen. Obwohl die erste Algebra bereits als bosonischer Sektor der $N = 1$ Super-Virasoro-Algebra bekannt ist [26,67], werden wir dieses Beispiel trotzdem aus unserem neuen Blickwinkel noch einmal beleuchten. Für alle drei Beispiele werden wir Coset-Konstruktionen angeben, die alle keinen endlichen klassischen Limes besitzen beziehungsweise deren klassische Analoga unendlich und nicht-frei erzeugt sind.

Die Coset-Realisierung der $\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[2]}$ ist das schon hinlänglich untersuchte parafermionische Coset [43,79]

$$\frac{\widehat{su}(2)_k}{\widehat{u}(1)}, \tag{3.1}$$

von dem allerdings bislang behauptet wurde [6], auch dessen Quantenversion sei unendlich generiert. Die Begründung dafür beruhte auf der richtigen Beobachtung, daß die unitären Darstellungen dieses Cosets aufgrund der Dualität (2.76) durch das jeweils erste unitäre Modell der $\mathcal{WA}_k$ Serie gegeben sind. Hieraus wurde geschlossen, daß dann ja wohl die generische $\mathcal{W}$-Algebra der Parafermionen mindestens alle Generatoren mit Spin $\{2,3,4,\ldots,\infty\}$ enthalten müsse, also eine $\mathcal{W}_\infty$ Algebra sei. Weiterhin sollte diese unendliche Generierung sogar die generelle Situation für Quanten-Cosets sein. In diesem Kapitel werden wir zeigen, daß, obwohl das klassische Coset (3.1) tatsächlich unendlich erzeugt ist, das Quanten-Coset dies noch lange nicht ist und insbesondere die $\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[2]}$ als Symmetrie-Algebra hat. Aus der Dualität zu den GKO-Cosets folgt dann, daß die $\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[2]}$ für den jeweils speziellen Wert der zentralen Ladung $c = 2(k-1)/(k+2)$ eine Trunkierung der $\mathcal{WA}_{k-1}$ Algebra ist oder im Falle $k \in \{2,3,4,5\}$ auf eine solche trunkiert. Ausgehend von dieser Beobachtung definieren wir den Typ der *Vereinigenden $\mathcal{W}$-Algebren* als endlich erzeugte, generische Quanten-$\mathcal{W}$-Algebren mit der Eigenschaft:

- Für eine Serie von Lie-Algebren $\mathcal{L}_n$ existiert eine natürliche Zahl n_0, so daß für alle $n \geq n_0$ die *Vereinigende $\mathcal{W}$-Algebra* für die zentrale Ladung $c = c_{\mathcal{L}_n}(p(n), q(n))$ isomorph ist zur Casimir-Algebra $\mathcal{WL}_n$.

Im Fall des parafermionischen Cosets ist dies nichts anderes als Ausdruck der Dualität zweier *endlich erzeugter* Cosets. Aus der Gleichheit der rationalen Modelle folgt nun allerdings, daß ein und dasselbe rationale Modell als minimales Modell verschiedener generischer, einparametriger $\mathcal{W}$-Algebren auftreten kann und somit die Klassifikation beider Klassen keineswegs äquivalent ist. Jedes rationale Modell hat eine exotische $\mathcal{W}$-Algebra als maximale Symmetrie-Algebra, die aber unterschiedlich zu generischen $\mathcal{W}$-Algebren zusammengefaßt werden können.

Die folgenden Coset-Realisierungen der zwei $\mathcal{W}(2,4,6)$ Algebren [24],

$$\mathcal{W}(2,4,6)^{[3]} \to \frac{\widehat{su}(2)_2 \oplus \widehat{su}(2)_k}{\widehat{su}(2)_{k+2}}, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{W}(2,4,6)^{[4]} \to \frac{\widehat{su}(2)_{-\frac{1}{2}} \oplus \widehat{su}(2)_k}{\widehat{su}(2)_{k-\frac{1}{2}}}$$

liefern ebenfalls Vereinigende $\mathcal{W}$-Algebren für die B_n und C_n Casimir-Algebren, obwohl in diesem Fall kein entsprechendes duales Coset-Paar bekannt ist. Ferner ist es bemerkenswert, daß damit die obigen Cosets minimale Modelle von $\mathcal{W}$-Algebren liefern, die bislang einzig mit der Methode der Drinfeld-Sokolov-Reduktion konstruiert werden konnten. Deshalb ist, neben der endlichen Generierung der obigen Cosets, jene implizite Verbindung von Coset-Konstruktion und Drinfeld-Sokolov-Reduktion ein wesentliches Ergebnis dieses Kapitels.

In den folgenden zwei Kapiteln werden die Coset-Realisierungen der drei $\mathcal{W}$-Algebren $\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[2]}$, $\mathcal{W}(2,4,6)^{[4]}$, $\mathcal{W}(2,4,6)^{[3]}$ vorgestellt, wobei wir bei dem jeweiligen Beispiel einen unterschiedlichen Schwerpunkt setzen werden. Bei dem ersten Beispiel werden wir besonderen Wert auf die Tatsache legen, daß das Coset endlich erzeugt ist. Um die Verbindung zu den C_n Casimir-Algebren zu erhärten, wird im zweiten Beispiel die Darstellungstheorie im Vordergrund stehen, die dann insbesondere eine Darstellung der $\mathcal{WC}_n$ Charaktere durch $\widehat{su}(2)$ Branching-Funktionen liefern wird. Für das dritte Beispiel werden wir zeigen, daß es sich als Vereinigende $\mathcal{W}$-Algebra der B_n Casimir-Algebren auffassen läßt und sich damit mühelos in das Bild von Vereinigenden $\mathcal{W}$-Algebren einordnet. Darüberhinaus werden wir jedes der drei Beispiele unter massiver Benutzung des Charakterarguments als erstes und einfachstes einer ganzen Serie verstehen lernen.

3.1. Die $\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[2]}$ Algebra

Wir werden im folgenden sowohl den klassischen als auch den Quanten-Fall des parafermionischen CP(1)-Cosets diskutieren, wobei wir die Äquivalenz dieses Cosets zu dem Coset $SVir_{N=2}/\widehat{u}(1)$ ausnutzen werden. Danach gehen wir noch kurz auf die bekannte Darstellungstheorie ein und untersuchen den Spin-Gehalt der generellen CP(k) Cosets mittels des Charakterarguments.

3.1.1 Die Äquivalenz von $\widehat{su}(2)_k/\widehat{u}(1)$ und $SVir_{N=2}(c)/\widehat{u}(1)$

Die Äquivalenz dieser beiden Cosets ist bereits hinlänglich bekannt und wurde insbesondere bei der Diskussion der Darstellungstheorie der $N = 2$ Super-Virasoro-Algebra [76] ausgenutzt. Zunächst seien die beiden involvierten unendlichen Lie-Algebren vorgestellt.

$\widehat{su}(2)_k$:

$$\begin{aligned}
[J^+_m, J^-_n] &= 4J^0_{m+n} + 4kn\delta_{m+n,0} \\
[J^0_m, J^\pm_n] &= \pm 2J^\pm_{m+n} \\
[J^0_m, J^0_n] &= 2kn\delta_{m+n,0} \\
[J^+_m, J^+_n] &= [J^-_m, J^-_n] = 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Um lästige $\sqrt{2}$ Faktoren im Falle der Kac-Moody-Algebra $\widehat{su}(2)_k$ zu vermeiden, haben wir die Generatoren aus (2.31) mit $\sqrt{2}$ und den Level k mit 2 skaliert.

$SVir_{N=2}(c)$:

$$
\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (n-m)L_{m+n} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{m,-n} \\
[L_m, G_r^\pm] &= (r - \tfrac{m}{2})G_{m+r}^\pm \\
[L_m, J_n] &= nJ_{m+n} \\
[J_m, J_n] &= \frac{c}{3}n\delta_{m,-n} \\
[J_m, G_r^\pm] &= G_{m+r}^\pm \\
\{G_r^+, G_s^-\} &= 2L_{r+s} + (s-r)J_{r+s} + \frac{2c}{3}\binom{s+\frac{1}{2}}{2}\delta_{r,-s} \\
\{G_r^\pm, G_s^\pm\} &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Beide Algebren lassen sich durch drei freie Bosonen $\{\partial\varphi_1(z), \partial\varphi_2(z), \partial\varphi_3(z)\}$ mit Hintergrundsladung realisieren. Die OPEen der drei freien Bosonen sind

$$\varphi_i(z)\varphi_j(w) = -2\epsilon_{i,j} ln(z-w) \tag{3.5}$$

mit $\epsilon_{1,1} = \epsilon_{3,3} = 1$ und $\epsilon_{2,2} = -1$. Die sogenannten *parafermionischen Ströme* können für $k > 0$ ausgedrückt werden als [6]

$$\psi^\pm = \pm\frac{i}{2}\left(\partial\varphi_2 \mp \sqrt{\frac{k+2}{2}}\partial\varphi_1\right) e^{\pm\frac{i}{\sqrt{k}}\varphi_2} \tag{3.6}$$

und liefern eine Darstellung der $\widehat{su}(2)_k$ Kac-Moody-Algebra

$$
\begin{aligned}
J^0 &= i\sqrt{k}\partial\varphi_3, \qquad J^\pm = 2\sqrt{k}\psi^\pm e^{\pm\frac{i}{\sqrt{k}}\varphi_3} \\
L &= -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3} N(\partial\varphi_i\ \partial\varphi_i) + \frac{i}{2\sqrt{k+2}}\left(\partial^2\varphi_1 + \partial^2\varphi_2\right).
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Bezüglich dieses Energie-Impuls Tensors haben die parafermionischen Ströme konforme Dimension $\Delta = 1 - 1/k$.
Die $N = 2$ Super-Virasoro-Algebra kann ebenfalls durch diesen Satz freier Bosonen ausgedrückt werden

$$
\begin{aligned}
J &= i\sqrt{\frac{k}{2(k+2)}}\partial\varphi_3, \qquad G^\pm = \sqrt{\frac{2k}{2(k+2)}}\psi^\pm e^{\pm i\sqrt{\frac{k+2}{k}}\varphi_3} \\
T &= -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3} N(\partial\varphi_i\ \partial\varphi_i) + \frac{i}{2\sqrt{k+2}}\left(\partial^2\varphi_1 + \partial^2\varphi_2\right).
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Die $\widehat{u}(1)$-Kommutante besteht also in beiden Fällen aus den aus den parafermionischen Strömen $\psi^\pm$ zusammengesetzten neutralen Feldern. Daraus folgt, daß die beiden Cosets gleich sind, so daß wir ab jetzt nur noch das Coset $SVir_{N=2}/\widehat{u}(1)$ betrachten werden.

3.1.2. Das klassische $SVir_{N=2}/\widehat{u}(1)$ Coset

Für die generischen Quanten-$\mathcal{W}$-Algebren, die sich aus der Drinfeld-Sokokov-Reduktion ergeben, kann man den klassischen Limes dadurch erhalten, daß man nach folgenden Ersetzungen

$$\begin{aligned} [.,.] &\to \hbar\{.,.\} \\ c &\to \frac{c^{cl}}{\hbar} \\ \phi(z) &\to \frac{\phi^{cl}(z)}{\hbar} \\ N(\phi_j,\phi_i)(z) &\to \frac{\phi_j^{cl}(z)\phi_i^{cl}(z)}{\hbar^2} \end{aligned} \tag{3.9}$$

$\hbar \to 0$ gehen läßt [30]. Im Falle der $\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[2]}$ sieht man aus (2.29) sofort, daß dies auf unendliche Kopplungskonstanten führt, d.h. diese Quanten-$\mathcal{W}$-Algebra besitzt keinen endlich erzeugten klassischen Limes der obigen Art. Also konstruiert man den klassischen Fall direkt aus der klassischen Version der $N=2$ Super-Virasoro-Algebra [24,35]. Wir interessieren uns für die Felder der klassischen $N=2$ Super Virasoro-Algebra, deren Poisson Klammer mit $J(z)$ verschwindet. Das folgende Feld der Dimension zwei

$$L'(z) = L(z) - \frac{3}{2c}J(z)^2 \tag{3.10}$$

liegt in der Kommutante

$$\{L'(z), J(w)\} = 0 \tag{3.11}$$

und erfüllt selbst eine Virasoro-Algebra mit zentraler Ladung $\hat{c} = c-1$. Als nächstes kann eine kovariante Ableitung

$$\begin{aligned} \mathcal{D}L' &= \partial L', \\ \mathcal{D}G^{\pm} &= \partial G^{\pm} \pm \frac{3}{c}JG^{\pm} \end{aligned} \tag{3.12}$$

eingeführt werden mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \{J(z), \mathcal{D}^m G^{\pm}(w)\} &= \pm\frac{\mathcal{D}^m G^{\pm}(w)}{z-w} + \text{reg.} \\ \{L(z), G^{\pm}(w)\} &= \frac{\frac{3}{2}G^{\pm}(w)}{(z-w)^2} + \frac{\mathcal{D}G^{\pm}(w)}{z-w} + \text{reg..} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Damit ist ein noch redundanter Satz von Generatoren der Kommutante gegeben durch die ungeladenen Kombinationen

$$U^{m,n} = (\mathcal{D}^m G^+)(\mathcal{D}^n G^-), \tag{3.14}$$

welche die Relationen

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}U^{m,n} &= U^{m+1,n} + U^{m,n+1} \\
U^{i,j}U^{k,l} + U^{i,l}U^{k,j} &= 0
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

erfüllen. Unter Ausnutzung dieser Relationen läßt sich ein nicht mehr redundanter Satz von Generatoren angeben:

$$
\begin{aligned}
&L', U^{0,m} \quad \text{mit } 0 \leq m \in \mathbb{Z} \\
&U^{0,j}U^{0,k} = 0.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Das klassische Coset ist demnach unendlich generiert, wobei die unendlich vielen Generatoren noch unendlich viele Relationen erfüllen, die allerdings keine weitere Reduktion der Generatoren erlauben.

3.1.3. Das Quanten $SVir_{N=2}/\widehat{u}(1)$ Coset

Wie in Referenz [24] ausführlich dargelegt wurde, kann ein klassisch nicht endlich generiertes Coset durch die Quantisierung durchaus in ein endlich erzeugtes übergehen. Der entscheidende Punkt dabei ist, daß die Relationen der nicht redundanten Generatoren Quantenkorrekturen bekommen, die es erlauben, die Menge der Generatoren weiter zu reduzieren. Im folgenden werden wir argumentieren, daß das Quanten-Coset tatsächlich endlich erzeugt wird.
Zuerst wenden wir das Charakterargument an. Im Limes $c \to \infty$ enthält die Vakuumdarstellung von $SVir_{N=2}$ keine Null-Zustände, so daß der Charakter gerade durch den Verma-Modul gegeben ist. Wir benutzen die Jacobi-Tripel-Identität, um diesen wie folgt umzuformen

$$
q^{-\frac{1}{8}} \frac{\prod_{n\geq 1}(1+z^2q^{n+\frac{1}{2}})(1+z^{-2}q^{n+\frac{1}{2}})}{\prod_{n\geq 1}(1-q^n)(1-q^{n+1})} = \frac{(1-q)}{\eta^3} \frac{\sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{\frac{m^2}{2}} z^{2m}}{(1+z^2q^{\frac{1}{2}})(1+z^{-2}q^{\frac{1}{2}})}.
\tag{3.17}
$$

Nun entwickeln wir den Nenner in eine geometrische Reihe

$$
\frac{1}{(1+z^2q^{\frac{1}{2}})(1+z^{-2}q^{\frac{1}{2}})} = \sum_{\alpha,\beta\geq 0} (-1)^{\alpha+\beta} q^{\frac{\alpha+\beta}{2}} z^{2(\alpha-\beta)}
\tag{3.18}
$$

und erhalten für den generischen Vakuumcharakter des Cosets:

$$
b_0^0(q) = \frac{(1-q)}{\eta^2} \sum_{\alpha,\beta\geq 0} (-1)^{\alpha+\beta} q^{\frac{\alpha+\beta}{2}} q^{\frac{(\alpha-\beta)^2}{2}}.
\tag{3.19}
$$

Mit der Definition

$$
f(\alpha,\beta) = (-1)^{\alpha+\beta} q^{\frac{\alpha+\beta}{2}} q^{\frac{(\alpha-\beta)^2}{2}}
\tag{3.20}
$$

heben sich wegen $f(\alpha+1,\beta+1) = qf(\alpha,\beta)$ in (3.19) fast alle Terme weg, und einzig die zwei Achsen $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ tragen noch bei

$$b_0^0(q) = \frac{1}{\eta^2}\left(\sum_{\alpha\geq 0}(-1)^\alpha q^{\frac{(\alpha+1)\alpha}{2}} + \sum_{\beta\geq 0}(-1)^{\beta+1} q^{\frac{(\beta+1)(\beta+2)}{2}}\right). \tag{3.21}$$

Gemäß (2.71) kann man dies schließlich auf die folgende Form bringen

$$\begin{aligned} b_0^0(q) &= \frac{(\phi_0 - q\phi_1)}{\eta^2} \\ &= \frac{q^{-\frac{1}{12}}}{F_2F_3F_4F_5}\left(1 - 2q^8 - 6q^9 - \ldots\right). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Das Charakterargument liefert also in diesem Fall, daß das Coset $SVir_{N=2}(c)$ als generische $\mathcal{W}$-Algebra eine $\mathcal{W}$(2,3,4,5) enthält.
Die Generatoren der Dimension $2,3,4,5$ lassen sich explizit konstruieren †. Dazu wird der allgemeinste, mit dem klassischen Grenzfall verträgliche Ansatz hingeschrieben und die noch freien Entwicklungskonstanten durch die Forderung, daß die Felder mit $J(z)$ kommutieren müssen und primär sind, festgelegt. Für das Virasoro-Feld erhält man so

$$L' = L - \frac{3}{2c}N(J,J), \tag{3.23}$$

welches eine Virasoro-Algebra mit $\hat{c} = c - 1$ erfüllt. Die Generatoren höherer Dimension erfordern etwas mehr Anstrengung:

$$W_3 = \nu\left(-\frac{6}{c^2}\; N(N(J,J),J) + \frac{6}{c}\; N(J,L) + N(G^+,G^-) + \frac{c-9}{3c}\;\partial^2 J - \partial L\right) \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} W_4 = \mu\Bigg(&- \frac{3(8c+9)}{(5c+17)c^2}\; N(N(N(J,J),J),J) + \frac{3c^2-47c-78}{2(5c+17)c}\; N(J,\partial^2 J) \\ &+ \frac{c^2-17c+18}{4(5c+17)c}\; N(\partial J,\partial J) + \frac{4(8c+9)}{(5c+17)c}\; N(N(J,J),L) - N(J,\partial L) \\ &+ N(N(G^+,G^-),J) + \frac{c}{6}\; N(G^+,\partial G^-) - \frac{c}{6}\; N(\partial G^+,G^-) - \frac{17c-15}{3(5c+17)}\; N(L,L) \\ &- \frac{c-6}{36}\;\partial^3 J + \frac{(2c-1)(c+9)}{6(5c+17)}\partial^2 L\Bigg) \end{aligned} \tag{3.25}$$

† Für die Bereitstellung dieser Ergebnisse danke ich A. Honecker

$$
\begin{aligned}
W_5 = \lambda \Bigg(& -\frac{144(13c+18)}{5(c^2+23c-6)c^3}\ N(N(N(N(J,J),J),J),J) \\
& + \frac{4(7c+15)(c-24)}{(c^2+23c-6)c^2}\ N(N(J,J),\partial^2 J) + \frac{6(c^2-31c+36)}{(c^2+23c-6)c^2}\ N(N(J,\partial J),\partial J) \\
& - \frac{7c^2+11c-600}{3(c^2+23c-6)c}\ N(J,\partial^3 J) + \frac{3c^3+103c^2-1060c+540}{30(c^2+23c-6)c}\ \partial^4 J \\
& + \frac{4(9c-7)}{c^2+23c-6}\ N(L,\partial L) - \frac{2}{9}\ \partial^3 L + \frac{48(13c+18)}{(c^2+23c-6)c^2}\ N(N(N(J,J),J),L) \\
& - \frac{24(4c+25)}{(c^2+23c-6)c}\ N(N(J,J),\partial L) + \frac{6}{c}\ N(J,\partial^2 L) - \frac{2(c^2-31c+36)}{(c^2+23c-6)c}\ N(\partial J,\partial L) \\
& - \frac{8(4c^2-69c+45)}{3(c^2+23c-6)c}\ N(\partial^2 J,L) - \frac{24(9c-7)}{(c^2+23c-6)c}\ N(N(J,L),L) + N(G^+,\partial^2 G^-) \\
& - \frac{4(2c+1)(c+9)}{3(c^2+23c-6)}\ N(\partial G^+,\partial G^-) + N(\partial^2 G^+,G^-) \\
& + \frac{24(4c+25)}{(c^2+23c-6)c}\ N(N(N(G^+,G^-),J),J) + \frac{2(7c+107)}{c^2+23c-6}\ N(N(G^+,\partial G^-),J) \\
& - \frac{2(7c+107)}{c^2+23c-6}\ N(N(\partial G^+,G^-),J) - \frac{4(9c-7)}{c^2+23c-6}\ N(N(G^+,G^-),L) \Bigg).
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

Die Konstanten ν, μ und λ sind durch die folgenden Normierungen der primären Felder festgelegt $d_{33} = \frac{\hat{c}}{3}$, $d_{44} = \frac{\hat{c}}{4}$ und $d_{55} = \frac{\hat{c}}{5}$:

$$
\begin{aligned}
\nu^2 &= \frac{3(\hat{c}+1)}{2(2\hat{c}-1)(\hat{c}+7)} \\
\mu^2 &= \frac{27(5\hat{c}+22)}{4(5\hat{c}-4)(2\hat{c}-1)(\hat{c}+7)(\hat{c}+2)} \\
\lambda^2 &= \frac{9(\hat{c}^2+25\hat{c}+18)^2(\hat{c}+1)}{32(7\hat{c}+114)(5\hat{c}-4)(2\hat{c}-1)(\hat{c}+13)(\hat{c}+2)(\hat{c}-1)}.
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

Die Berechnung der Strukturkonstanten C_{33}^4, C_{44}^4, C_{34}^5 und C_{55}^4 mit den oben angegebenen Feldern liefert genau die Strukturkonstanten der $\mathcal{W}(2,3,4,5)$[2], d.h. die Quantenversion des parafermionischen Cosets ist endlich generiert. Aufgrund dessen sollte die quantisierte Form der Relation $U^{0,0}U^{0,0} = 0$ es erlauben, den Generator $U^{0,3}$ der Dimension sechs durch die Generatoren $\{U^{0,0}, U^{0,1}, U^{0,2}\}$ auszudrücken. Nach einer recht aufwendigen Rechnung erhält man:

$$
\begin{aligned}
& N(N(G^+,G^-),N(G^+,G^-)) = \\
& \quad (c+9)\ N(G^+,\partial^3 G^-) + 2\ N(\partial G^+,\partial^2 G^-) + N(\partial^2 G^+,\partial G^-) - \frac{c}{9}\ N(\partial^3 G^+,G^-) \\
& \quad + N(N(G^+\partial G^-),\partial J) + N(N(\partial G^+,G^-),\partial J) + 2\ N(N(G^+,\partial^2 G^-),J) \\
& \quad + 2\ N(N(\partial^2 G^+,G^-),J) + 2\ N(N(G^+,G^-),\partial L) + 2\ N(N(G^+,\partial G^-),L)
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

$$- 2\ N(N(\partial G^+, G^-), L) + 2\ N(L, \partial^2 L) - \frac{2}{3}\ N(J, \partial^3 L) - N(\partial J, \partial^2 L)$$
$$- \frac{1}{3}\ N(\partial^3 J, L) + \frac{1}{6}\ N(J, \partial^4 J) + \frac{1}{6}\ N(\partial J, \partial^3 J) - \frac{c-4}{60}\ \partial^4 J + \frac{c}{18}\ \partial^3 L.$$

Es ist demnach zu vermuten, daß ähnliche Relationen es erlauben, alle Generatoren $U^{0,m}$, $m \geq 3$ im Quanten-Fall durch die vier Generatoren $\{L', W_3, W_4, W_5\}$ auszudrücken.

3.1.4. $\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[2]}$ als Vereinigende $\mathcal{W}$-Algebra

Die Dualität der beiden Coset-Paare

$$\frac{\widehat{su}(k)_1 \oplus \widehat{su}(k)_1}{\widehat{su}(k)_2} \cong \frac{\widehat{su}(2)_k}{\widehat{u}(1)} \tag{3.29}$$

hat, da beide Cosets endlich erzeugt sind, die Konsequenz, daß die $\mathcal{WA}_{k-1}$ Casimir-Algebra für $c = 2(k-1)/(k+2)$ auf die $\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[2]}$ trunkiert, bzw. für $k \in \{2,3,4,5\}$ die $\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[2]}$ auf die $\mathcal{WA}_{k-1}$. Dies läßt sich für die ersten fünf Beispiele explizit nachprüfen:

c	Trunkierung
$1/2$	$\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[2]} \to Vir$
$4/5$	$\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[2]} \to \mathcal{W}(2,3)$
1	$\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[2]} \to \mathcal{W}(2,3,4)$
$8/7$	$\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[2]} \to \mathcal{W}(2,3,4,5)^{[1]}$
$5/4$	$\mathcal{W}(2,3,4,5,6) \to \mathcal{W}(2,3,4,5)^{[2]}$

Tabelle 3.1

Aus der Dualität folgt weiterhin, daß die minimalen Darstellungen von $\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[2]}$ genau die jeweils ersten unitären Darstellungen der $\mathcal{WA}_{k-1}$ Algebren sind, woraus insbesondere eine Darstellung der $\mathcal{WA}_{k-1}$ Charaktere durch $\widehat{su}(2)_k$ String-Funktionen resultiert. Für ganzzahligen Level k sind die $\widehat{su}(2)_k$ Charaktere gegeben durch

$$\chi_l(q,z) = \sum_{m=-l}^{2k-l-1} c^l_m(q)\, \Theta_{m,k}(q,z). \tag{3.30}$$

Die Branching-Funktionen des Cosets sind dann $b^l_m = \eta(q) c^l_m$ und man erhält eine endliche Anzahl von Darstellungen mit konformen Dimensionen

$$\begin{array}{ll} h^l_m = \hat{h}^l_m & (-l \leq m \leq l) \\ h^l_m = \hat{h}^l_m + (m-l)/2 & (l \leq m \leq 2k-l-1) \end{array}$$

mit

$$\hat{h}^l_m = \frac{l(l+2)}{4(k+2)} - \frac{m^2}{4k}. \tag{3.32}$$

Wegen der Symmetrieeigenschaften der String-Funktionen $C^l_m = C^l_{-m}$, $C^l_m = C^{k-l}_{k-m}$ und $C^l_m = C^l_{2k-m}$ sind nicht alle Branching-Funktionen unabhängig. Allerdings können String-Funktionen, die als q-Reihen identisch sind, als $\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[2]}$ Charaktere durchaus verschiedene W_3, W_4, W_5 Quantenzahlen haben. Mit dieser die Darstellungstheorie abschließenden Bemerkung wenden wir uns nun den direkten Verallgemeinerungen des parafermionischen Cosets zu, den CP(N)-Cosets.

3.1.5. Die CP(N)-Cosets

Die Verallgemeinerung der Dualität (3.29) sind die L-äquivalenten Cosets

$$\frac{\widehat{su}(k)_m \oplus \widehat{su}(k)_1}{\widehat{su}(k)_{m+1}} \cong \frac{\widehat{su}(m+1)_k}{\widehat{su}(m)_k \oplus \widehat{u}(1)}. \tag{3.33}$$

Im folgenden untersuchen wir die, nach den vorhergehenden Ergebnissen über das parafermionischen Cosets, wahrscheinlich endlich generierten CP(m)-Modelle auf ihren $\mathcal{W}$-Algebra-Gehalt. Zu diesem Zweck wenden wir skrupellos das bewährte Charakterargument an.
Im Grenzfall $k \to \infty$ enthalten die Charaktere $\chi^m_{\vec{\Lambda}}(q,\vec{\Theta})$ von $\widehat{su}(m+1)_k$ keine Null-Zustände, d.h.

$$\chi^m_{\vec{\Lambda}}(q,\vec{\Theta}) = \frac{q^{-\frac{m(m+2)}{24}}}{\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^m \prod_{\vec{\alpha}\in\Delta^m}(1-e^{2\pi i\vec{\Theta}\vec{\alpha}}q^n)}\chi^m_{\vec{\Lambda}}(\vec{\Theta}). \tag{3.34}$$

Der Vakuumcharakter von CP(m) ist die Branching-Funktion $b^{\vec{0}}_{\vec{0},0}(q)$ in†

$$\chi^m_{\vec{0}}\left(q,(\vec{\theta},\Theta_m)\right) = \sum_{\vec{\lambda},n} b^{\vec{0}}_{\vec{\lambda},n}(q)\chi^{m-1}_{\vec{\lambda}}(q,\vec{\theta})\frac{e^{2\pi i\Theta_m n}}{\eta(q)}. \tag{3.35}$$

Nach Einsetzen von (3.34) erhält man

$$\begin{aligned}\frac{q^{-\frac{2m}{24}}}{\prod_{\substack{\vec{\alpha}\in\Delta^m\setminus\Delta^{m-1}\\ n\geq 1}}(1-e^{2\pi i\vec{\Theta}\vec{\alpha}}q^n)} &= \sum_{\vec{\lambda},n} b^0_{\vec{\lambda},n}(q)\chi^{m-1}_{\vec{\lambda}}(\vec{\theta})e^{2\pi i\Theta_m n} \\ &= \sum_{\vec{\lambda},n} c^{\vec{0}}_{\vec{\lambda},n}(q)e^{2\pi i(\vec{\theta}\vec{\lambda}+\Theta_m n)} \\ &= \sum_{n_1\in\mathbb{Z}}\cdots\sum_{n_m\in\mathbb{Z}}\frac{\prod_{i=1}^m(\phi_{n_i}-\phi_{n_i-1})}{\eta^{2m}(q)}e^{2\pi i\vec{\Theta}(\sum_{i=1}^m n_i\vec{\alpha}_i)}.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Die letzten beiden Relationen definieren eine Abbildung $(\vec{\lambda},n) \to (n_1,\ldots,n_m)$, welche es erlaubt, die String-Funktionen $C^{\vec{0}}_{\vec{\lambda},n}(q)$ als Polynome in den ϕ_n's auszudrücken. Nach

† $\vec{\Theta} = (\vec{\theta},\Theta_m)$

Gleichung (2.42) läßt sich aus den String-Funktionen dann der Vakuumcharakter des Cosets bestimmen:

$$b^{\vec{0}}_{\vec{0},0}(q) = \sum_{w\in W} \epsilon(w) c^{\vec{0}}_{-w(\rho)+\rho,0}(q). \tag{3.37}$$

Für die ersten vier Beispiele der CP(m) Modelle haben wir den Vakuumcharakter auf diese Weise explizit ausgerechnet.

• CP(1)

Der Vakuumcharakter ist (natürlich) identisch mit dem aus dem Coset $SVir_{N=2}(c)/\widehat{u}(1)$ berechneten:

$$\begin{aligned} b^{\vec{0}}_{\vec{0},0}(q) &= \frac{(\phi_0 - q\phi_1)}{\eta^2} \\ &= \frac{q^{-\frac{1}{12}}}{F_2F_3F_4F_5}\left(1 - 2q^8 - 6q^9 - \ldots\right). \end{aligned} \tag{3.38}$$

Das Charakterargument liefert demnach die $\mathcal{W}(2,3,4,5)$[2].

• CP(2)

In diesem Fall erhält man

$$\begin{aligned} b^{\vec{0}}_{\vec{0},0}(q) &= \frac{(\phi_0 - q\phi_1)^2 - (\phi_1 - \phi_0)^2}{\eta^4} \\ &= \frac{q^{-\frac{1}{6}}}{F_2F_3\ldots F_{10}F_{11}}\left(1 - 2q^{14} - 6q^{15} - \ldots\right). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Die Vereinigende $\mathcal{W}$-Algebra der zweiten unitären Modelle der $\mathcal{WA}_{k-1}$ Algebren sollte eine $\mathcal{W}(2,3,\ldots,10,11)$ sein.

• CP(3)

In diesem Fall ist bereits über die sechs dimensionale Weyl-Gruppe von $su(3)$ zu summieren.

$$\begin{aligned} b^{\vec{0}}_{\vec{0},0}(q) = \frac{1}{\eta^6}&\big((\phi_0 - q\phi_1)^3 - q(\phi_1-\phi_0)(\phi_0 - q\phi_1)(\phi_1 - q\phi_2) \\ &+ q^2(\phi_2-\phi_1)(\phi_1 - q\phi_2)^2 - q^2(\phi_2-\phi_1)(\phi_0-q\phi_1)(\phi_2-q\phi_3) \\ &+ q^2(\phi_1-\phi_0)^2(\phi_2-q\phi_3) - q(\phi_1-\phi_0)(\phi_0-q\phi_1)(\phi_1-q\phi_2)\big) \\ = \frac{q^{-\frac{1}{4}}}{F_2F_3\ldots F_{18}F_{19}}&\left(1 - 2q^{22} - 6q^{23} - \ldots\right). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Als Vereinigende $\mathcal{W}$-Algebra ergibt sich also eine $\mathcal{W}(2,3,\ldots,18,19)$.

• CP(4)

Als letztes Beispiel präsentieren wir noch das CP(4) Modell. Die Summe über die 24 Terme der Weyl Gruppe von $su(4)$ unterdrücken wir und geben nur noch die Entwicklung

$$b^{\vec{0}}_{\vec{0},0}(q) = \frac{q^{-\frac{1}{3}}}{F_2F_3\ldots F_{28}F_{29}}\left(1 - 2q^{32} - 6q^{33} - \ldots\right) \tag{3.41}$$

an. Inspektion dieser ersten vier Beispielen führt zu der folgenden Vermutung hinsichtlich der allgemeinen Struktur dieser Cosets.

• CP(m)

Der generische Vakuumcharakter der Vereinigenden $\mathcal{W}$-Algebra für die $m-$ten unitären Modelle der $\mathcal{WA}_{k-1}$ Serie läßt sich schreiben als:

$$b^{\vec{0}}_{\vec{0},0}(q) = \frac{q^{-\frac{2m}{24}}}{F_2 F_3 \ldots F_{m^2+3m} F_{m^2+3m+1}} \left(1 - 2q^{m^2+3m+4} - 6q^{m^2+3m+5} - \ldots\right), \quad (3.42)$$

d.h. es ist eine generische $\mathcal{W}(2,3,\ldots,m^2+3m, m^2+3m+1)$ Algebra, deren erstes generisches Nullfeld bei Dimension m^2+3m+4 liegt.

Wir werden in Kapitel 4. im Zusammenhang mit der Interpretation der beiden generischen $N=2$ Super $\mathcal{W}$-Algebren $\mathcal{SW}(1,2,3)$[1,2] noch einmal auf diese Klasse von Cosets zurückkommen. Es folgt nun die Realisierung der beiden $\mathcal{W}(2,4,6)$ Algebren.

3.2. Die $\mathcal{W}(2,4,6)$ Algebren

Da in Referenz [24] bereits gezeigt wurde, daß die $\mathcal{W}(2,4,6)$[4] Algebra durch das GKO-Coset von $\widehat{su}(2)$ mit Level $k=-1/2$ realisiert werden kann, werden wir in diesem Kapitel die Konstruktion der Algebra nur kurz rekapitulieren und uns auf deren Darstellungstheorie konzentrieren. Unter Ausnutzung der Realisierung von $\widehat{su}(2)_{-1/2}$ durch ein bosonisches Geist-Antigeist Paar werden wir die Branching-Funktionen des GKO-Cosets berechnen, die sich genau als minimale Modelle der C_n Casimir-Algebren erweisen werden. Mithin kann die $\mathcal{W}(2,4,6)$[4] als Vereinigende $\mathcal{W}$-Algebra für die $\mathcal{WC}_n$ Serie interpretiert werden. Ferner werden wir wieder auf die Verallgemeinerung des Cosets (3.2) eingehen und deren Spin-Gehalt berechnen. Im abschließenden Paragraphen werden wir kurz die Realisierung der $\mathcal{W}(2,4,6)$[3] als bosonischen Sektor der $N=1$ Super-Virasoro-Algebra rekapitulieren und diese Algebra als Vereinigende $\mathcal{W}$-Algebra der $\mathcal{WB}_n$ Serie identifizieren. Zunächst aber müssen wir etwas über die *zulässigen Darstellungen* von $\widehat{su}(2)_k$ mit rationalem Level k sagen.

3.2.1. Zulässige Darstellungen von $\widehat{su}(2)_k$

Es ist bekannt, daß integrable, unitäre Darstellungen von $\widehat{su}(2)_k$ nur für positiven, ganzzahligen Level existieren. Um alle minimalen Modelle der Virasoro-Algebra durch das GKO-Coset von $\widehat{su}(2)$ mit $k_1=1$ realisieren zu können, haben V.G. Kac und M. Wakimoto [65] sogenannte zulässige Darstellungen eingeführt, die eine endliche Anzahl von Höchstgewichtsdarstellungen haben, welche eine Darstellung der Modulgruppe bilden. Für $\widehat{su}(2)_k$ haben sie folgende Klassifikation dieser Darstellungen angegeben:
Sei $k=t/u$, mit $(t,u)=1$ und $u>0$. Für $(2u+t-2)\geq 0$ existieren zulässige Darstellungen, deren Höchstgewichte wie folgt parametrisiert werden können:

$$\lambda_{m,n} = [k-n-m(k+2)]\Lambda_0 + [n-m(k+2)]\Lambda_1 \quad (3.43)$$

mit $0 \leq n \leq 2u+t-2$ und $0 \leq m \leq u-1$. Dabei bezeichnet Λ_0 die Singlett- und Λ_1 die Fundamentaldarstellung von $su(2)$. Bezüglich des Sugawara Energie-Impuls Tensors haben diese Darstellungen die konforme Dimension:

$$h_{m,n} = \frac{l(l+2)}{4(k+2)}, \qquad \text{mit } l = n - m(k+2). \tag{3.44}$$

Für $u = 1$ erhält man im übrigen die integrablen Darstellungen. Analog zum integrablen Fall können auch hier die Charaktere

$$\chi_l(q,z) = tr_{\mathcal{H}_{m,n}}(q^{L_0 - \frac{c}{24}} z^{J_0^0}) \tag{3.45}$$

durch Θ-Funktionen ausgedrückt werden

$$\chi_l(q,z) = \frac{\Theta_{b_+,a}(q, z^{\frac{1}{u}}) - \Theta_{b_-,a}(q, z^{\frac{1}{u}})}{\Theta_{1,2}(q,z) - \Theta_{-1,2}(q,z)}, \tag{3.46}$$

mit $a = u^2(k+2)$ und $b_\pm = u(\pm(n+1) - m(k+2))$. Dabei sind die $\widehat{su}(2)$ Θ-Funktionen definiert durch

$$\Theta_{n,m}(q,z) = \sum_{j \in \mathbb{Z} + \frac{n}{2m}} q^{mj^2} z^{2mj}. \tag{3.47}$$

Im Falle $k = -1/2$ existieren demnach vier zulässige Darstellungen

$$(h,l) \in \left\{(0,0), (\frac{1}{2}, 1), (-\frac{1}{8}, -\frac{3}{2}), (-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2})\right\}, \tag{3.48}$$

von denen die beiden letzten einen unendlich entarteten Energiegrundzustand haben. Nach dieser allgemeinen Theorie der $\widehat{su}(2)_k$ Kac-Moody-Algebra, werden wir im folgenden Kapitel für den Fall $k = -1/2$ eine konkrete Realisierung durch ein (β, γ) System vorstellen.

3.2.2. Realisierung von $\widehat{su}(2)_{-1/2}$ durch ein Geist-Antigeist Paar

Die beiden Felder eines bosonisches Geist-Antigeist Paares $(\beta(z), \gamma(z))$ haben konforme Dimension $h = 1/2$ und erfüllen die folgende OPE

$$\beta(z)\ \gamma(w) = \frac{1}{z-w} + \ldots \qquad \gamma(z)\ \beta(w) = \frac{-1}{z-w} + \ldots, \tag{3.49}$$

verletzen also mithin das Spin-Statistik Theorem. In der Einhüllenden des (β, γ) Systems läßt sich mit

$$\begin{aligned} J^0(z) &= N(\gamma\beta)(z) \\ J^+(z) &= N(\gamma\gamma)(z) \\ J^-(z) &= -N(\beta\beta)(z) \end{aligned} \tag{3.50}$$

die $\widehat{su}(2)_{-1/2}$ Kac-Moody-Algebra konstruieren. Die Geister-Felder selber tragen bezüglich des Stromes $J^0(z)$ die Ladung $q = \pm 1$:

$$\begin{aligned} J^0(z)\gamma(w) &= \frac{\gamma(w)}{z-w} + \ldots \\ J^0(z)\beta(w) &= \frac{-\beta(w)}{z-w} + \ldots . \end{aligned} \tag{3.51}$$

Aus dieser Realisierung folgt, daß die $su(2)$ Singletts in $\widehat{su}(2)_{-1/2}$ enthalten sind in der Menge der $su(2)$ Singletts im (β,γ) System, also

$$\frac{\widehat{su}(2)_{-1/2}}{su(2)} \subset \frac{(\beta,\gamma)}{su(2)}. \tag{3.52}$$

Die Gleichheit der beiden Cosets ergibt sich aus der folgenden Zerlegung der Charaktere des (β,γ) Systems in $\widehat{su}(2)_{-1/2}$ Charaktere:

- periodische Randbedingungen von (β,γ)

$$\chi_0(q,z) + \chi_1(q,z) = \frac{q^{\frac{1}{24}}}{\prod_{n\geq 0}(1 - zq^{n+\frac{1}{2}})(1 - z^{-1}q^{n+\frac{1}{2}})} \tag{3.53}$$

- antiperiodische Randbedingungen von (β,γ)

$$\chi_{-\frac{1}{2}}(q,z) + \chi_{-\frac{3}{2}}(q,z) = \frac{q^{-\frac{1}{12}}z^{-\frac{1}{2}}}{\prod_{n\geq 0}(1 - zq^{n+1})(1 - z^{-1}q^{n})}. \tag{3.54}$$

Da in der fundamentalen Darstellung $\chi_1(q,z)$ keine $su(2)$ Singletts liegen, sind demnach alle Singletts des (β,γ) Systems schon in $\chi_0(q,z)$ enthalten, folglich gilt:

$$\frac{\widehat{su}(2)_{-1/2}}{su(2)} = \frac{(\beta,\gamma)}{su(2)}. \tag{3.55}$$

In [24] wurde die klassische Version des obigen Cosets untersucht und gezeigt, daß die Kommutante von den unendlich vielen $su(2)$ Singletts

$$W_{i,j} = \partial^i\gamma\partial^j\beta - \partial^i\beta\partial^j\gamma \tag{3.56}$$

generiert ist, die die folgenden Relationen erfüllen:

$$\begin{aligned} &W_{i,j} + W_{j,i} = 0 \\ &W_{i,j}W_{k,l} - W_{i,k}W_{j,l} + W_{i,l}W_{j,k} = 0 \\ &\partial W_{i,j} = W_{i+1,j} + W_{i,j+1}. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Unter Ausnutzung dieser Relationen lassen sich die klassischen Generatoren (3.56) auf einen nicht mehr redundanten Satz $\{W_{1,2s}\}$ reduzieren. Das klassische Coset enthält also bei jeder geraden Dimension genau einen weiteren Generator.

Die Quantisierung der obigen Relationen (3.57) erlaubt es, alle Felder mit Dimension größer als acht durch die drei Generatoren $\{W_{1,0}, W_{1,2}, W_{1,4}\}$ der Dimension $\{2,4,6\}$ auszudrücken, womit gezeigt ist, daß das GKO-Coset

$$\frac{\widehat{su}(2)_{-\frac{1}{2}} \oplus \widehat{su}(2)_k}{\widehat{su}(2)_{k-\frac{1}{2}}} \tag{3.58}$$

generisch eine $\mathcal{W}(2,4,6)$ als Symmetrie-Algebra enthält. Die einzig in Frage kommende Algebra ist die $\mathcal{W}(2,4,6)^{[4]}$. An diesem Punkt setzen wir nun mit der Untersuchung der Darstellungstheorie der $\mathcal{W}(2,4,6)^{[4]}$ an.

3.2.3. Darstellungstheorie von $\mathcal{W}(2,4,6)^{[4]}$

Um die Formel (2.42) für die Branching-Funktionen eines GKO-Cosets anwenden zu können, benötigt man die String-Funktionen des Cosets $\widehat{su}(2)_{-1/2}/\widehat{u}(1)$, welche ja definiert sind durch

$$\chi_l(q,z) = \sum_{p-l\in 2\mathbb{Z}} c_p^l(q) q^{\frac{p^2}{4k}} z^p. \tag{3.59}$$

Aufgrund der Entwicklung (2.72), lassen sich die Charaktere des (β,γ) Systems schreiben als:

- periodische Randbedingungen

$$\begin{aligned} \chi_0(q,z) + \chi_1(q,z) &= \frac{q^{\frac{1}{24}}}{\prod_{n\geq 0}(1-zq^{n+\frac{1}{2}})(1-z^{-1}q^{n+\frac{1}{2}})} \\ &= q^{\frac{1}{24}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{q^{\frac{m}{2}}\phi_m(q)}{\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^2} z^m \end{aligned} \tag{3.60}$$

- antiperiodische Randbedingungen

$$\begin{aligned} \chi_{-\frac{1}{2}}(q,z) + \chi_{-\frac{3}{2}}(q,z) &= \frac{q^{-\frac{1}{12}} z^{-\frac{1}{2}}}{\prod_{n\geq 0}(1-zq^{n+1})(1-z^{-1}q^{n})} \\ &= q^{\frac{1}{24}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{\phi_m(q)}{\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^2} q^{-\frac{1}{8}} z^{-m-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Hieraus lassen sich die String-Funktionen direkt ablesen:

$$\begin{aligned} c_m^0 &= q^{\frac{1}{24}} \frac{q^{\frac{m(m+1)}{2}}\phi_m(q)}{\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^2}, && \text{m gerade} \\ c_m^1 &= q^{\frac{1}{24}} \frac{q^{\frac{m(m+1)}{2}}\phi_m(q)}{\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^2}, && \text{m ungerade} \\ c_{-m-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} &= c_m^0, && \text{m gerade} \\ c_{-m-\frac{1}{2}}^{-\frac{3}{2}} &= c_m^1, && \text{m ungerade.} \end{aligned} \tag{3.62}$$

Die Branching-Funktionen des Cosets $\widehat{su}(2)_{-1/2}/\widehat{u}(1)$ sind $b^l_m(q) = \eta(q)c^l_m(q)$. Der Vakuumcharakter $b^0_0(q)$ läßt sich wie folgt entwickeln

$$\begin{aligned} b^0_0(q) &= q^{\frac{1}{8}} \frac{\phi_0(q)}{\eta(q)} \\ &= \frac{q^{\frac{1}{12}}}{F_2 F_3} \left(1 - 2q^6 - 2q^7 - \ldots\right), \end{aligned} \tag{3.63}$$

d.h. das obige Coset sollte eine Realisierung der $\mathcal{W}(2,3)$ bei $c = -2$ liefern. Die Generatoren dieser $\mathcal{W}(2,3)$ lassen sich explizit konstruieren:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}N(J^+J^-) + \frac{1}{2}N(J^-J^+) + N(J^0J^0)\right) + \frac{1}{2}N(J^0J^0) \\ W &= \frac{1}{5\sqrt{6}}(2N(N(J^+J^-)\ J^0) - N(J^+\partial J^-) + \frac{1}{2}\partial N(J^+J^-) + \\ &\quad \frac{16}{3}N(N(J^0J^0)\ J^0) + 4N(J^0\partial J^0) + \frac{1}{3}\partial^2 J^0). \end{aligned} \tag{3.64}$$

Die Darstellungen der $\mathcal{W}(2,3)$ bei $c = -2$ spielen insbesondere eine Rolle in der Polymerphysik [38], wo die Höchstgewichte

$$h_m = \frac{m(m+1)}{2} \tag{3.65}$$

als kritische Indizes zweidimensionaler, sogenannter "self-avoiding walk" Modelle auftreten. Ferner haben wir mit der obigen Coset-Identifizierung gezeigt, daß die $\mathcal{W}(2,3)$ bei $c = -2$ tatsächlich nicht-rational ist. Nach diesem kleinen Nebenresultat kehren wir zur $\mathcal{W}(2,4,6)^{[4]}$ zurück.

Die Formel (2.62) für die Branching-Funktionen von GKO-Cosets läßt sich auf den Fall verallgemeinern, daß einer der Level ganzzahlig und der andere aus der Menge der zulässigen Darstellungen ist. Sind beide Level nur zulässig, so würde dies rationale KFTen mit $c < 1$ implizieren, die nicht in der minimalen Serie der Virasoro-Algebra liegen; was nicht sein kann [1]. Die Darstellungen der rationalen Modelle der $\mathcal{W}(2,4,6)^{[4]}$ lassen sich mithin aus den Branching-Funktionen des Cosets

$$\frac{\widehat{su}(2)_{-\frac{1}{2}} \oplus \widehat{su}(2)_k}{\widehat{su}(2)_{k-\frac{1}{2}}} \tag{3.66}$$

mit ganzzahligem, positivem Level k erhalten. Wählt man in (2.62) $k_1 = -1/2$, $p = 2k_2+4$, $q = p-1$, $\Lambda_i = \frac{l_i}{\sqrt{2}}$ und $j = \sqrt{2}\Lambda_2 + 1$, $j' = \sqrt{2}\Lambda_3 + 1$ so ergibt sich:

$$\begin{aligned} b^{l_1}_{j,j'}(q) = q^{-\frac{c}{24}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \Bigg(& c^{l_1}_{j'-j-mp}(q)\ q^{-\frac{(mpq+jq-j'p)^2-(p-q)^2}{2pq}} \\ & - c^{l_1}_{j'+j-mp}(q)\ q^{-\frac{(mpq-jq-j'p)^2-(p-q)^2}{2pq}} \Bigg) \end{aligned} \tag{3.67}$$

mit den Bedingungen $0 < j < \frac{p}{2}$, $0 < j' < q$, $|j - j'| = 0 \bmod 2$ und $l_1 \in \{0, 1\}$.
Die zentrale Ladung ist

$$c = -1 + \frac{12(p-q)^2}{pq}. \tag{3.68}$$

Aus der expliziten Form (3.67) der Branching-Funktionen folgt deren Symmetrieeigenschaft:

$$b^0_{j,j'} = b^1_{j,q-j'}, \tag{3.69}$$

wobei durch Ausnutzen der Symmetrie $c^l_{-m} = c^l_m$ und Verschiebung des Summatationsindexes $b^1_{j,q-j'}$ sich schreiben läßt als:

$$\begin{aligned} b^1_{j,q-j'} = q^{-\frac{c}{24}} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \Bigg(& c^1_{j'+j-pm+1}(q)\ q^{-\frac{(mpq-jq-j'p)^2-(p-q)^2}{2pq}} \\ & - c^1_{j'-j-mp+1}(q)\ q^{-\frac{(mpq+jq-j'p)^2-(p-q)^2}{2pq}} \Bigg). \end{aligned} \tag{3.70}$$

Unter Benutzung der Relation

$$c^1_{m+1} + c^0_m = \frac{q^{\frac{m(m+1)}{2}}}{\eta^3} \tag{3.71}$$

erhält man

$$b^1_{j,q-j'} = b^0_{j,j'} - \frac{q^{-\frac{c}{24}}}{\eta^3} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{a(j,j',m)} - q^{a(-j,j',m)} \right) \tag{3.72}$$

mit

$$a(j,j',m) = \frac{(j'-j-pm)(j'-j-pm+1)}{2} - \frac{(mpq+jq-j'p)^2-(p-q)^2}{2pq}. \tag{3.73}$$

Wegen $a(-j, j', -m+1) = a(j, j', m)$ ist der zweite Term auf der rechten Seite in (3.72) Null und die Identität (3.69) ist bewiesen.
Damit ergeben sich die folgenden Höchstgewichte der Branching-Funktionen:

$$\begin{aligned} h(j,j') &= \frac{|j-j'|(|j-j'|+1)}{2} - \frac{(jq-j'p)^2-(p-q)^2}{2pq} \quad \text{for } j' < j < \frac{p}{2} \\ h(j,j') &= h(j,q-j') \quad \text{for } j \le j' < q \qquad |j-j'| = 0 \bmod 2 \end{aligned} \tag{3.74}$$

Insbesondere erhält man aus (3.67) für den generischen Vakuumcharakter im Limes $p \to \infty$

$$\begin{aligned} b^0_{1,1}(q) &= c^0_0(q) - q c^0_2(q) \\ &= q^{\frac{1}{24}} \frac{\phi_0(q) - q\phi_1(q)}{\prod_{n\ge1}(1-q^n)^2} \\ &= \frac{q^{\frac{1}{24}}}{F_2F_4F_6} \left(1 - q^{11} - 2q^{12} - \ldots\right), \end{aligned} \tag{3.75}$$

so daß das Charakterargument auch wieder das richtige Ergebnis liefert. Die rationalen Modelle (3.74) werden im folgenden als minimale Modelle der C_n Casimir-Algebren identifiziert.

3.2.4. Vereinigende W-Algebren der $\mathcal{WC}_n$ Casimir-Algebren

Die minimale Serie (2.52) der Casimir-Algebren von C_n ist:

$$c(\mathcal{WC}_n)_{p,q} = n\left(1-(2n-1)(n+1)\frac{q}{p}-2(2n-1)(2n+1)\frac{p}{q}+2(n+1)(4n-1)\right). \tag{3.76}$$

Die entscheidende Beobachtung ist nun, daß die minimale Serie

$$c(k) = -\frac{k(2k+7)}{(k+2)(2k+3)} \tag{3.77}$$

des Cosets $\widehat{su}(2)_{-\frac{1}{2}} \oplus \widehat{su}(2)_k / \widehat{su}(2)_{k-\frac{1}{2}}$ und damit der $\mathcal{W}(2,4,6)^{[4]}$ in der Menge (3.76) enthalten ist

$$c(k) = c(\mathcal{WC}_k)_{k+2,2k+3}, \tag{3.78}$$

d.h. es ist zu vermuten, daß die $\mathcal{W}(2,4,6)^{[4]}$ eine Vereinigende $\mathcal{W}$-Algebra für diese minimalen Modelle der $\mathcal{WC}_n$ Casimir-Algebren ist. Um diese These zu untermauern, haben wir zweierlei Dinge nachgeprüft. Zum einen stimmen die in Kapitel 3.2.3. berechneten Höchstgewichte (3.74) mit den Höchstgewichten (2.54) der Casimir-Algebren überein und zum anderen trunkiert die $\mathcal{W}(2,4,6)^{[4]}$ tatsächlich für die entspechenden Werte der zentralen Ladung auf die explizit bekannten Casimir-Algebren $\mathcal{WC}_1$, $\mathcal{WC}_2$ und $\mathcal{WC}_3$.

c	Trunkierung
$-3/5$	$\mathcal{W}(2,4,6)^{[4]} \to Vir$
$-11/14$	$\mathcal{W}(2,4,6)^{[4]} \to \mathcal{W}(2,4)$
$-13/15$	$\mathcal{W}(2,4,6)^{[4]} \to \mathcal{W}(2,4,6)^{[2]}$

Tabelle 3.2

Die Aufklärung der Herkunft der $\mathcal{W}(2,4,6)^{[4]}$ hat uns also zu einer Coset-Konstruktion für einige rationale Modelle der bisher nur aus der Drinfeld-Sokolov-Reduktion bekannten $\mathcal{WC}_n$ Casimir-Algebren verholfen. Im folgenden stellen wir eine Verallgemeinerung der obigen Coset-Konstruktion vor, die eine ganze Serie von Vereinigenden $\mathcal{W}$-Algebren liefern wird. Dabei bedienen wir uns wieder voller Vertrauen in dessen Korrektheit des Charakterarguments.
Anstatt mit einem (β,γ) System starten wir nun mit N kommutierenden (β,γ) Systemen:

$$\beta_i(z)\;\gamma_i(w) = \frac{1}{z-w}+\ldots \qquad \gamma_i(z)\;\beta_i(w) = \frac{-1}{z-w}+\ldots \tag{3.79}$$

Daraus lassen sich N kommutierende Ströme

$$H_i(z) = N(\gamma_i\beta_i)(z) \tag{3.80}$$

konstruieren mit den OPEen

$$H_i(z)H_j(w) = -\frac{\delta_{ij}}{(z-w)^2} + \text{reg.} \tag{3.81}$$

Die Geister-Felder selber tragen Ladung $q \in \{0, \pm 1\}$ bezüglich dieser Ströme:

$$\begin{aligned} H_i(z)\gamma_j(w) &= \frac{\delta_{ij}\gamma_j(w)}{z-w} + \text{reg.} \\ H_i(z)\beta_j(w) &= \frac{-\delta_{ij}\beta_j(w)}{z-w} + \text{reg..} \end{aligned} \tag{3.82}$$

Die anderen Kombinationen der Geister-Felder mit Dimension eins liefern daher direkt eine Realisierung der $\widehat{sp}(2N)_{-\frac{1}{2}}$ Kac-Moody Algebra in der Cartan-Weyl-Basis $\{H_i(z), E_\alpha(z)\}$:

α	$E_\alpha(z)$
$2\vec{e}_i$	$N(\gamma_i\gamma_i)$
$-2\vec{e}_i$	$-N(\beta_i\beta_i)$
$\vec{e}_i + \vec{e}_j$	$N(\gamma_i\gamma_j)$
$-\vec{e}_i - \vec{e}_j$	$-N(\beta_i\beta_j)$
$\vec{e}_i - \vec{e}_j$	$N(\gamma_i\beta_j)$
$-\vec{e}_i + \vec{e}_j$	$N(\beta_i\gamma_j)$

Tabelle 3.3

Unter Benutzung dieser Realisierung kann man nun leicht den Vakuumcharakter des Cosets

$$\widehat{sp}(2N)_{-\frac{1}{2}}/sp(2N) \tag{3.83}$$

bestimmen.
Gemäß (2.42) läßt sich der Vakuumcharakter durch die String-Funktionen ausdrücken:

$$b_0^0(q) = \sum_{w\in W} \epsilon(w)\, c^0_{-w(\vec{\rho})+\vec{\rho}}(q)\, q^{-|-w(\vec{\rho})+\vec{\rho}|^2}, \tag{3.84}$$

wobei der Weyl-Vektor von $sp(2N)$ gegeben ist durch:

$$\vec{\rho} = \sum_{n=1}^{N}(N-n+1)\vec{e}_n. \tag{3.85}$$

Wählt man in (2.72) $\{e^{2\pi i\theta} \to e^{2\pi i\theta}\, q^{-1/2}\}$, so erhält man die Identität

$$\frac{1}{\prod_{n\geq 0}(1-e^{2\pi i\theta}q^{n+\frac{1}{2}})(1-e^{-2\pi i\theta}q^{n+\frac{1}{2}})} = \sum_{m\in Z} \frac{q^{\frac{m}{2}}\phi_m(q)e^{2\pi i\theta m}}{\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^2}. \tag{3.86}$$

Der Vakuum-Verma-Modul der N (β,γ) Systeme kann damit folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}\chi_{\Lambda=0}(q)+\chi_{\Lambda=\vec{e}_1}(q) &= \frac{q^{\frac{N}{24}}}{\prod_{i=1}^{N}\prod_{n\geq 0}(1-e^{2\pi i\theta_i}q^{n+\frac{1}{2}})(1-e^{-2\pi i\theta_i}q^{n+\frac{1}{2}})} \\ &= \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^N}\frac{q^{\frac{3N}{24}}}{\eta^{2N}}q^{\frac{\lambda_1+\ldots+\lambda_N}{2}}\phi_{\lambda_1}(q)\ldots\phi_{\lambda_N}(q)e^{2\pi i\vec{\theta}\vec{\lambda}},\end{aligned} \tag{3.87}$$

woraus sich die String-Funktionen direkt ablesen lassen

$$c^0_{\vec{\lambda}}(q)q^{-|\vec{\lambda}|^2}=\frac{q^{\frac{3N}{24}}}{\eta^{2N}}q^{\frac{\lambda_1+\ldots+\lambda_N}{2}}\phi_{\lambda_1}(q)\ldots\phi_{\lambda_N}(q). \tag{3.88}$$

Berechnung des Orbits von $\vec{\rho}$ unter der Weyl-Gruppe und Einsetzen der String-Funktionen (3.88) in (3.84) liefert schließlich den Vakuumcharakter $b^0_0(q)$, welchen wir für die ersten fünf symplektischen Kac-Moody-Algebren explizit berechnet haben.

• $\widehat{sp}(2)$

Aufgrund der Isomorphie von $sp(2)$ und $su(2)$ erhält man genau das bereits diskutierte Beispiel

$$\begin{aligned}b^0_0(q) &= q^{\frac{3}{24}}\frac{\phi_0(q)-q\phi_1(q)}{\eta^2} \\ &= \frac{q^{\frac{1}{24}}}{F_2F_4F_6}\left(1-q^{11}-2q^{12}-\ldots\right).\end{aligned} \tag{3.89}$$

• $\widehat{sp}(4)$

Die Weyl-Gruppe ist von der Ordnung $|W|=8$ und der Weyl-Vektor ist $\vec{\rho}=2\vec{e}_1+\vec{e}_2$.

$$\begin{aligned}b^0_0(q) &= \frac{q^{\frac{1}{4}}}{\eta^4}(\phi_0\phi_0-\phi_1\phi_{-1}+q\phi_3\phi_{-1}-q^2\phi_4\phi_0+q^3\phi_4\phi_2-q^3\phi_3\phi_3+q^2\phi_1\phi_3-\phi_0\phi_2) \\ &= \frac{q^{\frac{1}{12}}}{F_2F_4F_6F_8F_{10}F_{12}F_{14}F_{16}}\left(1-q^{21}-2q^{22}-\ldots\right).\end{aligned} \tag{3.90}$$

Die generische Symmetrie-Algebra des Cosets

$$\frac{\widehat{sp}(4)_k\oplus\widehat{sp}(4)_{-\frac{1}{2}}}{\widehat{sp}(4)_{k-\frac{1}{2}}} \tag{3.91}$$

sollte demnach eine $\mathcal{W}(2,4,6,8,10,12,14,16)$ sein.

• $\widehat{sp}(6)$

Mit $\vec{\rho}=3\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3$ und $|W|=48$ kann der Vakuumcharakter wie folgt generiert werden:

$$b^0_0(q)=\frac{q^{\frac{1}{8}}}{F_2F_4F_6\ldots F_{26}F_{28}F_{30}}\left(1-q^{35}-2q^{36}-\ldots\right), \tag{3.92}$$

d.h. wir erwarten eine $\mathcal{W}(2,4,6,\dots,26,28,30)$ als Symmetrie-Algebra des generischen Cosets.

• $\widehat{sp}(8)$

Das letzte berechnete Beispiel mit Weyl-Vektor $\vec{\rho} = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 + \vec{e}_4$ und $|W| = 384$ liefert Aufschluß über das Wachstumsverhalten der Zahl der Generatoren der $\mathcal{W}$-Algebra:

$$b_0^0(q) = \frac{q^{\frac{1}{6}}}{F_2 F_4 F_6 \dots F_{44} F_{46} F_{48}} \left(1 - q^{53} - 2q^{54} - \dots\right). \tag{3.93}$$

Diese ersten vier Beispiele lassen vermuten, daß die Anzahl der Generatoren quadratisch mit dem Rang der Lie-Algebra wächst und das erste generische Null-Feld bei einem um fünf höheren Energie-Level liegt als der $\mathcal{W}$-Algebra-Generator größter Dimension.

• $\widehat{sp}(2N)$

Im allgemeinen Fall ist der Weyl-Vektor $\vec{\rho} = \sum_{n=1}^{N}(N-n+1)\vec{e}_n$ und die Ordnung der Weyl-Gruppe $|W| = 2^N N!$. Der Vakuumcharakter hat dann vermutlich die folgende Entwicklung:

$$b_0^0(q) = \frac{q^{\frac{N}{24}}}{F_2 F_4 F_6 \dots F_{2N(N+2)-2} F_{2N(N+2)}} \left(1 - q^{2N(N+2)+5} - 2q^{2N(N+2)+6} - \dots\right), \tag{3.94}$$

so daß das Coset

$$\frac{\widehat{sp}(2N)_k \oplus \widehat{sp}(2N)_{-\frac{1}{2}}}{\widehat{sp}(2N)_{k-\frac{1}{2}}} \tag{3.95}$$

eine $\mathcal{W}(2,4,6,\dots,2N(N+2)-2,2N(N+2))$ als Symmetrie-Algebra hätte.
Die minimale Serie des Cosets (3.95) ist analog zum Fall N=1 in der minimalen Serie der $\mathcal{WC}_n$ Casimir-Algebren enthalten

$$\begin{aligned} c(N,k) &= -\frac{kN(2k+4N+3)}{(k+N+1)(2k+2N+1)} \\ &= c(\mathcal{WC}_k)_{k+N+1,2k+2N+1}, \end{aligned} \tag{3.96}$$

so daß zu vermuten ist, daß die Cosets (3.95) für jeweils festen Rang N eine Vereinigende $\mathcal{W}$-Algebra der symplektischen Casimir-Algebren liefern. Auf die prinzipiell mögliche Berechnung ihrer Darstellungen mittels der (β,γ)-Realisierung verzichten wir an dieser Stelle und schließen dieses Kapitel mit der Bemerkung, daß wir durch die Coset-Konstruktionen (3.95) eine Realisierung einer zwei-parametrigen Untermenge aller drei-parametrigen minimalen Modelle der $\mathcal{WC}_n$ Algebren gefunden haben.

3.2.5. Die $\mathcal{W}(2,4,6)^{[3]}$ als Vereinigende $\mathcal{W}$-Algebra der $\mathcal{WB}_n$ Serie

Es ist bereits bekannt, daß die $\mathcal{W}(2,4,6)^{[3]}$ aus dem Coset

$$\frac{\widehat{su}(2)_2 \oplus \widehat{su}(2)_k}{\widehat{su}(2)_{k+2}} \tag{3.97}$$

gewonnen werden kann [26,67]. Aufgrund der Isomorphie von $\widehat{su}(2)_2$ und $\widehat{so}(3)_1$ und der Realisierung dieser Algebra durch drei freie Fermionen läßt sich obiges Coset supersymmetrisieren und dann als bosonischer Sektor der $SVir_{N=1}(c)$ Algebra

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (n-m)L_{m+n} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{m,-n} \\
[L_m, G_r] &= (r - \tfrac{m}{2})G_{m+r} \\
\{G_r, G_s\} &= 2L_{r+s} + \frac{2c}{3}\binom{s+\frac{1}{2}}{2}\delta_{r,-s}
\end{aligned} \tag{3.98}$$

auffassen. Dieses $\mathbb{Z}_2$-Orbifold mit dem äußeren Automorphismus ρ

$$\begin{aligned}
\rho(L) &= L \\
\rho(G) &= -G
\end{aligned} \tag{3.99}$$

ist klassisch wiederum unendlich erzeugt [24] mit folgenden redundanten Generatoren und Relationen

$$\begin{aligned}
&L \\
&\Phi_n = G\partial^n G, \qquad n \text{ ungerade} \\
&\Phi_n \Phi_m = 0.
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Die Quantenversion erlaubt es wiederum, alle Generatoren $\{\Phi_n : n \geq 5\}$ durch die drei Felder $\{L, \Phi_1, \Phi_3\}$ auszudrücken. Minimale Darstellungen des Cosets

$$\frac{\widehat{so}(3)_1 \oplus \widehat{so}(3)_k}{\widehat{so}(3)_{k+1}} \tag{3.101}$$

mit zentraler Ladung $c(k)$ existieren, da k_1 ganzzahlig ist, auch für rationale Werte von k. Ein Vergleich mit der minimalen Serie der $\mathcal{WB}_n$ Algebren

$$c(\mathcal{WB}_n)_{p,q} = n\left(1 - (2n-1)(2n+1)\frac{q}{p} - 2(n+1)(2n+1)\frac{p}{q} + 2(n+1)(4n-1)\right) \tag{3.102}$$

liefert die zwei folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned}
c\left(-\tfrac{(2p-3)}{2p}\right) &= \tfrac{(3-2p)(3+4p)}{2(2p+3)} \\
&= c(\mathcal{WB}_p)_{2p,2p+3}
\end{aligned} \tag{3.103}$$

und

$$\begin{aligned}
c\left(-\tfrac{2p}{(2p+1)}\right) &= -\tfrac{3p(3+4p)}{2(p+1)} \\
&= c(\mathcal{WB}_p)_{2p+2,2p+1}.
\end{aligned} \tag{3.104}$$

Die daraus resultierenden Trunkierungen der $\mathcal{W}(2,4,6)^{[3]}$ lassen sich für die ersten sechs Beispiele explizit verifizieren.

c	Trunkierung
$7/10$	$\mathcal{W}(2,4,6)^{[3]} \to Vir$
$-21/4$	$\mathcal{W}(2,4,6)^{[3]} \to Vir$
$-11/14$	$\mathcal{W}(2,4,6)^{[3]} \to \mathcal{W}(2,4)$
-11	$\mathcal{W}(2,4,6)^{[3]} \to \mathcal{W}(2,4)$
$-5/2$	$\mathcal{W}(2,4,6)^{[3]} \to \mathcal{W}(2,4,6)^{[1]}$
$-135/8$	$\mathcal{W}(2,4,6)^{[3]} \to \mathcal{W}(2,4,6)^{[1]}$

Tabelle 3.4

Weiterhin stimmen für diese Beispiele auch die Höchstgewichte der minimalen Darstellungen überein. Aus all dem schließen wir, daß die $\mathcal{W}(2,4,6)^{[3]}$ eine Vereinigende $\mathcal{W}$-Algebra der $\mathcal{WB}_n$ Serie ist.
Die Verallgemeinerung liegt nun auf der Hand. Analog zum vorherigen Beispiel starten wir mit $2n+1$ freien Fermionen, welche eine Realisierung von $\widehat{so}(2n+1)_1$ liefern, d.h. es ist zu erwarten, daß die Cosets

$$\frac{\widehat{so}(2n+1)_k \times \widehat{so}(2n+1)_1}{\widehat{so}(2n+1)_{k+1}} \tag{3.105}$$

ebenfalls minimale Modelle der B_n-Casimir-Algebren enthalten. Durch Vergleich der minimalen Serien findet man folgende Verallgemeinerungen der Identitäten (3.103-3.104)

$$\begin{aligned} c\left(n, -\tfrac{2(2n-1)p-2n-1}{2p}\right) &= \tfrac{(1+2n+2p-4np)(1+2n+4np)}{2(2n+2p+1)} \\ &= c(\mathcal{WB}_p)_{2p,2p+2n+1} \end{aligned} \tag{3.106}$$

und

$$\begin{aligned} c\left(n, -\tfrac{2(2n-1)p}{2p+1}\right) &= \tfrac{p(2n+1)(1-4n-4np)}{2(n+p)} \\ &= c(\mathcal{WB}_p)_{2p+2n,2p+1}. \end{aligned} \tag{3.107}$$

Wie in dem Kapitel über das Charakterargument bereits erläutert, ist die $\mathcal{W}$-Algebra des Cosets (3.105) genau das $\mathbb{Z}_2$ Orbifold der fermionischen $\mathcal{W}(2,4,\ldots,2n,n+1/2)$ Algebra. Die bosonische $\mathcal{W}$-Algebra dieses Orbifolds läßt sich wieder mithilfe des Charakterarguments als eine $\mathcal{W}(2,4,\ldots,4n+2)$ Algebra identifizieren.
Damit ist gezeigt, daß alle bislang bekannten generischen $\mathcal{W}$-Algebren, deren klassischer Limes (3.9) auf Unendlichkeiten in den Kopplungskonstanten führt, klassich unendlich erzeugt sind und als Zusammenfassung von Trunkierungen der Casimir-Algebren interpretiert werden können. Die gefundenen Coset-Realisierungen minimaler Modelle der nicht-einfach-geschnürten Casimir-Algebren $\mathcal{WB}_n$ und $\mathcal{WC}_n$ werfen die Frage auf, ob vielleicht sogar alle minimalen Modelle dieser Casimir-Algebren durch Cosets realisiert werden können. Solange keine tiefere strukturelle Verwandtschaft der beiden Methoden der

Drinfeld-Sokolov-Reduktion und der Coset-Konstruktion aufgedeckt ist bzw. nicht alle Modelle explizit durch Cosets realisiert sind, bleibt diese Frage offen.
Damit schließen wir dieses Kapitel über bosonische $\mathcal{W}$-Algebren ab und wenden uns den phänomenologisch interessanteren $N = 2$ supersymmetrischen $\mathcal{W}$-Algebren zu.

4. Kovariante Konstruktion von N=2 W-Algebren

In dem zweiten Teil dieser Arbeit werden wir uns mit supersymmetrischen $\mathcal{W}$-Algebren befassen, wobei wir, aufgrund der Relevanz für Anwendungen in der Super-String-Theorie, besonders an $N = 2$ supersymmetrischen $\mathcal{W}$-Algebren interessiert sind, für deren explizite Konstruktion wir einen manifest kovarianten Formalismus entwickeln werden, der es erlaubt, die andernfalls ausufernden Rechnungen in einem erträglichen Rahmen zu halten. Als erste Anwendung dieses Konstruktionsschemas studieren wir $N = 2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebren mit einem weiteren Paar superprimärer Felder entgegengesetzter Ladung. Es wird sich zeigen, daß die Menge all dieser Algebren eine andere Struktur aufweist als die $N = 0$ und $N = 1$ supersymmetrischen Analoga. Schließlich untersuchen wir noch die Darstellungstheorie obiger Algebren, welche es rechtfertigt, sie in vier verschiedene Klassen einzuteilen, von welchen lediglich eine rationale Modelle enthält. Mithin scheint Rationalität in $N = 2$ KFTen eine seltenere Eigenschaft zu sein als in $N = 0$ und $N = 1$ SKFTen.
Zunächst geben wir eine kurze Einführung in $N = 2$ supersymmetrische KFT.

4.1. N=2 supersymmetrische KFT

Die Formulierung der Theorie direkt auf einem nichtkommutativen zweidimensionalen Superraum [86,88], stellt die Kovarianz aller Ausdrücke von Anfang an sicher. Zunächst stellen wir diese Formulierung und die besonderen Eigenschaften der $N = 2$ Super-Virasoro-Algebra vor, um dann schließlich noch einen kurzen Überblick über die Anwendung $N = 2$ SKFTen in der Konstruktion realistischer String-Vakua zu geben.

4.1.1. N=2 Superraum und superkonforme Invarianz

Die Koordinaten $(Z, \overline{Z})$ des zweidimensionalen *Superraumes* bestehen aus jeweils drei Komponenten

$$Z = (z, \theta^+, \theta^-), \qquad \overline{Z} = (\overline{z}, \overline{\theta^+}, \overline{\theta^-}), \tag{4.1}$$

wobei $z \in \mathbb{C}$ ist und die mit θ bezeichneten Größen eine Graßmann-Algebra bilden:

$$\begin{aligned} \{\theta^+, \theta^-\} &= 0 \\ \{\theta^+, \theta^+\} &= 0 \\ \{\theta^-, \theta^-\} &= 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Lassen wir wie in (4.2) die Unterscheidung zwischen holomorphem und antiholomorphem Sektor weg, so gilt die Formel für beide Sektoren. Das Analogon zur euklidischen Metrik $ds^2 = dzd\overline{z}$ auf dem Superraum ist

$$dS^2 = dZd\overline{Z}, \qquad \text{mit } dZ = dz - \frac{1}{2}d\theta^+\,\theta^- - \frac{1}{2}d\theta^-\,\theta^+. \tag{4.3}$$

Gilt nun für eine Abbildung des Superraumes in sich, daß sich die Metrik dS^2 mit einem koordinatenabhängigen Skalenfaktor multipliziert, so heißt die Abbildung eine *superkonforme*

Abbildung. Wegen (4.3) zerfällt die superkonforme Gruppe in zwei isomorphe holomorphe Anteile, die solche Transformationen $F : Z \to Z'$ enthalten, für die gilt:

$$dZ \to dZ' = \mu(Z)dZ. \tag{4.4}$$

Eine vollständige Basis aller infinitesimalen konformen Transformationen ist gegeben durch die Menge

$$F = \{az^{-n+1}, \sqrt{2}z^{-r+\frac{1}{2}}\theta^+\bar{\epsilon}, \sqrt{2}z^{-r+\frac{1}{2}}\theta^-\epsilon, l\theta^+\theta^- z^{-n}\} \tag{4.5}$$

mit folgender Wirkung auf die Koordinaten:

- az^{-n+1}

$$z' = z - az^{-n+1}, \quad (\theta^+)' = \theta^+ - \frac{a}{2}(-n+1)z^{-n}\theta^+, \quad (\theta^-)' = \theta^- - \frac{a}{2}(-n+1)z^{-n}\theta^- \tag{4.6}$$

- $\sqrt{2}z^{-r+\frac{1}{2}}\theta^+\bar{\epsilon}, \ \sqrt{2}z^{-r+\frac{1}{2}}\theta^-\epsilon$

$$\begin{aligned} z' &= z - \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-r+\frac{1}{2}}\theta^+\bar{\epsilon} - \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-r+\frac{1}{2}}\theta^-\epsilon, \\ (\theta^+)' &= \theta^+ - \sqrt{2}z^{-r+\frac{1}{2}}\epsilon - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-r+\tfrac{1}{2}\right)z^{-r-\frac{1}{2}}\theta^+\theta^-\epsilon, \\ (\theta^-)' &= \theta^- - \sqrt{2}z^{-r+\frac{1}{2}}\bar{\epsilon} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-r+\tfrac{1}{2}\right)z^{-r-\frac{1}{2}}\theta^+\theta^-\bar{\epsilon} \end{aligned} \tag{4.7}$$

- $l\theta^+\theta^- z^{-n}$

$$z' = z, \quad (\theta^+)' = \theta^+ + lz^{-n}\theta^+, \quad (\theta^-)' = \theta^- - lz^{-n}\theta^-. \tag{4.8}$$

Die Generatoren $\{L_n, G_r^+, G_r^-, J_n\}$ dieser konformen Transformationen erfüllen die $N=2$ Super-de-Wit Algebra, deren zentrale Erweiterung die bereits vorgestellte $N=2$ Super-Virasoro-Algebra (3.4) ist. Die Transformationen $\{L_0, L_{\pm 1}, G^{\pm}_{\pm 1/2}, J_0\}$ bilden die zu der Super-Lie Algebra $OSP(2|2)$ isomorphe Unteralgebra der *N=2 Super-Möbius-Transformationen.* Im Gegensatz zu der $N=0$ und $N=1$ Virasoro-Algebra enthält in diesem Fall mit $\{L_0, J_0\}$ die Cartan-Unteralgebra zwei Operatoren, so daß alle Zustände des Hilbertraumes zwei Quantenzahlen (h, q) tragen.
Als nächstes lassen sich auf dem Superraum zwei kovariante Ableitungen D^+, D^- definieren:

$$D^{\pm} = \partial_{\theta^{\pm}} + \frac{1}{2}\theta^{\mp}\partial_z, \tag{4.9}$$

die nilpotent sind und die folgende Relation erfüllen:

$$\{D^+, D^-\} = \partial_z. \tag{4.10}$$

Diese beiden Abeitungen haben genau die Eigenschaften einer Superderivation. Für zwei Punkte Z_1 und Z_2 führen wir weiter den translationsinvarianten Superabstand Z_{12} ein:

$$Z_{12} = z_1 - z_2 - \frac{1}{2}(\theta_1^+\theta_2^- + \theta_1^-\theta_2^+), \tag{4.11}$$

aus dem sich durch Multiplikation mit den ebenfalls translationsinvarianten Größen

$$\theta_{12}^{+} = \theta_1^{+} - \theta_2^{+}, \quad \theta_{12}^{-} = \theta_1^{-} - \theta_2^{-}, \quad \theta_{12}^{+}\theta_{12}^{-} \tag{4.12}$$

insgesamt vier unabhängige Superabstände konstruieren lassen.
Holomorphe Felder $\Phi(Z)$ auf diesem Superraum lassen sich formal nach den Graßmann-Variablen entwickeln, wobei man im allgemeinen vier Komponentenfelder erhält†:

$$\Phi(Z) = \varphi(z) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\theta^{+}\psi^{-}(z) - \theta^{-}\psi^{+}(z)\right) + \theta^{+}\theta^{-}\chi(z). \tag{4.13}$$

Man beachte die Konvention, daß fermionische Felder mit den Graßmann-Variablen antikommutieren, wodurch die Superfelder als ganzes entweder bosonisch oder fermionisch sind. Insbesondere lassen sich die vier Generatoren der superkonformen Gruppe in einem Superfeld zusammenfassen

$$\mathcal{L}(Z) = J(z) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\theta^{+}G^{-}(z) - \theta^{-}\ G^{+}(z)\right) + \theta^{+}\theta^{-}L(z), \tag{4.14}$$

womit sich die Super-Virasoro-Algebra kompakt schreiben läßt als:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(Z_1)\,\mathcal{L}(Z_2) = \frac{c/3}{Z_{12}^2} + \frac{\theta_{12}^{+}\theta_{12}^{-}}{Z_{12}^2}\mathcal{L}(Z_2) + \frac{(\theta_{12}^{+}D^{+} - \theta_{12}^{-}D^{-})}{Z_{12}}\mathcal{L}(Z_2)\\ + \frac{\theta_{12}^{+}\theta_{12}^{-}}{Z_{12}}\partial\mathcal{L}(Z_2) + \text{reg.}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Diesen kovarianten Formalismus werden wir im Kapitel 4.2. auf die Berechnung von N-Punkt-Funktionen, der Super-OPE holomorpher Felder und auf die Definition von Super-NOPen systematisch weiterentwickeln. In diesem Kapitel wollen wir noch auf die Darstellungen der $N = 2$ Super-Virasoro-Algebra und einige ihrer Besonderheiten eingehen.

4.1.2. Unitäre Darstellungen der N=2 Super-Virasoro-Algebra

Im Gegensatz zum $N = 0$ und $N = 1$ Fall sind die unitären Darstellungen der $N = 2$ Super-Virasoro-Algebra auch zugleich die einzig bekannten rationalen Modelle [25,71]. Wie bei allen fermionischen Algebren liefert der Orbit der modularen Gruppe Charaktere von Darstellungen mit verschiedenen Randbedingungen der Generatoren. In unserem Fall sind demnach der Neveu-Schwarz-Sektor mit periodischen Randbedingungen von $G^{\pm}(z)$ und der Ramond-Sektor mit antiperiodischen Randbedingungen zu berücksichtigen. Im ersten

† Mitunter werden wir auch folgende Notation benutzen

$$\Phi(Z) = \Phi_1(z) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\theta^{+}\Phi_2(z) - \theta^{-}\Phi_3(z)\right) + \theta^{+}\theta^{-}\Phi_4(z).$$

Fall tragen die fermionischen Felder halbzahlige Moden, im letzten Fall ganzzahlige. Eine Besonderheit der $N = 2$ Super-Virasoro-Algebra ist die Existenz eines Automorphismus', des sogenannten *spektralen Flusses* [84], der die beiden Sektoren bijektiv verbindet und wie folgt auf den Generatoren operiert:

$$
\begin{aligned}
(L_n)' &= L_n + \eta J_n + \frac{c}{6}\eta^2 \delta_{n,0} \\
(G_r^\pm)' &= G_{r\pm\eta}^\pm \\
(J_n)' &= J_n + \frac{c}{3}\eta \delta_{n,0}.
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Für $\eta = \pm 1/2$ verbindet der spektrale Fluß gerade den Neveu-Schwarz und den Ramond-Sektor, wohingegen man für $\eta = \pm 1$ einen Automorphismus des Neveu-Schwarz-Sektors auf sich erhält. Es ist allerdings zu beachten, daß keineswegs immer Höchstgewichtszustand auf Höchstgewichtszustand abgebildet wird. Wir werden im weiteren Verlauf unserer Untersuchung von Super-$\mathcal{W}$-Algebren noch sehen, daß mitunter der spektrale Fluß selber als lokales Feld realisiert werden kann und dann Generator einer exotischen $N = 2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebra ist.
Es existieren nur abzählbar viele unitäre Darstellungen von $SVir_{N=2}(c)$, die sich in zwei Serien einordnen lassen, von denen eine die minimalen Modelle enthält [25]:

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{3k}{k+2}, \qquad 0 < k \in \mathbb{Z} \qquad\qquad (4.17)\\
h_{l,m}^{NS} &= \frac{l(l+2)-m^2}{4(k+2)}, \quad q_{l,m}^{NS} = \frac{m}{k+2}, \qquad 0 \le l \le k, \quad m = -l, -l+2, \ldots, l \\
h_{l,m}^{R} &= \frac{l(l+2)-(m\pm 1)^2}{4(k+2)} + \frac{1}{8}, \quad q_{l,m}^{R} = \frac{(m\pm 1)}{k+2} \mp \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Die nicht-minimale Serie [36]

$$
c = \frac{3k}{k-2}, \qquad 2 < k \in \mathbb{Q} \tag{4.18}
$$

ist nach unten durch drei beschränkt und läßt sich, analog wie die minimalen Modelle aus dem Coset

$$
\frac{\widehat{su}(2)_k}{\widehat{u}(1)} \oplus \widehat{u}(1) \tag{4.19}
$$

konstruiert werden können, aus dem nicht-kompakten Coset

$$
\frac{\widehat{su}(1,1)_k}{\widehat{u}(1)} \oplus \widehat{u}(1) \tag{4.20}
$$

gewinnen.
Neben dem spektralen Fluß haben $N = 2$ SKFTen noch eine weitere besondere Eigenschaft, den sogenannten *chiralen Ring* [63]. Holomorphe Superfelder $\Phi(Z)$, für die gilt

$$
D^- \Phi(Z) = 0, \qquad D^+ \Phi(Z) = 0 \tag{4.21}
$$

nennt man chiral bzw. antichiral. Die Defintion (4.21) impliziert, daß für chirale Superfelder die Komponenten $\psi^+(z)$ und $\chi'(z)$ Nullfelder sind, für antichirale Superfelder die Komponenten $\psi^-(z)$ und $\chi'(z)$. Aus der unter Benutzung der $N = 2$ Virasoro Algebra folgenden Gleichung

$$2H - Q = \langle\varphi|\{G^-_{-\frac{1}{2}} G^+_{\frac{1}{2}}\}|\varphi\rangle = \|G^+_{\frac{1}{2}}|\varphi\rangle\|^2 + \|G^-_{-\frac{1}{2}}|\varphi\rangle\|^2 \tag{4.22}$$

folgt, daß in unitären Theorien immer $H \geq |Q|/2$ ist und die folgende Äquivalenz gilt

$$\Phi_H^Q \text{ primär, chiral} \Leftrightarrow H = \frac{Q}{2}. \tag{4.23}$$

Im antichiralen Fall gilt analog $H = -Q/2$. Unter dem spektralen Fluß mit $\eta = 1/2$ gehen die antichiralen Zustände des Neveu-Schwarz-Sektor in die Ramond-Grundzustände mit $h = c/24$ über; nochmalige Anwendung des spektralen Flusses liefert die chiralen Zustände im Neveu-Schwarz-Sektor. Die analoge Gleichung zu (4.22) mit $G^{\pm}_{\pm 3/2}$ liefert für primäre, (anti-)chirale Zustände die Bedingung $H \leq c/6$. Auf der Menge aller primären, chiralen Felder eines unitären Modells läßt sich durch die OPE wie folgt eine Ringstruktur definieren. Da die OPE zweier chiraler Felder wieder nur chirale Felder enthält und aufgrund der Ladungserhaltung und der Ungleichung $H \geq |Q|/2$ die OPE einen verschwindenden singulären Teil hat, kann man als Produkt zweier primärer, (anti)chiraler Felder Φ_1, Φ_2 das primäre, (anti-)chirale Feld

$$\Phi_1 \times \Phi_2 = \lim_{Z \to W} \Phi_1(Z)\Phi_2(W) \tag{4.24}$$

definieren. In einer rationalen SKFT liefert diese Operation einen endlichen, kommutativen und, wegen $H \leq c/6$, nilpotenten Ring $\mathcal{R}_c$. Durch die Kopplung von holomorphem und antiholomorphem Sektor erhält man insgesamt vier chirale Ringe $\mathcal{R}_{(c,c)}$, $\mathcal{R}_{(a,a)}$, $\mathcal{R}_{(a,c)}$, $\mathcal{R}_{(c,a)}$, wobei die ersten und letzten beiden jeweils durch den spektralen Fluß mit $(\eta, \overline{\eta}) = (1, 1)$, bzw. $(\eta, \overline{\eta}) = (1, -1)$ auseinander hervorgehen. In jedem dieser Ringe definiert man das sogenannte Poincaré-Polynom

$$P(t, \overline{t}) = tr_{\mathcal{R}}\; t^{\pm J_0} \overline{t}^{\pm \overline{J}_0}, \tag{4.25}$$

wobei im chiralen Fall positives Vorzeichen und im antichiralen negatives zu wählen ist. Existiert für $c = 3d$ und im Limes großer Radien eine Beschreibung der Kompaktifizierung durch eine Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit, so entspricht das Poincaré-Polynom (4.25) genau dem geometrischen Poincaré-Polynom

$$P(t, \overline{t}) = \sum_{p,q=0}^{d} b_{p,q} t^p \overline{t}^q \tag{4.26}$$

der d-dimensionalen, komplexen Mannigfaltigkeit. Der chirale Ring kann daher sozusagen als der topologische Anteil einer SKFT angesehen werden [40]. Der spektrale Fluß und der chirale Ring spielen eine wichtige Rolle in der Konstruktion phänomenologisch interessanter String-Vakua mithilfe $N = 2$ SKFTen.

4.1.3. Anwendung von N=2 SKFT in der Super-String-Theorie

Die wesentliche Motivation für die Untersuchung $N = 2$ SKFTen ist deren Anwendung in der Super-String-Theorie [55]. Da in diesem Abschnitt kaum ein umfassender Überblick über die Entwicklung dieser Theorie in den vergangenen zehn Jahren gegeben werden kann, werden wir uns auf die Aspekte beschränken, die direkt etwas mit $N = 2$ SKFT zu tun haben.

Der Anspruch der Super-String-Theorie, die vereinheitlichende Feldtheorie zu sein, steht und fällt mit ihrem Vermögen, das beobachtbare Teilchenspektrum zu reproduzieren. Solange eine String-Feld-Theorie, in welcher das Vakuum ausgerechnet werden könnte, aussteht, muß man sich perturbativer Methoden bedienen und z.B. die Anzahl der möglichen Vakua durch phänomenologisch motivierte Bedingungen einzuschränken versuchen, wie z.B.

- Vierdimensionale flache Raum-Zeit
- $N = 1$ Raum-Zeit-Supersymmetrie für Energien größer als die Brechungsskala der elektroschwachen Wechselwirkung
- Eine Eichgruppe G, die sukzessive auf das Standardmodell $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ hinuntergebrochen werden kann
- Drei Generationen von Fermionen in der fundamentalen Darstellung von G.

Die geometrische Übersetzung dieser Bedingungen ist, daß die String-Wirkung die Propagation eines eindimensionalen Strings in einer zehn-dimensional Mannigfaltigkeit N mit Eichgruppe $E_8 \times E_8$ beschreibt, wobei N in einen (nahezu) flachen vierdimensionalen Raum M^4 und eine sechsdimensionale, kompakte Mannigfaltigkeit K^6 aufspaltet. Die Forderung nach $N = 1$ Raum-Zeit-Supersymmetrie impliziert, daß K^6 eine sogenannte Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit [31] sein muß, i.e. eine dreidimensionale komplexe Mannigfaltigkeit mit $SU(3)$-Holonomie. Durch Einbetten dieser $SU(3)$ in die Eichgruppe wird einer der E_8 Faktoren auf E_6 reduziert. Die Anzahl der Generationen ist durch die Topologie von K^6 bestimmt, insbesondere gilt für die Anzahl der Nettogenerationen $|n_{27} - n_{\overline{27}}| = |\chi|/2$. Die Klassifizierung aller String-Vakua mit den obigen Restriktionen ist demnach äquivalent zu der Klassifizierung aller Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten. Es sind zwar große Klassen dieser Mannigfaltigkeiten, wie die Polynomschnitte in projektiven komplexen Räumen, untersucht worden; eine vollständige Klassifikation steht allerdings noch aus.

Die String-Wirkung kann andererseits auch als zweidimensionales nichtlineares Sigma-Modell auf der String-Weltfläche interpretiert werden und wird als solches durch eine KFT beschrieben. Die Eichgruppe $E_8 \times E_8$ läßt sich dadurch in die KFT implementieren, daß man auf die rechts-links Symmetrie verzichtet und den sogenannten heterotischen String [56] betrachtet, dessen links-chiraler Teil einen $N = 1$ supersymmetrischen String beschreibt und der rechts-chirale Teil einen $N = 0$ String. Die Anomaliefreiheit liefert, daß die links-chirale KFT insgesamt die zentrale Ladung $c_l = 15$ haben muß, wohingegen die rechte $c_r = 26$ aufweist. Bei einer Kompaktifizierung auf eine D-dimensionale String-Theorie werden diese zentralen Ladungen wie folgt aufgeteilt [52]:

Anteil	c_l	c_r
Lichtkegeleichung	3	2
$D-2$ Raum-Zeit X^μ	$D-2$	$D-2$
$D-2$ Fermionen ψ^μ	$\frac{1}{2}(D-2)$	0
Eichgruppe $E_8 \times SO(6+D)$	0	$11+\frac{1}{2}D$
interne KFT	$15-\frac{3}{2}D$	$15-\frac{3}{2}D$

Tabelle 4.1

In Referenz [8] wurde gezeigt, daß eine notwendige Bedingung für ein $N=1$ supersymmetrisches Spektrum die $N=2$ superkonforme Invarianz des internen Sektors ist. D. Gepner hat daraufhin eine Konstruktion solcher String-Theorien formuliert, die direkt mit $N=2$ SKFTen startet, so daß diese Bedingung also auch hinreichend ist [52]. Eine Schwierigkeit in der Behandlung nicht rechts-links-symmetrischer KFTen ist die Konstruktion modular invarianter Zustandssummen. Daher konstruiert man zunächst eine rechts-links symmetrische Super-String-Theorie mit $c_l = c_r = 15$. Da für geradzahlige Dimension D auch der Raum-Zeit Anteil eine $N=2$ Supersymmetrie mit $J_i = \psi_i^* \psi_i$, $G_i^+ = -\sqrt{2}\psi_i \partial_z X_i$ und $G_i^- = -\sqrt{2}\psi_i^* \partial_z X_i^*$ aufweist, wobei jeweils zwei der Superkoordinaten X^μ und ψ^μ zu komplexen Bosonen bzw. Fermionen zusammengefaßt werden, ist dieser rechts-links-symmetrische String $N=(2,2)$ supersymmetrisch. Der spektrale Fluß-Operator mit $\eta = \frac{1}{2}$ setzt sich zusammen aus der (Anti-)Spinor Darstellung von $SO(D-2)$ und dem spektralen Fluß der internen Theorie

$$Q^\alpha_{\frac{1}{2}} = S^\alpha \; exp\Big(i\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{10-D}{2}}\phi\Big), \quad Q^{\dot\alpha}_{\frac{1}{2}} = C^\alpha \; exp\Big(i\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{10-D}{2}}\phi\Big) \tag{4.27}$$

und hat genau die Eigenschaften der $N=1$ Raum-Zeit Supersymmetrie Ladungen Q^α, $Q^{\dot\alpha}$. Insbesondere haben diese Felder konforme Dimension

$$h = \frac{1}{2} = \frac{D-2}{16} + \frac{10-D}{16} \tag{4.28}$$

und vertauschen mithin Bosonen und Fermionen. Der folgende Orbit eines Charakters $\chi_H^Q(q,z)$

$$(\chi_H^Q)^{susy} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n Q^n_{\frac{1}{2}} \chi_H^Q \tag{4.29}$$

transformiert sich mit derselben S-Matrix wie der ursprüngliche Charakter $\chi_H^Q(q,z)$, wobei allerdings nur die Charaktere mit ungerader Ladung Q auftreten, d.h. $N=1$ Raum-Zeit Supersymmetrie in Verbindung mit der GSO-Projektion des Operators $(-1)^F = e^{\pi i J_0}$ liefert einem wieder eine modular invariante Zustandssumme, die insbesondere keine Tachyonen enthält und sogar $N=2$ Raum-Zeit supersymmetrisch ist. Anstatt dieser Konstruktion kann man auch direkt das lokale Feld des spektralen Flusses mit $\eta = 1$ $\Phi^{\pm(10-d)/2}_{(10-d)/4}$ zur Symmetrie-Algebra hinzunehmen, deren Darstellungen dann, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, von vornherein nur ganzzahlige Ladung haben [39].

Eine modulare Invariante des heterotischen Strings erhält man nun, indem man im rechts-chiralen Sektor die vier Konjugationsklassen der von den $D-2$ Fermionen gebildeten $SO(D-2)$ durch die vier Konjugationsklassen von $E_8 \times SO(6+D)$ ersetzt

$$\begin{aligned} \chi_0^{SO(D-2)} &\to \chi_v^{E_8\times SO(D+6)}, \qquad \chi_v^{SO(D-2)} \to \chi_0^{E_8\times SO(D+6)} \\ \chi_s^{SO(D-2)} &\to -\chi_{\overline{s}}^{E_8\times SO(D+6)}, \qquad \chi_{\overline{s}}^{SO(D-2)} \to -\chi_s^{E_8\times SO(D+6)}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Durch diese Ersetzung wird die rechts-chirale $N=2$ Supersymmetrie zerstört, so daß die gesamte Theorie nur noch $N=(2,0)$ supersymmetrisch ist. Weiterhin haben im rechts-chiralen Sektor die ehemaligen Superladungen $Q^{\alpha}_{\frac{1}{2}}$, $Q^{\dot\alpha}_{\frac{1}{2}}$ konforme Dimension

$$h = 1 = \frac{D+6}{16} + \frac{10-D}{16} \tag{4.31}$$

und das Spektrum ist nur noch $N=1$ Raum-Zeit supersymmetrisch. Da die Anregungen des Strings einen Abstand in der Größenordnng der Planck-Masse $M_p = 10^{19} GeV$ haben, sind die im Niederenergiebereich beobachtbaren Teilchen im Hochenergiebereich alle masselos, d.h. man muß nur Anregungen mit Level $(h,\overline{h}) = (1/2, 1)$ betrachten. Das Spektrum der String-Theorie hängt natürlich von dem jeweiligen, nach wie vor $N=(2,2)$ supersymmetrischen, internen Sektor ab. Als universellen Teil erhält man als Vermittler der Gravitation das Graviton, das Dilaton und das antisymmetrische Graviton sowie die Eichbosonen der für $D \in \{4,6,8\}$ erweiterten Eichgruppe $E_8 \times E_{4+\frac{D}{2}}$. Diese Erweiterung kommt dadurch zustande, daß im rechts-chiralen Sektor Felder der Dimension eins, wie z.B. der $U(1)$ Strom $j(z)$ oder die ehemaligen Superladungen $Q^{\alpha}_{\frac{1}{2}}$, $Q^{\dot\alpha}_{\frac{1}{2}}$ vorhanden sind, die an den Vakuum-Orbit der rechts-chiralen internen Theorie koppeln und damit wegen der Transformation (4.30) an die Vektordarstellung von $SO(D-2)$ im links-chiralen Sektor.

- Für $D=4$ erweitert sich demnach die Eichgruppe $SO(10)$ wie folgt

$$78 = 45 + 16 + \overline{16} + 1, \tag{4.32}$$

  wobei 78 genau die Dimension von E_6 ist.
- Für $D=6$ kommen noch die beiden Felder $\Phi_1^{\pm 2}$ des spektralen Flusses hinzu, die zusammen mit dem $U(1)$ Strom eine $SU(2)$ Algebra bilden. Insgesamt erhält man die adjungierte Darstellung von E_7:

$$133 = 66 + 32 + 32 + 3. \tag{4.33}$$

- Bei $D=8$ haben die Operatoren des spektralen Flusses im internen Sektor konforme Dimension $\frac{1}{2}$ und koppeln damit an die Vektordarstellung von $SO(14)$. Man erhält damit die adjungierte Darstellung von E_8:

$$248 = 91 + 64 + \overline{64} + 14 + 14 + 1. \tag{4.34}$$

Dieser Erweiterung der Eichsymmetrie entspricht geometrisch genau die Einbettung der Holonomie-Gruppe in die Eichgruppe. Abhängig von der internen $N=2$ SKFT kann es zu weiteren Erweiterungen der Eichgruppe kommen; so erhält man beispielsweise in dem Fall der Verwendung von Tensorprodukten r unitärer Modelle der $N = 2$ Virasoro-Algebra $r - 1$ zusätzliche $U(1)$ Faktoren. Analog zu den adjungierten Darstellungen erweitern sich auch die Vektordarstellungen von $SO(10)$ und $SO(12)$ auf die Vektordarstellungen von E_6 bzw. E_7:

$$\begin{aligned} 27 &= 10 + 16 + 1, \qquad \overline{27} = 10 + \overline{16} + 1 \\ 56 &= 12 + 12 + 32. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Die Vektordarstellungen haben konformes Gewicht $(H, Q)_{RZ} = (1/2, 1)$ im rechts-chiralen externen Sektor, so daß sie an (anti-) chirale Felder $(H, Q)_{int} = (1/2, \pm 1)$ aus dem internen Sektor koppeln. Durch Anwenden der Superladungen $Q^{\alpha}_{\frac{1}{2}}$, $Q^{\dot{\alpha}}_{\frac{1}{2}}$ erhält man die obigen Erweiterungen (4.35). Diese Felder können nur an die $SO(D - 2)$ Singletts im links-chiralen Sektor koppeln, entsprechen also Superpartnern von chiralen fermionischen Materiefeldern. Von den vier möglichen Kopplungen der (anti-)chiralen Felder $(H_l, Q_l) = (1/2, \pm 1)$, $(H_r, Q_r) = (1/2, \pm 1)$ aus den beiden internen Sektoren sind jeweils zwei CPT-konjugiert, so daß Zustände mit $Q_l = Q_r = 1$ den Generationen entsprechen und Zustände mit $Q_l = -Q_r = -1$ den Antigenerationen. Es ist offensichtlich, daß die Anzahl n der Generationen und $\overline{n}$ der Antigenerationen von der verwendeten internen SKFT abhängt, die damit also insbesondere Information über die Topologie der Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit enthält.
In diesem quantenfeldtheoretischen Ansatz sind demnach für $D = 4$ alle $N = 2$ SKFTen mit $c = 9$ zu klassifizieren. Eine große Klasse bilden die Tensorprodukte von unitären Darstellungen der $N = 2$ Virasoro-Algebra und deren Orbifoldkonstruktionen. Eine weitere Klasse von SKFTen bilden die Kazama-Suzuki-Modelle [68,83], die wir im folgenden Abschnitt vorstellen werden. Bislang wurden allein rationale KFTen, die nur gewissen ausgezeichneten Punkten im Moduli-Raum einer Mannigfaltigkeit entsprechen, als interne SKFTen verwendet. Es ist daher eine von der String-Theorie motivierte Aufgabe, sich näher mit der Behandlung nicht-rationaler KFT auseinanderzusetzen. Insbesondere sollte die Klassifikation aller modular invarianten Zustandssummen der kanonischen, nicht-rationalen $N = 2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebra des spektralen Flusses einer Klassifikation aller String-Vakua mit den anfangs genannten Eigenschaften äquivalent sein. Hiermit schließen wir den stringtheoretischen Hintergrund der Untersuchungen dieser Arbeit ab, und wenden uns der $N = 2$ supersymmetrischen Coset-Konstruktion à la Kazama-Suzuki zu.

4.1.4. Kazama-Suzuki-Modelle

In der direkten Verallgemeinerung der Kac-Moody-Algebren auf den $N = 2$ supersymmetrischen Fall haben die Super-Ströme $\mathcal{J}^a(Z)$ superkonforme Dimension null und können damit lediglich eine abelsche $U(1)$ Algebra bilden. Motiviert durch die Gepnersche Konstruktion haben Kazama-Suzuki gezeigt, daß es trotzdem gewisse Klassen von Cosets $N = 1$ supersymmetrischer Kac-Moody-Algebren gibt, deren Symmetrie sich auf eine $N = 2$ Supersymmetrie erweitert. Die $N = 1$ Super-Kac-Moody-Algebren G lassen sich nach Einführen von Superfeldern

$$J^a(Z) = j^a(z) + \theta J^a(z) \tag{4.36}$$

wie folgt kovariant schreiben

$$J^a(Z_1)J^b(Z_2) = \frac{\theta_{12}}{Z_{12}} i f_{abc} J^c(Z_2) + \frac{k/2}{Z_{12}}\delta_{ab} \tag{4.37}$$

mit den Superabständen $Z_{12} = z_1 - z_2 - \theta_1\theta_2$ und $\theta_{12} = \theta_1 - \theta_2$. Die Sugawara-Konstruktion läßt sich auf diesen Fall verallgemeinern [64] und man erhält die folgenden Generatoren der $N = 1$ Super-Virasoro-Algebra:

$$L(z) = \frac{1}{k}\left(N(\hat{J}^a\hat{J}^a)(z) - N(j^a\partial j^a)(z)\right) \tag{4.38}$$

$$G^1(z) = \frac{2}{k}\left(N(\hat{J}^a j^a)(z) - \frac{i}{3k} f_{abc} N(N(j^a j^b)j^c)(z)\right)$$

wobei die beiden Ströme

$$\hat{J}^a = J^a - J^a_f, \qquad J^a_f = -\frac{i}{k} f_{abc} N(j^b j^c) \tag{4.39}$$

orthogonal zueinander sind und selbst Super-Kac-Moody-Algebren mit Level $\hat{k} = k - h^\vee$ und $k_f = h^\vee$ erfüllen. Die zentrale Ladung der $N = 1$ Virasoro-Algebra ist demnach

$$c = \frac{1}{2}\mathrm{dim}G + \frac{\hat{k}\,\mathrm{dim}G}{\hat{k} + h^\vee}. \tag{4.40}$$

Analog zum $N = 0$ Fall impliziert eine Einbettung einer Unteralgebra H in G eine $N = 1$ superkonforme Coset-Theorie $\widehat{G}/\widehat{H}$, deren Generatoren durch

$$L_{G/H} = L_G - L_H, \qquad G_{G/H} = G_G - G_H \tag{4.41}$$

gegeben sind. Die Frage ist nun, wann sich in diesem Coset zusätzlich zu $G(z)$ ein weiteres Feld $G^2(z)$ der Dimension $3/2$ konstruieren läßt, das mit $L(z)$ und $G^1(z)$ die $N = 2$ Super-Virasoro-Algebra bildet. Zu diesem Zweck haben Kazama-Suzuki zunächst den allgemeinsten Ansatz für solch ein Feld gewählt

$$G^2(z) = \frac{2}{k}\left(h^2_{\bar{a}\bar{b}} N(\hat{J}^{\bar{b}} j^{\bar{a}})(z) - \frac{i}{3k} S^2_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} N(N(j^{\bar{a}} j^{\bar{b}})j^{\bar{c}})(z)\right) \tag{4.42}$$

mit $j^{\bar{a}} \in G/H$ und aus den Kommutatoren mit den Feldern $G(z)$ und $L(z)$ Mastergleichungen an die Parameter $h^2_{\bar{a}\bar{b}}$ und $S^2_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$ aufgestellt. Als eine große Klasse von Lösungen dieser Gleichungen erhählt man mit der Wahl $S^2_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = f_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = 0$ die vollständig klassifizierten *hermiteschen symmetrischen Räume*, die in der folgenden Tabelle aufgelistet sind.

G/H	$c_{G/H}$
$\widehat{SU}(n+m)/\widehat{SU}(m) \oplus \widehat{SU}(n) \oplus \widehat{U}(1)$	$3\hat{k}mn/(\hat{k}+m+n)$
$\widehat{SO}(n+2)/\widehat{SO}(n) \oplus \widehat{SO}(2)$	$3\hat{k}n/(\hat{k}+n) \quad n \geq 2$
$\widehat{SO}(3)/\widehat{SO}(2)$	$3\hat{k}/(\hat{k}+2) \quad n = 1$
$\widehat{SO}(2n)/\widehat{SU}(n) \oplus \widehat{U}(1)$	$3\hat{k}n(n-1)/2(\hat{k}+2n-2)$
$\widehat{SP}(2n)/\widehat{SU}(n) \oplus \widehat{U}(1)$	$3\hat{k}n(n+1)/2(\hat{k}+n+1)$
$\widehat{E}_6/\widehat{SO}(10) \oplus \widehat{U}(1)$	$48\hat{k}/(\hat{k}+12)$
$\widehat{E}_7/\widehat{E}_6 \oplus \widehat{U}(1)$	$81\hat{k}/(\hat{k}+18)$

Tabelle 4.2

Diese Klasse von Kazama-Suzuki-Modellen mit rang(G) = rang(H) wird von $d = \dim(\mathrm{G/H})$ Paaren von Fermionen $j^{\bar{a}}$ und Bosonen $J^{\bar{a}}$ erzeugt, wobei die d Ferminonen eine Realisierung der normalen $\widehat{so}(d)_1$ liefern. Daher können diese supersymmetrischen Cosets auch als $N=0$ Kac-Moody-Cosets der Art

$$\frac{\widehat{g} \oplus \widehat{so}(d)_1}{\widehat{h}} \tag{4.43}$$

aufgefaßt werden. Für die uns im folgenden noch interessierenden CP(n) Cosets erhält man

$$\frac{\widehat{su}(n+1)_k \oplus \widehat{so}(2n)_1}{\widehat{su}(n)_{k+1} \oplus \widehat{u}(1)} \tag{4.44}$$

mit zentraler Ladung

$$c = \frac{3nk}{k+n+1}. \tag{4.45}$$

Für ganzzahligen Level k liefern diese Modelle eine große Klasse unitärer, rationaler $N=2$ SKFTen mit zentraler Ladung größer als drei, welche ebenfalls zur Konstruktion von String-Vakua benutzt werden können. Insbesondere kann durch die Verwendung nur eines rationalen Modells mit $c=9$ die Eichgruppe des Strings auf $E_8 \times E_6$ ohne zusätzliche $U(1)$ Faktoren reduziert werden. Die Symmetrie-Algebren dieser Cosets sind generische $N=2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebren [60,61], von denen bisher nur die $N=2$ Virasoro-Algebra und die dem Modell CP(2) entsprechende $\mathcal{SW}(1,2)$ Algebra [80] explizit bekannt waren. In Kapitel 4.5. werden wir als Highlight der Anwendung unseres kovarianten Konstruktionsverfahrens auch noch die Symmetrie-Algebra von CP(3), eine $\mathcal{SW}(1,2,3)$, konstruieren [23].
Neben diesen generischen $\mathcal{SW}$-Algebren treten in der Super-String-Theorie auch noch die bereits erwähnten exotischen Algebren des spektralen Flusses auf, die wir im folgenden Abschnitt vorstellen werden.

4.1.5. $\mathcal{SW}$-Algebren des spektralen Flusses

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir gesehen, daß die Symmetrie-Algebra von $N=1$ Raum-Zeit supersymmetrischen Super-String Kompaktifizierungen auf $10-2d$ Dimensionen (mindestens) die Erweiterung der $N=2$ Super-Virasoro-Algebra mit dem spektralen Fluß Operator der Dimension $d/2$ ist. Die resultierende (anti-)chirale $\mathcal{SW}(1,\frac{d}{2}^{\pm d})$ Algebra existiert dann genau für die zentrale Ladung $c=3d$. Die Algebren selber und deren Darstellungstheorie sind in Referenz [73,74] ausführlich behandelt worden, so daß wir uns in den folgenden Ausführungen auf diese Arbeiten beziehen werden.
Da die Generatoren $\Phi^{\pm d}_{\frac{d}{2}}(Z)$ chiral sind, ist die OPE bereits durch die Kenntnis der OPE der ersten Komponenten $\varphi^{\pm}(z)$ festgelegt. Diese läßt sich nach Anwenden auf das Vakuum $|0\rangle$ und der Bildung des Limes $w \to 0$ schreiben als:

$$\varphi^{+}(z)\varphi^{-}_{\frac{d}{2}}|0\rangle = \sum_{p=1}^{d} z^{-p} \sum_{\substack{\{i_k \geq 0\}_{k\geq 1} \\ \sum_{k\geq 1} k i_k = d-p}} \prod_{k\geq 1} \frac{1}{i_k! k^{i_k}} J_k^{i_k} |0\rangle + \text{reg..} \tag{4.46}$$

Zur Bestimmung der Darstellungen dieser Algebra wird die Existenz des Null-Feldes $\mathcal{N}_s(\Phi\mathcal{L})$ ausgenutzt. Das Verschwinden dieses Feldes auf den Höchstgewichten $|h,q\rangle$ schränkt diese auf die folgende immer noch überabzählbare Menge ein:

• masselose Darstellungen $h = \pm\frac{q}{2}$

$$
\begin{aligned}
q &= 0, \pm 1, \ldots, \pm\left[\frac{d-1}{2}\right], \quad A_0|h,q\rangle = 0 \\
q &= \frac{d}{2}, \quad \text{für } d \text{ gerade}, \quad \varphi_0^+|h,-q\rangle \to |h,q\rangle
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

wobei A_0 für alle auftretenden Nullmoden steht.

• massive Darstellungen $h > \frac{|q|}{2}$

$$
\begin{aligned}
q &= 0, \pm 1, \ldots, \pm\left(\left[\frac{d}{2}\right] - 1\right), A_0|h,q\rangle = 0 \\
q &= \frac{d-1}{2}, \quad \text{für } d \text{ ungerade}, \quad (\psi^+)_0^-|h,-q\rangle \to |h,q\rangle.
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

Die Modelle sind also nicht-rational und die Ladungen der Darstellungen alle ganzzahlig, genau wie es die GSO-Projektion erwarten läßt. In Referenz [74] wurde gezeigt, daß sich die Charaktere dieser Darstellungen schreiben lassen als Summe über alle Virasoro-Charaktere, deren Höchstgewichte sich durch sukzessives Anwenden des spektralen Flusses erreichen lassen:

$$
\begin{aligned}
\chi_{h,q}(q) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \chi^{SVir}_{h_m,q_m}(q) \\
|h,q\rangle &\xrightarrow{\eta=m} |h_m,q_m\rangle.
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

Im Falle der Vakuumdarstellung erhält man damit folgenden Turm von $N=2$ Virasoro primären Feldern

$$
\begin{aligned}
(h_m,q_m) &= (0,0), \qquad m = 0 \\
(h_m,q_m) &= \left(\frac{1}{6}(m^2(c-3)+3(2m-1)), \pm\frac{1}{3}(m(c-3)+3)\right), \quad 0 < m \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

Da die benötigten Darstellungen der $N=2$ Virasoro-Algebra alle bekannt sind, lassen sich alle Charaktere der $\mathcal{SW}(1,\frac{d}{2}^{\pm d})$ Algebra explizit angeben. Für die in Kapitel 4.4. gegebene Interpretation unserer Ergebnisse reicht allerdings die in (4.49) und (4.50) enthaltende Information aus.

Da sehr wenig über die Behandlung nicht-rationaler KFTen bekannt ist, konnte bislang auch noch nicht die in der vier-dimensionalen String-Theorie auftretende $\mathcal{SW}(1,3/2^{\pm 3})$ zur Konstruktion neuer Vakua eingesetzt werden. Im Prinzip müßte jede modulare Invariante dieser chiralen Algebra ein $N=1$ supersymmetrisches Vakuum liefern. Zur ökonomischen

Berechnung von $N=2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebren, wenden wir uns nun zunächst der allgemeinen Struktur von holomorphen $N=2$ SKFTen zu.

4.2. Holomorphe N=2 SKFT

Analog zum $N=0$ Fall studieren wir die allgemeine Struktur von $N=2$ holomorphen Feldtheorien. Zunächst sind die Begriffe des primären und quasiprimären Feldes auf den $N=2$ supersymmetrischen Fall zu übertragen. Die Invarianz der Theorie unter $N=2$ Super-Möbius-Transformationen legt sodann die Zwei- und Dreipunkt-Funktionen von quasiprimären Feldern bis auf wenige Strukturkonstanten eindeutig fest. Daraus läßt sich dann die allgemeine Form der OPE solcher Felder ableiten, wobei die Kopplungen der derivativen Felder wieder nur durch die superkonformen Dimensionen und $u(1)$ Ladungen festgelegt sind. Schließlich wird noch ein iteratives Verfahren vorgestellt, um die superquasiprimären Projektionen von Super-NOPen zu berechnen.

4.2.1. Super-(quasi-)primäre Felder

Ein holomorphes Feld $\Phi(Z)$ heißt *superprimär* mit konformer Dimension H und $u(1)$ Ladung Q, falls für superkonforme Transformationen $Z \to Z'$ gilt

$$\left(\Phi_H^Q\right)'(Z) = \left[D^+(\theta^+)'\right]^{H-\frac{Q}{2}} \left[D^-(\theta^-)'\right]^{H+\frac{Q}{2}} \Phi_H^Q(Z'). \tag{4.51}$$

Gilt (4.51) nur für Super-Möbius-Transformationen, so nennen wir das Feld *superquasiprimär*. Die infinitesimale Form der Definition (4.51) liefert die folgenden Kommutatoren des Feldes $\Phi_H^Q(Z)$ mit den Generatoren der Super-Virasoro-Algebra:

$$\begin{aligned}
[L_m, \Phi(Z)] &= z^{-m}\Big[z\partial_z - \tfrac{(m-1)}{2}\theta^+\partial_{\theta^+} - \tfrac{(m-1)}{2}\theta^-\partial_{\theta^-} \\
&\qquad - H(m-1) + \tfrac{Q}{4}m(m-1)\theta^+\theta^- z^{-1}\Big]\Phi(Z) \\
[G_r, \Phi(Z)]_\pm &= \sqrt{2}z^{-r+1/2}\Big[\partial_{\theta^-} - \tfrac{1}{2}\theta^+\partial_z - (H+\tfrac{Q}{2})(r-\tfrac{1}{2})\theta^+ z^{-1} \\
&\qquad - \tfrac{1}{2}(r-\tfrac{1}{2})\theta^+\theta^- z^{-1}\partial_{\theta^-}\Big]\Phi(Z) \\
[\overline{G}_r, \Phi(Z)]_\pm &= \sqrt{2}z^{-r+1/2}\Big[\partial_{\theta^+} - \tfrac{1}{2}\theta^-\partial_z - (H-\tfrac{Q}{2})(r-\tfrac{1}{2})\theta^- z^{-1} \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}(r-\tfrac{1}{2})\theta^+\theta^- z^{-1}\partial_{\theta^+}\Big]\Phi(Z) \\
[J_m, \Phi(Z)] &= z^{-m}\left[-\theta^+\partial_{\theta^+} + \theta^-\partial_{\theta^-} - Hm\theta^+\theta^- z^{-1} + Q\right]\Phi(Z).
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Die beiden Generatoren $G_{1/2}^\pm$ erzeugen im übrigen die Supertranslationen

$$[G_{1/2}^\pm, \Phi(Z)]_\pm = \sqrt{2}(\partial_{\theta^\mp} - \tfrac{1}{2}\theta^\pm\partial_z)\Phi(Z) \tag{4.53}$$

und J_0 eine "Rotation" in der Graßmann-Ebene

$$[J_0, \Phi(Z)] = (-\theta^+\partial_{\theta^+} + \theta^-\partial_{\theta^-} + Q)\Phi(Z). \qquad (4.54)$$

Die vier in (4.11-4.12) definierten Superabstände sind invariant unter diesen Transformationen, soweit man den Graßmann-Koordinaten Ladung ± 1 zumißt.
Entwickelt man (4.52) in Komponenten, so sieht man, daß das Feld mit höchster konformer Dimension $\chi(z)$ nicht quasiprimär bezüglich der Virasoro-Algebra ist. Die quasiprimäre Projektion läßt sich aber sofort angeben:

$$\chi'(z) = \chi(z) - \tfrac{Q}{4H}\partial_z\varphi(z). \qquad (4.55)$$

Damit ergibt sich, daß die Definition eines superprimären Feldes äquivalent ist zu folgenden Kommutatoren der Komponenten:

$$\begin{aligned}
&[L_m, \varphi_n] = (n-(H-1)m)\varphi_{m+n}\\
&[L_m, \psi^\pm_n] = (n-(H-\tfrac{1}{2})m)\psi^\pm_{m+n}\\
&[L_m, \chi'_n] = (n-Hm)\chi'_{m+n}\\
&[G^\pm_m, \varphi_n]_\pm = \mp\psi^\pm_{m+n}\\
&[G^\pm_m, \psi^\pm_n]_\pm = 0\\
&[G^\pm_m, \psi^\mp_n]_\pm = \pm(1\pm\tfrac{Q}{2H})(n-(2H+1)m)\varphi_{m+n} + 2\chi'_{m+n}\\
&[G^\pm_m, \chi'_n]_\pm = \tfrac{1}{2}(1\pm\tfrac{Q}{2H})(n-2Hm)\psi^\pm_{m+n}\\
&[J_m, \varphi_n] = Q\varphi_{m+n}\\
&[J_m, \psi^\pm_n] = (Q\pm 1)\psi^\pm_{m+n}\\
&[J_m, \chi'_n] = -H(1+\tfrac{Q^2}{4H^2})m\varphi_{m+n} + Q\chi'_{m+n}.
\end{aligned} \qquad (4.56)$$

Kennt man die erste Komponente $\varphi(z)$ eines Superfeldes, so kann man die höheren Komponenten aus Kommutatoren mit den Super-Virasoro-Generatoren wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned}
\psi^\pm(z) &= \mp[G^\pm, \varphi(z)]_\pm \qquad (4.57)\\
\chi'(z) &= \frac{1}{2}[G^+[G^-, \varphi(z)]_\pm]_\mp - \frac{1}{2}\left(1+\tfrac{Q}{2H}\right)[L_1, \varphi(z)].
\end{aligned}$$

Diese Beziehungen werden wir uns im Abschnitt über NOPe zunutze machen. Die Relationen (4.52) erlauben es uns nun, die Struktur der Zwei- und Dreipunkt- Funktionen superquasiprimärer Felder zu analysieren, wobei wir uns auf die, allerdings nicht vollständigen Untersuchungen, in Refererenz [71,88] stützen.

4.2.2. Zwei- und Dreipunkt-Funktionen

Das Vakuum $|0\rangle$ sei $OSP(2|2)$ invariant, d.h. daß alle Generatoren M^j der Super-Möbius-Transformationen angewandt auf das Vakuum verschwinden. Daraus ergeben sich folgende acht Bedingungen an die N-Punkt-Funktionen:

$$\langle 0|[M^j, \Phi^1(Z_1)\Phi^2(Z_2)\ldots\Phi^N(Z_N)]|0\rangle = 0, \qquad M^j \in OSP(2|2). \qquad (4.58)$$

Sind die Felder $\Phi^i(Z)$ superquasiprimär, so liefert der Kommutator in (4.58) unter Benutzung der Relationen (4.52) einen Satz von Super-Differentialgleichungen für die N-Punkt Funktion. Die Differentialgleichungen für die Translationen $M^j \in \{L_1, G^{\pm}_{\frac{1}{2}}\}$ implizieren, daß die N-Punkt Funktion nur von den Superabständen (4.11-4.12) abhängen darf. Es verbleibt dann nur noch, die drei Differentialgleichungen für $M^j \in \{L_0, L_{-1}, J_0\}$ zu lösen, da aufgrund der Super-Virasoro-Algebra diejenigen, welche $G^{\pm}_{-1/2}$ involvieren, automatisch erfüllt sind.
Wie in [88] ausführlich dargelegt wird, lautet die Lösung für die Zweipunkt Funktion:

$$\langle \Phi^{Q_1}_{H_1}(Z_1)\Phi^{Q_2}_{H_2}(Z_2)\rangle = \frac{D_{12}}{Z_{12}^{2H_1}}\left(1 - \frac{Q_1}{2}\frac{\theta^+_{12}\theta^-_{12}}{Z_{12}}\right)\delta_{H_1,H_2}\delta_{Q_1,-Q_2}, \tag{4.59}$$

d.h. sie ist nur dann von Null verschieden, wenn die beiden Felder gleiche konforme Dimension und entgegengesetzte $u(1)$ Ladung haben. Entwickelt man (4.59) in Komponenten, so sieht man, daß für $H_1 = \pm Q_1/2$ die beiden Felder $\psi^{\pm}_1$ und χ'_1 Nullfelder sind, d.h. das Feld Φ ist (anti)-chiral.
Die allgemeine Form der Dreipunkt-Funktion ist wesentlich komplizierter. Die sieben Super-Möbius-Transformationen ohne die J_0 Rotation (4.54) erlauben es, sieben der neun involvierten Koordinaten $\{z_i, \theta^+_i, \theta^-_i : i = 1,2,3\}$ festzulegen. Somit verbleiben noch zwei invariante geladene Ausdrücke:

$$\Theta^+ = \frac{1}{(Z_{12}Z_{23}Z_{31})^{\frac{1}{2}}}\Big\{Z_{12}\theta^+_3 + Z_{23}\theta^+_1 + Z_{31}\theta^+_2 + \frac{1}{6}(\theta^+_1\theta^-_{23}(\theta^+_2+\theta^+_3) + \theta^+_2\theta^-_{31}(\theta^+_3+\theta^+_1)$$
$$+ \theta^+_3\theta^-_{12}(\theta^+_1+\theta^+_2))\Big\} \tag{4.60}$$

und

$$\Theta^- = \frac{1}{(Z_{12}Z_{23}Z_{31})^{\frac{1}{2}}}\Big\{Z_{12}\theta^-_3 + Z_{23}\theta^-_1 + Z_{31}\theta^-_2 + \frac{1}{6}(\theta^-_1\theta^+_{23}(\theta^-_2+\theta^-_3) + \theta^-_2\theta^+_{31}(\theta^-_3+\theta^-_1)$$
$$+ \theta^-_3\theta^+_{12}(\theta^-_1+\theta^-_2))\Big\}, \tag{4.61}$$

mit der Eigenschaft $(\Theta^{\pm})^2 = 0$. Ein analoges Abzählargument wie oben liefert, daß es neben der Konstanten noch eine weitere $OSP(2|2)$ Invariante aus drei Superkoordinaten gibt, nämlich genau $\Theta^+\Theta^-$.
Für die 3-Punkt Funktion müssen demnach drei Fälle unterschieden werden. Obwohl für die späteren Rechnungen eine andere Form angemessener ist, geben wir zunächst die permutationsinvariante Form an.

- $\sum Q_i = 0$

$$\langle \Phi^{Q_1}_{H_1}(Z_1)\Phi^{Q_2}_{H_2}(Z_2)\Phi^{Q_3}_{H_3}(Z_3)\rangle = \frac{A_{123} + B_{123}\Theta^+\Theta^-}{Z_{12}^{H_1+H_2-H_3}Z_{23}^{H_2+H_3-H_1}Z_{31}^{H_3+H_1-H_2}}\left[1 + \frac{(Q_2-Q_1)}{6}\frac{\theta^+_{12}\theta^-_{12}}{Z_{12}}\right]$$
$$\left[1 + \frac{(Q_3-Q_2)}{6}\frac{\theta^+_{23}\theta^-_{23}}{Z_{23}}\right]\left[1 + \frac{(Q_1-Q_3)}{6}\frac{\theta^+_{31}\theta^-_{31}}{Z_{31}}\right], \tag{4.62}$$

wobei A_{123} und B_{123} zwei unabhängige Strukturkonstanten bezeichnet †.

- $\sum Q_i = 1$

$$\langle \Phi^{Q_1}_{H_1}(Z_1)\Phi^{Q_2}_{H_2}(Z_2)\Phi^{Q_3}_{H_3}(Z_3)\rangle = \frac{C_{123}\Theta^+}{Z_{12}^{H_1+H_2-H_3}\, Z_{23}^{H_2+H_3-H_1}\, Z_{31}^{H_3+H_1-H_2}} \left[1+\frac{(Q_2-Q_1)}{6}\frac{\theta^+_{12}\theta^-_{12}}{Z_{12}}\right] \left[1+\frac{(Q_3-Q_2)}{6}\frac{\theta^+_{23}\theta^-_{23}}{Z_{23}}\right]\left[1+\frac{(Q_1-Q_3)}{6}\frac{\theta^+_{31}\theta^-_{31}}{Z_{31}}\right], \qquad (4.63)$$

In diesem wie auch im folgenden Fall tritt also nur eine Kopplungskonstante C_{ijk} auf.

- $\sum Q_i = -1$

$$\langle \Phi^{Q_1}_{H_1}(Z_1)\Phi^{Q_2}_{H_2}(Z_2)\Phi^{Q_3}_{H_3}(Z_3)\rangle = \frac{D_{123}\Theta^-}{Z_{12}^{H_1+H_2-H_3}\, Z_{23}^{H_2+H_3-H_1}\, Z_{31}^{H_3+H_1-H_2}} \left[1+\frac{(Q_2-Q_1)}{6}\frac{\theta^+_{12}\theta^-_{12}}{Z_{12}}\right] \left[1+\frac{(Q_3-Q_2)}{6}\frac{\theta^+_{23}\theta^-_{23}}{Z_{23}}\right]\left[1+\frac{(Q_1-Q_3)}{6}\frac{\theta^+_{31}\theta^-_{31}}{Z_{31}}\right], \qquad (4.64)$$

Die Ladungserhaltung erlaubt demnach für drei superquasiprimäre Felder nur dann eine nichtverschwindende Kopplung, wenn die Summe der drei involvierten Ladungen dem Betrage nach kleiner als zwei ist. Um aus den Zwei- und Dreipunkt-Funktionen die OPE abzuleiten, ist es zweckmässiger, folgende nicht permutationsinvariante Form zu verwenden. Nur die darin definierten Strukturkonstanten werden auch in den folgenden Kapiteln verwendet.

- $Q_i + Q_j = Q_k$

$$\begin{aligned}\langle \Phi^{-Q_k}_{H_k}(Z_1)\,\Phi^{Q_i}_{H_i}(Z_2)\,\Phi^{Q_j}_{H_j}(Z_3)\rangle = {} & C_{ijk}2\Big[(1-\tfrac{Q_i}{2}\tfrac{\theta^+_{23}\theta^-_{23}}{Z_{23}})(1+\tfrac{Q_k}{2}\tfrac{\theta^+_{13}\theta^-_{13}}{Z_{13}})\frac{1}{Z_{12}^{\gamma_1}\,Z_{23}^{\gamma_2}\,Z_{13}^{\gamma_3}}\Big] \\ & + C_{ijk}\alpha_{ijk}\gamma_1\Big[(\tfrac{\theta^+_{23}}{Z_{23}}-\tfrac{\theta^+_{13}}{Z_{13}})(\tfrac{\theta^-_{23}}{Z_{23}}-\tfrac{\theta^-_{13}}{Z_{13}})\frac{1}{Z_{12}^{\gamma_1+1}\,Z_{23}^{\gamma_2-1}\,Z_{13}^{\gamma_3-1}} \\ & - \tfrac{\theta^+_{23}\theta^-_{23}\theta^+_{13}\theta^-_{13}}{2}(\tfrac{Q_i}{Z_{13}}-\tfrac{Q_k}{Z_{13}})\frac{1}{Z_{12}^{\gamma_1+1}\,Z_{23}^{\gamma_2}\,Z_{13}^{\gamma_3}}\Big] \qquad (4.65)\end{aligned}$$

mit $\gamma_1 = H_k + H_i - H_j$, $\gamma_2 = H_i + H_j - H_k$ und $\gamma_3 = H_k + H_j - H_i$. C_{ijk} und α_{ijk} sind wieder zwei unabhängige Strukturkonstanten.

- $Q_i + Q_j = Q_k + 1$

$$\langle \Phi^{-Q_k}_{H_k}(Z_1)\,\Phi^{Q_i}_{H_i}(Z_2)\,\Phi^{Q_j}_{H_j}(Z_3)\rangle = \frac{C_{ijk}}{Z_{12}^{\gamma_1+\frac12}\,Z_{23}^{\gamma_2-\frac12}\,Z_{13}^{\gamma_3-\frac12}}\left[(\tfrac{\theta^+_{23}}{Z_{23}}-\tfrac{\theta^+_{13}}{Z_{13}})+\tfrac{(Q_i\theta^+_{13}\theta^+_{23}\theta^-_{23}+Q_k\theta^+_{23}\theta^+_{13}\theta^-_{13})}{2Z_{23}\,Z_{13}}\right] \qquad (4.66)$$

- $Q_i + Q_j = Q_k - 1$

$$\langle \Phi^{-Q_k}_{H_k}(Z_1)\,\Phi^{Q_i}_{H_i}(Z_2)\,\Phi^{Q_j}_{H_j}(Z_3)\rangle = \frac{C_{ijk}}{Z_{12}^{\gamma_1+\frac12}\,Z_{23}^{\gamma_2-\frac12}\,Z_{13}^{\gamma_3-\frac12}}\left[(\tfrac{\theta^-_{23}}{Z_{23}}-\tfrac{\theta^-_{13}}{Z_{13}})+\tfrac{(Q_i\theta^-_{13}\theta^+_{23}\theta^-_{23}+Q_k\theta^-_{23}\theta^+_{13}\theta^-_{13})}{2Z_{23}\,Z_{13}}\right] \qquad (4.67)$$

† Der zweite Term in (4.62) wurde in Referenz [88] vergessen

Ausgehend von diesen Dreipunkt-Funktionen und der Zweipunkt-Funktion (4.59) werden wir im nächsten Abschnitt die OPE zweier superquasiprimärer Felder bestimmen.

4.2.3. Die OPE superquasiprimärer Felder

Zur Bestimmung der OPE gehen wir wie folgt vor. Zunächst schreiben wir für die strukturelle Form der OPE den allgemeinsten Ansatz hin, welcher noch die Kopplungen an die derivativen Felder als freie Parameter enthält. Diese lassen sich dann unter Ausnutzung der Kenntnis der allgemeinen Dreipunkt-Funktion bestimmen.
Die OPE hat in dem ersten Fall für die Kopplung eines Feldes $\Phi_{H_k}^{Q_k}$ folgende Form:

- $Q_i + Q_j = Q_k$

$$\begin{aligned}\Phi_{H_i}^{Q_i}(Z_2)\,\Phi_{H_j}^{Q_j}(Z_3) = &\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{ij}^k A_{ijk}^n}{Z_{23}^{\gamma_2-n}}\partial_z^n\Phi_{H_k}^{Q_k}(Z_3) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{ij}^k B_{ijk}^n}{Z_{23}^{\gamma_2-n}}[D^-,D^+]\partial_z^{n-1}\Phi_{H_k}^{Q_k}(Z_3)\\ &+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{ij}^k C_{ijk}^n\theta_{23}^+}{Z_{23}^{\gamma_2-n}}D^+\partial_z^n\Phi_{H_k}^{Q_k}(Z_3) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{ij}^k D_{ijk}^n\theta_{23}^-}{Z_{23}^{\gamma_2-n}}D^-\partial_z^n\Phi_{H_k}^{Q_k}(Z_3)\\ &+\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{C_{ij}^k E_{ijk}^n\theta_{23}^+\theta_{23}^-}{Z_{23}^{\gamma_2-n}}\partial_z^{n+1}\Phi_{H_k}^{Q_k}(Z_3) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{ij}^k F_{ijk}^n\theta_{23}^+\theta_{23}^-}{Z_{23}^{\gamma_2-n}}[D^-,D^+]\partial_z^n\Phi_{H_k}^{Q_k}(Z_3).\end{aligned} \tag{4.68}$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten $\{A,B,C,D,E,F\}$ berechnen wir die Dreipunkt-Funktion

$$\langle\Phi_{H_k}^{-Q_k}(Z_1)\,\Phi_{H_i}^{Q_i}(Z_2)\,\Phi_{H_j}^{Q_j}(Z_3)\rangle \tag{4.69}$$

mit Hilfe der OPE (4.68) und der Zweipunkt-Funktion (4.59). Dadurch erhält man eine rationale Funktion in den Variablen $\{Z_{23}, Z_{13}, \theta_{23}^+, \theta_{13}^+, \theta_{23}^-, \theta_{13}^-\}$, welche nach geeigneter Super-Möbius-Transformation mit der allgemeinen Form (4.65) überstimmen muß. Wählt man $z_1=\infty$, $z_2=1$, $z_3=0$, $\theta_{23}^+=0$ und $\theta_{23}^-=0$, so erhält man zwei lineare Gleichungen, aus denen sich A_{ijk}^n und B_{ijk}^n bestimmen lassen. Die Wahl $\theta_{13}^+=0$ und $\theta_{13}^-=0$ ermöglicht die Bestimmung von E_{ijk}^n und F_{ijk}^n und zur Bestimmung von C_{ijk}^n und D_{ijk}^n haben wir analog die Dreipunkt-Funktion

$$\langle D^{\pm}\Phi_{H_k}^{-Q_k}(Z_1)\,\Phi_{H_i}^{Q_i}(Z_2)\,\Phi_{H_j}^{Q_j}(Z_3)\rangle \tag{4.70}$$

betrachtet und wieder $\theta_{13}^+=0$ und $\theta_{13}^-=0$ gewählt. Diese im Detail recht langwierige Rechnung liefert für die Koeffizienten schließlich die folgenden Ergebnisse:

$$A_{ijk}^n = \frac{2}{n!}\binom{2H_k+n}{n}^{-1}\binom{\gamma_1+n-1}{n}\left(1+\frac{n}{2}\frac{\frac{1}{2}\alpha Q_k - H_k}{(\frac{1}{2}Q_k)^2-H_k^2}\right)$$

$$B_{ijk}^n = \frac{1}{(n-1)!}\binom{2H_k+n}{n}^{-1}\binom{\gamma_1+n-1}{n}\left(\frac{\frac{1}{2}Q_k-\alpha H_k}{(\frac{1}{2}Q_k)^2-H_k^2}\right)$$

$$C_{ijk}^n = \frac{2H_k}{n!}\binom{2H_k+n}{n+1}^{-1}\binom{\gamma_1+n}{n+1}\left(\frac{1+\alpha}{\frac{1}{2}Q_k+H_k}\right)$$

$$D^n_{ijk} = -\frac{2H_k}{n!}\binom{2H_k+n}{n+1}^{-1}\binom{\gamma_1+n}{n+1}\left(\frac{1-\alpha}{\frac{1}{2}Q_k - H_k}\right)$$

$$\begin{aligned} E^n_{ijk} = {} & \frac{1}{(n+1)!}\binom{2H_k+n+1}{n+1}^{-1}\left\{\binom{\gamma_1+n+1}{n+2}\frac{(n+2)}{2}\left[2\alpha + (n+1)\left(\frac{\frac{1}{2}Q_k - \alpha H_k}{(\frac{1}{2}Q_k)^2 - H_k^2}\right)\right]\right. \\ & \left. - Q_i\binom{\gamma_1+n}{n+1}\left[1 + \frac{(n+1)}{2}\left(\frac{\frac{1}{2}\alpha Q_k - H_k}{(\frac{1}{2}Q_k)^2 - H_k^2}\right)\right]\right\} \\ F^n_{ijk} = {} & -\frac{Q_i}{2n!}\binom{2H_k+n+1}{n+1}^{-1}\binom{\gamma_1+n}{n+1}\left(\frac{\frac{1}{2}Q_k - \alpha H_k}{(\frac{1}{2}Q_k)^2 - H_k^2}\right) \\ & + \frac{H_k}{n!}\binom{2H_k+n+1}{n+2}^{-1}\binom{\gamma_1+n+1}{n+2}\left(\frac{\frac{1}{2}\alpha Q_k - H_k}{(\frac{1}{2}Q_k)^2 - H_k^2}\right) \end{aligned} \tag{4.71}$$

Weiterhin sind die Kopplungskonstanten C^k_{ij} aus der OPE mit den Kopplungskonstanten C_{ijk}, D_{ij} aus den Zwei- und Dreipunkt-Funktionen durch das lineare Gleichungssystem

$$C^l_{ij} D_{lk} = C_{ijk} \tag{4.72}$$

verbunden, wobei über alle Felder gleicher konformer Dimension summiert wird. Die Konstante α ist das α_{ijk} aus der Dreipunkt-Funktion (4.65). Für die anderen beiden Fälle erhält man nach analoger Prozedur:

- $Q_i + Q_j = Q_k + 1$

$$\begin{aligned} \Phi^{Q_i}_{H_i}(Z_2)\,\Phi^{Q_j}_{H_j}(Z_3) = {} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^k_{ij} A^n_{ijk} \theta^+_{23}}{Z_{23}^{\gamma_2 - n + 1/2}} \partial^n_z \Phi^{Q_k}_{H_k}(Z_3) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^k_{ij} B^n_{ijk}}{Z_{23}^{\gamma_2 - n + 1/2}} D^- \partial^{n-1}_z \Phi^{Q_k}_{H_k}(Z_3) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^k_{ij} C^n_{ijk} \theta^+_{23}}{Z_{23}^{\gamma_2 - n + 1/2}} [D^-, D^+] \partial^{n-1}_z \Phi^{Q_k}_{H_k}(Z_3) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^k_{ij} D^n_{ijk} \theta^+_{23}\theta^-_{23}}{Z_{23}^{\gamma_2 - n + 1/2}} D^- \partial^n_z \Phi^{Q_k}_{H_k}(Z_3) \end{aligned} \tag{4.73}$$

mit

$$\begin{aligned} A^n_{ijk} &= \frac{1}{n!}\binom{2H_k+n}{n}^{-1}\binom{\gamma_1+n-1/2}{n}\left(1 + \frac{n}{2(H_k - \frac{1}{2}Q_k)}\right) \\ B^n_{ijk} &= \frac{1}{(n-1)!}\binom{2H_k+n-1}{n-1}^{-1}\binom{\gamma_1+n-3/2}{n-1}\frac{1}{(H_k - \frac{1}{2}Q_k)} \\ C^n_{ijk} &= -\frac{1}{(n-1)!}\binom{2H_k+n}{n}^{-1}\binom{\gamma_1+n-1/2}{n}\frac{1}{2(H_k - \frac{1}{2}Q_k)} \\ D^n_{ijk} &= -\frac{1}{n!}\binom{2H_k+n}{n}^{-1}\frac{1}{(H_k - \frac{1}{2}Q_k)}\left[\frac{Q_i}{2}\binom{\gamma_1+n-1/2}{n} - \frac{(n+1)}{2}\binom{\gamma_1+n+1/2}{n+1}\right]. \end{aligned} \tag{4.74}$$

• $Q_i + Q_j = Q_k - 1$

$$\begin{aligned}\Phi^{Q_i}_{H_i}(Z_2)\,\Phi^{Q_j}_{H_j}(Z_3) = &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^k_{ij}\,A^n_{ij\,k}\,\theta^-_{23}}{Z_{23}^{\gamma_2-n+1/2}} \partial^n_z \Phi^{Q_k}_{H_k}(Z_3) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^k_{ij}\,B^n_{ij\,k}}{Z_{23}^{\gamma_2-n+1/2}} D^+ \partial^{n-1}_z \Phi^{Q_k}_{H_k}(Z_3) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C^k_{ij}\,C^n_{ij\,k}\,\theta^-_{23}}{Z_{23}^{\gamma_2-n+1/2}} [D^-, D^+] \partial^{n-1}_z \Phi^{Q_k}_{H_k}(Z_3) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^k_{ij}\,D^n_{ij\,k}\,\theta^+_{23}\theta^-_{23}}{Z_{23}^{\gamma_2-n+1/2}} D^+ \partial^n_z \Phi^{Q_k}_{H_k}(Z_3)\end{aligned} \tag{4.75}$$

mit

$$\begin{aligned}
A^n_{ijk} &= \frac{1}{n!}\binom{2H_k+n}{n}^{-1}\binom{\gamma_1+n-1/2}{n}\left(1+\frac{n}{2(H_k+\frac{1}{2}Q_k)}\right) \\
B^n_{ijk} &= \frac{1}{(n-1)!}\binom{2H_k+n-1}{n-1}^{-1}\binom{\gamma_1+n-3/2}{n-1}\frac{1}{(H_k+\frac{1}{2}Q_k)} \\
C^n_{ijk} &= \frac{1}{(n-1)!}\binom{2H_k+n}{n}^{-1}\binom{\gamma_1+n-1/2}{n}\frac{1}{2(H_k+\frac{1}{2}Q_k)} \\
D^n_{ijk} &= -\frac{1}{n!}\binom{2H_k+n}{n}^{-1}\frac{1}{(H_k+\frac{1}{2}Q_k)}\left[\frac{Q_i}{2}\binom{\gamma_1+n-1/2}{n}+\frac{(n+1)}{2}\binom{\gamma_1+n+1/2}{n+1}\right].
\end{aligned} \tag{4.76}$$

Die Entwicklung dieser Formeln nach Komponenten gestattet es, alle 64 Kopplungen der Komponentenfelder untereinander durch nur eine bzw. zwei Superkopplungen auszudrücken. Dies werden wir noch bei der Anwendung dieser Formeln auf die Konstruktion von $\mathcal{SW}$-Algebren ausnutzen. Als erste Anwendung schreiben wir die Definition von superprimären Feldern in der OPE Version hin. Mit $C^{\Phi}_{\mathcal{L}\Phi} = Q/2$ und $C^{\Phi}_{\mathcal{L}\Phi}\alpha = H$ erhält man:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(Z_2)\,\Phi^Q_H(Z_3) = &\frac{H\theta^+_{23}\theta^-_{23}}{Z^2_{23}}\Phi^Q_H(Z_3) + \frac{(\theta^+_{23}D^+ - \theta^-_{23}D^-)}{Z_{23}}\Phi^Q_H(Z_3) \\ &+ \frac{\theta^+_{23}\theta^-_{23}}{Z_{23}}\partial_z\Phi^Q_H(Z_3) + \frac{Q}{Z_{23}}\Phi^Q_H(Z_3) + reg..\end{aligned} \tag{4.77}$$

Im folgenden Abschnitt werden wir Super-NOPe einführen und exemplarisch zeigen, wie man deren superquasiprimäre Projektion berechnen kann.

4.2.4. Super-Normalgeordnete Produkte

Um die allgemeine Form der Super-OPE holomorpher superquasiprimärer Felder auch für die Konstruktion von $\mathcal{SW}$-Algebren anwenden zu können, bedarf es noch der Definition von Super-NOPen. Diese lassen sich analog zum $N = 0$ Fall aus dem regulären Teil

der OPE gewinnen. Die Berechnung von deren quasiprimärer Projektion ist allerdings erheblich umfangreicher, und wir begnügen uns hier mit einem iterativen Verfahren, um zumindest die erste Komponente eines quasiprimären NOPes zu bestimmen. Die höheren Komponenten lassen sich dann unter Benutzung von (4.57) bestimmen. Wir benutzen im folgenden für *Super-NOPe* die Bezeichnungen $N_s(\Phi_j\Phi_i)$ und $\mathcal{N}_s(\Phi_j\Phi_i)$. Lassen wir den Index fort, so sind normale $N=0$ NOPe gemeint.
Den regulären Teil der OPE zweier quasiprimärer Felder schreiben wir wie folgt:

$$\begin{aligned}\Phi_i(Z_1)\Phi_j(Z_2) &= \text{sing. Terme}\\ &+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z_{12}^n}{n!}N_s(\Phi_j\partial_z^n\Phi_i)(Z_2)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta_{12}^+Z_{12}^n}{n!}N_s(\Phi_jD^+\partial_z^n\Phi_i)(Z_2)\\ &+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta_{12}^-Z_{12}^n}{n!}N_s(\Phi_jD^-\partial_z^n\Phi_i)(Z_2)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta_{12}^+\theta_{12}^-Z_{12}^n}{2n!}N_s(\Phi_j[D^-,D^+]\partial_z^n\Phi_i)(Z_2).\end{aligned}\tag{4.78}$$

Die einzelnen Komponenten dieser Super-NOPe sind NOPe der Komponenten-Felder und können durch Entwicklung nach den Graßmann-Koordinaten aus (4.78) gewonnen werden. Durch Anwenden der Ableitungen ∂_2, $D_2^{\pm}$ und $[D_2^-,D_2^+]$ auf (4.78) folgen die Regeln:

$$\begin{aligned}\partial N_s(\Phi_j\Phi_i) &= N_s(\Phi_j\partial\Phi_i)+N_s(\partial\Phi_j\Phi_i)\\ D^{\pm}N_s(\Phi_j\Phi_i) &= N_s(\Phi_jD^{\pm}\Phi_i)+(-1)^{2\Delta_i}N_s(D^{\pm}\Phi_j\Phi_i)\\ [D^-,D^+]N_s(\Phi_j\Phi_i) &= N_s(\Phi_j[D^-,D^+]\Phi_i)-N_s([D^-,D^+]\Phi_j\Phi_i).\end{aligned}\tag{4.79}$$

Die so definierten NOPe sind allerdings im allgemeinen nicht superquasiprimär, weswegen wir für jedes NOP $N_s(..)$ dessen quasiprimäre Projektion $\mathcal{N}_s(..)$ derart einführen, daß es dieselben Kopplungskonstanten C_{ij}^k und α_{ijk} hat wie das ursprüngliche NOP. Allerdings treten in der $OSP(2|2)$ invarianten OPE bei dieser Ordnung auch noch Korrekturen von Termen niedriger Ordnung auf, welche zusammen mit dem quasiprimären Feld genau das NOP $N_s(..)$ ergeben müssen. Wir erläutern dies am besten an einigen Beispielen.

- $\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})$

Der reguläre Teil der Super-Virasoro-Algebra (4.15) fängt wie folgt an:

$$\mathcal{L}(Z_1)\mathcal{L}(Z_2)=\text{sing. Terme}+\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})(Z_2)+\frac{1}{3}[D^-,D^+]\mathcal{L}(Z_2)+\ldots,\tag{4.80}$$

wobei der Koeffizient 1/3 aus der allgemeinen Form (4.68),(4.71) der OPE bestimmt wurde. Damit liest man die superquasiprimäre Korrektur direkt ab:

$$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})=N_s(\mathcal{L}\mathcal{L})-\frac{1}{3}[D^-,D^+]\mathcal{L}.\tag{4.81}$$

Die niedrigste $N=0$ quasiprimäre Komponente lautet damit

$$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})_1=\mathcal{N}(JJ)-\frac{2}{3}L\tag{4.82}$$

und ist insbesondere orthogonal zu L. Man beachte, daß für Super-NOPe höherer Ordnung auch Korrekturen von vorher bereits definierten superquasiprimären Feldern auftreten. Da wir nun aber die $N=0$ quasiprimären NOPe bei den konkreten Rechnungen bereits vollständig im Griff haben, sind wir damit zufrieden, analog zu (4.82) die erste Komponente der Super-NOPe durch diese $N=0$ quasiprimären NOPe auszudrücken.

• $\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L})$

Die Fortsetzung der OPE (4.80) lautet

$$\mathcal{L}(Z_1)\mathcal{L}(Z_2) = \ldots + \theta_{12}^+\theta_{12}^-\bigg(\frac{1}{2}\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L})(Z_2) + \frac{3}{20}[D^-,D^+]\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})(Z_2) + O(\partial)\bigg) + \ldots, \tag{4.83}$$

woraus folgt

$$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L}) = N_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L}) - \frac{3}{10}[D^-,D^+]\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L}) + O(\partial). \tag{4.84}$$

Durch Anwenden des $SU(1,1)$-Projektors erhält man schließlich für die erste Komponente das exakte Resultat:

$$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L})_1 = 2\mathcal{N}(JL) - \frac{3}{5}\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})_4', \tag{4.85}$$

wobei Φ_i die i-te Komponente eines Superfeldes bezeichnet.

• $\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^+\partial\mathcal{L})$

$$\mathcal{L}(Z_1)\mathcal{L}(Z_2) = \ldots + \theta_{12}^+\left(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^+\partial\mathcal{L})(Z_2) + \frac{1}{6}D^+\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L})(Z_2) + O(\partial)\right) + \ldots \tag{4.86}$$

Für die erste Komponente ergibt sich damit:

$$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^+\partial\mathcal{L})_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{N}(J\partial G^-) - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{6}\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L})_2. \tag{4.87}$$

Auf diese Weise läßt sich nun sukzessive der gesamte Turm von NOPen, die nur das Super-Virasoro-Feld enthalten, aufbauen.

Durch Anwenden des $OSP(2|2)$ Projektors auf (4.79) erhält man die folgenden Symmetrieeigenschaften der superquasiprimären NOPe:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_s(\Phi_j\partial\Phi_i) &= -\mathcal{N}_s(\partial\Phi_j\Phi_i)\\ \mathcal{N}_s(\Phi_j D^\pm\Phi_i) &= (-1)^{2H_i+1}\mathcal{N}_s(D^\pm\Phi_j\Phi_i)\\ \mathcal{N}_s(\Phi_j[D^-,D^+]\Phi_i) &= \mathcal{N}_s([D^-,D^+]\Phi_j\Phi_i).\end{aligned} \tag{4.88}$$

Weiterhin gilt

$$\mathcal{N}_s(\Phi_j\Phi_i) = \epsilon\mathcal{N}_s(\Phi_i\Phi_j), \tag{4.89}$$

wobei $\epsilon = -1$ für zwei fermionische Felder und andernfalls $\epsilon = 1$ ist. Die beiden Eigenschaften (4.88),(4.89) implizieren insbesondere

$$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^{\pm}\partial^{2n}\mathcal{L}) = 0. \tag{4.90}$$

Nach diesem recht technischen Kapitel können wir nun direkt auf die Konstruktion von $\mathcal{SW}$-Algebren zusteuern.

4.3. Konstruktion von $\mathcal{SW}(1,H)$ Algebren

Aufgrund des $u(1)$ Stromes in der $N = 2$ Super-Virasoro-Algebra tragen die Generatoren einer $\mathcal{SW}$-Algebra im allgemeinen neben ihrer superkonformen Dimension H noch eine Ladung Q, wobei wegen (4.59) zu jedem Feld mit Ladung $+Q$ auch das adjungierte Feld mit Ladung $-Q$ in der $\mathcal{SW}$-Algebra enthalten sein muß. Wir bezeichen daher die Erweiterung der $N = 2$ Super-Virasoro-Algebra durch primäre Felder $\Phi_{H_1}^{\pm Q_1} \ldots \Phi_{H_n}^{\pm Q_n}$ mit $\mathcal{SW}(1, H_1^{\pm Q_1}, \ldots, H_n^{\pm Q_n})$, wobei wir den oberen Index für die Ladung fortlassen, falls die Felder verschwindende Ladung haben.
Vor unseren Rechnungen war lediglich eine nichtlineare $N = 2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebren korrekt berechnet worden, die $\mathcal{SW}(1,2)$[80]. Die in Referenz [59] als generisch existierend vorgestellte $\mathcal{SW}(1, 3/2^{\pm Q})$ ist nach unseren Berechnungen lediglich für einige isolierte Werte von c und Q konsistent, so daß davon auszugehen ist, daß in [59] einige Bedingungen vergessen worden sind. Die $\mathcal{SW}(1,2)$ [80,62,2] war schon vor ihrer Berechnung vorhergesagt worden und zwar als erste einer ganzen Serie von Algebren, die sich aus der $N = 2$ superymmetrischen Verallgemeinerung der Drinfeld-Sokolov-Reduktion ergeben [60]. Die Einbettungen von $OSP(2|2)$ in die Super-Lie-Algebren $A(n, n-1)$ liefern nach Reduktion eine Serie von generischen $\mathcal{SW}(1, 2, \ldots, n-1)$ Algebren, welche zudem dieselben unitären Serien wie die Symmetrie-Algebren der supersymmetrischen $\mathrm{CP}(n)$ Kazama-Suzuki-Modelle haben und im folgenden auch als solche angesehen werden [61]. Nach Erläuterung des verwendeten Algorithmus' werden wir in diesem Kapitel die ersten vier nichtlinearen $\mathcal{SW}$-Algebren mit zwei Generatoren berechnen, unter denen wir allerdings (leider) keine neuen generischen Algebren finden werden. Jedoch weisen die gefundenen exotischen Algebren eine völlig andere Struktur auf als im $N = 0$ und $N = 1$ Fall, deren Erhellung das Thema von Kapitel 4.4. ist.

4.3.1. Der Algorithmus

Das konkrete Vorgehen bei der Konstruktion von $\mathcal{SW}$-Algebren stellt einen Kompromiß dar zwischen der in der OPE-Formulierung vorliegenden kovarianten Struktur von holomorphen $N = 2$ SKFTen und den auf der Modenentwicklung der Komponenten-Felder basierenden $Mathematica^{TM}$ Programmen zur Berechnung von Strukturkonstanten. Der Algorithmus läßt sich in drei Teile zerlegen:

- Zunächst schreibt man den allgemeinsten mit der $N = 2$ supersymmetrischen Struktur verträglichen Ansatz für die OPE der Generatoren der $\mathcal{SW}$-Algebra hin. Die Hauptarbeit besteht dabei darin, alle auftretenden NOPe der Generatoren nach dem in 4.2.4.

vorgestellten Verfahren zu berechnen. In der OPE treten zum einen Strukturkonstanten zwischen den Generatoren selbst auf und zum anderen Strukturkonstanten, die NOPe der Generatoren enthalten. Letztere können nun durch die ersteren ausgedrückt werden.

- Zu diesem Zweck entwickelt man die OPE in Komponenten, wobei sich alle Strukturkonstanten der Komponenten durch die ein bzw. zwei Superstrukturkonstanten ausdrücken lassen. Nun berechnet man die einfachsten ein bzw. zwei Strukturkonstanten der Komponenten, woraus man direkt auf die Superstrukturkonstanten schließen kann und damit insbesondere alle Kopplungen der Komponenten kennt. Die Ausnutzung der Kovarianz an diesem Punkt spart eine Menge Arbeit, da man sonst alle 64 Kopplungen der Komponenten separat ausrechnen müßte, was einer Konstruktion einer $N = 0$ $\mathcal{W}$-Algebra mit zwölf Generatoren gleichkäme.
- Hat man alle Strukturkonstanten berechnet, so müssen als letztes noch die Konsistenzgleichungen, die sich aus der Assoziativität der Super-Vierpunkt-Funktion oder äquivalent aus den Jacobi-Identitäten der Komponenten-Felder ergeben, ausgewertet werden. Da aus den Berechunugen des zweiten Teils die Strukturkonstanten der Komponenten bereits vorliegen, haben wir uns dafür entschieden, Jacobi-Identitäten zu prüfen. Die $OSP(2|2)$ Invarianz des Ansatzes stellt dabei sicher, daß Jacobi-Identitäten, die die Generatoren von $SVir_{N=2}(c)$ enthalten, automatisch erfüllt sind. Die verbleibenden Identitäten schränken die bis dahin noch freien Kopplungen der Generatoren unter sich weiter ein, so daß je nachdem generische oder exotische $\mathcal{SW}$-Algebren resultieren.

Als erstes Beispiel diskutieren wir ausführlich die $\mathcal{SW}(1, \frac{3}{2}^{\pm Q})$ Algebra.

4.3.2. $\mathcal{SW}(1, 3/2^{\pm Q})$ Algebra

Aufgrund der $u(1)$ Ladungserhaltung gilt

$$\Phi_{\frac{3}{2}}^{\pm Q} \Phi_{\frac{3}{2}}^{\pm Q} = 0. \tag{4.91}$$

Für generische Ladung Q treten in der OPE $\Phi_{\frac{3}{2}}^{Q} \circ \Phi_{\frac{3}{2}}^{-Q}$ nur die folgenden Felder mit Ladung $\{0, \pm 1\}$ aus dem Virasoro-Turm auf:

H	Q	NOPe $\mathcal{F}$
1	0	$\mathcal{L}$
2	0	$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})$
3	0	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})$
3	0	$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-, D^+]\mathcal{L})$

Tabelle 4.3

Nur für das dritte zweifach-geschachtelte NOP ist die erste Komponente noch nicht in 4.2.4. berechnet worden:

$$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})_1 = \mathcal{N}(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})_1 J) - \frac{2}{5}\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})'_4. \tag{4.92}$$

Mit diesen Feldern berechnen sich die Kac-Determinanten im Vakuum-Sektor zu:

H	$\det(D_H) \sim$
1	c
2	$c(c-1)$
3	$c^2(2c-3)(c+6)(c-1)$

Tabelle 4.4

Nach Berechnung der Kopplungen $C^{\mathcal{F}_1}_{\varphi^+\varphi^-}$, $C^{\mathcal{F}_1}_{\varphi^+\chi'^-}$ für alle NOPe $\mathcal{F}$ lassen sich die kovarianten Kopplungen C^k_{ij} und α_{ijk} bestimmen:

$$\begin{aligned}
C^{\mathcal{L}}_{\Phi^+\Phi^-} &= Q, \qquad\qquad \alpha = \frac{3}{Q} \\
C^{\mathcal{N}(\mathcal{L}\mathcal{L})}_{\Phi^+\Phi^-} &= \frac{3(Q^2-1)}{2(c-1)}, \qquad \alpha = \frac{8Q}{3(Q^2-1)} \\
C^{\mathcal{N}(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L})}_{\Phi^+\Phi^-}(3\alpha - Q) &= -\frac{(3c-2Q^2-4)(Q^2-9)}{(2c-3)(c+6)} \\
C^{\mathcal{N}(\mathcal{N}(\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})}_{\Phi^+\Phi^-}(3\alpha - Q) &= -\frac{3(2c(Q^2-1)+13Q^2-1)(Q^2-9)}{2(2c-3)(c+6)(c-1)}.
\end{aligned} \tag{4.93}$$

Unter Benutzung der allgemeinen Struktur (4.68), (4.71) der OPE superquasiprimärer Felder läßt sich die OPE dieser Algebra vor Berechung der Jacobi-Identitäten angeben:

$$\begin{aligned}
\Phi^{Q}_{\frac{3}{2}}(Z_1)\Phi^{-Q}_{\frac{3}{2}}(Z_2) = {} & \frac{2c}{3}\frac{1}{Z_{12}^3} + (3-Q^2)\frac{\theta^+_{12}\theta^-_{12}}{Z_{12}^3}\mathcal{L}(Z_2) + \frac{Q(19-3Q^2)}{2(c-1)}\frac{\theta^+_{12}\theta^-_{12}}{Z_{12}^2}\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})(Z_2) \\
& + 2Q\frac{1}{Z_{12}^2}\mathcal{L}(Z_2) + (Q+3)\frac{\theta^+_{12}}{Z_{12}^2}D^+\mathcal{L}(Z_2) + (Q-3)\frac{\theta^-_{12}}{Z_{12}^2}D^-\mathcal{L}(Z_2) \\
& + \frac{(6-Q^2)}{2}\frac{\theta^+_{12}\theta^-_{12}}{Z_{12}^2}\partial\mathcal{L}(Z_2) - \frac{Q}{6}\frac{\theta^+_{12}\theta^-_{12}}{Z_{12}^2}[D^-,D^+]\mathcal{L}(Z_2) \\
& + \frac{3(9-Q^2)(2c(Q^2-1)+13Q^2-1)}{2(2c-3)(c+6)(c-1)}\frac{\theta^+_{12}\theta^-_{12}}{Z_{12}}\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})(Z_2) \\
& + \frac{(9-Q^2)(3c-2Q^2-4)}{(2c-3)(c+6)}\frac{\theta^+_{12}\theta^-_{12}}{Z_{12}}\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L})(Z_2) \\
& + \frac{3(Q^2-1)}{(c-1)}\frac{1}{Z_{12}}\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})(Z_2) + \frac{(Q+3)(3Q-1)}{2(c-1)}\frac{\theta^+_{12}}{Z_{12}}D^+\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})(Z_2) \\
& + \frac{(Q-3)(3Q+1)}{2(c-1)}\frac{\theta^-_{12}}{Z_{12}}D^-\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})(Z_2) + \frac{3Q(9-Q^2)}{2(c-1)}\frac{\theta^+_{12}\theta^-_{12}}{Z_{12}}\partial\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})(Z_2)
\end{aligned} \tag{4.94}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{(Q^2-9)}{20(c-1)}\frac{\theta_{12}^+\theta_{12}^-}{Z_{12}}[D^-,D^+]\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})(Z_2)+Q\frac{1}{Z_{12}}\partial\mathcal{L}(Z_2)\\
&+\frac{1}{Z_{12}}[D^-,D^+]\mathcal{L}(Z_2)+\frac{2(Q+3)}{3}\frac{\theta_{12}^+}{Z_{12}}D^+\partial\mathcal{L}(Z_2)\\
&+\frac{2(Q-3)}{3}\frac{\theta_{12}^-}{Z_{12}}D^-\partial\mathcal{L}(Z_2)+\frac{(9-Q^2)}{6}\frac{\theta_{12}^+\theta_{12}^-}{Z_{12}}\partial^2\mathcal{L}(Z_2).
\end{aligned}
$$

Als nächstes sind die folgenden zwölf Jacobi-Identitäten auszuwerten, wobei aufgrund der $N=2$ Kovarianz sicherlich noch nicht alle Bedingungen unabhängig sind:

$$
\begin{array}{lll}
(\varphi^+\,\varphi^+\,\varphi^-\,\varphi^-) & (\varphi^+\,\varphi^+\,\chi'^-\,\chi'^-) & ((\psi^+)^+\,(\psi^-)^-\,\chi'^+\,\chi'^-)\\
(\varphi^+\,\varphi^+\,\varphi^-\,\chi'^-) & (\varphi^+\,\varphi^-\,\chi'^+\,\chi'^-) & ((\psi^+)^+\,(\psi^-)^+\,\chi'^-\,\chi'^-)\\
(\chi'^+\,\chi'^+\,\chi'^-\,\chi'^-) & (\varphi^+\,\varphi^+\,(\psi^+)^-\,(\psi^-)^-) & ((\psi^+)^+\,(\psi^-)^-\,(\psi^+)^+\,(\psi^-)^-)\\
(\varphi^+\,\chi'^+\,\chi'^-\,\chi'^-) & (\varphi^+\,\varphi^-\,(\psi^+)^+\,(\psi^-)^-) & ((\psi^+)^+\,(\psi^-)^+\,(\psi^+)^-\,(\psi^-)^-).
\end{array}
\tag{4.95}
$$

Dadurch werden schließlich die erlaubten Werte von c und Q auf die folgende endliche Menge reduziert:

Q	c
0	$9/4, 5/3, -3/2$
± 3	9
± 1	3

Tabelle 4.5

Im Gegensatz zu den $N=0$ und $N=1$ $\mathcal{W}$-Algebren mit zwei Generatoren, existieren demnach im $N=2$ Fall exotische $\mathcal{W}$-Algebren mit einer zentralen Ladung größer als drei. Die (anti)-chirale Algebra mit $c=9$ haben wir bereits im Zusammenhang mit der GSO-Projektion in vier-dimensionalen Super-String Kompaktifizierungen kennengelernt; sie ist genau die Erweiterung der Virasoro-Algebra durch den lokalen spektralen Fluß für $c=9$ SKFT. Wir kommen im nächsten Kapitel noch auf diese besondere Klasse von $\mathcal{SW}$-Algebren zurück.

In dem besonderen Fall $Q=\pm 1$ ist eine Selbstkopplung der Generatoren erlaubt, womit die Algebra dann folgende Struktur hat:

$$
\begin{aligned}
\Phi^{+1}\circ\Phi^{+1} &= [\Phi^{+1}]+[\Phi^{-1}]\\
\Phi^{-1}\circ\Phi^{-1} &= [\Phi^{+1}]+[\Phi^{-1}]\\
\Phi^{+1}\circ\Phi^{-1} &= [\mathcal{L}]+[\Phi^{+1}]+[\Phi^{-1}].
\end{aligned}
\tag{4.96}
$$

Die Algebra beinhaltet dann sechs weitere NOPe:

H	Q	NOPe $\mathcal{F}$
5/2	+1	$\mathcal{N}_s(\Phi^{+1}\mathcal{L})$
5/2	−1	$\mathcal{N}_s(\Phi^{-1}\mathcal{L})$
3	0	$\mathcal{N}_s(\Phi^{1}D^{+}\mathcal{L})$
3	0	$\mathcal{N}_s(\Phi^{-1}D^{-}\mathcal{L})$
3	+2	$\mathcal{N}_s(\Phi^{1}D^{-}\mathcal{L})$
3	−2	$\mathcal{N}_s(\Phi^{-1}D^{+}\mathcal{L})$

Tabelle 4.6

Leider hat sich die anfängliche Hoffnung, daß diese Algebra generisch existiert, nicht erfüllt, sondern nach Berechnung der Jacobi-Identitäten existiert neben dem bereits bekannte Fall $c = 3$ nur noch eine weitere Lösung, nämlich

$$c = -1, \qquad C_{\Phi^{+1}\Phi^{-1}}^{\Phi^{+1}} C_{\Phi^{+1}\Phi^{-1}}^{\Phi^{-1}} = -\frac{128}{15}. \tag{4.97}$$

Nach dieser ausführlichen Darstellung der $\mathcal{SW}(1, \frac{3}{2}^{\pm Q})$ stellen wir nun in knapperer Form die restlichen konstruierten $\mathcal{SW}$-Algebren vor.

4.3.3. $\mathcal{SW}(1, 2^{\pm Q})$ Algebra

Für generischen Wert der Ladung Q können in der OPE $\Phi_2^Q \circ \Phi_2^{-Q}$ wieder nur Felder aus dem Virasoro-Turm auftreten. Neben den in Tabelle 4.3 aufgeführten müssen noch die folgenden NOPe berücksichtigt werden:

H	Q	NOPe $\mathcal{F}$
7/2	+1	$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^{-}\partial\mathcal{L})$
7/2	−1	$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^{+}\partial\mathcal{L})$
4	0	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})$
4	0	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^{-}, D^{+}]\mathcal{L})\mathcal{L})$
4	0	$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\partial^2\mathcal{L})$

Tabelle 4.7

Die Berechung der Kac-Determinanten liefert

H	$\det(D_H) \sim$
7/2	$c^2(c-1)^2$
4	$c^3(5c-9)(2c-3)(c+6)(c+1)(c-1)^2$

Tablelle 4.8

Analog zur $\mathcal{SW}(1, \frac{3}{2}^{\pm Q})$ implizieren die Jacobi-Identitäten (4.95) auch in diesem Fall nur exotische Lösungen:

Q	c
0	$12/5, -3$
± 4	$12, -9, -21$
$\pm 3/2$	$15/4$

Tabelle 4.9

Die $\mathcal{SW}(1, 2^{\pm 4})$ Algebra mit $c = 12$ ist wieder die Erweiterung mit dem Operator des spektralen Flusses. Die bisher am intensivsten studierte generische $\mathcal{SW}(1, 2)$ erhält man, indem man berücksichtigt, daß im Fall verschwindender Ladung eine Selbstkopplung erlaubt ist, wodurch die OPE folgende Struktur hat:

$$\Phi \circ \Phi = [\mathcal{L}] + [\Phi]. \tag{4.98}$$

Die Super-NOPe der Dimension vier treten in diesem Fall nicht auf, so daß man für die Kopplungskonstanten erhält:

NOP$\mathcal{F}$	$C_{\Phi\Phi}^{\mathcal{F}}$	$C_{\Phi\Phi}^{\mathcal{F}} \alpha_{\Phi\Phi\mathcal{F}}$
$\mathcal{L}$	0	3
$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})$	$-\frac{3}{2(c-1)}$	0
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})$	0	$-\frac{3(4c+3)}{(2c-3)(c-1)(c+6)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-, D^+]\mathcal{L})$	0	$\frac{(23c-30)}{2(2c-3)(c+6)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^{\pm}\partial\mathcal{L})$	$-\frac{6}{(c-1)}$	-
Φ	$C_{\Phi\Phi}^{\Phi}$	0
$\mathcal{N}_s(\Phi\mathcal{L})$	0	$\frac{14C_{\Phi\Phi}^{\Phi}}{(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\Phi D^{\pm}\mathcal{L})$	$\pm\frac{12C_{\Phi\Phi}^{\Phi}}{(c+3)}$	-

Tabelle 4.10

Unter Benutzung von (4.68-4.76) ließe sich nun die OPE explizit angeben, worauf wir allerdings an dieser Stelle verzichten und uns damit begnügen, die nach Prüfung aller Jacobi-Identitäten resultierende Selbstkopplung anzugeben:

$$\left(C_{\Phi\Phi}^{\Phi}\right)^2 = \frac{(c+3)^2(5c-12)^2}{2(15-c)(c-1)(c+6)(2c-3)}. \tag{4.99}$$

Man beachte, daß die Nullstellen von (4.99) genau den Werten in Tabelle 4.9 entsprechen. Vor unserer Berechnung der Super-$\mathcal{W}_4$ Algebra war diese Super-$\mathcal{W}_3$ Algebra die einzig explizit bekannte generische $N = 2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebra.

4.3.4. $\mathcal{SW}(1, \frac{5}{2}^{\pm Q})$ Algebra

Hier kommen acht neue NOPe dazu

H	Q	NOPe $\mathcal{F}$
9/2	+1	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^-\partial\mathcal{L})\mathcal{L})$
9/2	−1	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^+\partial\mathcal{L})\mathcal{L})$
5	0	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})$
5	0	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-, D^+]\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})$
5	0	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\partial^2\mathcal{L})\mathcal{L})$
5	0	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^-\partial\mathcal{L})D^+\mathcal{L})$
5	0	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^+\partial\mathcal{L})D^-\mathcal{L})$
5	0	$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-, D^+]\partial^2\mathcal{L})$

Tabelle 4.11

mit den Kac-Determinanten

H	$\det(D_H) \sim$
9/2	$c^2(c-1)^2(2c-3)^2$
5	$c^6(5c-9)(2c-3)^2(c+12)(c+6)^3(c+1)(c-1)^5(c-2)$

Tabelle 4.12

Nach Prüfung aller Jacobi-Identitäten existiert die Algebra für die folgenden Werte von c und Q:

Q	c
0	$5/2, 9/7, -9/2$
± 5	15
± 2	9/2
± 1	3

Tabelle 4.13

Genau wie die $\mathcal{SW}(1, \frac{3}{2}^{\pm Q})$ Algebra existiert auch eine Lösung mit $c = 3$ und $Q = 1$. Als letztes Beispiel betrachten wir die mit einem beträchtlichen Rechenaufwand verbundene $\mathcal{SW}(1, 3^{\pm Q})$.

4.3.4. $\mathcal{SW}(1, 3^{\pm Q})$ Algebra

Für den generischen Fall hätten wir insgesamt 18 neue NOPe mit Dimension 11/2 und 6 konstruieren müssen, was in keinem Verhältnis zum erwarteten Resultat gestanden hätte. Darum haben wir uns vorerst damit begnügt, die möglicherweise generisch existierende $\mathcal{SW}(1, 3)$ zu konstruieren, in der die Felder mit Dimension sechs nicht auftreten. Bei Dimension 11/2 hat man folgende acht Felder aus dem Virasoro-Turm:

Δ	Q	NOPe $\mathcal{F}$
$\frac{11}{2}$	-1	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^+\partial\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L}),\ \mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})D^+\mathcal{L})$
		$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L})\mathcal{L})D\mathcal{L}),\ \mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\partial^2\mathcal{L})D^+\mathcal{L})$
$\frac{11}{2}$	1	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^-\partial\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L}),\ \mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})D^-\mathcal{L})$
		$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L})\mathcal{L})D^-\mathcal{L}),\ \mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\partial^2\mathcal{L})D^-\mathcal{L})$

Tabelle 4.14: $\mathcal{L}$-Turm

Da analog zur $\mathcal{SW}(1,2)$ in diesem Fall eine Selbstkopplung erlaubt ist, müssen wir noch die folgenden Felder aus dem Φ-Turm mitnehmen:

Δ	Q	NOP $\mathcal{F}$
3	0	Φ
4	0	$\mathcal{N}_s(\Phi\mathcal{L})$
$\frac{9}{2}$	-1	$\mathcal{N}_s(\Phi D^+\mathcal{L})$
$\frac{9}{2}$	1	$\mathcal{N}_s(\Phi D^-\mathcal{L})$
5	0	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\Phi\mathcal{L})\mathcal{L}),\ \mathcal{N}_s(\Phi\partial\mathcal{L}),\ \mathcal{N}_s(\Phi[D^-,D^+]\mathcal{L})$
$\frac{11}{2}$	-1	$\mathcal{N}_s(\Phi\partial D^+\mathcal{L}),\ \mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\Phi D^+\mathcal{L})\mathcal{L})$
$\frac{11}{2}$	1	$\mathcal{N}_s(\Phi\partial D^-\mathcal{L}),\ \mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\Phi D^-\mathcal{L})\mathcal{L})$

Tabelle 4.15: Φ-Turm

Die Kac-Determinante faktorisiert bezüglich der beiden Türme

Δ	$\det(D_H) \sim$
$\frac{11}{2}$	$c^8(5c-9)^2(2c-3)^4(c+6)^2(c+1)^2(c-1)^6$

Tabelle 4.16: $\mathcal{L}$-Turm

und

Δ	$\det(D_H) \sim$
3	c
4	$c(7c-18)$
$\frac{9}{2}$	$c(c+6)$
5	$c^3(2c-3)(7c+18)(c^2+26c-75)$
$\frac{11}{2}$	$c^6(c+6)^2(7c-18)^2$

Tabelle 4.17: Φ-Turm

Die erste Jacobi-Identität liefert folgende Relation zwischen der Selbstkopplung und der zentralen Ladung:

$$\left(C_{33}^{3}\alpha\right)^2 = \frac{49c^3(7c-18)^2(c^2+26c-75)(3c^4+62c^3-129c^2-9c+54)}{3(3-2c)(c-2)(c-1)(c+1)(c+6)(c+12)(5c-9)(3c^2-37c+60)}. \quad (4.100)$$

Die restlichen Jacobi-Identitäten sind, anders als bei der $\mathcal{SW}(1,2)$, nicht mehr automatisch erfüllt, sondern liefern noch weitere Einschränkungen an die Parameter, so daß die $\mathcal{SW}(1,3)$ letztendlich nur für die folgenden isolierten Werte existiert:

$$c \in \left\{\frac{18}{7}, \frac{10}{3}, -\frac{9}{5}\right\} \tag{4.101}$$

mit den Selbstkopplungen

$$\left(C_{33}^{3}\alpha\right)^2 \in \left\{0, \frac{268960000}{88803}, -\frac{106815267}{88000}\right\}. \tag{4.102}$$

Abschließend haben wir noch die $\mathcal{SW}(1,3^{\pm Q})$ mit generischer Ladung betrachtet, wobei es mit den bisher konstruierten NOPen möglich war, zumindest die zwei Jacobi-Identitäten $(\varphi^+\,\varphi^+\,\varphi^-\,\varphi^-)$ und $(\varphi^+\,\varphi^+\,(\psi^+)^-\,(\psi^-)^-)$ zu prüfen. Dies reduziert die erlaubten Werte von c bereits derart, daß sie sich mühelos in das im nächsten Kapitel zu entwerfende Bild der Menge aller $\mathcal{SW}(1,H)$ Algebren einordnen lassen:

Q	c
0	$18/7$
± 6	$18, -15, -33$
$\pm 5/2$	$21/4$
$\pm 4/3$	$10/3$

Tabelle 4.18

Damit ist die Darstellung der mit dem kovarianten Konstruktionsschema erzielten Resultate zunächst abgeschlossen. Im folgenden Kapitel geht es darum, diese zum einen besser zu verstehen und zum anderen einige Spekulationen hinsichtlich der Klassifizierung aller $\mathcal{SW}(1,H^{\pm Q})$ Algebren anzustellen [21].

4.4. Darstellungen von $\mathcal{SW}(1,H)$ Algebren

Im folgenden werden wir die im letzten Kapitel konstruierten Algebren genauer untersuchen, wobei wir uns insbesondere für die Frage interessieren, ob diese Algebren (neue) rationale Modelle liefern. Methodisch gehen wir dabei so vor, daß wir notwendige Bedingungen an die erlaubten Höchstgewichte aufstellen, indem wir die Jacobi-Identitäten auf den Höchstgewichten auswerten [41]:

$$\langle h,q|[[\varphi_m^+,\varphi_n^+],\varphi_p^-] + \text{zykl.}|h,q\rangle = 0. \tag{4.103}$$

Die Frage ist dann, ob diese Bedingungen die erlaubten Werte von h, q und eventuell weiterer Quantenzahlen auf eine endliche Menge einschränkt oder nicht. Das ernüchternde Ergebnis dieser ziemlich aufwendigen Untersuchung ist, daß es lediglich eine Serie von rationalen Modelle gibt, die sich einfach durch Hinzunahme eines einfachen Stromes gemäß

Referenz [81] aus der Virasoro-Algebra ergibt. Die Rechungen zeigen aber, daß alle $\mathcal{SW}$-Algebren mit $c \geq 3$ eine ähnliche Struktur haben, die es uns erlaubt, alle diese Modelle als Abkömmlinge von $\mathcal{SW}$-Algebren des spektralen Flusses zu interpretieren. Den erzielten Ergebnissen zufolge unterscheiden wir vier Klassen von $\mathcal{SW}(1, H)$ Algebren mit verschwindender Selbstkopplung. Die Einteilung der bekannten Beispiele in diese Klassen stellt die folgende tabellarische Übersicht dar.

Δ	Q	c	Typ
$\frac{3}{2}$	0	$\frac{9}{4}$	rational
2	0	$\frac{12}{5}$	
$\frac{5}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	
3	0	$\frac{18}{7}$	
$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{5}$	$c_{\text{eff}} = 3$
$\frac{5}{2}$	0	$\frac{9}{7}$	
2	± 4	-9	
2	± 4	-21	
3	± 6	-15	
3	± 6	-33	
$\frac{3}{2}$	± 3	9	spektr. Fluß
$\frac{3}{2}$	± 1	3	
2	± 4	12	
2	$\pm \frac{3}{2}$	$\frac{15}{4}$	
$\frac{5}{2}$	± 5	15	
$\frac{5}{2}$	± 1	3	
$\frac{5}{2}$	± 2	$\frac{9}{2}$	
3	± 6	18	
3	$\pm \frac{4}{3}$	$\frac{10}{3}$	
3	$\pm \frac{5}{2}$	$\frac{21}{4}$	
$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	pathol.
2	0	-3	
$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{9}{2}$	

Tabelle 4.19

Bevor wir die einzelnen Klassen an repräsentativen Beispielen vorstellen, sei noch kurz auf die Darstellungstheorie der generischen Super $\mathcal{W}_3$ Algebra hingewiesen. Diese ergibt sich aus der Identifizierung dieser Algebra als Kazama-Suzuki-Modell:

$$\frac{\widehat{su}(3)_k \oplus \widehat{so}(4)_1}{\widehat{su}(2)_{k+1} \oplus \widehat{u}(1)}, \tag{4.104}$$

wobei $\widehat{so}(4)_1$ den Beitrag der Fermionen beinhaltet. Die unitäre Serie ist demnach

$$c = \frac{6k}{k+3}, \qquad 0 < k \in \mathbb{Z}, \tag{4.105}$$

und die Höchstgewichtsdarstellungen lassen sich aus den Branching-Funktionen dieses Cosets gewinnen.

4.4.1. Rationale Modelle der $\mathcal{SW}(1, H)$ Algebren

Unter den Darstellungen der $N = 2$ Super-Virasoro-Algebra (4.17) mit Level k ist das Feld $\Phi^{m=0}_{l=k}$ ein einfacher Strom, d.h. es gilt

$$[\Phi^{m=0}_{l=k}] \times [\Phi^{m=0}_{l=k}] = [1]. \tag{4.106}$$

Für $k = 4H$ hat das Feld $\Phi^{m=0}_{l=k}$ ganzzahlige Dimension und kann zur Symmetrie-Algebra hinzugenommen werden. Die Liste der modular invarianten Zustandssummen [77,78], die sich wegen der Realisierung als $\widehat{su}(2)$ Coset (4.19) aus der Klassifizierung aller $\widehat{su}(2)$ Invarianten ergibt, enthält auch die zu dem einfachen Strom gehörige nicht-diagonale Invariante. Für halbzahlige Dimension $k = 4H = 4j - 2$ existiert die sogenannte Automorphismus-Invariante D_{2j+1} von $\widehat{su}(2)$

$$Z(q, \overline{q}) = \sum_{l=0}^{k/2} |\sigma_{2l}|^2 + \sum_{l=0}^{2j-1} \sigma_{2l+1}\sigma^*_{k-2l-1}, \tag{4.107}$$

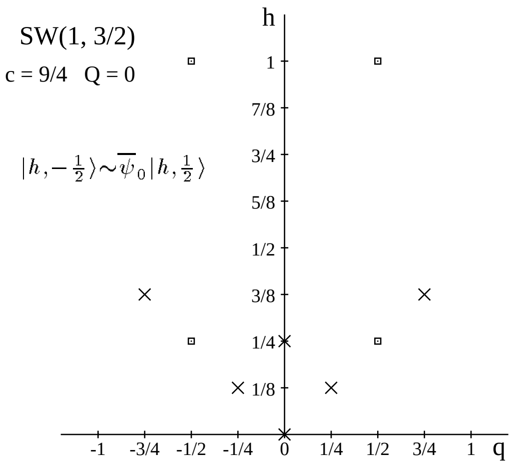
welche auf folgende Weise umgeschrieben werden kann

$$\begin{aligned} Z(q, \overline{q}) = & \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{j-1} \left(|\sigma_{2l} + \sigma_{k-2l}|^2 + |\sigma_{2l} - \sigma_{k-2l}|^2 \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{j-1} \left(|\sigma_{2l+1} + \sigma_{k-2l-1}|^2 + |\sigma_{2l+1} - \sigma_{k-2l-1}|^2 \right), \end{aligned} \tag{4.108}$$

wobei die ersten beiden Terme den Neveu-Schwarz-Sektor und die letzten beiden den Ramond-Sektor der erweiterten Algebra bilden. Die unitären Modelle der $\mathcal{SW}(1, H)$ Algebra bei

$$c = \frac{6H}{2H+1}, \qquad Q = 0 \tag{4.109}$$

sind also vollständig bekannt und geben damit einen guten Test für die Funktionsfähigkeit unserer Methode ab. Als repräsentatives Beispiel geben wir die erhaltenen Werte für die erlaubten Darstellungen der $\mathcal{SW}(1, 3/2)$ bei $c = 9/4$ an.



Ein Quadrat bedeutet dabei, daß der Grundzustand entartet ist, in diesem Fall also zweifach entartet. Den Ramond-Sektor haben wir nicht getrennt gerechnet, sondern den spektralen Fluß Automorphismus (4.16) und

$$\phi'_r = \phi_{r-\eta Q}, \qquad \text{für alle Komponenten von } \Phi \tag{4.110}$$

benutzt.

4.4.2. Irrationale Modelle mit $c_{\text{eff}} = 3$

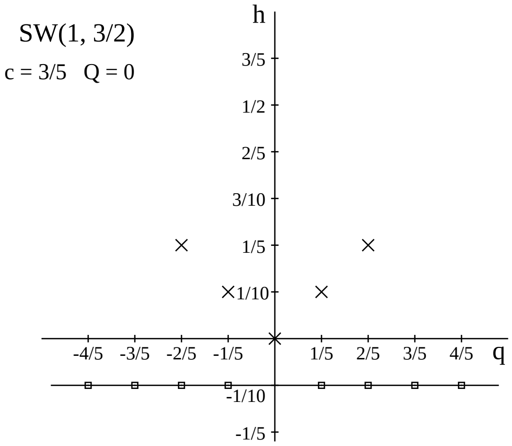
Im Gegensatz zum $N = 0$ und $N = 1$ Fall [48] sind hier diese Modelle nicht-rational, was ein weiterer Hinweis auf die Seltenheit von rationalen $N = 2$ SKFT ist. Aus Tabelle 4.19 lassen sich drei Serien ablesen

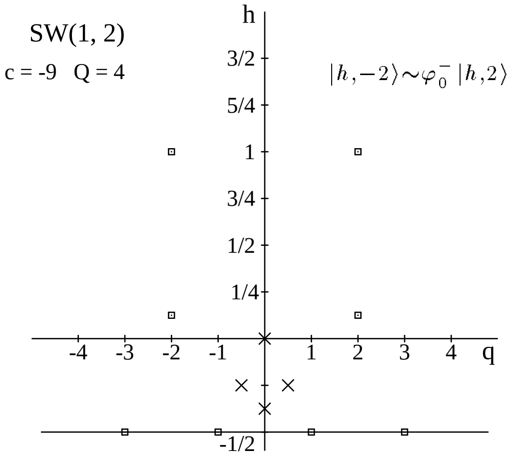
$$c = 3\left(1 - \frac{2}{H+1}\right), \quad Q = 0, \qquad \text{für } 0 < H \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \tag{4.111}$$

und die (anti-)chiralen $\mathcal{SW}$-Algebren

$$\begin{aligned} c &= 3\,(1 - 2H)\,, \quad Q = 2H, \qquad \text{für } 0 < H \in \mathbb{Z} \\ c &= 3\,(1 - 4H)\,, \quad Q = 2H, \qquad \text{für } 0 < H \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{4.112}$$

Die beiden folgenden Diagramme zeigen die erlaubten Darstellungen für zwei dieser Modelle im Neveu-Schwarz-Sektor.





Man sieht also, daß tatsächlich $c - 24h_{\min} = 3$ ist und insbesondere sind auf der Linie

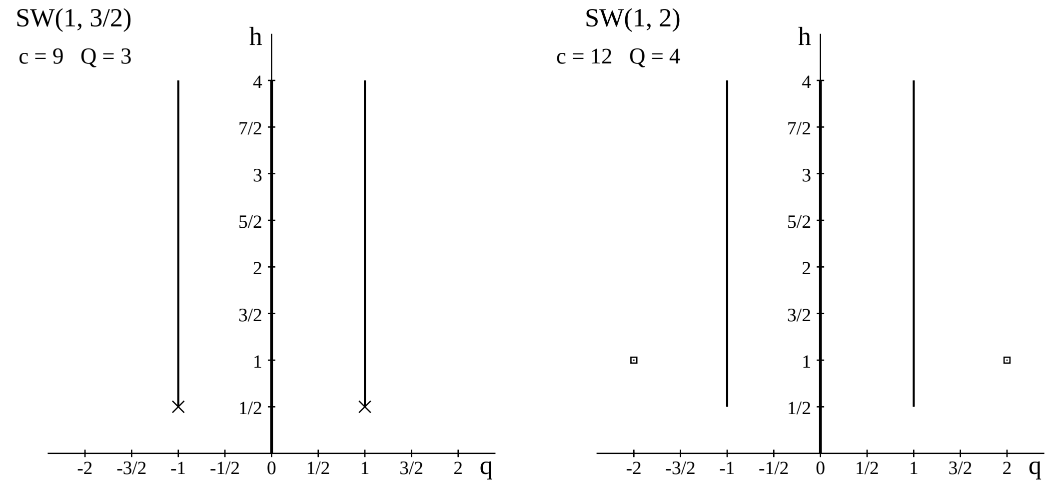
$h = h_{\min}$ die Zustände unendlich entartet. Im Falle des $c = 3/5$ Modells erhält man z.B. die folgenden Bedingungen für die Wirkung der Null-Moden $\psi_0^\pm$ auf die Höchstgewichte:

$$\begin{aligned} \langle h, q | \psi_0^+ \psi_0^- | h, q \rangle &\sim (1-5q)(2-5q)(3-5q)(4-5q) \\ \langle h, q | \psi_0^- \psi_0^+ | h, q \rangle &\sim (1+5q)(2+5q)(3+5q)(4+5q), \end{aligned} \tag{4.113}$$

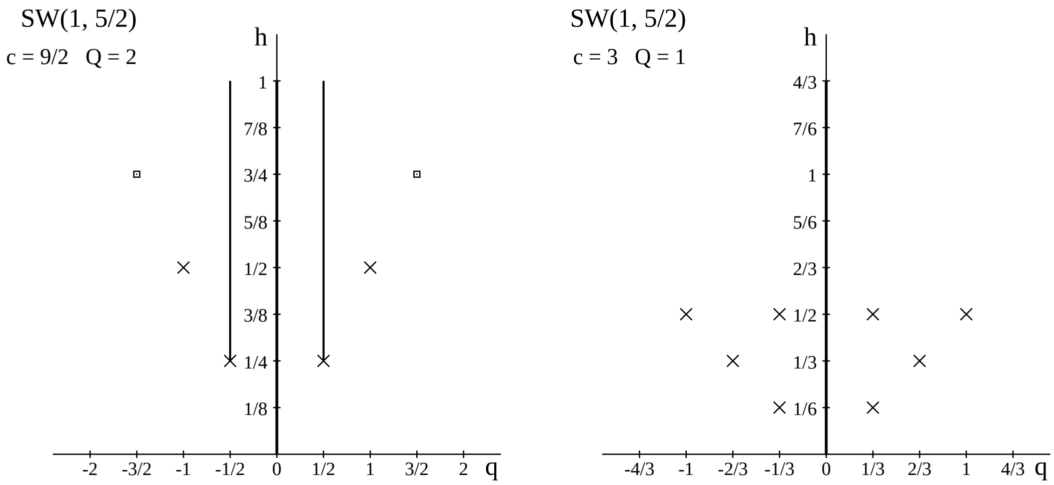
d.h. bei den auf der Linie $h = h_{\min}$ ausgezeichneten Punkten ist der Grad der Entartung reduziert.

4.4.3. $\mathcal{SW}(1, H)$ Algebren des spektralen Flusses

In diesem Abschnitt werden wir argumentieren, daß die aus Abschnitt 4.1.4. bekannte Klasse von spektralen Fluß $\mathcal{SW}$-Algebren $\mathcal{SW}(1, d/2^{\pm d})$ mit $c = 3d$ noch derart erweitert werden kann, daß alle gefundenen $\mathcal{SW}(1, H)$ Algebren, die für $c \geq 3$ existieren, darin enthalten sind. Zunächst stellen wir die erlaubten Darstellungen von einigen Beispielen vor, woraus insbesondere die Ähnlichkeit aller $c \geq 3$ Modelle zu ersehen ist. Für die $\mathcal{SW}(1, d/2^{\pm d})$ Algebren stimmen die Ergebnisse genau mit denen aus 4.1.4. überein.



Im Vergleich dazu erhählt man für zwei andere $\mathcal{SW}$-Algebren mit $c \geq 3$:



Es treten also in allen Fällen nur endlich viele Werte der Ladung q auf. Betrachten wir als illustrierendes Beispiel die beiden für $c = 3$ existierenden $\mathcal{SW}$-Algebren $\mathcal{SW}(1, 3/2^{\pm 1})$ und $\mathcal{SW}(1, 5/2^{\pm 1})$. Der Turm der Virasoro-Darstellungen (4.50) in der Vakuum-Darstellung von $\mathcal{SW}(1, 1/2^{\pm 1})$ enthält unter anderem die beiden obigen primären Felder der Dimension 3/2 und 5/2:

$$(h_m, q_m) = (m - 1/2, \pm 1). \tag{4.114}$$

Die beiden obigen Algebren sind also die Erweiterungen der $N = 2$ Virasoro-Algebra mit den Generatoren:

$$\begin{aligned} \Phi^{\pm 1}_{3/2} &\sim N_s(\Phi^{+1}_{1/2} D^{\pm} \Phi^{-1}_{1/2}), \\ \Phi^{\pm 1}_{5/2} &\sim N_s(\Phi^{+1}_{1/2} D^{\pm} \partial \Phi^{-1}_{1/2}). \end{aligned} \tag{4.115}$$

Dies läßt sich sofort dahingehend verallgemeinern, daß die $\mathcal{SW}(1, 1/2^{\pm 1})$ eine ganze Hierarchie von $\mathcal{SW}$-Algebren impliziert, die Erweiterungen der Virasoro-Algebra mit höheren Operatoren des spektralen Flusses entsprechen.

Die anderen Algebren lassen sich ebenfalls auf diese Weise interpretieren. Die $\mathcal{SW}(1, 5/2^{\pm 2})$ bei $c = 9/2$ folgt auf analoge Weise aus dem Turm (4.50) mit $m = 2$, wobei das nichtlokale chirale Feld für $m = 1$ mit $(h_m, q_m) = (3/4, \pm 3/2)$ dann als Darstellung auftritt. Als allgemeines Prinzip formulieren wir daher, daß immer wenn der spektrale Fluß für die zentrale Ladung c nach m-facher Anwendung auf das Vakuum ein lokales Feld $\Phi^{\pm q_m}_{h_m}$ generiert, die Erweiterung der $N = 2$ Virasoro-Algebra mit eben diesem Feld eine für c existierende $\mathcal{SW}(1, h_m^{\pm q_m})$ Algebra ist. Anders ausgedrückt existiert die $\mathcal{SW}(1, H^{\pm Q})$ genau für die folgenden Werte von c und Q:

$$c = \frac{6}{m^2}\left(H + \frac{(m-1)^2}{2}\right), \quad q = \pm\frac{1}{m}(2H - m + 1), \quad m \in \{1, 2, \ldots, [H + 1/2]\}. \tag{4.116}$$

Alle bekannten Modelle liegen in dieser Serie, so daß zu vermuten ist, daß (4.116) sogar alle $\mathcal{SW}(1, H^{\pm Q})$ Algebren mit $c \geq 3$ liefert. Eine Folgerung hieraus ist, daß alle diese Algebren analog zu den $\mathcal{SW}(1, d/2^{\pm d})$ Algebren nicht-rationale Modelle liefern.

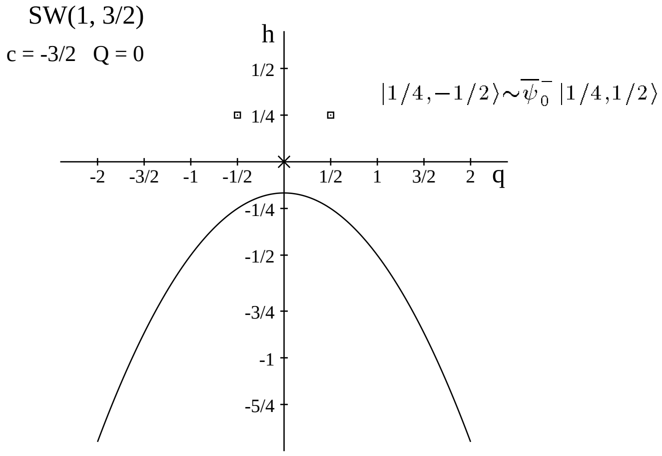
4.4.4. Pathologische $\mathcal{SW}(1, H)$ Algebren

Die Darstellungstheorie für die Serie

$$c = 3(1 - H), \qquad Q = 0 \tag{4.117}$$

ist dadurch ausgezeichnet, daß es alles nicht-rationale Modelle sind und außerdem das Spektrum an Höchstgewichten nicht nach unten beschränkt ist, d.h. $c_{\text{eff}} \to \infty$.

Als typischen Vertreter zeigen wir das Spektrum der $\mathcal{SW}(1,3/2)$ bei $c=-3/2$:



In dem nächsten Beispiel der $\mathcal{SW}(1,2)$ bei $c=-3$ ist nicht einmal mehr der (anti-)chirale Sektor endlich, sondern das Spektrum umfaßt die beiden Geraden $h=\pm q/2$.
In dem folgenden Abschnitt werden wir noch die Anwendung unseres Konstruktionsverfahrens auf die Berechnung der ersten Super-$\mathcal{W}$-Algebra mit drei Generatoren vorstellen [23].

4.5. Die erste Super-$\mathcal{W}$-Algebra mit drei Generatoren

Die CP(n) Kazama-Suzuki-Modelle haben als Symmetrie-Algebra eine $\mathcal{SW}(1,2,\ldots,n)$, von welchen allerdings bislang nur die ersten beiden Fälle explizit bekannt waren. Im Falle $n=3$ hat die Algebra der zusätzlichen superprimären Felder der Dimension zwei und drei folgende Struktur

$$\begin{aligned} \Phi_2 \circ \Phi_2 &= [\mathcal{L}] + [\Phi_2] + [\Phi_3] \\ \Phi_2 \circ \Phi_3 &= [\mathcal{L}] + [\Phi_2] + [\Phi_3] + [\Phi_2\Phi_2] \\ \Phi_3 \circ \Phi_3 &= [\mathcal{L}] + [\Phi_2] + [\Phi_3] + [\Phi_2\Phi_2] + [\Phi_2\Phi_3]. \end{aligned} \tag{4.117}$$

Der rechentechnische Unterschied zu den Super-$\mathcal{W}$-Algebren mit zwei Generatoren ist das Auftreten der Türme $[\Phi_2\Phi_2]$ und $[\Phi_2\Phi_3]$, was die Berechnungen erheblich komplizierter macht. Insgesamt haben wir in allen 5 Türmen 73 Felder zu berechnen, die wir hier allerdings nicht alle angeben [23]. Für die nach dem Ansatz noch freien Kopplungen C_{22}^2, $C_{32}^2\alpha$, C_{32}^3, $C_{33}^3\alpha$ erhält man nach Überprüfung aller Jacobi-Identitäten zwei konsistente Sätze von Lösungen.

4.5.1. Die Super $\mathcal{W}_4$ Algebra

Im folgenden geben wir die erste Lösung an und argumentieren, daß sie zu dem CP(3) Kazama-Suzuki-Modell gehören muß. Die Umkehrung des verwendeten Arguments erlaubt es, die Kopplung C_{22}^2 für alle $\mathcal{SW}(1,2,\ldots,n)$ zu berechnen. Wir erhalten für $\mathcal{SW}(1,2,3)$[1]:

$$\left(C_{22}^2\right)^2 = \frac{(c+3)^2(7c-27)^2}{2(1-c)(c-21)(c+9)(5c-9)}$$

$$
\begin{aligned}
\left(C_{32}^{2}\alpha\right)^2 &= \frac{36(c-33)(c-3)(c-1)^2(c+3)(c+18)}{(c-21)(c+6)(c+9)(2c-3)(5c-12)(5c-9)} \\
\left(C_{32}^{3}\right)^2 &= \frac{9(c+6)^2(2c-3)^2(7c-27)^2}{2(9-5c)(c-21)(c-1)(c+9)(5c-12)^2} \\
\left(C_{33}^{3}\alpha\right)^2 &= \frac{4\left(1312200-1234926c+393093c^2-72306c^3+7641c^4+123c^5+7c^6\right)^2}{(c-33)(c-21)(c-3)(c+3)(c+6)(c+9)(c+18)(2c-3)(5c-12)^3(5c-9)}.
\end{aligned}
\tag{4.118}
$$

Im Gegensatz zur zweiten Lösung besitzt diese Algebra einen endlichen klassischen Limes, was bereits ein starkes Indiz dafür ist, daß diese Lösung die Super-$\mathcal{W}_4$ ist. Um diese Vermutung noch weiter zu untermauern, benutzen wir die Zerlegung der CP(n) Kazama-Suzuki-Modelle in drei bosonische Coset-Modelle [80]

$$
\frac{\widehat{su}(n+1)_k \oplus \widehat{so}(2n)_1}{\widehat{su}(n)_{k+1} \oplus \widehat{u}(1)} = \frac{\widehat{su}(n+1)_k}{\widehat{su}(n)_k \oplus \widehat{u}(1)} \oplus \frac{\widehat{su}(n)_k \oplus \widehat{su}(n)_1}{\widehat{su}(n)_{k+1}} \oplus \widehat{u}(1). \tag{4.119}
$$

Dieser Zerlegung entspricht, daß die drei Felder $\{N(jj), L, \varphi\}$ der Dimension zwei der Super-$\mathcal{W}_n$ Algebra eine Unteralgebra bilden, welche folglich zur direkten Summe dreier normaler Virasoro-Algebren isomorph ist. Diese Transformation läßt sich explizit ausführen und man erhält mit der Definition

$$
\gamma = \sqrt{4c - \left(C_{22}^{2}\right)^2 + c\left(C_{22}^{2}\right)^2} \tag{4.120}
$$

die folgenden drei Virasoro-Generatoren mit den zugehörigen zentralen Ladungen:

- bosonischer CP(n) Anteil

$$
T_1 = \tfrac{\gamma+\sqrt{c-1}C_{22}^2}{2\gamma} L - \tfrac{\sqrt{c-1}}{\gamma}\varphi - \tfrac{3\left(\gamma+\sqrt{c-1}C_{22}^2\right)}{4c\gamma} N(jj) \tag{4.121}
$$

mit

$$
\tilde{c}_1 = (c-1)\frac{\gamma+\sqrt{c-1}C_{22}^2}{2\gamma},
$$

- $\mathcal{W}_n$ Anteil

$$
T_2 = \tfrac{\gamma-\sqrt{c-1}C_{22}^2}{2\gamma} L + \tfrac{\sqrt{c-1}}{\gamma}\varphi - \tfrac{3\left(\gamma-\sqrt{c-1}C_{22}^2\right)}{4c\gamma} N(jj) \tag{4.122}
$$

mit

$$
\tilde{c}_2 = (c-1)\frac{\gamma-\sqrt{c-1}C_{22}^2}{2\gamma},
$$

- $\widehat{u}(1)$ Anteil

$$
T_3 = \tfrac{3}{2c} N(jj) \tag{4.123}
$$

mit

$$
\tilde{c}_3 = 1.
$$

Die Selbstkopplung C_{22}^2 hängt natürlich von der jeweiligen Super-$\mathcal{W}$-Algebra ab. Setzt man nun in (4.121-4.123) die Selbstkopplung (4.118) unserer Algebra ein, so erhält man für die einzelnen Summanden die folgenden zentralen Ladungen

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1 &= \frac{(c+9)(5c-9)}{3(c+27)} \\ \tilde{c}_2 &= \frac{2c(21-c)}{3(c+27)} \\ \tilde{c}_3 &= 1. \end{aligned} \tag{4.124}$$

Unitäre Darstellungen der Super-$\mathcal{W}_4$-Algebra sind insbesondere unitäre Darstellungen der $\mathcal{W}_3$-Algebra des zweiten Summanden in (4.119) und somit liefert

$$\tilde{c}_2 = 2\left(1 - \frac{12}{(k+3)(k+4)}\right) \tag{4.125}$$

eine notwendige Bedingung an die zentralen Ladungen c der unitären Serie der Super-$\mathcal{W}_4$ Algebra. Einsetzen von (4.124) in (4.125) liefert tatsächlich die unitäre Serie des CP(3) Kazama-Suzuki-Modells

$$c = \frac{9k}{k+4}, \qquad c = \frac{9(k+7)}{(k+7)-4}. \tag{4.126}$$

Weiterhin haben wir gezeigt, daß in dem zweiten Summanden in (4.119) tatsächlich noch ein primäres Feld der Dimension drei existiert, welches zusammen mit T_2 die $\mathcal{W}_3$ Algebra bildet, d.h. es existiert insbesondere kein primäres Feld der Dimension vier. Die dargelegten Argumente lassen wohl kaum noch einen Zweifel an der Richtigkeit der Identifizierung der $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[1]}$ als der Super-$\mathcal{W}_4$ Algebra bestehen.
Die Umkehrung des oben benutzten Argumentes erlaubt es nun, da ja (4.121-4.123) für jede Super-$\mathcal{W}_n$ gilt, durch Setzen von

$$\tilde{c}_2 = (n-2)\left(1 - \frac{n(n-1)}{(k+n)(k+n-1)}\right) \tag{4.127}$$

die Strukturkonstante C_{22}^2 für alle Super-$\mathcal{W}_n$ Algebren zu berechnen:

$$\left(C_{22}^2\right)^2 = \frac{(c+3)^2\left((2n-1)c-3(n-1)^2\right)^2}{(n-2)(c-1)\left(c+3(n-1)\right)\left(6n-3-c\right)\left((n+1)c-3(n-1)\right)}. \tag{4.128}$$

Diese Formel wird uns noch bei der Identifizierung der zweiten Lösung, der $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[2]}$, nützlich sein.

4.5.2. Die $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[2]}$ als Vereinigende Super-$\mathcal{W}$-Algebra

Die Strukturkonstanten dieser zweiten Lösung sind

$$\begin{aligned}
\left(C_{22}^2\right)^2 &= \frac{c(c+3)^2}{2(1-c)(1+c)} \\
\left(C_{32}^2\alpha\right)^2 &= \frac{8(24-c)(c-1)^2(c+3)^2}{3(c+1)(c+6)(2c-3)(5c-12)} \\
\left(C_{32}^3\right)^2 &= \frac{9c(c+6)^2(2c-3)^2}{2(1-c)(1+c)(5c-12)^2} \\
\left(C_{33}^3\alpha\right)^2 &= \frac{(24-c)\left(1296-2484c+36c^2+315c^3+74c^4\right)^2}{6(c+1)(c+3)^2(c+6)(2c-3)(5c-12)^3}
\end{aligned} \tag{4.129}$$

und haben offensichlich keinen endlichen klassischen Limes, d.h. nach den Ergebnissen des 2. Kapitels ist zu erwarten, daß diese Algebra eine Vereinigende $N=2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebra ist. Einsetzen der Strukturkonstante C_{22}^2 in (4.121-4.123), liefert die folgende Aufspaltung der zentralen Ladung

$$c = -2 + (c+1) + 1, \tag{4.130}$$

welche, gemäß (4.119) zu dem Coset

$$\frac{\widehat{su}(n+1)_{-\frac{n}{2}} \oplus \widehat{so}(2n)_1}{\widehat{su}(n)_{-\frac{n-2}{2}} \oplus \widehat{u}(1)} = \frac{\widehat{su}(n+1)_{-\frac{n}{2}}}{\widehat{su}(n)_{-\frac{n}{2}} \oplus \widehat{u}(1)} \oplus \frac{\widehat{su}(n)_{-\frac{n}{2}} \oplus \widehat{su}(n)_1}{\widehat{su}(n)_{-\frac{n-2}{2}}} \oplus \widehat{u}(1) \tag{4.131}$$

gehört. Demnach müßte die $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[2]}$ für

$$c = -\frac{3n^2}{n+2} \tag{4.132}$$

auf die Super-$\mathcal{W}_n$ trunkieren, was man für die ersten drei Beispiele für alle Strukturkonstanten zeigen kann:

c	Trunkierung
-1	$\mathcal{SW}(1,2,3)^{[2]} \to SVir_{N=2}$
-3	$\mathcal{SW}(1,2,3)^{[2]} \to \mathcal{SW}(1,2)$
$-\frac{27}{5}$	$\mathcal{SW}(1,2,3)^{[2]} \to \mathcal{SW}(1,2,3)^{[1]}$

Tabelle 4.20

Weiterhin stimmt im Falle $n > 3$ die Strukturkonstante C_{22}^2 der $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[2]}$ für den jeweiligen Wert (4.132) von c mit der Strukturkonstante (4.128) der Super-$\mathcal{W}_n$ überein. All dies läßt keinen anderen Schluß zu, als daß die $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[2]}$ eine Vereinigende Super-$\mathcal{W}$-Algebra der CP(n) Kazama-Suzuki-Modelle ist.
Ferner haben wir gezeigt, daß die bosonische Symmetrie-Algebra des ersten bzw. zweiten Summanden in (4.131) eine $\mathcal{W}(2,3)$ bei $c=-2$ bzw. die Virasoro-Algebra ist. Bei den

negativen Werten (4.132) der zentralen Ladung ist die SKFT sicherlich nicht unitär, so daß zu vermuten ist, daß die $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[2]}$ überhaupt keine unitären Darstellungen besitzt.
Mit der Interpretation der $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[2]}$ als Vereinigende Super-$\mathcal{W}$-Algebra hat sich nun für uns der Kreis der in dieser Arbeit vorgestellten Methoden und Beispiele geschlossen und es verbleibt lediglich, eine Zusammenfassung und einen Ausblick zu geben.

5. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden im wesentlichen zwei Fragen untersucht, die erste nach der Identifikation der generischen, bosonischen $\mathcal{W}$-Algebren $\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[2]}$, $\mathcal{W}(2,4,6)^{[3]}$ und $\mathcal{W}(2,4,6)^{[4]}$, die zweite nach der Struktur von $N=2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebren. Wir haben für alle drei generischen $\mathcal{W}$-Algebren Coset-Realisierungen gefunden, die die gemeinsame Eigenschaft haben, daß ihr klassischer Limes unendlich, nicht-frei erzeugt ist. Da man in der Quantenversion zu den Relationen der klassischen Generatoren Quantenkorrekturen bekommt, sind die Quanten $\mathcal{W}$-Algebren trotzdem endlich erzeugt. Weiterhin haben wir gesehen, daß man die obigen Algebren als Trunkierungen von Serien von Casimir-Algebren bei jeweils bestimmten Werten der zentralen Ladung interpretieren kann, was im ersten Fall der $\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[2]}$ lediglich Ausdruck der Dualität des parafermionischen Cosets mit den jeweils ersten unitären Modellen der GKO-Cosets der A_n Casimir-Algebren ist. Aufgrund dieser Eigenschaft haben wir diesen neuen Typ generischer $\mathcal{W}$-Algebren als Vereinigende $\mathcal{W}$-Algebren bezeichnet. Die beiden $\mathcal{W}(2,4,6)$ Algebren lieferten Vereinigende $\mathcal{W}$-Algebren für die $\mathcal{WB}_n$ und $\mathcal{WC}_n$ Casimir Algebren und damit als nichttriviales Ergebnis eine Coset-Realisierung zumindest einiger minimaler Modelle dieser bislang lediglich mit der Drinfeld-Sokolov-Reduktion konstruierbaren Casimir-Algebren. Unter Benutzung des Charakterarguments haben wir noch die Verallgemeinerungen der drei Coset-Konstruktionen untersucht und den Feldgehalt der resultierenden Vereinigenden $\mathcal{W}$-Algebren bestimmt. Aus unseren Betrachtungen kann somit hinsichtlich der Klassifikation von $\mathcal{W}$-Algebren bzw. deren rationalen Modellen der Schluß gezogen werden, daß es durchaus mehrere Möglichkeiten gibt, rationale KFTen durch generische, einparametrige $\mathcal{W}$-Algebren zu verbinden und daher die Kategorie der generischen $\mathcal{W}$-Algebren viel größer ist als die Kategorie der rationalen Modelle. Diese Arbeit liefert mithin einen Baustein mehr zu einem besseren Verständnis des Raumes aller $\mathcal{W}$-Algebren, zu welchem insbesondere noch die Beziehung der beiden Konstruktionsverfahren der Drinfeld-Sokolov-Reduktion und der Coset-Konstruktion zu klären wäre. Als einen ersten Schritt kann man z.B. die Frage stellen, ob es für alle minimalen Modelle der nicht-einfach-geschnürten Casimir-Algebren eine Coset-Realisierung gibt.
Motiviert durch die Anwendung in der Super-String-Theorie haben wir im zweiten Teil die Struktur von $N=2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebren untersucht. Dabei haben wir zunächst einen manifest kovarianten Formalismus holomorpher SKFTen entwickelt und insbesondere die Kopplungen derivativer Felder in der OPE zweier superquasiprimärer Felder berechnet. Nach Einführen $OSP(2,2)$ invarianter NOPe hatten wir somit einen kovarianten Algorithmus an der Hand, der es mithilfe massiven Computereinsatzes erlaubte, die ersten vier Beispiele von Super-$\mathcal{W}$-Algebren mit zwei Generatoren zu konstruieren. Das Studium der Darstellungstheorie dieser Algebren lieferte eine Einteilung aller bekannten Beispiele in vier Klassen, von denen (leider) nur eine (bereits bekannte) rationale Modelle enthielt,

einer weiteren gehörten die für die $N = 2$ SKFT typischen Super-$\mathcal{W}$-Algebren des spektralen Flusses an. Letztere treten insbesondere bei der GSO-Projektion in Super-String Kompaktifizierungen auf, konnten aber aufgrund ihrer Irrationalität bislang nicht direkt nutzbar gemacht werden. Schließlich haben wir noch eine Super-$\mathcal{W}$-Algebra mit drei Generatoren, die generische $\mathcal{SW}(1,2,3)$, berechnet, wobei zwei Lösungen auftraten, deren eine die Symmetrie-Algebra des CP(3) Kazama-Suzuki-Modells ist und die andere als Vereinigende Super-$\mathcal{W}$-Algebra der CP(n) Cosets identifiziert werden konnte. Unsere anfängliche Hoffnung, auf diesem vorher noch fast unangetasteten Gebiet der Konstruktion von $N = 2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebren neue rationale oder zumindest für die String Theorie relevante Modelle zu finden, hat sich leider nicht ganz erfüllt. Nichtsdestotrotz hat unser systematischer Ansatz eine Vielzahl von $\mathcal{W}$-Algebren überhaupt erst berechenbar gemacht und einen Einblick in die Welt der $N = 2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebren gewährt, deren erster Eindruck so zu beschreiben ist, daß die Anzahl (oder die Dichte) rationaler SKFTen weitaus geringer ist als im $N = 0$ und $N = 1$ supersymmetrischen Fall.

Referenzen

[1] C. Ahn, S. Chung, S.H. Tye, *New parafermion, SU(2) coset and N=2 superconformal field theories*, Nucl. Phys. **B365** (1991) 191

[2] C. Ahn, *Free superfield realization of $N = 2$ quantum super $\mathcal{W}_3$ algebra*, Mod. Phys. Lett. **A9** (1994) 271

[3] D. Altschuler, *Quantum equivalence of coset space models*, Nucl. Phys. **B313** (1989) 293

[4] F.A. Bais, P. Bouwknegt, K. Schoutens, M. Surridge, *Extensions of the Virasoro algebra constructed from Kac-Moody algebras using higher order Casimir invariants*, Nucl. Phys. **B304** (1988) 348

[5] F.A. Bais, P. Bouwknegt, K. Schoutens, M. Surridge, *Coset construction for extended Virasoro algebras*, Nucl. Phys. **B304** (1988) 371

[6] I. Bakas, E. Kiritsis, *Beyond the large N-limit: non-linear $\mathcal{W}_\infty$ as symmetry of the $SL(2,R)/U(1)$ coset model*, Int. Jour. Mod. Phys. **A7** (1992) 55

[7] J. Balog, L. Fehér, L. O'Raifeartaigh, P. Forgács, A. Wipf, *Toda theory and $\mathcal{W}$-algebra from a gauged WZNW point of view*, Ann. Phys. **B203** (1990) 76

[8] T. Banks, L.J. Dixon, D. Friedan, E. Martinec, *Phenomenology and conformal field theory,or Can String theory predict the weak mixing angle?*, Nucl. Phys. **B299** (1988) 613

[9] I. Bars, *Heterotic superstring vacua in four dimensions based on non-compact affine current algebra*, Nucl. Phys. **B334** (1990) 125

[10] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. **B241** (1984) 333

[11] M. Bershadsky, H. Ooguri, *Hidden SL(n) symmetry in conformal field theories*, Comm. Math. Phys. **126** (1989) 49

[12] M. Bershadsky, *Conformal field theories via hamilton reduction*, Comm. Math. Phys. **139** (1991) 71

[13] M. Bershadsky, W. Lerche, D. Nemeschansky, N.P. Warner, *Extended $N = 2$ superconformal structure of gravity and W-gravity coupled to matter*, Nucl. Phys. **B401** (1993) 304

[14] A. Bilal, J.L. Gervais, *Nonlinearly extended Virasoro-algebras:new prospects for building string-theories*, Nucl. Phys. **B326** (1989) 222

[15] A. Bilal, J.L. Gervais, *Systematic approach to conformal systems with extended Virasoro-symmetries*, Phys. Lett. **206B** (1988) 412

[16] R. Blumenhagen, M. Flohr, A. Kliem, W. Nahm, A. Recknagel, R. Varnhagen, *Construction of $\mathcal{W}$-algebras with two and three generators*, Nucl. Phys. **B361** (1991) 255

[17] R. Blumenhagen, *$\mathcal{W}$-algebras in conformal quantum field theory*, Diplomarbeit, preprint BONN-IR-91-06

[18] R. Blumenhagen, *Covariant construction of $N = 1$ super $\mathcal{W}$-algebras*, Nucl. Phys. **B381** (1992) 641

[19] R. Blumenhagen, W. Eholzer, A. Honecker, R. Hübel, *New $N = 1$ extended superconformal algebras with two and three generators*, Int. J. Mod. Phys. **A7** (1992) 7841

[20] R. Blumenhagen, *$N = 2$ supersymmetric $\mathcal{W}$-algebras*, Nucl. Phys. **B405** (1993) 744

[21] R. Blumenhagen, R. Hübel, *A note on representations of $N=2$ $\mathcal{SW}$-algebras*, preprint BONN-TH-94-08

[22] R. Blumenhagen, W. Eholzer, A. Honecker, K. Hornfeck, R. Hübel, *Unifying $\mathcal{W}$-algebras*, preprint BONN-TH-94-01, DFTT-15/94, *Coset realization of unifying $\mathcal{W}$-algebras* in Vorbereitung

[23] R. Blumenhagen, A. Wißkirchen, *The N=2 super $\mathcal{W}_4$ algebra*, in Vorbereitung

[24] J. de Boer, L. Fehér, A. Honecker, *A class of $\mathcal{W}$-algebras with infinitely generated classical limit*, preprint BONN-HE-93-49, ITP-SB-93-84

[25] W. Boucher, D. Friedan, A. Kent, *Determinant formulae and unitarity for the N=2 superconformal algebras in two dimensions or exact results on string-compactification*, Phys. Lett. **172B** (1986) 316

[26] P. Bouwknegt, *Extended conformal algebras from Kac-Moody algebras*, in 'Infinite-dimensional Lie-algebras and Lie-groups', ed. V. Kac, Proc. CIRM-Luminy conf., 1988 (World Scientific, Singapore, 1989)

[27] P. Bouwknegt, J. McCarthy, K. Pilch, *On the free field resolutions for coset conformal field theories*, Nucl. Phys. **B352** (1991) 139

[28] P. Bouwknegt, K. Schoutens, *$\mathcal{W}$-symmetry in conformal field theory*, Phys. Rep. **223** (1993) 183

[29] P. Bowcock, P. Goddard, *Coset construction and extended conformal algebra*, Nucl. Phys. **B305** (1988) 685

[30] P. Bowcock, G.M.T. Watts, *On the classification of quantum $\mathcal{W}$-algebras*, Nucl. Phys. **B379** (1992) 63

[31] P. Candelas, G.T. Horowitz, A. Strominger, E. Witten, *Vacuum configurations for superstrings*, Nucl. Phys. **B258** (1985) 46

[32] A. Cappelli, C. Itzykson, J.P. Zuber, *The A-D-E classification of minimal and $A_1^{(1)}$ conformal invariant theories*, Commun. Math. Phys. **113** (1987) 1

[33] A. Cappelli, C.A. Trugenberger, G.R. Zemba, *Infinite symmetry in the quantum-Hall-effect*, Nucl. Phys. **B396** (1993) 465

[34] J.L. Cardy, *Operator content of two dimensional conformally invariant theories*, Nucl. Phys. **B270**[FS16] (1986) 186

[35] F. Delduc, L. Frappat, P. Sorba, F. Troppan, *Rational $\mathcal{W}$-algebras from composite operators*, Phys. Lett. **318B** (1993) 457

[36] L.J. Dixon, M.E. Peskin, J. Lykken, *N=2 superconformal symmetry and SO(2,1) current algebra*, Nucl. Phys. **B325** (1989) 329

[37] V. Drinfeld, V. Sokolov, *Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type*, J. Sov. Math. **30** (1984) 1975

[38] B. Duplantier, H. Saleur, *Exact critical properties of two-dimensional dense self-avoiding walks*, Nucl. Phys. **B290** [FS20] (1987) 291

[39] T. Eguchi, H. Ooguri, A. Taormina, S.K. Yang, *Superconformal algebras and string compactification on manifolds with SU(n) holonomy*, Nucl. Phys. **B315** (1989) 193

[40] T. Eguchi, S.K. Yang, $N=2$ *superconformal models as topological field theories* Mod. Phys. Lett. **A5** (1990) 1693

[41] W. Eholzer, M. Flohr, A. Honecker, R. Hübel, W. Nahm, R. Varnhagen, *Representations of W-Algebras with Two Generators and New Rational Models*, Nucl. Phys.

B383 (1992) 249

[42] W. Eholzer, A. Honecker, R. Hübel, *How complete is the classification of $\mathcal{W}$-symmetries?*, Phys. Lett. **308B** (1993) 42

[43] V.A. Fateev, A.B. Zamolodchikov, *Nonlocal (parafermion) currents in critical points in Z_N-symmetric statistical systems*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **89** (1985) 380

[44] V.A. Fateev, S.L. Lykyanov, *The models of two dimensional conformal quantum field theory with $\mathbb{Z}_n$ symmetry*, Int. Jour. Mod. Phys. **A3** (1988) 507

[45] J.M. Figueroa-O'Farrill, *On the homological construction of Casimir algebras*, Nucl. Phys. **B343** (1990) 450

[46] J.M. Figueroa-O'Farrill, E. Ramos, *Classical $N = 2$ $\mathcal{W}$-superalgebras and supersymmetric Gel'fand-Dickey brackets*, Nucl. Phys. **B368** (1992) p. 361

[47] J.M. Figueroa-O'Farrill, *The spin-6 extended conformal algebra*, Phys. Lett. **245B** (1990) 471

[48] M. Flohr, *$\mathcal{W}$-Algebras, New Rational Models and Completeness of the $c = 1$ Classification*, Commun. Math. Phys. **157** (1993) 179

[49] M. Flohr, R. Varnhagen, *Infinite symmetry in the fractional quantum-Hall-effect*, preprint BONN-HE-93-29

[50] I.B. Frenkel, V.G. Kac, M. Wakimoto, *Characters and fusion rules for $\mathcal{W}$-algebras via quantized Drinfeld-Sokolov reduction*, Commun. Math. Phys. **147** (1992) 295

[51] D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker, *Conformal invariance, unitarity and critical exponents in two dimensions*, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1575

[52] D. Gepner, *Space-time supersymmetry in compactified string theory and superconformal models*, Nucl. Phys. **B296** (1988) 757

[53] J. L. Gervais, *Infinite family of polynomial functions of the Virasoro generators with vanishing Poisson brackets*, Phys. Lett. **160B** (1985) 277

[54] P. Goddard, A. Kent, D. Olive, *Virasoro algebras and coset space models*, Phys. Lett. **152B** (1985) 88

[55] M. Green, J.H. Schwarz, E. Witten, *Superstring theory I+II*, (Cambridge Univ. Press 1987)

[56] D.J. Gross, J.A. Harvey, E. Martinec, R. Rohm, *Heterotic string theory (I) (II)*, Nucl. Phys. **B256** (1985) 253, Nucl. Phys. **B267** (1985) 75

[57] K. Hamada, M. Takao, *Spin-4 current algebra*, Phys. Lett. **209B** (1988) 247

[58] K. Hornfeck, *$\mathcal{W}$-algebras with a set of primary field of dimensions (3,4,5) and (3,4,5,6)*, Nucl. Phys. **B407** (1993) 237

[59] T. Inami, Y. Matsuo, I. Yamanaka, *Extended conformal algebra with $N = 2$ supersymmetry*, Int. J. Mod. Phys. **A5** (1990) 4441

[60] K. Ito, *Quantum Hamiltonian Reduction and $N = 2$ Coset Models*, Phys. Lett. **259B** (1991) 73

[61] K. Ito, *$N = 2$ superconformal CP_n model*, Nucl. Phys. **B370** (1992) 123

[62] E. Ivanov, S. Krivonos, *Superfield Realization of $N = 2$ Super W_3*, Phys. Lett. **291B** (1992) 63

[63] W. Lerche, C. Vafa, N.P. Warner, *Chiral rings in $N = 2$ superconformal theories*, Nucl. Phys. **B324** (1989) 427

[64] V.G. Kac, I.T. Todorov, *Superconformal current algebras and their unitary representations*, Commun. Math. Phys. **102** (1985) 337

[65] V.G. Kac, M. Wakimoto, *Modular invariant representations of infinite dimensional Lie algebras superalgebras*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **85** (1988) 4956

[66] H.G. Kausch, G.M.T. Watts, *A study of $\mathcal{W}$-algebras using Jacobi identities*, Nucl. Phys. **B354** (1991) 740

[67] H.G. Kausch, *Chiral algebras in conformal field theory*, Ph.D. thesis, Cambridge University, september 1991

[68] Y. Kazama, H. Suzuki, *New $N = 2$ superconformal field theories and superstring compactification*, Nucl. Phys. **B321** (1989) 232

[69] H. Lu, C.N. Pope, L.J. Romans, X. Shen, X.J. Wang, *Polyakov construction of the $N = 2$ super $\mathcal{W}_3$ algebra*, Phys. Lett. **264B** (1991) 91

[70] G. Moore, N. Read, *Fractional quantum Hall effect and nonabelian statistics*, Nucl. Phys. **B360** (1991) 362

[71] G. Mussardo, G. Sotkov, M. Stanishkov, *$N = 2$ Superconformal Minimal Models*, Int. J. Mod. Phys. **A4** (1989) 1135

[72] D. Nemeschansky, S. Yankielowicz, *$N = 2$ W-Algebra, Kazama-Suzuki models and Drinfeld-Sokolov reduction*, preprint USC-91/005

[73] S. Odake, *Character Formulas of an Extended Superconformal Algebra Relevant to String Compactification*, Int. J. Mod. Phys. **A5** (1990) 897

[74] S. Odake, *$c = 3d$ Conformal Algebra with Extended Supersymmetry*, Mod. Phys. Lett. **A5** (1990) 561

[75] C.N. Pope, L.J. Romans, K.S. Stelle, *On $\mathcal{W}_3$ strings*, Phys. Lett. **269B** (1991) 287

[76] Z. Qiu, *Nonlocal current algebra and N=2 superconformal field theory in two dimensions*, Phys. Lett. **188B** (1987) 207

[77] Z. Qiu, *Modular invariant partition functions for $N = 2$ superconformal field theories*, Phys. Lett. **198B** (1987) 497

[78] F. Ravanini, S.K. Yang, *Modular invariance in $N = 2$ superconformal field theories*, Phys. Lett. **195B** (1987) 202

[79] F. Ravanini, *An infinite class of new conformal field theories with extended algebras*, Mod. Phys. Lett. **A3** (1988) 397

[80] L.J. Romans, *The $N = 2$ Super W_3 Algebra*, Nucl. Phys. **B369** (1992) 403

[81] A.N. Schellekens, S. Yankielowicz, *Extended chiral algebras and modular invariant partition functions*, Nucl. Phys. **B327** (1989) 673

[82] R. Schimmrigk, *A new construction of a three-generation Calabi-Yau manifold*, Phys. Lett. **193B** (1987) 175

[83] C. Schweigert, *On the classification of N=2 superconformal coset theories*, Commun. Math. Phys. **149** (1992) 425

[84] A. Schwimmer, N. Seiberg, *Comments on the N=2,3,4 superconformal algebras in two dimensions*, Phys. Lett. **184B** (1987) 191

[85] C. Vafa, N.P. Warner, *Catastrophes and the classification of conformal field theories*, Phys. Lett. **184B** (1987) 191

[86] P. di Vecchia, J.L. Petersen, H.B. Zheng, *$N = 2$ Extended superconformal theories in two dimensions*, Phys. Lett. **218B** (1989) 51

[87] G.M.T. Watts, *$\mathcal{WB}_n$ symmetry, Hamilton reduction and B(0,n) Toda theory*, Nucl. Phys. **B361** (1991) 311

[88] P. West, *'Introduction to supersymmetry and supergravity'*, second edition 1990, World Scientific, Singapore

[89] A.B. Zamolodchikov, *Infinite additional symmetries in two dimensional conformal quantum field theory*, Theor. Math. Phys. **63** (1985) 1205