Universität Bonn
Physikalisches Institut

Rationale konforme Feldtheorien, der Dilogarithmus und Invarianten von 3-Mannigfaltigkeiten

von

Michael Terhoeven

Dieser Forschungsbericht wurde als Dissertation von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn angenommen.

Angenommen am 4.5.1995
Referent: Prof. Dr. Werner Nahm
Korreferen: Prof. Dr. Günter von Gehlen

Hab nun, ach! Philosophie,
Juristerei und Medizin,
Und leider auch Theologie!
Durchaus studiert, mit heißem Bemühn.
Da steh ich nun ich armer Tor!
Und bin so klug als wie zuvor;
Heiße Magister, heiße Doktor gar,
Und ziehe schon an die zehen Jahr
Herauf, herab und quer und krumm
Meine Schüler an der Nase herum -
Und sehe, daß wir nichts wissen können!
Das will mir schier das Herz verbrennen.
Zwar bin ich gescheiter als alle die Laffen,
Doktoren, Magister, Schreiber und Pfaffen;
Mich plagen keine Skrupel noch Zweifel,
Fürchte mich weder vor Hölle noch Teufel -
Dafür ist mir auch alle Freud entrissen,
Bilde mir nicht ein, was Rechts zu wissen,
Bilde mir nicht ein, ich könnte was lehren,
Die Menschen zu bessern und zu bekehren.
Auch hab ich weder Gut noch Geld,
Noch Ehr und Herrlichkeit der Welt;
Es möcht kein Hund so länger leben!

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Überblick

1.1 Einleitung: Wo sind wir? Welche Probleme gibt es? Welches ist hier unser Problem?

Dies ist der Beginn einer Dissertation in der Naturwissenschaft Physik, genauer: theoretischer Physik, vielleicht besser: mathematischer Physik. Man mag sagen, Physik versuche, die unbelebte Natur zu verstehen, Naturgesetze zu finden; theoretische Physik versuche einerseits experimentelle Daten zu erklären, andererseits, aufgrund theoretischer, mathematischer Modelle das Verhalten der Natur im Experiment vorherzusagen; mathematische Physik schließlich geht in der Abstraktion einen Schritt weiter: wir versuchen oft ohne konkretes Experiment vor Augen, aber mit der Begrifflichkeit der Physik (Energie, Masse, Länge, etc.), Modelle zu verstehen – diese sind meist Idealisierungen oder Teile von physikalisch interessanten, aber mathematisch zu anspruchsvollen, theoretischen Modellen – und orientieren uns dabei mit den kleinen Schritten eher an der mathematischen Lösbarkeit, mit den größeren Schritten eher an mathematisch interessanten Strukturen, denn an einer konkreten experimentellen Situation.

Diese Darstellung selbst ist natürlich eine Idealisierung, die Grenzen sind fließend (schon experimentelle Physik ist eine Abstraktion von der Natur, der Versuch, einen Aspekt der Natur möglichst unabhängig von anderen zu beobachten) und Grenzüberschreitungen eine Notwendigkeit. Einen großen Physiker zeichnet nicht zuletzt aus, einen wie großen Teil er umfassen kann, wie große Schritte er machen kann.

Gänzlich künstlich ist diese Aufteilung jedoch nicht. So manifestiert sie sich z.B. in den sogenannten Bulletin boards in der Aufteilung in hep-ph, hep-th, q-alg etc. Ist die zunehmende Spezialisierung in der Forschung einer klassischen Disziplin wie der Physik eine notwendige Folge des wachsenden Wissensstandes bei konstant begrenztem 'Fassungsvermögen' des (durchschnittlichen) Physikers? Wenn ja, wie sollte darauf die Ausbildung reagieren, wie die Vergabe von Geldmitteln? Gibt es nichts, was uns als Physiker vereint? (Oder stehen wir am Ende eines Paradigmas, eines Naturbildes, das in dieser Form, mit dieser Begrifflichkeit keine Weiterentwicklung mehr erlaubt?)

Doch, das gibt es und die Antwort steht schon da: die Natur, die Fragen und Probleme die die Natur, die unser Bild von der Natur aufwirft! Im Rest der Einleitung werde ich versuchen, einen möglichen Weg von der Natur, über Experimente, Theorien und Modelle zum Themenkreis dieser Disseration zu skizzieren.

Zum ersten: Eine kurze Liste konkreter und ungelöster Probleme, die die Natur der modernen Physik stellt, könnte lauten:

- Wie entsteht Turbulenz?
- Wie funktioniert das Gehirn (kann es als Maschine verstanden werden)?
- Was steht am Ende eines Schwarzen Lochs (existieren sie)?
- Was hält die Welt im innersten zusammen?

Wir werden uns natürlich auf den letzten Punkt konzentrieren.

Zum zweiten: Unser Bild von Natur enthält eine in unzähligen Experimenten geprüfte Klassifikation der Wechselwirkungen: die Planeten werden (im wesentlichen) von der Gravitation zusammengehalten, die Atome von der elektromagnetischen Wechselwirkung, die Atomkerne von der starken Wechselwirkung, daneben gibt es noch die in gewissen Zerfällen zu beobachtende schwache Wechselwirkung – die letzten drei sind im sogenannten Standardmodell der Elementarteilchenphysik zusammengefaßt und konsistent mit allen dazu durchgeführten Experimenten. Es fehlt jedoch eine Theory of everything (TOE), eine Vereinheitlichung von Gravitation und Standardmodell. Schlimmer noch: es gibt kein befriedigendes Modell einer quantisierten Gravitation, einer Vereinigung von Gravitation mit Quantenmechanik, Quantentheorie.

Zum dritten: Ein Ansatzpunkt zur Lösung dieser mißlichen Lage ist die Stringtheorie (vgl. Green, Schwarz, Witten (1987)); wesentliche Idee ist, das als Punkt im Raum dargestellte Teilchen z.B. des Standardmodells zu einer Saite auseinanderzuziehen. In der Tat erlaubt die Stringtheorie die Ableitung der Gleichungen der klassischen allgemeinen Relativitätstheorie, und als geeigneter Limes niedriger Energie ist durchaus das Standardmodell möglich. Sie hat einige Merkmale, die sie gegenüber gewöhnlichen Feldtheorien auszeichnet; einerseits macht sie eine Aussage über die Raum-Zeit-Dimension (der bosonische String z.B. ist nur in 26 Dimensionen Lorentz-invariant), andererseits hat sie eine enorme Vielfalt an Symmetrien. Allerdings ist die Stringtheorie auch noch sehr weit von experimentellen Vorhersagen entfernt (Schimmrigk (1995)): Es ist in gewissem Sinne keine Feldtheorie, insbesondere nicht feldquantisiert. Man sagt auch, Stringtheorie beschreibe Vakua einer noch zu studierenden sogenannten Stringfeldtheorie. Diese wiederum bildet nur ein Modell unserer Welt an der Planck-Energie und mag von der uns heute erreichbaren Physik noch durch Phasenübergänge (TOE→GUT→ Standardmodell) getrennt sein.

Zum vierten: Die Bausteine der Stringtheorie sind rationale, konforme Quantenfeldtheorien in zwei Dimensionen (RCFTn) und ein gutes Verständnis der Bausteine ist für das Verstehen des Gesamten unerläßlich. Insbesondere 'erben' diese Bausteine einen großen Teil der Symmetrien des Strings und ein erster Schritt im Studium von RCFTn ist die Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra oder erweiterter Symmetriealgebren, sogenannter $\mathcal{W}$-Algebren. Ein Ziel der modernen mathematischen Physik der letzten Jahre ist die Klassifikation aller RCFTn und Ziel dieser Doktorarbeit ist es, einen Versuch in dieser Richtung zu dokumentieren. (Die Erweiterung der Klasse der für phänomenologische Stringtheorien relevanten RCFTn (insbesondere der $N = 2$ supersymmetrischen Theorien mit zentraler Ladung $c = 9$) auf alle RCFTn, also auch die nicht-unitären ist dabei vom Standpunkt der Darstellungstheorie, aber auch dem der Anwendung von RCFTn in kritischen, statistischen Systemen natürlich.)

Die Einschränkung auf rationale Theorien ist im wesentlichen technisch begründet – rationale Theorien sind einfacher und besser verstanden – und im axiomatischen Zugang zu CFTn unnatürlich. Allerdings erwarten wir, da/ss/ in dem von uns betrachteten Rahmen (Klassifikation der Menge der effektiven zentralen Ladungen) beide Klassen gleichwertig sind und diese Einschränkung damit unwesentlich ist.

1.2 Überblick: Wie nähern wir uns dem Problem, wie fassen wir es an? Welche Hoffnung haben, hatten wir?

Zunächst beschreiben wir in einem ersten Kapitel (Kapitel 2) RCFTn, ihre wesentlichen Symmetrien und Strukturen und geben als Bonbon noch die Konstruktion von Invarianten topologischer 3-Mannigfaltigkeiten mithilfe der Dualitätsdaten von RCFTn dazu (wir finden, daß die Konstruktion auch für das nicht-unitäre $(2, 5)$ Virasoro-minimale Modell Sinn macht). Insbesondere stellen wir eine wesentliche Kennzahl aller RCFTn, die sogenannte effektive zentrale Ladung c_{eff} vor – sie beschreibt, wie die Zahl der Zustände zu gegebener Energie, $n(E)$, mit der Energie zunimmt $n(E) \sim \exp\left(\pi\sqrt{2E\, c_{\text{eff}}/3}\right)$.

Damit können wir als Teilschritt der Klassifikation aller RCFTn die Klassifikation aller effektiven zentralen Ladungen RCFTn formulieren. – Beide sind ungelöst.

Im dritten Kapitel geben wir eine Einführung in faktorisierende und rein elastische Streuung in einer Raum- und einer Zeitdimension, beschreiben beispielhaft die Streumatrizen der ADET-Klassifikation und stellen die Berechnung der effektiven zentralen Ladung der im ultravioletten Grenzwert den Streumatrizen entsprechenden RCFTn mithilfe des sogenannten thermodynamischen Bethe-Ansatzes (TBA) vor. Man findet

$$c_{\text{eff}} = \frac{1}{\mathrm{L}(1)} \sum_a \mathrm{L}(w_a),$$

wobei $\mathrm{L}(z)$ der sogenannte Rogers-Dilogarithmus ist und die Argumente durch die sogenannten stationären TBA-Gleichungen

$$w_a = \prod_b (1 - w_b)^{B_{ab}}$$

bestimmt sind (B ergibt sich als Nullkomponente der Fouriertransformation der Ableitung der Streuphase aus der Streumatrix).

Gleichungen dieses Typs für die effektive zentrale Ladung sind in den letzten Jahren in verschiedenem, aber verwandtem Kontext aufgetreten. Unverstanden war insbesondere der Zusammenhang der Argumente des Dilogarithmus und der Darstellungen der sogenannten Fusions-Algebra (einem Analogon der Clebsch-Gordan-Reihe für die Darstellungen der Symmetriealgebren RCFTn). Es gibt Beispiele, in denen die w_as durch das Quadrat des Kehrwerts der sogenannten Quantendimensionen (diese bilden eine Darstellung der Fusions-Algebra) gegeben sind. So hoffte man, zu gegebener Fusions-Algebra die möglichen effektiven zentralen Ladungen (und durch Einsetzen der anderen Darstellungen der Fusions-Algebra die konformen Dimensionen einer RCFTn) durch den Dilogarithmus leicht und schnell berechnen zu können.

Im vierten Kapitel stellen wir einen weiteren Weg vor, Gleichungen des obigen Typs für die effektive zentrale Ladung zu finden; nämlich durch das Studium der Asymptotik von Charakterfunktionen RCFTn in spezieller Gestalt, der sogenannten Summenform. Insbesondere können wir den Zusammenhang zwischen den Argumenten des Dilogarithmus und den Quantendimensionen und damit der Fusions-Algebra klären. Leider ist dieser komplizierter als erhofft ('conservation of misery') und enthält strukturelle Information, die im Prinzip schon den gesamten Charakter (die Erzeugendenfunktion des Energiespektrums) der RCFT festlegt. Die Fusions-Algebra alleine genügt in diesem Zugang nicht zur Berechnung der möglichen effektiven zentralen Ladungen. Allerdings ist ein für gewisse Fälle wertvolles Werkzeug zum Raten und Überprüfen von modularen Eigenschaften (notwendiges Wohlverhalten für Charaktere RCFTn) von Summenformen gefunden und ausgehend von Dilogarithmusidentitäten ist es tatsächlich in einer ganzen Reihe von Fällen möglich, die entsprechende Summenform und damit interessante Charakteridentitäten zu raten. Wir geben unter gewissen Einschränkungen die einfachsten Fälle von Charakteren in Summenform an.

Im fünften Kapitel schließlich stellen wir das Wissen über die Menge der effektiven zentralen Ladungen von RCFTn und für sie existierender und vermuteter Summenformen und Dilogarithmusidentitäten der Menge der Volumen, Chern-Simons- und η-Invarianten hyperbolischer 3-Mannigfaltigkeiten und entsprechender Dilogarithmusidentitäten gegenüber. Ja, auch in diesem zweiten Klassifikationsprogramm spielt der Dilogarithmus eine bedeutende Rolle. Die verblüffende Ähnlichkeit gewisser Ausdrücke in beiden Ansätzen ist bis heute unverstanden.

In drei Anhängen stellen wir zusammen: (A) einiges Wissenswerte über die verschiedenen Varianten des Dilogarithmus, (B) die Fusing-Matrizen, deren Pentagon-, Orthogonalitäts- und Zerlegungsrelation für das $(2,5)$ Virasorominimale Modell und (C) die ADET-Klassifikation, 'Cartan'-Matrizen, Exponenten und den Streumatrizen entsprechende RCFTn.

Faust

Der Faust ist für mich Inbegriff der Suche nach dem Stein der Weisen, nach Erkenntnis und vor allem dem damit verbundenen Leiden des Suchenden. Für mich ist das ein wesentlicher Teil von Wissenschaft, des Dramas Kern und einem Unerfahrenen nur schwer zu erklären. Ich überlaß's dem Faust.

2 RCFTn

In diesem einführenden Kaptitel soll am Beispiel des $(2,5)$ Virasoro-minimalen Modells ein Teil der Struktur von RCFTn (chiralen, rationalen, konformen Quantenfeldtheorien in zwei Dimensionen) skizziert werden. Im Fall von Unklarheiten und für weitergehende Information verweisen wir auf die von Itzykson, Saleur und Zuber (1988) herausgegebene Reprintsammlung, sowie auf Itzykson, Drouffe (1989) und Moore, Seiberg (1990).

2.1 Kovarianz unter lokalen Diffeomorphismen

Die Gruppe der lokalen, konformen Transformationen auf dem Torus $S^1 \times S^1$ ist unendlich-dimensional und isomorph zu $\mathit{Diff}(S^1)^2$. Die entsprechende Lie-Algebra des chiralen Anteils ist die Witt-Algebra $[l_m, l_n] = (n-m)l_{m+n}$ der linksinvarianten Vektorfelder $l_n = z^{n+1}\partial_z$ $(n \in \mathbb{Z})$. Äquivalent zur Theorie der projektiven Darstellungen dieser Algebra ist die Darstellungstheorie der zentral erweiterten sogenannten *Virasoro-Algebra*

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (n-m)L_{m+n} + \frac{1}{12}(n^3 - n)\delta_{m+n,0}C, \\ [L_m, C] &= 0, \end{aligned}$$

deren Moden L_m mit den Fourier-Komponenten $\oint \frac{dz}{2\pi i z}(T(z) + \frac{c}{24})z^{m-2}$ des chiralen Anteils des Energie-Impuls-Tensors $\mathcal{T}(z,\bar{z}) = T(z)\ dz \otimes dz + \bar{T}(\bar{z})\ d\bar{z} \otimes d\bar{z}$ der Feldtheorie identifiziert werden (und, grob gesprochen (vgl. Fuchs (1993)), im Fall der Virasoro-minimalen Modelle die Algebra der lokalen Observablen erzeugen).

Eine *Tiefstgewichtsdarstellungen* $W(h,c)$ der Virasoro-Algebra ist durch zwei Zahlen h, das konforme Gewicht und c, die zentrale Ladung, charakterisiert. Sie ist irreduzibel (in unserem Sprachgebrauch sei also eine Tiefstgewichtsdarstellung immer irreduzibel), enthält einen Vektor $|h\rangle$, so daß

$$\begin{aligned} L_0|h\rangle &= h|h\rangle, \\ C|h\rangle &= c|h\rangle, \\ L_n|h\rangle &= 0, \quad \text{falls } n < 0 \end{aligned}$$

und ist in dem von den Basiszuständen $L_{m_1}\dots L_{m_r}|h\rangle$ $(m_j > 0)$ aufgespannten Verma-Modul $M(h,c)$ enthalten. Der letztere ist im allgemeinen nicht irreduzibel und enthält sogenannte *singuläre Vektoren* $|s\rangle$ definiert durch $L_0|s\rangle = (h+k)|s\rangle$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $C|s\rangle = c|s\rangle$ und $L_n|s\rangle = 0$, falls $n < 0$. Insbesondere läßt sich jede Tiefstgewichtsdarstellung als Quotientenmodul des Verma-Moduls durch den maximalen, invarianten Untermodul auffassen. Von physikalischem Interesse sind nur besondere Tiefstgewichtsdarstellungen, nämlich solche, in denen die nichttrivialen (d.h. L_1 wird nicht betrachtet) Nullfelder des Vakuummoduls $W(h=0,c)$ (in RCFT haben diese eine endliche Basis) trivial dargestellt werden. Dabei wollen wir in diesem Rahmen mit Nullfeld das Erzeugnis der Virasoro-Algebra auf dem einem singulären Vektor zugeordneten Element der universellen Einhüllenden bezeichnen. Wir vermeiden an dieser Stelle die Einführung normalgeordneter Produkte und Ableitungen (oder gar von Vertexoperatoralgebren, mithilfe derer obige Bedingung als Kovarianzeigenschaft verstanden werden kann).

L_0 induziert eine natürliche Graduierung auf $W(h,c)$ (analog auf $M(h,c)$)

$$W(h,c) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} W(h,c)_n,$$

wobei $W(h,c)_n$ der L_0-Eigenraum zum Eigenwert $h+n$ ist. Die kanonische Bilinearform auf $W(h,c)$ (analog auf $M(h,c)$) ist definiert durch $\langle h|h\rangle = 1$ und $L_n^\dagger = L_{-n}$, $C^\dagger = C$. Die Matrix $M_n(h,c)$, die die Einschränkung des Skalarprodukts auf $M(h,c)_n$ angibt, ist reell und symmetrisch und daher diagonalisierbar. Nach dem Sylversterschen Trägheitssatz ist die Signatur $\mathrm{sig}(M_n(h,c)$ (Summe der Signaturen der Eigenwerte von M_n) eine Invariante unter Basiswechsel und damit ist es vernünftig neben dem *Charakter* der Tiefstgewichtsdarstellung (zunächst nicht mehr als die Erzeugenden Funktion der Entartung des Energie-Spektrums)

$$\chi_{(h,c)}(q) = \sum_{n\geq 0} \dim(W(h,c)_n) q^{n+h-c/24} = \mathrm{tr}_{W(h,c)} q^{L_0 - c/24}$$

auch den sogenannte *Signaturcharakter*

$$\sigma_{(h,c)}(q) = \sum_{n\geq 0} \mathrm{sig}(M_n(h,c))q^{n+?}$$

zu definieren. Die Theorie heißt *unitär*, wenn Signaturcharakter und Charakter übereinstimmen, d.h. die kanonische Bilinearform auf $M(h,c)$ positiv semidefinit und auf $W(h,c)$ positiv definit ist. Wegen $L_{-n}L_n|h\rangle = (2nh + c(n^3 - n)/12|h\rangle$ sind dann notwendig h und $c \geq 0$.

Die von Kac (1978) (vgl. Feigin, Fuchs (1982)) gefundene Determinanten-Formel

$$\det(M_n(h,c)) = K_n \prod_{rs\leq n} (h - h_{r,s}(c))^{p(n-rs)},$$
$$h_{r,s}(c) = \frac{((m+1)s - mr)^2 - 1}{4m(m+1)},$$
$$c = c(m) = 1 - \frac{6}{m(m+1)},$$

wobei $\prod_{n>0}(1 - q^n)^{-1} = \sum_{n\geq 0} p(n)q^n$ und K_n eine von Null verschiedene Konstante ist, gibt die Grade der singulären Vektoren in $M(h,c)$ an. Gebräuchlich ist auch die Parametrisierung durch p und q mit $m = p/(q-p)$.

Von besonderem Interesse sind die sogenannten Virasoro-minimalen Modelle mit $p, q \in \mathbb{N}$, $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$ und $q > p$: Die Zahl der (physikalischen) Tiefstgewichtsdarstellungen mit mindestens zwei singulären Vektoren ist endlich (vgl. Belavin, Polyakov, Zamolodchikov (1984)) – man sagt auch, die Theorie sei *rational* – und diese sind durch $h_{r,s}(c)$ mit $(c = c(p/(q-p)))$ $1 \leq r \leq q-1$ und $1 \leq s \leq p-1$ charakterisiert. (Diese entsprechen den *Superauswahlsektoren* der Theorie; der Sektor zu konformem Gewicht $h = 0$ wird Vakuumsektor genannt, da er auf dem translationsinvarianten Zustand $|0\rangle$ mit $L_1|0\rangle = 0$ aufbaut. Die überwältigende Symmetriefülle führt zu einem Energie-Spektrum mit ganzzahligen Abständen.)

Insbesondere erhalten wir für das $(p,q) = (2,5)$ Virsoro-minimale Modell: $m = 2/3$, $c = -22/5$, $h_{1,1} = h_{4,1} = 0$ und $h_{2,1} = h_{3,1} = -1/5$. Die Charaktere der beiden ('physikalischen') Tiefstgewichtsdarstellungen können in einer ganzen Reihe verschiedener Formen geschrieben werden, die wir die Rocha-Caridi-Form, die Produkt- und die Summenform (gebräuchlich ist auch Eulerform oder fermionische Form) nennen wollen (vgl. Rocha-Caridi (1984) und Feigin, Nakanishi, Ooguri

(1992))

$$\begin{aligned}
\chi_{(0,-22/5)}(q) &= \frac{1}{\eta(q)}\left(\Theta_{3,10}-\Theta_{7,10}\right)(q) \\
&= q^{11/60}\prod_{m>0,m=2,3 \bmod 5}(1-q^m)^{-1} = q^{11/60}\sum_{m\geq 0}\frac{q^{m^2+m}}{(q)_m}, \\
&= q^{11/60}(1+q^2+q^3+q^4+q^5+2q^6+2q^7+3q^8+3q^9+4q^{10} \\
&\qquad +4q^{11}+6q^{12}+6q^{13}+8q^{14}+9q^{15}+11q^{16}+12q^{17} \\
&\qquad +15q^{18}+16q^{19}+20q^{20}+22q^{21}+26q^{22}+29q^{23}+\dots)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\chi_{(-1/5,-22/5)}(q) &= \frac{1}{\eta(q)}\left(\Theta_{1,10}-\Theta_{9,10}\right)(q) \\
&= q^{-1/60}\prod_{m>0,m=1,4 \bmod 5}(1-q^m)^{-1} = q^{-1/60}\sum_{m\geq 0}\frac{q^{m^2}}{(q)_m}, \\
&= q^{-1/60}(1+q+q^2+q^3+2q^4+2q^5+3q^6+3q^7+4q^8+5q^9 \\
&\qquad +6q^{10}+7q^{11}+9q^{12}+10q^{13}+12q^{14}+14q^{15}+17q^{16} \\
&\qquad +19q^{17}+23q^{18}+26q^{19}+31q^{20}+35q^{21}+41q^{22}+\dots),
\end{aligned}$$

wobei $(q)_n = (1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)$, $\eta(q) = q^{1/24}(q)_\infty$ und $\Theta_{l,k}(q) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{k(m+l/2k)^2}$ ist. Die Gleichheit der zweiten und dritten Form sind die sogenannten *Rogers-Ramanujan-Identitäten.* Die erste Form erlaubt eine einfache Berechnung des modularen Verhaltens der Charaktere und spiegelt die Einbettungsstruktur der Verma-Module wieder, sie existiert für alle minimalen Modelle; die zweite Form existiert nur für gewisse Charaktere gewisser Modelle (vgl. Kellendonk, Rösgen, Varnhagen (1993)) und ist bei der Erkennung von Produktstrukturen im beschreibenden Pfadraum und in der Fusion nützlich; die dritte Form, ihre Verallgemeinerungen und ihre Bedeutung ist zentral in dieser Arbeit und wird im folgenden immer wieder auftreten.

An dieser Stelle wollen wir nur die Rolle der Summenform für den Beweis der linearen Unabhängigkeit eines gewissen Erzeugendensystems der Tiefstgewichtsdarstellungen des $(2,5)$ Modells (und analog der (2,ungerade) Modelle) erwähnen (vgl. Feigin, Nakanishi, Ooguri (1992)): Die Autoren zeigen, daß ein Erzeugendensystem durch

$$L_{m_1}\dots L_{m_r}|h_{j,1}\rangle$$

mit $j\in\{1,2\}$ und $(m_1,\dots m_r)\in C_j = \{(m_1,\dots m_r)\in\mathbb{Z}_+^r \mid m_1\geq\dots\geq m_r\geq 1,$ $m_i - m_{i+1}\geq 2,\ \#\{m_i=1\}<j\}$ gegeben ist. Die lineare Unabhängigkeit folgt

nun daraus, daß die Erzeugendenfunktion der die Bedingungen erfüllenden Tupel $(m_1, \ldots m_r)$ mit $\sum_i m_i = l$ nichts anderes als die Summen-Form ist

$$\sum_l \frac{q^{l^2+(2-j)l}}{(q)_l} = \sum_{(m_1,\ldots m_r)\in C_j} \prod_{i=1}^r q^{m_i}.$$

Ausdrücke für die Signaturcharaktere aller Virasoro-Tiefstgewichtsdarstellungen wurden in Kent (1991) angegeben. Wir wollen an dieser Stelle die von W. Nahm vorgeschlagene Form nur für den Fall des $(2,5)$ minimalen Modells vorstellen

$$\begin{aligned}\sigma_{(0,-22/5)}(q) &= q^? \sum_{m\geq 0} (-)^m \frac{q^{m^2+m}}{(q)_m}, \\ &= q^?(1 - q^2 - q^3 - q^4 - q^5 + q^8 + q^9 + 2q^{10} + 2q^{11} + 2q^{12} \\ &\quad + 2q^{13} + 2q^{14} + q^{15} + q^{16} - q^{18} - 2q^{19} - 2q^{20} \\ &\quad - 4q^{21} - 4q^{22} - 5q^{23} - 5q^{24} - 6q^{25} - 5q^{26} + \ldots)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sigma_{(-1/5,-22/5)}(q) &= q^? \sum_{m\geq 0} (-)^m \frac{q^{m^2}}{(q)_m} \\ &= q^?(1 - q - q^2 - q^3 + q^6 + q^7 + 2q^8 + q^9 + 2q^{10} + q^{11} \\ &\quad + q^{12} - 2q^{15} - q^{16} - 3q^{17} - 3q^{18} - 4q^{19} - 3q^{20} \\ &\quad - 5q^{21} - 3q^{22} - 4q^{23} - 2q^{24} - 3q^{25} - q^{27} + \ldots).\end{aligned}$$

Abschließen wollen wir diesen Abschnitt mit der Angabe der unabhängigen Nullfelder des (2,5) Modells. Im Vakuumsektor haben wir einen singulären Vektor zum Grad eins $L_1|0\rangle$, einen anderen zum Grad vier $(L_2L_2 - \frac{3}{5}L_4)|0\rangle$ mod $LL_1|0\rangle$. Im Sektor mit $h = -1/5$ sind es $(-\frac{2}{5}L_2 + (L_1)^2)|-1/5\rangle$ und $(\frac{4}{5}L_3 + 8L_2L_1 - 5(L_1)^3)|-1/5\rangle$. Bis auf den ersten lassen sich alle diese auffassen als erzeugt vom Nullfeld (vgl. Feigin, Nakanishi, Ooguri (1992)) $A(z) = (TT)(z) - \frac{3}{5}\partial^2 T(z) = \mathcal{N}(TT)$, $A_n = \sum_{j\in\mathbb{Z}} {:}L_{n-j}L_j{:} - \frac{3}{10}(n-2)(n-3)L_n$, genauer A_4, A_2 und $A_3 - \frac{5}{3}L_1A_2$.

2.2 Modulare Kovarianz

Neben den lokalen, konformen Transformationen gibt es auf dem Torus $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$ ($\tau \in H = \{\tau \in \mathbb{C}|\mathrm{Re}\tau > 0\}$) noch eine ausgezeichnete Parametrisierungsinvarianz. Diese wird erzeugt von $t : \tau \to \tau + 1$ und $s : \tau \to -\frac{1}{\tau}$, folglich $(st)^3 = s^2 = \mathbb{1}$ und ist isomorph zur diskreten, sogenannte modularen Gruppe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, der 2×2 Matrizen mit ganzzahligen Einträgen, Determinante eins und der Identifikation jeder Matrix M mit $-M$.

Insbesondere sollte die Zustandssumme jeder Theorie auf dem Torus modular invariant sein. Für die bekannten Beispiele von RCFTn gilt jedoch mehr (vgl. Cardy (1986), Cappelli, Itzykson, Zuber (1987)): schon die Bausteine der Zustandssumme, die Charaktere, zeigen gutartiges Verhalten unter modularen Transformationen, genauer: unter der Identifikation von q mit $e^{2\pi i\tau}$, die aus der Identifikation der Translationsoperatoren auf dem Torus mit $L_0 \pm \bar{L}_0$ folgt, operiert $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ auf dem von den Charakteren aufgespannten Vektorraum linear. Weiterhin gilt für die Darstellungsmatrizen der Generatoren $(ST)^3 = S^2 = C$, wobei $C = C^{-1}$ eine Ladungskonjugation bezeichnet. Man spricht von *modularer Kovarianz.*

Im Fall des $(2,5)$ minimalen Modells findet man

$$\chi_{(h,-22/5)}(-\frac{1}{\tau}) = \sum_{h'} S_{hh'}\chi_{(h',-22/5)}(\tau),$$
$$\chi_{(h,-22/5)}(\tau+1) = \sum_{h'} T_{hh'}\chi_{(h',-22/5)}(\tau)$$

mit

$$S = \frac{2}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -\sin(\frac{2\pi}{5}) & \sin(\frac{\pi}{5}) \\ \sin(\frac{\pi}{5}) & \sin(\frac{2\pi}{5}) \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} e^{11\pi i/30} & 0 \\ 0 & e^{-\pi i/30} \end{pmatrix}.$$

Die S-Transformation erlaubt eine einfache Bestimmung des Verhaltens der Charaktere im Grenzwert $q \nearrow 1$ ($i\tau \nearrow 0$); so gilt für nicht verschwindendes $S_{hh_{\min}}$

$$\chi_{(h,-22/5)}(q) = S_{hh_{\min}}\tilde{q}^{h_{\min}-c/24} + \ldots,$$

wobei $\tilde{q} = e^{2\pi/i\tau}$ und die Punkte für Terme mit höheren Potenzen von $\tilde{q}$ stehen. Insbesondere wird deutlich, daß die Divergenz des Charakters durch die sogenannte *effektive zentrale Ladung* $c_{\mathrm{eff}} = c - 24h_{\min}$ (notwendig > 0) charakterisiert wird.

Diese Tatsache kann zum Vergleich der Größen der verschiedenen Tiefstgewichtsdarstellungen benutzt werden. Man betrachte dazu einfach

$$\lim_{q \nearrow 1} \frac{\chi_{(h,-22/5)}(q)}{\chi_{(0,-22/5)}(q)} = \frac{S_{h h_{\min}}}{S_{0 h_{\min}}} = \lambda_{h_{\min}}(h),$$

wobei $h_{\min}$ eine im allgemeinen beliebige Referenzdarstellung bezeichnet, hier natürlich die Darstellung minimaler Energie (in unitären Theorien $h_{\min} = 0$). Im letzteren Fall heißen die Zahlen $\lambda_{h_{\min}}(h)$ die *Quantendimensionen* der Theorie, in der Tat sind sie in allen bekannten Beispielen reell, jedoch meist irrational, aber algebraisch. Die anderen λs werden wir im folgenden auch als verallgemeinerte Quantendimensionen bezeichnen.

Eine weitere bemerkenswerte Tatsache in diesem Zusammenhang ist die sogenannte *Verlinde-Formel* (vgl. Verlinde (1988))

$$\sum_l \frac{S_{il} S_{jl} (S^{-1})_{lk}}{S_{0l}} = N_{ij}^k \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

die mit den im nächsten Abschnitt skizzierten Methoden im Rahmen von RCFTn 'bewiesen' (bzw. auf Dualität zurückgeführt) werden kann. Sie gilt für die S-Matrix der maximalen Symmetriealgebra. Die Zahlen N_{ij}^k können als Strukturkonstanten einer assoziativen und kommutativen Algebra mit Eins, $\Phi_i \Phi_j = \sum_k N_{ij}^k \Phi_k$, der sogenannten *Fusions-Algebra* aufgefaßt werden. Darstellungen sind durch $\Lambda_l \colon \Phi_i \mapsto \lambda_l(i)$ gegeben. Bezeichnen wir die Operation der Ladungskonjugation C mit $k \to \bar{k}$, so gilt $\lambda_0(k) = \lambda_0(\bar{k})$ und $N_{ij}^k = N_{i\bar{k}}^{\bar{j}}$; es folgt (diese Aussage werden wir im nächsten Abschnitt benötigen)

$$\sum_{i,j} \lambda_0(i)\lambda_0(j) N_{ij}^k = \sum_{i,j} \lambda_0(i)\lambda_0(\bar{j}) N_{i\bar{k}}^{\bar{j}} = \sum_i \lambda_0(i)^2 \lambda_0(\bar{k}) = \lambda_0(k) \sum_i \lambda_0(i)^2. \quad (*)$$

In unserem Beispiel sind beide Felder ungeladen und wir finden als Fusions-Algebra

$$\mathbb{1}\mathbb{1} = \mathbb{1}, \quad \mathbb{1}\Phi = \Phi, \quad \Phi\Phi = \mathbb{1} + \Phi,$$

wobei wir dem konformen Gewicht $h = 0(-1/5)$ das Element $\mathbb{1}(\Phi)$ zugeordnet haben.

Das modulare Verhalten der Signaturcharaktere ist unklar.

2.3 Dualität

von RCFTn soll in diesem Abschnitts auf möglichst elementare Weise betrachtet werden.

Als grundlegende und weiterführende Literatur verweisen wir auf Belavin, Polyakov, Zamolodchikov (1984), Alvarez-Gaumé, Sierra, Gomez (1990), Moore, Seiberg (1990), Schomerus (1994), Gaberdiel (1994) und Fuchs, Ganchev, Vecsernyés (1994). Da wir es weiterhin vermeiden wollen, Vertexoperatoren einzuführen, werden wir nur kurz einige wichtige Eigenschaften der 4-Punkt-Funktionen und deren Berechnung andeuten, diese dann für das $(2,5)$ Virasoro-minimale Modell angeben, in die sogenannten konformen Blöcke zerlegen und versuchen, die Dualitätsstrukturen und sogenannten polynomialen Gleichungen zu verstehen.

Zunächst ein 'Bild' für *Dualität*: Betrachte eine Riemannsche Fläche mit einer festen Anzahl von ausgezeichneten Punkten und 'klebe' an jeden Punkt eine Darstellung der Virasoro-Algebra einer CFT (allgemeiner: einer $\mathcal{W}$-Algebra). Nimm an, wir seien in der Lage, diesem Objekt einen Vektorraum zuzuordnen, einen endlichen im Falle einer RCFT. Erlaube auf der Menge dieser Flächen eine Operation des Vernähens und Zerschneidens; insbesondere bleiben als fundamentale Objekte nur Kugelschalen mit drei ausgezeichneten Punkten und angeklebten Darstellungen. Eine mögliche Interpretation von Dualität besagt dann 'einfach', daß der einer beliebigen markierten Fläche zugeordnete Vektorraum unabhängig von der Wahl der Nähte und Schnitte sein soll.

Nun zu den Korrelations- oder *n-Punkt-Funktionen*: Das sind Abbildungen von den im obigen Bild gegebenen Daten, also einer Fläche T, ausgezeichneten Punkten $z_j,\ j = 1 \dots n$ und physikalischen Darstellungen der Virasoro Algebra ϕ_j (oder besser der chiralen und antichiralen Virasoro Algebra, allgemeiner der W-Algebra) zu konformem Gewicht h_j $(\bar{h}_j)$ nach $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Wir schreiben

$$\langle \phi_1(z_1) \dots \phi_n(z_n) \rangle_T,$$

werden uns jedoch im folgenden auf den Fall $T = S^2$ beschränken. Unter der Identifizierung von S^2 mit $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist es eine übliche Konvention, die Darstellungen $\phi_j(z_j)$ in der Korrelationsfunktion nach dem Betrag des Arguments $|z_1| > \dots > |z_n|$ zu ordnen. Auch seien die Funktionen invariant unter Einfügen von Vakuumdarstellungen $\mathbb{1}(z)$.

Die Invarianz des Vakuums unter der von $L_{0,\pm 1}$ erzeugten $SL(2,\mathbb{C})$, der sogenannten Möbius-Algebra, führt auf Invarianz der n-Punkt-Funktionen unter gebrochen-linearen Transformationen $g : z \to \frac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc=1)$ mit $dg/dz = \frac{1}{(cz+d)^2}$

$$\langle \phi_1(g\cdot z_1)\dots\phi_n(g\cdot z_n)\rangle = \left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{dg}{dz_i}\right)^{h_i}\left(\frac{dg}{d\bar{z}_i}\right)^{\bar{h}_i}\right)\langle \phi_1(z_1)\dots\phi_n(z_n)\rangle,$$

wobei eine (Um-)Ordnung der entsprechenden Felder impliziert wird. Diese erlauben es insbesondere, die Argumente jeder 4-Punkt-Funktion auf ξ, gegeben durch das Doppelverhältnis $z_{12}z_{34}/z_{13}z_{24}$ mit $z_{ij}=z_i-z_j$, sowie 0, 1 und ∞ zu transformieren (die bei der entsprechenden Transformation $z \to \frac{(z-z_2)(z_3-z_4)}{(z-z_3)(z_2-z_4)}$ auftretenden unendliche Konstanten werden ignoriert). Bezeichnen wir die entsprechende 4-Punkt-Funktion $\langle\phi_i(\infty)\phi_j(1)\phi_k(\xi)\phi_l(0)\rangle$, $1>|\xi|>0$ mit $\mathcal{F}_{ijkl}(\xi)$, so folgt

$$\mathcal{F}_{ijkl}(\xi) = \mathcal{F}_{ilkj}(1-\xi) = \xi^{-2h_k}\bar{\xi}^{-2\bar{h}_k}\mathcal{F}_{ljki}\left(\frac{1}{\xi}\right).$$

Für die 0-, 1-, 2- und 3-Punkt Funktionen ergibt sich

$$\langle\rangle = \langle \mathbb{1}\rangle \propto 1, \quad \langle\phi(z)\rangle = 0, \quad \langle\phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\rangle \propto \frac{\delta_{h_1,h_2}\delta_{\bar{h}_1,\bar{h}_2}}{{z_{12}}^{2h_1}{\bar{z}_{12}}^{2\bar{h}_1}},$$

und

$$\langle\phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\phi_3(z_3)\rangle \propto \frac{1}{{z_{12}}^{-h_3+h_1+h_2}{\bar{z}_{12}}^{-\bar{h}_3+\bar{h}_1+\bar{h}_2}\cdot(\text{zyklisch})}.$$

Die singulären Vektoren der Darstellungen führen auf Differentialgleichungen für die n-Punkt-Funktionen, die es im Prinzip erlauben, diese (bis auf multiplikative Konstanten) zu berechnen. Im Falle des $(2,5)$ Virasoro-minimalen Modells findet man (vgl. Dotsenko, Fateev (1984), Cardy (1985)) für die einzig nicht-triviale 4-Punkt-Funktion zur Darstellung ϕ mit konformem Gewicht $h_{1,2}=-1/5$

$$\begin{aligned}\langle\phi(z_1)\phi(z_2)\phi(z_3)\phi(z_4)\rangle \;\propto\; & |(z_{13}z_{24})^{2/5}|^2|\xi^{2/5}|^2|(1-\xi)^{2/5}|^2\times \\ \times\Bigg(\left|{}_2F_1\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5};\frac{6}{5};\xi\right)\right|^2 \; - \; & \frac{\Gamma(\frac{6}{5})^2\Gamma(\frac{1}{5})\Gamma(\frac{2}{5})}{\Gamma(\frac{3}{5})\Gamma(\frac{4}{5})^3}\left|\xi^{-1/5}{}_2F_1\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5};\frac{4}{5};\xi\right)\right|^2\Bigg),\end{aligned}$$

wobei $1-\xi = \frac{z_{14}z_{23}}{z_{13}z_{24}}$ und ${}_2F_1(a,b;c;\xi) = {}_2F_1(b,a;c;\xi)$ die hypergeometrischen Funktionen (im nicht-entarteten Fall $a,b,c-a,c-b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$) sind, definiert als analytische Fortsetzung mit Schnitt von 1 nach ∞ der hypergeometrischen Reihe ${}_2F_1(a,b;c;\xi) = \sum_{n\geq 0}\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)}\frac{\xi^n}{n!}$, konvergent für $|\xi|<1$ und $|\xi|=1$, falls $\mathrm{Re}(a+b-c)<0$, dann mit ${}_2F_1(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$, $c\notin\mathbb{Z}_{\leq 0}$. Weitere Eigenschaften von Interesse (vgl. Erdélyi (1953)) sind

$$
{}_2F_1(a,b;c;\xi)=(1-\xi)^{c-a-b}{}_2F_1(c-a,c-b;c;\xi) \quad \text{mit} \quad \xi\in\mathbb{C}\setminus[1,\infty]\,,
$$

sowie das Transformationsverhalten unter $\xi\to 1-\xi$ mit $\xi\in\mathbb{C}\setminus[1,\infty]$

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1(a,b;c;\xi) = & \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\,{}_2F_1(a,b;a+b-c+1;1-\xi) \\
& + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\,(1-\xi)^{c-a-b} \\
& \qquad {}_2F_1(c-a,c-b;c-a-b+1;1-\xi)
\end{aligned}
$$

und entsprechend $\xi\to 1/\xi$ mit $\xi\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty]$

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1(a,b;c;\xi) = & \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}\,(-\xi)^{-a}{}_2F_1\left(a,1-c+a;1-b+a;\frac{1}{\xi}\right) \\
& + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}\,(-\xi)^{-b}{}_2F_1\left(b,1-c+b;1-a+b;\frac{1}{\xi}\right).
\end{aligned}
$$

Die obige Faktorisierung der 4-Punkt-Funktion in einen holomorphen und antiholomorphen Anteil ist eine allgemeine Eigenschaft aller RCFTn. Die entsprechenden Komponenten $\mathcal{F}^m_{ijkl}(\xi)$ der Zerlegung

$$
\mathcal{F}_{ijkl}(\xi)=\sum_{m,\bar{m}}\mathcal{F}^m_{ijkl}(\xi)A_{m\bar{m}}\bar{\mathcal{F}}^{\bar{m}}_{ijkl}(\bar{\xi})
$$

werden auch *konforme Blöcke* genannt. Dabei ist m bestimmt durch das Verhalten für $\xi\to 0$ (für $N^m_{kl}>1$ ist m Multiindex); es muß gelten

$$
\mathcal{F}^m_{ijkl}(\xi)\propto\xi^{-h_k-h_l+h_m+\Delta^m_{kl}}, \quad \text{mit } \Delta^m_{kl}\in\mathbb{Z}_{\geq 0},
$$

wobei h_k und h_l die konformen Gewichte der Darstellungen ϕ_k und ϕ_l sind und h_m das konforme Gewicht einer Darstellung in der Fusion von ϕ_k mit ϕ_l, d.h. $N^m_{kl}>0$ (eigentlich ist das die ursprüngliche Definition von Fusion, allerdings folgen wir hier ohnehin nicht dem historischen Weg). Diese Asymptotik wird weitergehend durch die sogenannte *Operatorproduktentwicklung* interpretiert: Naiv (in gewissem Sinne in niedrigster Ordnung) mag man sich vorstellen, daß im Grenzwert $\xi\to 0$ das 'Produkt der Felder' $\phi_k(\xi)$ und $\phi_l(0)$ durch einen (für nicht-verschwindendes Δ^m_{kl} angeregten) Zwischenzustand in der Darstellung ϕ_m dominiert wird und zur durch $SL(2,\mathbb{C})$-Invarianz festgelegten Form für eine 3-Punkt-Funktion reduziert.

Bezeichnen wir in unserem Beispiel wieder mit $\mathbb{1}$ die Vakuumdarstellung und mit Φ die Darstellung zu konformem Gewicht $h = -1/5$, so finden wir durch Zerlegung der angegebenen 4-Punkt-Funktion

$$\mathcal{F}^{\Phi}_{\Phi\Phi\Phi\Phi}(\xi) = \mathcal{F}^{\Phi}_{\Phi^4}(\xi) = \mathcal{N}^{\Phi}\xi^{1/5}(1-\xi)^{2/5}\,{}_2F_1\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5};\frac{4}{5};\xi\right) \propto \xi^{1/5} \text{ für } \xi \to 0$$

und

$$\mathcal{F}^{\mathbb{1}}_{\Phi^4}(\xi) = \mathcal{N}^{\mathbb{1}}\xi^{2/5}(1-\xi)^{2/5}\,{}_2F_1\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5};\frac{6}{5};\xi\right) \propto \xi^{2/5} \text{ für } \xi \to 0$$

in Übereinstimmung mit der im vorhergehenden Abschnitt angegebenen Fusions-Algebra. Die Normierungskonstanten $\mathcal{N}$ treten entsprechend in den weiteren nichtverschwindenden, aber trivialen (Einfügen von Vakuumdarstellungen in 0-, 2- und 3-Punkt-Funktion) konformen Blöcken auf

$$\mathcal{F}^{\Phi}_{\Phi^3} = \mathcal{F}^{\Phi}_{\Phi^3\mathbb{1}} = \mathcal{F}^{\Phi}_{\Phi^2\mathbb{1}\Phi} = \ldots = \mathcal{N}^{\Phi}, \quad \mathcal{F}^{\mathbb{1}}_{\Phi^2} = \mathcal{N}^{\mathbb{1}} = \mathcal{F}^{\mathbb{1}}_{\mathbb{1}^4}.$$

Analoge Faktorisierung erwartet und findet man für die gekreuzten 4-Punkt-Funktionen $\mathcal{F}_{ilkj}(1-\xi)$ und $\xi^{-2h_k}\bar{\xi}^{-2\bar{h}_k}\mathcal{F}_{ljki}\left(\frac{1}{\xi}\right)$ als Funktionen von $1-\xi$ und $1/\xi$ und definiert die entsprechenden konformen Blöcke. In dieser 'Realisierung' bedeutet Dualität dann, daß die verschiedenen konformen Blöcken einer 4-Punkt-Funktion linear abhängig sind; genauer: die Menge der konformen Blöcke jeder Kreuzung der 4-Punkt-Funktion bilden eine (andere) Basis desselben Vektorraums. Die Matrizen des Basiswechsels sind die sogenannten Braiding- und Fusing-Matrizen, B und F

$$\mathcal{F}^{n}_{ilkj}(\xi) = \sum_m F_{nm}\begin{bmatrix} jk \\ il \end{bmatrix}\mathcal{F}^{m}_{ijkl}(1-\xi),$$
$$\mathcal{F}^{n}_{ljki}(\xi) = \sum_m B_{nm}\begin{bmatrix} jk \\ il \end{bmatrix}\mathcal{F}^{m}_{ijkl}(1/\xi).$$

(Die hier gewählte Definition scheint im wesentlichen (bis auf 'Eichfreiheit') konsistent mit den Konventionen in Fuchs, Ganchev, Vecsernyés (1994) zu sein, während in Moore, Seiberg (1990) die transponierten Matrizen benutzt werden.)

Im Fall des $(2,5)$ Virasoro-minimalen Modells liest man vom Transformationsverhalten der hypergeometrischen Funktionen ab

$$F_{nm}\begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \Phi\Phi \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(\frac{6}{5})\Gamma(-\frac{1}{5})}{\Gamma(\frac{3}{5})\Gamma(\frac{2}{5})} & \frac{\mathcal{N}^{\mathbb{1}}}{\mathcal{N}^{\Phi}}\frac{\Gamma(\frac{6}{5})\Gamma(\frac{1}{5})}{\Gamma(\frac{4}{5})\Gamma(\frac{3}{5})} \\ \frac{\mathcal{N}^{\Phi}}{\mathcal{N}^{\mathbb{1}}}\frac{\Gamma(\frac{4}{5})\Gamma(-\frac{1}{5})}{\Gamma(\frac{2}{5})\Gamma(\frac{1}{5})} & \frac{\Gamma(\frac{4}{5})\Gamma(\frac{1}{5})}{\Gamma(\frac{3}{5})\Gamma(\frac{2}{5})} \end{pmatrix}_{n,m\in\{\mathbb{1},\Phi\}}$$

(alle weiteren Fusing-Matrixelemente sind im Anhang B zusammengefaßt) und

$$B_{nm}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}(\pm)=\begin{pmatrix}\frac{\Gamma(\frac{6}{5})\Gamma(-\frac{1}{5})}{\Gamma(\frac{3}{5})\Gamma(\frac{2}{5})}e^{\mp 2\pi i/5} & \frac{\mathcal{N}^{\mathbb{1}}}{\mathcal{N}^{\Phi}}\frac{\Gamma(\frac{6}{5})\Gamma(\frac{1}{5})}{\Gamma(\frac{4}{5})\Gamma(\frac{3}{5})}e^{\mp\pi i/5}\\ \frac{\mathcal{N}^{\Phi}}{\mathcal{N}^{\mathbb{1}}}\frac{\Gamma(\frac{4}{5})\Gamma(-\frac{1}{5})}{\Gamma(\frac{2}{5})\Gamma(\frac{1}{5})}e^{\mp\pi i/5} & \frac{\Gamma(\frac{4}{5})\Gamma(\frac{1}{5})}{\Gamma(\frac{3}{5})\Gamma(\frac{2}{5})}\end{pmatrix}_{n,m\in\{\mathbb{1},\Phi\}},$$

wobei es zwei Möglichkeiten abhängig von der Richtung der analytischen Fortsetzung gibt.

Ein einfacher Zusammenhang von Fusing- und Braiding-Matrix scheint offensichtlich; in der Tat gilt im allgemeinen Fall

$$F_{nm}\begin{bmatrix}jk\\ il\end{bmatrix}=e^{\mp\pi i(h_i+h_k-h_n-h_m)}B_{nm}\begin{bmatrix}jl\\ ik\end{bmatrix}(\pm).$$

Leicht läßt sich auch mit $F_{\Phi\Phi}=-F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}=-F_{\Phi\mathbb{1}}F_{\mathbb{1}\Phi}=\frac{\Gamma(4/5)\Gamma(1/5)}{\Gamma(3/5)\Gamma(2/5)}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{\sin(2\pi/5)}{\sin(\pi/5)}=2\cos(\pi/5)$ ($F_{\Phi\Phi}^2=1+F_{\Phi\Phi}$) die 'Orthogonalität' ($F^2=\mathbb{1}$) der Fusing-Matrix nachrechnen. Allgemein folgt durch zweimaliges Anwenden der Definition für nichtverschwindendes $\mathcal{F}^n_{ilkj}(\xi)$

$$\sum_m F_{nm}\begin{bmatrix}jk\\ il\end{bmatrix}F_{mp}\begin{bmatrix}lk\\ ij\end{bmatrix}=\delta_{n,p}.$$

In unserem Fall (da $N^k_{ij}\leq 1$) kann man auch

$$\sum_m F_{nm}\begin{bmatrix}jk\\ il\end{bmatrix}F_{mn}\begin{bmatrix}lk\\ ij\end{bmatrix}=N^n_{il}N^n_{jk} \qquad (*)$$

schreiben (eine ähnliche Beziehung gilt auch im allgemeinen Fall).

Als weitere Konsistenzbedingungen an Braiding- und Fusing-Matrizen findet man folgende sogenannten *polynomialen Gleichungen*, die *Pentagonidentität*

$$F_{rp}\begin{bmatrix}ij\\ aq\end{bmatrix}F_{lq}\begin{bmatrix}rk\\ ab\end{bmatrix}=\sum_s F_{sq}\begin{bmatrix}jk\\ pb\end{bmatrix}F_{lp}\begin{bmatrix}is\\ ab\end{bmatrix}F_{rs}\begin{bmatrix}ij\\ lk\end{bmatrix},$$

sowie die *Hexagonidentität*

$$\sum_p B_{ps}\begin{bmatrix}ij\\ mn\end{bmatrix}B_{qn}\begin{bmatrix}ik\\ pl\end{bmatrix}B_{rp}\begin{bmatrix}jk\\ mq\end{bmatrix}=\sum_t B_{tn}\begin{bmatrix}jk\\ sl\end{bmatrix}B_{rs}\begin{bmatrix}ik\\ mt\end{bmatrix}B_{qt}\begin{bmatrix}ij\\ rl\end{bmatrix}.$$

Diese haben insofern eine herausragende Bedeutung, als es für Riemannschen Flächen vom Geschlecht null, also die S^2, keine weiteren Bedingungen an die Dualitätstransformationen gibt. Mehr noch: Fügt man diesen beiden noch die

Bedingung modularer Kovarianz der 1-Punkt-Funktionen auf dem Torus hinzu, so ist damit schon ein vollständiges System von Konsistenzbedingungen gefunden und Dualität auf Riemannschen Flächen beliebigen Geschlechts sichergestellt.

Zurück zu den polynomialen Gleichungen an sich: Die zweite Identität ist vom Typ einer Yang-Baxter-Relation, die erste hat, wie wir unten sehen werden, eine Interpretation im Rahmen von *3-Geometrie* als die beiden möglichen Zerlegungen eines Pentaeders in Tetraeder: Zum einen entlang der Fläche (arq) in zwei Tetraeder, zum anderen entlang einer zusätzlich eingezogenen Kante (s) in drei Tetraeder. Dabei entspricht einem Symbol $F_{nm}\left[\begin{smallmatrix} jk \\ il \end{smallmatrix}\right]$, genauer: einer weiter unten noch zu definierenden Variante $f_{nm}\left[\begin{smallmatrix} jk \\ il \end{smallmatrix}\right]$, ein orientiertes Tetraeder mit Kanten n, m, i, k, j, l und Ecken (jeweils spezifiziert durch drei Kanten) (nkl), (ilm), (jkm) und (nij). (Man beachte, daß dieses Tetraeder dual zu dem ausgehend von der Fusions-Algebra und der Definition der Fusing-Matrix ${}^{i}_{l}\rangle\overset{n}{-}\langle^{j}_{k} = F_{nm}\left[\begin{smallmatrix} jk \\ il \end{smallmatrix}\right]\ {}^{j}_{i}\rangle\overset{m}{-}\langle^{k}_{l}$ vielleicht naiv erwarteten Tetraeder ist und nach Witten (1989) eher als Braiding-Matrix mit vom 'Framing' abhängenden Phasenfaktoren verstanden werden sollte.)

In Anhang B haben wir alle weiteren Fusing-'Matrizen', Pentagon- und Orthogonalitätsidentitäten, sowie die weiter unten noch zu besprechenden Zerlegungsidentitäten des $(2,5)$ Modells zusammengetragen. Wir definieren hier nur noch ein weiteres Symbol (für den Fall trivialer Ladungskonjugation in der Fusion)

$$F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix} jj \\ jj \end{bmatrix} =: F_j,$$

dessen Kehrwert zumindest für die unitären Virasoro-minimalen Modelle (sicherlich allgemeiner) mit den Quantendimensionen $\lambda_{\min}(j) = S_{j,\min}/S_{\mathbb{1},\min}$ übereinstimmt; im Fall des *nicht-unitären* $(2,5)$ Virasoro-minimalen Modells werden jedoch die Quantendimensionen durch $\lambda_{\mathbb{1}}(j)$ 'ersetzt' (die 'Dimensionsinterpretation' geht verloren)

$$\frac{1}{F_{\mathbb{1}}} = 1 = \lambda_{\mathbb{1}}(\mathbb{1}), \quad \frac{1}{F_\Phi} = -\frac{\sin(\pi/5)}{\sin(2\pi/5)} = \lambda_{\mathbb{1}}(\Phi).$$

2.4 Invarianten von 3-Mannigfaltigkeiten

Abschließend nun zu den *Invarianten von 3-Mannigfaltigkeiten*, die sich mit der Fusing-Matrix beliebiger RCFTn konstruieren lassen.

Dazu benötigen wir zunächst neben der schon oben geometrisch interpretierten Pentagonidentität eine weitere Relation: Multipliziert man die Pentagonidentität in der oben angegebenen Form mit $F_{pr}\left[\begin{smallmatrix} qj \\ ai \end{smallmatrix}\right]/F_iF_j$ und summiert über p, i und j, so ergibt sich auf der linken Seite $F_{lq}\left[\begin{smallmatrix} rk \\ ab \end{smallmatrix}\right]$, multipliziert mit folgendem Ausdruck

$$\sum_{i,j,p} \frac{1}{F_i}\frac{1}{F_j} F_{pr}\begin{bmatrix} qj \\ ai \end{bmatrix} F_{rp}\begin{bmatrix} ij \\ aq \end{bmatrix} = N_{aq}^r \sum_{i,j} \frac{1}{F_i}\frac{1}{F_j} N_{ij}^r = N_{aq}^r \frac{1}{F_r} \sum_i \frac{1}{F_i^2}$$

(das erste Gleichheitszeichen folgt mit (2.3.*), das zweite aus der Identifikation von $1/F_j$ mit $\lambda_{\mathbb{1}}(j)$ und (2.2.*)). Für nichtverschwindendes $F_{lq}\left[\begin{smallmatrix} rk \\ ab \end{smallmatrix}\right]$ kann man in unserem Fall natürlich den Faktor N_{aq}^r weglassen. Wir finden die 'Zerlegungs'-Relation

$$\frac{|F|}{F_r} F_{lq}\begin{bmatrix} rk \\ ab \end{bmatrix} = \sum_{s,i,j,p} \frac{1}{F_i}\frac{1}{F_j}\, F_{sq}\begin{bmatrix} jk \\ pb \end{bmatrix} F_{lp}\begin{bmatrix} is \\ ab \end{bmatrix} F_{rs}\begin{bmatrix} ij \\ lk \end{bmatrix} F_{pr}\begin{bmatrix} qj \\ ai \end{bmatrix},$$

wobei $|F| = \sum_i 1/F_i^2 = \sum_i \lambda_{\mathbb{1}}(i)^2$.

Eine geometrische Interpretation auch der 'Korrekturfaktoren' $|F|$ und F_r erhält man, wenn man diese Identität in den für den Fall des $(2,5)$ Virasorominimalen Modells wie folgt definierten *umnormierten Fusing-Matrizen* (vgl. Anhang B) schreibt

$$f_{lq}\begin{bmatrix} rk \\ ab \end{bmatrix} := F_{lq}\begin{bmatrix} rk \\ ab \end{bmatrix} \sqrt{F_lF_q} = F_{lq}\begin{bmatrix} rk \\ ab \end{bmatrix} \Big/ \sqrt{\lambda_{\mathbb{1}}(l)\lambda_{\mathbb{1}}(q)}.$$

Diese tragen in der Eichung $\alpha = -\sqrt{-z}$, $\beta^2 = 1$ (vgl. Anhang B) die von

$$f_{ij}\begin{bmatrix} nm \\ lk \end{bmatrix} = f_{ij}\begin{bmatrix} kl \\ mn \end{bmatrix} = f_{kn}\begin{bmatrix} mj \\ il \end{bmatrix}$$

erzeugte *Tetraedersymmetrie* (12-elementige Gruppe der orientierungserhaltende Transformationen des Tetraeders) und erlauben somit tatsächlich die oben beschriebene Identifikation von Symbolen mit Tetraedern.

Die endgültige Form der *Zerlegungs-Relation* lautet dann (dabei wurde der letzte Term zuvor mit einer Symmetrie der Fs umgeformt)

$$f_{lq}\begin{bmatrix} rk \\ ab \end{bmatrix} = \frac{1}{|F|}\sum_{i,j,s,p} \frac{1}{F_i}\frac{1}{F_j}\frac{1}{F_s}\frac{1}{F_p} f_{sq}\begin{bmatrix} jk \\ pb \end{bmatrix} f_{lp}\begin{bmatrix} is \\ ab \end{bmatrix} f_{rs}\begin{bmatrix} ij \\ lk \end{bmatrix} f_{pr}\begin{bmatrix} ai \\ qj \end{bmatrix}.$$

Sie kann geometrisch als Zerlegung eines Tetraeders in vier Tetraeder interpretiert werden: dazu fügt man in das Tetraeder mit Kanten l, q, r, k, a, b eine weitere innere Ecke ein und verbindet sie mit den Ecken des ursprünglichen Tetraeders über die Kanten s, i, j und p.

Die Pentagonidentität schreibt sich in den neuen Symbolen in der Form

$$f_{rp}\begin{bmatrix} ij \\ aq \end{bmatrix} f_{lq}\begin{bmatrix} rk \\ ab \end{bmatrix} = \sum_s \frac{1}{F_s}\; f_{sq}\begin{bmatrix} jk \\ pb \end{bmatrix} f_{lp}\begin{bmatrix} is \\ ab \end{bmatrix} f_{rs}\begin{bmatrix} ij \\ lk \end{bmatrix}.$$

In beiden Fällen wird beim Einfügen einer neuen Kante über alle möglichen Zuordnungen von Darstellungsindizes s zu dieser Kante mit einem Faktor $1/F_s$ summiert, beim Einfügen einer neuen Ecke entsprechend über alle damit neu entstehenden Kanten mit einem zusätzlich Faktor $1/|F|$ für die neue Ecke.

Nun zur *topologischen Invarianten* (vgl. Atiyah (1988), Turaev, Viro (1992), Durhuus, Jakobson, Nest (1993)): Sei M eine 3-dimensionale, kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M, $\mathcal{T}$ eine endliche Triangulierung von M in Tetraeder $T_1, \dots T_N$ und ∂T die auf ∂M induzierte Triangulierung. Bezeichne $|\mathcal{T}|$ die Zahl der inneren Ecken der Triangulierung und $|\partial\mathcal{T}|$ die Zahl der Ecken auf dem Rand. Dann definiert man die Zustandssumme

$$Z(M,\mathcal{T}) = |F|^{|\partial\mathcal{T}|/2-|\mathcal{T}|} \sum_{\sigma:\{k\}\to\{\mathbb{1},\Phi\}} \prod_{k\in\mathcal{T}\setminus\partial\mathcal{T}} \frac{1}{F_{\sigma(k)}} \prod_{T\in\mathcal{T}} f(T(\sigma)),$$

wobei die Summe über alle möglichen Zuordnungen σ von Darstellungen zu inneren Kanten k läuft (hier: $\sigma: \{k\} \to \{\mathbb{1},\Phi\}, k \mapsto \sigma(k)$) und $f(T(\sigma))$ den Wert des entsprechenden umnormierten Fusing-Matrixelements zu gegebenem Tetraeder T mit 'Kantenwerten' $\sigma(k)$, $k \in T$ bezeichnet. Die Kanten auf dem Rand werden dabei festgehalten. An ihnen kann man zwei Mannigfaltigkeiten in mit der Form der Zustandssumme konsistenter Art verkleben: Bezeichnet man dazu mit Σ eine Komponente des Randes von M und mit $\mathcal{S}$ die (Kanten der) von $\mathcal{T}$ induzierte Triangulierung, und ist M' eine weitere 3-Mannigfaltigkeit mit isomorpher Randkomponente Σ' und induzierter Triangulierung $\mathcal{S}'$ (wir brauchen eine die Topologie respektierende, bijektive Abbildung aller Ecken und Kanten von $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{S}'$), so kann man beide Mannigfaltigkeiten entlang $(\Sigma, \mathcal{S})$ verkleben zu $(M \amalg_\Sigma M', \mathcal{T} \amalg_\mathcal{S} \mathcal{T}')$. Es gilt

$$Z(M \amalg_\Sigma M', \mathcal{T} \amalg_\mathcal{S} \mathcal{T}') = \sum_{\sigma_\mathcal{S}:\mathcal{S}\to\{\mathbb{1},\Phi\}} Z(M, \mathcal{T})\; Z(M', \mathcal{T}'),$$

wobei bei den beiden Zustandssummen auf der rechten Seite die Kanten in $\Sigma \cong \Sigma'$ entsprechend der Zuordnung $\sigma_\mathcal{S}$ gewählt werden.

Nach Konstruktion ist diese Zustandssumme invariant unter Zerlegung (eines Tetraeders in vier) und der Pentagonidentität entsprechenden 'Zügen' (zwei benachbarte Tetraeder werden gegen drei ausgetauscht). Daraus folgt jedoch unter Ausnutzung klassischer Resultate von J. W. Alexander (vgl. Durhuus etal (1993)), daß die Zustandssumme von der Wahl der Triangulierung $\mathcal{T}$ unabhängig ist und demnach eine topologische Invariante der Mannigfaltigkeit M definiert.

Beispiel: $(2,5)$-Invariante von $S^3 \cong \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. Wir triangulieren S^3 durch zwei Tetraeder mit identischen Ecken und Flächen, aber verschiedener Orientierung und finden $Z(S^3) = \left(1 + 4(-z)^{-2} + 3(-z)^{-2} + 6(-z)^{-3} + (-z)^{-4}\right)/(3-z)^4 = 4z/25 + 2/5 = 0.658885\ldots$ $(z = (1+\sqrt{(5)})/2)$.

Schließlich noch eine Bemerkung: Setzt man im $(2,5)$ Modell $1/F_j := \lambda_\Phi(j)$ (statt $\lambda_\mathbb{1}(j)$), so findet man eine analoge (formal identische) Zerlegungsrelation. Diese läßt sich jedoch nicht 3-geometrisch Interpretieren: Die entsprechend definierten Symbole f tragen keine Tetraedersymmetrie; erzwingt man diese (durch Definition der fs wie oben), treten in der Zerlegungsidentität zusätzliche Vorzeichen auf (das geht auf $\lambda_\Phi(\Phi) = -1/\lambda_\mathbb{1}(\Phi)$ zurück), die eine geometrische Interpretation in dem hier vorgestellten Rahmen unmöglich zu machen scheinen.

3 Streumatrix und TBA

Wiederum mit Blick auf das $(2,5)$ Virasoro-minimalen Modells (gestört durch das Feld $\Phi_{(1,2)} = \Phi_{(1,3)}$) soll ein Teil des Wissens über Streumatrix-Theorie in 1+1 Dimensionen (wir beschränken uns auf den faktorisierenden und später auf den rein elastischen Fall und seine Anwendung zur Beschreibung von rein massiven, integrablen Deformationen von RCFTn) und den thermodynamischen Bethe-Ansatz (TBA) (einem System von nicht-linearen Gleichungen, deren Lösungen Energien zugeordnet sind, wird im Grenzwert unendlicher Systemgröße eine charakteristische Funktion, die freie Energie, zugeordnet) zusammengetragen werden. Als weiterführende Literatur und Quelle für (insbesondere die historischen) Referenzen empfehlen wir Köberle (1991), A. B. Zamolodchikov (1989), Al. B. Zamolodchikov (1990), Klassen, Melzer (1990), sowie Mussardo (1992). Für die Streutheorien und den TBA der Virasoro-minimalen Modelle verweisen wir auf Zamolodchikov (1991), LeClair (1989), für die $N = 2$ Virasoro-minimalen Modelle auf Fendley, Intriligator (1992).

In diesem Kapitel wird in einem weit größeren Maße als im vorhergehenden an die physikalische Intuition (denn an mathematisches Verständnis) appelliert. Doch würde eine mathematisch annähernd rigorose Darstellung (so sie denn in den Fähigkeiten des Autors läge) bei weitem den gegebenen Rahmen sprengen und dem Leser sicherlich das Vergnügen an der Eleganz so manchen physikalischen Arguments rauben.

3.1 Faktorisierende Streuung in 1+1 Dimensionen

Zunächst eine kurze Ortsbestimmung in Bezug auf RCFT: Betrachtet man integrable Störungen von RCFTn im Hamiltonschen Formalismus, (Φ ein relevantes Feld, d.h. ein primäres Feld der RCFT mit konformer Dimension kleiner als eins)

$$H = H_{\mathrm{CFT}} + \lambda \int \Phi(x) dx,$$

so ist zunächst die Wahl des Vorzeichens von λ (bzw. λ/i für einige Störungen von nicht-unitären Theorien) wesentlich (dieser Ausdruck ist nicht formal, sondern wird im sogenannten Truncated Hilbert space approach tatsächlich ausgewertet). Folgt man bei $\lambda < 0$ und geeigneter Störung dem Renormierungsgruppenfluß, so gelangt man wiederum zu einer RCFT und laut c-Theorem zu einer mit geringerer zentraler Ladung. Der uns hier interessierende Fall, $\lambda > 0$, führt bei geeigneter Störung auf Feldtheorien mit ausschließlich massiven Teilchen und kann daher mithilfe der Streumatrix beschrieben werden (vgl. A. B. Zamolodchikov (1989)). Bei der magnetischen Störung des Ising Modells, beschrieben durch die E_8-Streutheorie, führen beide Vorzeichen von λ auf dieselbe Theorie.

Eine kleine konzeptionelle Einführung (was ist die Streumatrix überhaupt?): Die fundamentale Annahme im Streumatrixzugang ist, daß sich die asymptotisch (d.h. unendlich vom Ort der Wechselwirkung entfernten) ein- und auslaufenden Zustände als Zustände freier Teilchen beschreiben lassen. Der entsprechende Hilbertraum zerfällt in eine direkte Summe von n-Teilchen-Zuständen. Die Streumatrix S ist zunächst nichts anderes als eine bijektive Abbildung von aus- zu einlaufenden Zuständen (Richtung ist Konvention). Die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit impliziert dann grob gesprochen, daß S durch einen unitären Operator (insbesondere linear) dargestellt werden kann. Weiterhin läßt sich in gewissen Fällen zeigen, daß die Elemente der Streumatrix als Funktion der kinematischen Parameter p_j, der Impulse der ein- und auslaufenden Teilchen unter den Bedingungen der Energie-Impuls-Erhaltung und Massenschalen, analytische Funktionen sind. Die physikalische Information, wie physikalische Streuamplituden, Bindungszustände und Kopplungskonstanten, sind dann als Werte auf bestimmten Blättern, als Pole und deren Residuen kodiert. Wir werden im folgenden diese Kodierung für unseren Fall angeben, aber nicht erklären.

Jetzt zum harten Geschäft: In 1+1 Dimensionen ist die Lorentzgruppe eindimensional, daher abelsch und additiv darstellbar. Die entsprechenden irreduziblen unitären Darstellungen sind durch den Spin $s \in \mathbb{Z}$, die der gesamten Poincaré Gruppe zudem durch die Masse m (hier > 0) und den Zweier-Impuls p charakterisiert. Die Massenschalenbedingung

$$p_\mu p^\mu = p\bar{p} = m^2,$$

wobei wir mit $p = p^0 + p^1$ und $\bar{p} = p^0 - p^1$ die Licht-Kegel-Koordinaten bezeichnen, wird gelöst durch Übergang zur *Rapidität* Θ

$$(p^0, p^1) = m(\cosh\Theta, \sinh\Theta).$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Lorentzgruppe in dieser Parametrisierung additiv operiert

$$L_\alpha : \Theta \to \Theta + \alpha.$$

Die von uns betrachtete Feldtheorie enthalte n Teilchensorten mit Massen m_a ($a = 1, \dots n$). Wir wollen die entsprechenden Ein-Teilchen-'Erzeugungsoperatoren' der asymptotischen Zustände mit $A_a(\Theta)$ bezeichnen

$$|A_{a_1}(\Theta_1)A_{a_2}(\Theta_2)\dots A_{a_N}(\Theta_N)\rangle = A_{a_1}(\Theta_1)A_{a_2}(\Theta_2)\dots A_{a_N}(\Theta_N)|0\rangle.$$

Diesen Zustand interpretieren wir als einlaufend, wenn die Rapiditäten Θ_i absteigend geordnet sind $\Theta_1 > \Theta_2 > \dots \Theta_N$; als auslaufend, bei ansteigender Ordnung. Die Zwei-(Zwei-)Teilchen-*Streumatrix* (die Matrixelemente heißen Streuamplituden) kann dann durch

$$A_{a_1}(\Theta_1)A_{a_2}(\Theta_2) = S^{b_1 b_2}_{a_1 a_2}(\Theta_1 - \Theta_2)A_{b_2}(\Theta_2)A_{b_1}(\Theta_1)$$

definiert werden.

Die Feldtheorie sei integrabel; wir bezeichnen die nicht-trivialen, kommutierenden Erhaltungsgrößen mit P_s, wobei s den Lorentz-Spin bezeichne $L_\alpha : P_s \to e^{s\alpha}P_s$. Insbesondere trägt p Spin 1 und seine Paritätstransformierte ($x \to -x$, also $p^1 \to -p^1$, $p^0 \to -p^0$ und damit $p \to \bar{p}$) $\bar{p}$ Spin -1. Da Parität die Erhaltungsgrößen P_s und P_{-s} ineinander überführt, genügt es, in paritätserhaltenden Theorien die Erhaltungrößen mit Spin $s > 0$ zu betrachten.

Da die asymptotischen Zustände Zustände freier Teilchen sind, ist der Wert einer Erhaltungsgröße angewendet auf einen n-Teilchen-Zustand gleich der Summe der Ein-Teilchen-Werte. Daher kann man die Operation der Erhaltungsgrößen durch

$$[P_s, A_a(\Theta)] = \omega^a_s(\Theta)A_a(\Theta), \quad P_s|0\rangle = 0$$

definieren. Durch Anwendung geeigneter Lorentztransformationen findet man

$$\omega^a_s(\Theta) = \gamma^a_s e^{s\Theta}$$

wobei γ^a_s eine reelle Konstante ist. Insbesondere folgt $\gamma^a_1 = m_a$.

Auch vertauschen die Erhaltungsgrößen mit der Streumatrix S. Es folgt, daß die Amplitude $S^{b_1 b_2}_{a_1 a_2}(\Theta)$ (außerhalb einer höchstens diskreten Menge, die man unter Annahme der Analytizität der Streumatrix ignoriert) verschwindet, wenn nicht $m_{a_1} = m_{b_1}$ und $m_{a_2} = m_{b_2}$ ist. Weiterhin wurde schon in den 70ern gezeigt, daß in Theorien mit nur einer weiteren Erhaltungsgröße (neben p) Teilchenproduktion ausgeschlossen ist und somit nur Zeitverzögerung und Austausch von Quantenzahlen erlaubt sind. Jede n-Teilchen-Streumatrix zerfällt dann in ein Produkt von $n(n-1)/2$ Zwei-Teilchen-Streumatrizen. Die Bedingungen, die sich daraus ergeben, daß das Ergebnis unabhängig von der Reihenfolge der Zerlegung in Zwei-Teilchen-Streuprozesse sein sollte, sind die sogenannten *Yang-Baxter-* oder auch Faktorisierungs-Gleichungen

$$S_{a_1 a_2}^{c_1 c_2}(\Theta) S_{c_1 a_3}^{b_1 c_3}(\Theta + \Theta') S_{c_2 c_3}^{b_2 b_3}(\Theta') = S_{a_2 a_3}^{c_2 c_3}(\Theta') S_{a_1 c_3}^{c_1 b_3}(\Theta + \Theta') S_{c_1 c_2}^{b_1 b_2}(\Theta).$$

Im Zwei-Teilchen-Streuprozeß gibt es damit nur noch die Möglichkeit der *Transmission* $A_{a_1}(\Theta_1)A_{a_2}(\Theta_2) \to A_{a_2}(\Theta_2)A_{a_1}(\Theta_1)$ und der *Reflektion* (Austausch des Impulses) $A_{a_1}(\Theta_1)A_{a_2}(\Theta_2) \to A_{a_1}(\Theta_2)A_{a_2}(\Theta_1)$.

Ist nun auch Reflektion ausgeschlossen (dies folgt z.B. bei nicht-entartetem Massenspektrum),

$$A_{a_1}(\Theta_1)A_{a_2}(\Theta_2) = S_{a_1 a_2}(\Theta_1 - \Theta_2)A_{a_2}(\Theta_2)A_{a_1}(\Theta_1),$$

dann diagonalisiert die Streumatrix in der Basis der asymptotischen Zustände und die Yang-Baxter-Gleichung ist trivial erfüllt. Man spricht von *rein elastischen* Streu-Theorien (Purely elastic scattering theories). Der Einfachheit halber wollen wir uns im folgenden auf diese Theorien beschränken.

Eine für den Streumatrix-Zugang zu Feldtheorien typische Voraussetzung ist nun die des Wohlverhaltens der Zwei-Teilchen-Übergangsamplituden $S_{ab}(\Theta)$ als Funktion von Θ. So verlangen auch wir *Analytizität* der Streumatrix, weiterhin, daß die $S_{ab}(\Theta)$ meromorphe Funktionen in Θ, polynomial beschränkt durch die Impulse (dadurch werden gewisse Pathologien ausgeschlossen) und reell für $\mathrm{Re}\Theta = 0$ sind. Weitere Forderungen sind (Zwei-Teichen) *Unitarität*

$$S_{ab}(\Theta)S_{ba}(-\Theta) = 1,$$

Paritätsinvarianz

$$S_{ab}(\Theta) = S_{ba}(\Theta),$$

und Invarianz unter *Ladungskonjugation*, einer Involution auf dem Raum aller Teilchen $C : \{A_a\} \to \{A_a\}\,,\ A_a \to A_{\bar{a}}$,

$$S_{ab}(\Theta) = S_{\bar{a}\bar{b}}(\Theta),$$

Der Bereich $0 < \mathrm{Im}\Theta < \pi$ wird *'physikalischer Streifen'* genannt. Die tatsächlich physikalischen (d.h. 'meßbaren') Streuamplituden des *direkten Kanals* $A_a A_b \to A_b A_a$ sind durch die Werte von $S_{ab}(\Theta)$ mit $\mathrm{Im}\Theta = 0$ und $\mathrm{Re}\Theta > 0$ gegeben; die des sogenannten *gekreuzten Kanals* $A_b A_{\bar{a}} \to A_{\bar{a}} A_b$ durch $S_{ab}(\Theta)$ mit $\mathrm{Im}\Theta = \pi$ und $\mathrm{Re}\Theta < 0$. Man verlangt *Kreuzungssymmetrie* der Streuamplituden

$$S_{ab}(\Theta) = S_{b\bar{a}}(i\pi - \Theta).$$

Die letzte Eigenschaft zusammen mit Unitarität und Invarianz unter Ladungskonjugation impliziert, daß die $S_{ab}(\Theta)$ $2\pi i-$periodisch in Θ und damit vollständig durch die Lage der Pole und Nullstellen im Bereich $-\pi < \mathrm{Im}\Theta \leq \pi$ charakterisiert sind.

Die einfachen Pole der Streumatrix im physikalischen Sreifen werden als *Bindungszustände* interpretiert (Pole für nicht rein imaginäre Θ - instabile Bindungszustände - im folgenden ausgeschlossen): Ein Pol von $S_{ab}(\Theta)$ in $\Theta = iu_{ab}^c$ im direkten Kanal als Bindungszustand c der Masse

$$m_c^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2m_a m_b \cos u_{ab}^c.$$

Mehr noch: Das Residuum des Pols im direkten Streukanal wird mit $i(f_{abc})^2$ identifiziert, wobei f_{abc} die total symmetrische, renormierte Kopplungskonstante der Teilchen a, b und c ist. In nicht-unitären Theorien sind nicht alle f_{abc} reell, einige sind rein imaginär und führen somit zu nicht-unitärer Zeitentwicklung (unabhängig von der Unitarität der Zwei-Teilchen Streumatrix, die die Vollständigkeit der Basen der ein- und auslaufenden asymptotischen Zustände beschreibt), wie zuerst von Cardy, Mussardo (1989) gezeigt wurde. Die Größen $\pi - u_{ab}^c = \bar{u}_{ab}^c$ können *geometrisch* als Innenwinkel eines euklidischen Dreiecks mit Seitenlängen m_a, m_b und m_c interpretiert werden; insbesondere gilt $u_{ab}^c + u_{\bar{c}a}^{\bar{b}} + u_{b\bar{c}}^{\bar{a}} = 2\pi$.

Auf ähnliche Weise mag man versuchen, ungerade Pole als weitere Bindungszustände zu interpretieren (Mussardo (1992)); wir werden uns jedoch hier auf den Standpunkt stellen, daß nur solche Pole als Bindungszustände zu interpretieren sind, die auch als einfache Pole auftreten und somit bei der Streuung zusammengesetzter Teilchen zu Polen höherer Ordnung führen mögen.

Mit diesen Vorbereitungen ist es nun ein Leichtes den (Streumatrix) 'Bootstrap' zu formulieren: Die Idee geht wiederum zurück auf Arbeiten aus den 70er Jahren und kann in unserer Sprache geschrieben werden als $u_{ab}^c \neq 0 \Rightarrow A_c \in \{A_a\}$, in Worten: Jeder Bindungszustand ist auch Teilchen. Konstruktiv formuliert: Ausgehend von einer kleinen Zahl von fundamentalen Teilchen mit gegebenen Streuamplituden erzeugt man alle Bindungszustände, dann alle Bindungszustände von

Bindungszuständen (und von Bindungszuständen mit Teilchen) und so weiter, bis (so die Hoffnung) sich der Reigen schließt, d.h. die Menge aller Bindungszustände von Teilchen in der Menge aller Teilchen enthalten ist. Die sogenannten *Bootstrap-Bedingungen* ergeben sich dann für unseren Fall (A. B. Zamolodchikov (1989)) daraus, daß die Streuamplitude für die Streuung eines Teilchens c, welches sich als Bindungszustand der Streuung der Teilchen a und b bei $\Theta = iu_{ab}^c$ ergibt, mit einem weiteren Teilchen d schon durch die Streuamplituden von a und b mit d gegeben sind

$$\lim_{\epsilon\longrightarrow 0} \epsilon A_a(\Theta + i\bar{u}_{a\bar{c}}^{\bar{b}} - \epsilon/2)A_b(\Theta + i\bar{u}_{b\bar{c}}^{\bar{a}} + \epsilon/2)|0\rangle = f_{ab}^{\bar{c}} A_c(\Theta)|0\rangle.$$

Es folgt für die Streuamplituden

$$S_{cd}(\Theta) = S_{ad}(\Theta + i\bar{u}_{a\bar{c}}^{\bar{b}})S_{bd}(\Theta - i\bar{u}_{b\bar{c}}^{\bar{a}}).$$

(Diese Relation scheint für $\Theta = 0$ im Widerspruch zur Unitaritätsrelation zu stehen, da in den von uns betrachteten Theorien $S_{aa}(0) = -1$ gilt. Der Grund ist, daß beide Gleichungen als $\lim_{\Theta\searrow 0}$ gelesen werden sollten, sich dann unterscheiden und es daher nicht erstaunlich ist, daß sie an (auch physikalisch) singulären Punkten zu verschiedenen Zahlenwerten führen. (Im Fall des $(2,5)$ Modells ist das Problem tatsächlich vom Typ $\lim_{\epsilon\searrow 0} \alpha\epsilon/\beta\epsilon = \alpha/\beta$ mit $\alpha, \beta \in \{\pm 1\}$.) Bei der Herleitung (Ravanini, Tateo, Valleriani (1992)) der von Zamolodchikov (1991) gefundenen universellen Form der TBA-Gleichungen ist das Verständnis dieses 'Phänomens' wesentlich.) Als Konsistenzbedingung von Erhaltungsgrößen und Bootstrap ergibt sich (durch Anwendung von P_s und Lorentztransformation)

$$\gamma_s^a e^{-is\bar{u}_{a\bar{c}}^{\bar{b}}} + \gamma_s^b e^{+is\bar{u}_{b\bar{c}}^{\bar{a}}} = \gamma_s^c.$$

Im Fall $a = b$ und γ_s^a folgt z.B. $2\cos(s\bar{u}_{b\bar{c}}^{\bar{a}})\,\gamma_s^a = \gamma_s^c$.

Bevor wir nun einige Beispiele betrachten, sollten wir bemerken, daß durch die Vorgabe eines Spektrums und die hier gegebenen Bedingungen an die Streumatrix diese keineswegs eindeutig bestimmt ist. Insbesondere gilt vor Anlegen der Bootstrap Bedingung, daß die Streumatrix nur bis auf sogenannte *CDD-Mehrdeutigkeit* festgelegt ist

$$S_{ab}(\Theta) \rightarrow S_{ab}(\Theta)\Phi(\Theta),$$

wobei der CDD-Faktor eine beliebige Funktion mit

$$\Phi(\Theta) = \Phi(i\pi - \Theta), \quad \Phi(\Theta)\Phi(-\Theta) = 1$$

ist. Die Bootstrap-Bedingungen mögen weitere Einschränkungen liefern. Wir werden im folgenden immer die sogenannte minimale Wahl treffen, in der die Zahl der Pole und Nullstellen zu gegebenem Massenspektrum und 'massiver Fusion' ($M^c_{ab} = 1$, wenn c Bindungszustand von a und b ist und 0 sonst) minimal ist.

Das erste Beispiel ist natürlich das $(2,5)$-Modell, genauer: die Streumatrix-Beschreibung des massiven Modells, das sich durch Störung des $(2,5)$ Virasoro-minimalen Modells mit dem einzigen primären Feld $\Phi_{1,3}$ der RCFT ergibt. Die Streutheorie ist denkbar einfach (Cardy, Mussardo (1989)); sie enthält nur ein einziges neutrales Teilchen $a = \bar{a}$ der Masse m und die rein elastische Streumatrix ist durch

$$S_{aa}(\Theta) = \frac{\sinh\Theta + i\sin(\frac{2\pi}{3})}{\sinh\Theta - i\sin(\frac{2\pi}{3})} = \frac{\tanh\frac{1}{2}(\Theta + \frac{2i\pi}{3})}{\tanh\frac{1}{2}(\Theta - \frac{2i\pi}{3})}$$

gegeben. Eine weitere in der Literatur gebräuchliche Darstellung ist

$$S_{aa}(\Theta) = -\frac{\sinh\frac{1}{2}(\Theta + \frac{2i\pi}{3})}{\sinh\frac{1}{2}(\Theta - \frac{2i\pi}{3})}\frac{\sinh\frac{1}{2}(\Theta + \frac{i\pi}{3})}{\sinh\frac{1}{2}(\Theta - \frac{i\pi}{3})} = -f_{2/3}(\Theta)f_{1/3}(\Theta),$$

wobei die f_α weiter unten definiert werden. Es gibt zwei Pole, einen $\Theta = 2\pi i/3 = iu^c_{ab}$ mit Residuum $-i\tan(2\pi/3) = -i2\sqrt{3}$ im direkten Kanal und den gekreuzten in $\Theta = \pi i/3$ mit Residuum $i2\sqrt{3}$. Die Zuordnung der Kanäle folgt aus der Massengleichung für den Bindungszustand $m_c^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2m_am_b\cos u^c_{ab}$; die andere Zuordnung ergibt $m^2 = 3m^2$, also für $m > 0$ einen Widerspruch. Wie oben besprochen ist die Theorie nicht-unitär, da die Kopplungskonstante rein imaginär ist.

Das $(2,5)$ Virasoro-minimale Modell ist nur das erste in der Serie der (2, ungerade) Modelle und das nur eine Serie, die sogenannte T-Serie (Tadpole), der Theorien, die wir hier vorstellen wollen und deren Streumatrizen auf einfache Weise (explizitere Formeln findet man in Klassen, Melzer (1990)) durch die Graphen der $ADET$ Klassifikation (vgl. Goodman, de la Harpe, Jones (1989) und Anhang C) der ganzzahligen Matrizen mit Norm kleiner zwei gegeben sind (Ravanini, Tateo, Valleriani (1992) zeigen, daß dies die Menge der auf die hier vorgestellte Art mit Graphen verknüpften Theorien ausschöpft).

Gegeben ein Graph $\mathcal{G}$ und die entsprechende Inzidenzmatrix

$$I^{\mathcal{G}}_{ab} = \#\left\{\text{Verbindungslinien zwischen a und b}\right\},$$

dann ist durch

$$\phi_{ab}(\Theta) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\,\hat{\phi}_{ab}(k)e^{ik\Theta} = -i\frac{d}{d\Theta}\ln S_{ab}(\Theta)$$

eine Streumatrix bis auf Vorzeichen bestimmt, wobei

$$\hat{\phi}(k) = \mathbb{1} - \left(\mathbb{1} - \frac{I^{\mathcal{G}}}{2\cosh \frac{\pi k}{h_{\mathcal{G}}}} \right)^{-1}$$

und $h_{\mathcal{G}}$ die Coxeterzahl von $\mathcal{G}$ ist. Insbesondere sind die Vektoren $(\gamma^s)_{a=1,\ldots N} = (\gamma^{s \bmod h_{\mathcal{G}}})$ durch die Eigenwerte von $I^{\mathcal{G}}$ zum Eigenwert $2\cos\frac{\pi s}{h_{\mathcal{G}}}$ gegeben, wobei s die Exponenten durchläuft (ist s nicht Exponent $\bmod h_{\mathcal{G}}$, so ist der entsprechende Vektor γ^s und auch die Erhaltungsgröße P_s trivial). Auch erfüllen die entsprechenden Streumatrizen folgende Bootstrap-artige Beziehungen

$$S_{ab}\left(\Theta + \frac{i\pi}{h_{\mathcal{G}}}\right) S_{ab}\left(\Theta - \frac{i\pi}{h_{\mathcal{G}}}\right) = \prod_c S_{ac}(\Theta)^{I^{\mathcal{G}}_{bc}} \exp\left(-2\pi i I^{\mathcal{G}}_{ab} \left\{ \begin{array}{cc} 0, & \Theta < 0 \\ 1/2, & \Theta = 0 \\ 1, & \Theta > 0 \end{array} \right\}\right)$$

und sind alle von der Form

$$-i\frac{d}{d\Theta}\ln S_{ab}(\Theta) = \phi_{ab}(\Theta) = \sum_{\alpha\in A_{ab}} \phi_\alpha(\Theta)$$

mit

$$\begin{aligned}
\phi_\alpha(\Theta) = -i\frac{d}{d\Theta}\ln f_\alpha(\Theta) &= -\frac{\sin\alpha\pi}{\cosh\Theta - \cos\alpha\pi} \\
&\overset{\alpha\neq 0}{=} -\operatorname{sgn}(\alpha)\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik\Theta} \frac{\sinh\left((1-|\alpha|)\pi k\right)}{\sinh\left(\pi k\right)} \\
&= -\operatorname{sgn}(\alpha)\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ik\Theta}}{\cosh\left(|\alpha|\pi k\right) + \cosh\left((1-|\alpha|)\pi k\right)\frac{\sinh(|\alpha|\pi k)}{\sinh((1-|\alpha|)\pi k)}},
\end{aligned}$$

$$f_\alpha(\Theta) = \frac{\sinh\frac{1}{2}(\Theta + i\pi\alpha)}{\sinh\frac{1}{2}(\Theta - i\pi\alpha)}$$

und $A^*_{ab} = A_{ab}$ (d.h. invariant unter komplexer Konjugation). ($f_\alpha(\Theta)$ hat einen einfachen Pol in $i\alpha\pi$ mit Residuum $2i\sin\alpha\pi$, sowie eine einfache Nullstelle in $-i\alpha\pi$. Weiterhin gilt $f_\alpha(\Theta) = f_{\alpha+2}(\Theta) = f_{-\alpha}(-\Theta)$, $f_\alpha(\Theta)f_{-\alpha}(\Theta) = 1$, $f_\alpha(i\pi - \Theta) = -f_{1-\alpha}(\Theta)$, $f_\alpha(\Theta - i\pi\beta)f_\alpha(\Theta + i\pi\beta) = f_{\alpha-\beta}(\Theta)f_{\alpha+\beta}(\Theta)$ und $f_0(\Theta) = -f_1(\Theta) = 1$.)

Abschließend wollen wir ein Beispiel angeben, das nicht Teil einer der obigen Serien ist. Dabei handelt es sich um die massive Streutheorie zum wiederum nicht-unitären $(3,5)$ Virasoro-minimalen Modell - gestört durch den Operator $\Phi_{1,3}$ der konformen Dimension $h = 1/5$. Die Streutheorie enthält nur ein einziges neutrales Teilchen a mit der Streumatrix

$$S_{aa}(\Theta) = f_{-1/2}(\Theta) = -i\tanh\frac{1}{2}(\Theta - i\pi/2),$$

die Kreuzungssymmetrie verletzt. Der Pol in $\Theta = -i\pi/2$ ist unphysikalisch (nicht im physikalischen Bereich) und hat Residuum $2i \sin \pi/2 = 2i$ (vgl. Christe, Martins (1990)). Folglich ist

$$\phi_{aa}(\Theta) = \frac{1}{\cosh \Theta}, \quad \hat{\phi}_{aa}(k) = \frac{1}{2\cosh\left(\frac{\pi k}{2}\right)}.$$

Das 'Counting argument' (Zamolodchikov (1989)) führt in diesem Fall zu keinem Ergebnis, kann insbesondere nicht zur Bestimmung des Analogs einer Coxeterzahl benutzt werden.

3.2 TBA und zentrale Ladung

Die Identifikation von rein elastischen Streutheorien mit gestörten RCFT ist a priori nicht-trivial. Der thermodynamische Bethe-Ansatz (TBA) erlaubt jedoch, aus den Daten einer Streutheorie die effektive zentrale Ladung der zugehörigen RCFT zu bestimmen; mehr noch: Der TBA erlaubt eine Entwicklung der Grundzustandsenergie bei Temperatur Null nach dem Radius der Kompaktifizierung, die mit der entsprechenden Reihe der gestörten RCFT (im sogenannten Truncated Hilbert space approach) verglichen werden kann und in allen bisher betrachteten Beispielen von rein elastischen Streutheorien eine Identifizierung mit gestörten RCFT ermöglicht (vgl. Klassen, Melzer (1991)).

Wir werden hier nur die effektive zentrale Ladung berechnen und finden, daß sie als Summe von Dilogarithmen (wobei die Argumente durch eine algebraische, nicht-lineare Gleichung gegeben sind) geschrieben werden kann:
Dazu 'leiten' wir in einem ersten Schritt eine *Beziehung zwischen Grundzustandsenergie und freier Energie* her: Betrachte die Streutheorie auf einem Torus mit Radien R und L und betrachte einmal die eine, einmal die andere Richtung als Zeit, bezüglich der quantisiert wird. Man erhält zwei äquivalente Ausdrücke für die (großkanonische) Zustandssumme (bei verschwindenden chemischen Potentialen)

$$Z(L, R) = \mathrm{tr} e^{-LH_R} = \mathrm{tr} e^{-RH_L}.$$

Im Limes $L \to \infty$ wird der erste Ausdruck durch den Zustand geringster Energie (wir nehmen an, daß dieser nicht entartet ist) dominiert,

$$Z(L, R) = e^{-LE_0(R)} \left(1 + e^{-L\Delta E_{10}(R)} + \dots\right),$$

wobei wir mit $E_0(R)$ die Grundzustandsenergie bezeichnen. Der zweite Ausdruck erhält die Bedeutung der Zustandssumme eines eindimensionalen Quantensystems im thermodynamischen Limes bei der Temperatur $T = 1/R$ (wobei wir die Boltzmann-Konstante k gleich eins gesetzt haben). Bezeichnet man nun mit $f(R) = -\lim_{L\to\infty} \frac{1}{RL} \ln Z(L,R)$ die freie Energie des Systems pro Längeneinheit, so folgt

$$Rf(R) = E_0(R).$$

Im konformen Grenzwert $R \to 0$ sollte die Zustandssumme in die einer RCFT auf dem Torus übergehen

$$Z = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}}\, e^{-\frac{2\pi L}{R}(L_0+\bar{L}_0-c/12)}.$$

Es folgt die Identifikation

$$Rf(R) = E_0(R) = -\frac{\pi}{6R} c_{\text{eff}}(R/R_c),$$

wobei die Skalenfunktion $c_{\text{eff}}(R/R_c)$ ($R_c = 1/m_{\min}$) im konformen Grenzwert $R \to 0$ gegen die effektive zentrale Ladung strebt.

Der zweite Schritt ist das Aufstellen der *Quantisierungsbedingung der Impulse* mithilfe der *Bethe-Wellenfunktion*: Betrachte dazu die relativistische Quantenfeldtheorie zu einer unserer integrablen Streutheorien aus Abschnitt 3.1 auf einem Zylinder mit Umfang $2\pi L$ (eigentlich $L \to \infty$). Wegen Teilchenerzeugung und -vernichtung macht es normalerweise keinen Sinn, an eine Wellenfunktion zu denken. Es gibt jedoch im Konfigurationsraum Bereiche, in denen alle Teilchen weit (im Vergleich zur Korrelationslänge $\xi = 1/m_{\min}$) voneinander entfernt sind und sich angenähert frei und nur den Massenschalenbedingungen gehorchend bewegen. In diesen 'freien' Bereichen kann man von Teilchenorten x_j und -impulsen p_j^1 reden und die Wellenfunktion $\Psi(x_1,\ldots x_N)$ einführen.

Im faktorisierten Fall sind Teilchenzahl N und alle Impulse erhalten, und $\Psi(x_1,\ldots x_N) = A \exp\left(i \sum_{j=1}^N x_j p_j^1\right)$ wird in den $N!$ freien Bereichen Bethe-Wellenfunktion genannt, wobei der Faktor A nur von der Ordnung der Teilchen $x_{j_1} < x_{j_2} < \ldots < x_{j_N}$ abhängt.

Der Übergang zwischen freien Bereichen wird durch die Streumatrix beschrieben, die im rein elastischen Fall eine reine Phase ist

$$S_{jk}(\Theta) = e^{i\delta_{jk}(\Theta)}.$$

Insbesondere erhalten wir, wenn wir ein Teilchen j einmal um den Kreis herumführen und mit allen anderen Teilchen vertauschen, die Quantisierungsbedingung an die Impulse (manchmal auch Bethe-Ansatz-Gleichungen genannt)

$$e^{iLp_j^1} \prod_{j \neq k=1}^{N} S_{jk}(\Theta_j - \Theta_k) = 1, \quad j = 1, \ldots N$$

oder

$$Lm_j \sinh \Theta_j + \sum_{j \neq k=1}^{N} \delta_{jk}(\Theta_j - \Theta_k) = 2\pi n_j, \quad n_j \in \mathbb{Z}.$$

Gesamtenergie und Gesamtimpuls der Teilchen sind durch $E = \sum_j m_j \cosh \Theta_j = \sum_j p_j^0$ und $P = \sum_j p_j^1 = \sum_j m_j \sinh \Theta_j$ gegeben. Insbesondere folgt aus der Unitarität der Streumatrix, daß $\delta_{jk}(\Theta) + \delta_{jk}(-\Theta) \in 2\pi\mathbb{Z}$ und somit durch Aufsummieren der Quantisierungsbedingungen über alle j, daß $LP/2\pi$ ganzzahlig ist.

In einem dritten Schritt müssen wir den sogenannten *Teilchentyp* und Auswahlregeln betrachten: Der Diskussion liegt die einfache Tatsache zugrunde, daß die Unitaritätsbedingung an die Streumatrix für verschwindende Rapidität $S(0)^2 = 1$ zwei Lösungen $S(0) = +1$ und $S(0) = -1$ hat. Andererseits beschreibt $S(0)$ die Veränderung der Bethe-Wellenfunktion beim Vertauschen der Positionen zweier identischer Teilchen *gleicher* Rapidität. Daher definieren wir den *Typ* eines Teilchens a als 'bosonisch' ('fermionisch'), wenn $S_{aa}(0) = (-)1$ ist. Es folgt, daß die Bethe-Wellenfunktion für Teilchen fermionischen Typs gleicher Rapidität verschwindet, oder als Auswahlregel formuliert, daß Teilchen fermionischen Typs verschiedene Rapiditäten haben müssen. Wir werden uns im folgenden auf diesen letzten Fall konzentrieren.

Nun mit dem vierten Schritt zur Thermodynamik, dem *thermodynamischen Limes* $L \to \infty$ und der Bedingung des *thermodynamischen Gleichgewichts*: Betrachte zunächst den freien Fall $\delta \equiv \pi/2$ für eine einzige Teilchensorte (das entspricht tatsächlich dem thermal gestörten Ising Modell bzw. der Streumatrix zu A_1). Die Quantisierungsbedingungen entkoppeln zu

$$Lm_j \sinh \Theta_j = \pi(2n_j - N + 1), \; n_j \in \mathbb{Z}, \; j = 1, \ldots N.$$

Dann beschreibt

$$\rho(\Theta) = \frac{d}{d\Theta} J(\Theta) = \frac{m}{2\pi} \cosh \Theta, \quad J(\Theta) = \frac{m}{2\pi} \sinh \Theta$$

die Dichte der möglichen Lösungen, Teilchenrapiditäten in Θ. Im thermodynamischen Limes wachse nun die Zahl N der Teilchen mit L so, daß die Teilchendichte N/L gegen eine Konstante strebe (die Ergebnisse zeigen, daß der hier gemachte Fehler, Zustände nicht verschwindender Dichte durch eine asymptotische Wellenfunktion zu beschreiben, vernachlässigbar ist). Die verschiedenen Konfigurationen werden dann beschrieben durch die *Teilchendichte* als Funktion der Rapidität $\rho_t(\Theta)$ (Dichte der tatsächlich angenommenen Rapiditäten) mit $\int d\Theta \rho_t(\Theta) = \lim_{L\to\infty} N/L$. Insbesondere ist die Gesamtenergie pro Längeneinheit der Konfiguration ρ_t gleich

$$e[\rho_t] = \int d\Theta \;\rho_t(\Theta)\; m \cosh\Theta.$$

Das thermodynamische Gleichgewicht ist nun dadurch bestimmt, daß die *freie Energie* pro Längeneinheit $f[\rho, \rho_t] = e[\rho_t] - Ts[\rho, \rho_t]$ (oder äquivalent auch $Rf[\rho, \rho_t]$) unter der Nebenbedingung $\rho(\Theta) = \frac{m}{2\pi}\cosh\Theta$ minimiert, wobei wir mit $s[\rho, \rho_t]$ die Entropie pro Längeneinheit einer Konfiguration bezeichnen

$$s[\rho, \rho_t] = \int d\Theta\, (\rho \ln \rho - \rho_t \ln \rho_t - \rho_l \ln \rho_l)\,(\Theta) = \text{„} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \ln \binom{\rho(n\Delta\Theta)\Delta\Theta}{\rho_t(n\Delta\Theta)\Delta\Theta} \text{“}$$

und $\rho_l = \rho - \rho_t$ auch Lochdichte genannt wird. Man beachte, daß in die Form der Entropie die im vorigen Abschnitt gefundenen Auswahlregeln wesentlich eingehen: $\rho(\Theta)\Delta\Theta$ beschreibt die Zahl der möglichen Rapiditäten, $\rho_t(\Theta)\Delta\Theta$ die der tatsächlich besetzten und der Binomialkoeffizient die Zahl der möglichen Mikrozustände, wobei keine zwei Teilchen gleiche Rapidität haben dürfen.

Im allgemeinen Fall (der Einfachheit halber nur für eine Teilchensorte) definiert man wie vorher die Teilchendichte $\rho_t(\Theta)$ einer Konfiguration und in Analogie zum freien Fall die Gesamtdichte durch

$$\rho(\Theta) = \frac{d}{d\Theta} J(\Theta) = \frac{m}{2\pi}\cosh\Theta + (\phi * \rho_t)(\Theta), \quad J(\Theta) = \frac{m}{2\pi}\sinh\Theta + (\delta * \rho_t)(\Theta),$$

wobei '$*$' die Faltung

$$(\phi * \rho_t)(\Theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Theta'}{2\pi} \phi(\Theta - \Theta')\rho_t(\Theta')$$

bezeichnet. Auch übernehmen wir die Ausdrücke für die Gesamtenergie und die Entropie pro Längeneinheit. (Für das Einfügen von chemischen Potentialen verweisen wir auf Klassen, Melzer (1991) und Fendley (1992).) Damit ergibt sich für die Variation der freien Energie

$$\begin{aligned}\delta(Rf)\,[\rho_t, \rho] &= \delta(Re - s)\,[\rho_t, \rho] \\ &= \int d\Theta \left[\delta\rho \ln\left(1 - \frac{\rho_t}{\rho}\right) + \delta\rho_t \left\{-\ln\left(\frac{\rho - \rho_t}{\rho_t}\right) + Rm\cosh\right\}\right](\Theta)\end{aligned}$$

und für die Variation der Nebenbedingung

$$0 = \int d\Theta \left[\delta\rho(\Theta) - \int \frac{d\Theta'}{2\pi} \phi(\Theta' - \Theta) \delta\rho_t(\Theta') \right].$$

Es folgen die sogenannten TBA-Gleichungen als Bedingung des thermodynamischen Gleichgewichts (durch Vertauschen der Integrationen und Ausnuten der Unitaritätsrelation $\phi(\Theta) = \phi(-\Theta)$), die wir hier für den allgemeinen Fall mehrerer Teilchensorten angeben

$$R m_a \cosh\Theta = -\ln\left(\frac{\rho_t^{(a)}}{\rho^{(a)}}\right)(\Theta) + \left((\mathbb{1}_{ab} - \phi_{ab}) * \ln\left(1 - \frac{\rho_t^{(b)}}{\rho^{(b)}}\right)\right)(\Theta),$$

wobei $(\mathbb{1}_{ab} * f_b)(\Theta) := f_a(\Theta)$. Für die freie Energie ergibt sich entsprechend am Extremum

$$Rf(R) = -\sum_{a=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Theta}{2\pi} m_a \cosh(\Theta)\ \ln\left(\rho^{(a)}/\rho_l^{(a)}\right)(\Theta) = -\frac{\pi}{6R} c_{\text{eff}}(R/R_c).$$

Eine für diesen Schritt abschließende Bemerkung: Wir haben nicht versucht, die Interpretation von $\rho(\Theta)$ als Zahl der möglichen Rapiditäten durch mehr als die Analogie zum freien Fall $\delta \equiv \pi/2$ zu rechtfertigen (typischerweise wird man erwarten, daß es zu gegebener Lösung der Quantisierungsbedingungen für N Rapiditäten Θ_j kein einziges Θ gibt, so daß auch $\{\Theta_j\} \cup \{\Theta\}$ wieder Lösung ist und die dafür notwendigen $N + 1$ (von den vorherigen N verschiedenen) Gleichungen erfüllt). Es gibt jedoch in der Literatur nicht-triviale Beispiele, die mithilfe einer eineindeutigen Abbildung von Θ_j auf n_j zeigen, daß ein Vorgehen nach obigem Muster tatsächlich Sinn macht. Wir wollen darauf nicht weiter eingehen und werden uns damit begnügen zu bemerken, daß die obige Interpretation der $\rho^{(a)}$ in allen hier betrachteten Theorien konsistent ist, insofern als es tatsächlich immer genau eine Lösung mit $0 < (\rho_t^{(a)}/\rho^{(a)})(\Theta) \leq 1$ gibt.

Wir kommen nun im fünften Schritt zum *konformen Limes* $r = R/R_c \to 0$. Da diese Rechnung für uns keinerlei konzeptionell interessante Ansatzpunkte liefert (im wesentlichen findet man, daß die Quotienten $(\rho_t^{(a)}/\rho^{(a)})(\Theta)$ im zentralen Bereich $-\ln(2/r) \ll \Theta \ll \ln(2/r)$ gegen Konstante und für $|\Theta| \gg \ln(2/r)$ mit $e^{-e^{|\Theta|}}$ gegen Null streben), verweisen wir für eine Herleitung auf die Literatur und geben hier nur das Ergebnis an: einen Ausdruck für die effektive zentrale Ladung c_{eff} als Summe über *Dilogarithmen*, wobei die Argumente durch eine nichtlineare, algebraische Gleichung gegeben sind. Wir sollten darauf hinweisen, daß Ergebnisse dieses Typs schon lange bekannt waren, bevor die besondere Struktur

RCFTn erkannt wurde (vgl. Babujan (1982)); auch ist ihre Herleitung keineswegs auf den thermodynamischen Bethe-Ansatz beschränkt (vgl. z.B. Kirillov (1989), Bazhanov, Reshetikhin (1989), Klümper, Pearce (1991), Kuniba, Nakanishi (1992) und Referenzen darin).

Gegeben eine RCFT mit effektiver zentraler Ladung c_{eff}, die als konformer Grenzwert einer (massiven) rein elastischen Streutheorie mit minimaler Streumatrix $S_{ab}(\Theta)$ geschrieben werden kann. Man bilde die Matrizen

$$N_{ab} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Theta}{2\pi} \phi_{ab}(\Theta) = -\hat{\phi}_{ab}(0) = -\frac{1}{2\pi} \left(\delta_{ab}(\infty) - \delta_{ab}(-\infty)\right) = B_{ab} - \mathbb{1}_{ab},$$

die für die Streutheorien aus Kapitel 3.1 ($S_{ab}(\Theta) = \prod_{\alpha \in A_{ab}} f_\alpha(\Theta)$) auch durch

$$B_{ab} = \mathbb{1}_{ab} + \sum_{\alpha \in A_{ab}} N\left[f_\alpha\right], \quad N\left[f_\alpha\right] = (1 - |\alpha|)\text{sgn}(\alpha), \text{ mit } -1 < \alpha \leq 1$$

berechnet werden können, wobei $\delta_{ab}(\Theta) = -i \ln S_{ab}(\Theta)$ und $\phi_{ab} = -\frac{d}{d\Theta}\delta_{ab}(\Theta)$. Man finde die Lösung des nicht-linearen, algebraischen Gleichungssystems (auch stationäre TBA-Gleichungen genannt)

$$w_a = \prod_{b=1}^{n} (1 - w_b)^{B_{ba}}$$

in den Konstanten $w_a \in (0,1)$ (diese haben im TBA die Bedeutung von $w_a = \left(\rho_t^{(a)}/\rho^{(a)}\right)(\Theta)$ für $|\Theta| \ll \ln(2/r),\ r \to 0$, d.h. des Quotienten aus Dichte der angenommen zu möglichen Lösungen der Quantisierungsbedingungen im konformen Limes). Dann ist die effektive zentrale Ladung der RCFT $c_{\text{eff}} = c - 24 h_{\text{min}}$ durch

$$c_{\text{eff}} = \frac{1}{\text{L}(1)} \sum_{a=1}^{n} \text{L}(w_a)$$

gegeben, wobei $\text{L}(w)$ der Rogers-Dilogarithmus ist.

Meist wird das Ergebnis der TBA-Analyse in den wegen der Analogie zum freien Fall als *'dressed' Ein-Teilchen-Anregungsenergien* bezeichneten $E_a(\Theta)$ (genauer: in den dimensionslosen $\epsilon_a(\Theta) = RE_a(\Theta)$) formuliert. Diese sind durch die von uns bevorzugten Dichten wie folgt definiert

$$\frac{\rho^{(a)}}{\rho_t^{(a)}} = 1 + e^{\epsilon_a}, \quad \frac{\rho^{(a)}}{\rho_l^{(a)}} = 1 + e^{-\epsilon_a}, \quad \frac{\rho_l^{(a)}}{\rho_t^{(a)}} = e^{\epsilon_a}.$$

In diesem Zusammenhang spricht man auch von den 'dressed' Ein-Teilchen-Impulsen $J_a(\Theta)$.

Eine andere Formulierung ist das von Zamolodchikov (1991) aufgestellte sogenannte *Y-System* (vgl. auch Ravanini, Tateo, Valeriani (1992)). Definiert man

$$Y_a(\Theta) = e^{\epsilon_a(\Theta)} = \left(\rho_l^{(a)}/\rho_t^{(a)}\right)(\Theta),$$

so gilt im Falle der $ADET$-Streutheorien (siehe Abschnitt 3.1)

$$Y_a\left(\Theta + \frac{i\pi}{h_{\mathcal{G}}}\right) Y_a\left(\Theta - \frac{i\pi}{h_{\mathcal{G}}}\right) = \prod_b \left(1 + Y_b(\Theta)\right)^{I^{\mathcal{G}}_{ab}},$$

wobei wir wiederum mit $I^{\mathcal{G}}$ und $h_{\mathcal{G}}$ die Inzidenzmatrix und Coxeterzahl von $\mathcal{G}$ bezeichnen. Weiterhin gilt die Periodizitätseigenschaft (ein allgemeiner Beweis ist nicht bekannt)

$$Y_a(\Theta + i\pi P) = Y_{\bar{a}}(\Theta), \quad P = \frac{h_{\mathcal{G}} + 2}{h_{\mathcal{G}}},$$

wobei $\bar{a}$ das Antiteilchen zu a bezeichnet. Aus P ergibt sich das konforme Gewicht des störenden Feldes Φ zu

$$h(\Phi) = 1 - \frac{1}{P} \text{ für } ADE, \quad h(\Phi) = 1 - \frac{2}{P} \text{ für } T.$$

Für eine lesbare Zusammenfassung der Verallgemeinerung des Y-Systems für Produkttheorien vom Typ '$G \times H \in ADET \times ADET$' verweisen wir auf die Arbeit von Gliozzi, Tateo (1994). Dort wurde auch für den allgemeinen Fall die Vermutung aufgestellt, daß der Dilogarithmus, summiert über nicht nur die Ränge von G und H, sondern auch über die verschiedenen 'Blätter' jeder Lösung des Y-Systems, eine ganze Zahl ergibt. Für den hier vorgestellten Fall ist die entsprechende Aussage

$$\sum_{n=0}^{h_{\mathcal{G}}+1} \sum_{a=1}^{\text{rang}\,\mathcal{G}} \mathrm{L}\left(\frac{Y_a(\Theta + in\pi/h_{\mathcal{G}})}{1 + Y_a(\Theta + in\pi/h_{\mathcal{G}})}\right) / \mathrm{L}(1) = h_{\mathcal{G}} \text{ rang } \mathcal{G}.$$

Der sich ergebende Zahlenwert wird als effektive zentrale Ladung des infraroten ($R \to \infty$) Fixpunkts des Renormierungsgruppenflusses der Streutheorie interpretiert.

Abschließend das Beispiel des $(2,5)$ Virasoro-minimalen Modells: Die Streumatrix hatten wir im letzten Abschnitt angegeben $S = -f_{2/3} f_{-1/3}$. Es folgt (das zweite Gleichheitszeichen ergibt sich mithilfe der Additionstheoreme der hyperbolischen Funktionen)

$$\begin{aligned} -i \frac{d}{d\Theta} \ln S(\Theta) &= -\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik\Theta} \frac{\sinh \pi k/3 + \sinh 2\pi k/3}{\sinh \pi k} \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik\Theta} \frac{1}{1 - 2\cosh \pi k/3} = \phi_{ab}(\Theta) \end{aligned}$$

und damit

$$N = -\hat{\phi}(0) = 1 = B - 1$$

also $B = 2$. Die Lösungen der stationären TBA-Gleichungen $w = (1-w)^2$ sind $w_\pm = (3 \pm \sqrt{5})/2$ und in der Tat erhält man durch Einsetzen der Lösung aus $[0,1]$ in den Dilogarithmus die effektive zentrale Ladung der konformen Feldtheorie

$$\frac{\mathrm{L}(w_-)}{\mathrm{L}(1)} = \frac{2}{5} = c_{\mathrm{eff}}^{(2,5)}.$$

4 Dilogarithmus und Charakteridentitäten

In dem ersten Teil dieses Kapitels wollen wir eine andere Art vorstellen, Dilogarithmusidentitäten herzuleiten. Unser Ziel dabei ist nicht der tatsächliche Beweis solcher Identitäten, sondern vielmehr der Versuch zu einem besseren Verständnis ihrer Bedeutung und Interpretation zu gelangen.

Dazu betrachten wir die Summenform eines Charakters einer RCFT im Grenzwert $q \nearrow 1$ und vergleichen mit dem durch modulare Kovarianz bestimmten Verhalten. Wir finden auf diese Weise einen Ausdruck für die effektive zentrale Ladung der RCFT in Summen von Dilogarithmen, den Zusammenhang von den Argumenten des Dilogarithmus und Quantendimensionen, sowie eine unendliche Reihe von Bedingungen an die Summenform für Konsistenz mit modularer Kovarianz.

Der zweite Schwerpunkt dieses Kapitels ist die Vorstellung von Beispielen und eines Ansatzes zur Klassifikation von Summenformen.

Wir orientieren uns in unserer Darstellung im wesentlichen an den Veröffentlichungen von Nahm, Recknagel, Terhoeven (1993), Terhoeven (1992) und Terhoeven (1994).

4.1 Summenform von Charaktern

In diesem Abschnitt wollen wir eine bestimmte Form definieren, in der sich die Charakterfunktionen vieler RCFTn schreiben lassen; die sogenannte *Summenform* (auch Euler- oder fermionische Form)

$$
\begin{aligned}
Z(q) &= \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ K\mathbf{c}\cdot\mathbf{m} = K\gamma \bmod K}} \frac{q^{\frac{1}{2}\mathbf{m}B\mathbf{m}^t + \mathbf{b}\cdot\mathbf{m} + \beta}}{(q)_{\mathbf{m}}} \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}_K} \frac{1}{K} \sum_{m_1,\ldots,m_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \frac{q^{\frac{1}{2}\mathbf{m}B\mathbf{m}^t + \mathbf{b}\cdot\mathbf{m} + \beta}}{(q)_{\mathbf{m}}} e^{-2\pi i l(\mathbf{c}\cdot\mathbf{m} - \gamma)}.
\end{aligned}
$$

Dabei benutzen wir folgende q-Symbole $(q)_{\mathbf{m}} = (q)_{m_1} \ldots (q)_{m_n}$ und $(q)_m = (1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^m)$. Weiterhin seien die Einträge der $n \times n$ Matrix B, der n-Vektoren $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$, sowie β und γ rational; B weiterhin symmetrisch und positiv definit. K ganzzahlig, so daß auch $K\gamma$ und $K\mathbf{c}$ ganz sind. Dabei werden wir statt q auch den modularen Parameter τ oder t definiert durch $q = e^{2\pi i\tau} = e^{-2\pi t}$ und $\tilde{q}$ mit $\tilde{q} := e^{-2\pi i/\tau} = e^{-2\pi/t}$, also insbesondere $1/\log(q) = \log(\tilde{q})/4\pi^2$ benutzen.

4.2 Asymptotik

In diesem Abschnitt wollen wir das Verhalten der Summenform $Z(q)$ im Grenzwert $t = -i\tau \searrow 0$ oder $q \nearrow 1$ studieren. In der Tat werden wir mithilfe einer Sattelpunktsmethode und Gaußscher Integration den wegen modularer Kovarianz erwarteten ersten Term der Reihe in $\tilde{q} = e^{-2\pi/t}$ finden, weiterhin jedoch Korrekturen dieses ersten Terms in der Form $e^{\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\cdots}$.

Wir folgen nun zunächst Meinardus (1954) und schreiben die Summenform mithilfe des Cauchy-Theorems in einer *Integraldarstellung*

$$Z(q) = \oint \prod_j \frac{dw_j}{2\pi i\ w_j} \frac{q^\beta}{K} \Big(\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{Z}^n, l\in\mathbb{Z}_K} q^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}B\boldsymbol{\mu}^t}\ e^{-2\pi i l(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{c}-\gamma)} \prod_j w_j^{-\mu_j} \Big) \Big(\prod_j \Big(\sum_{m_j\geq 0} \frac{q^{b_j m_j}}{(q)_{m_j}} w_j^{m_j} \Big) \Big).$$

Auf die erste Klammer des Integrals wenden wir die wohlbekannte *Jacobi-Inversionsformel* (vgl. z.B. Gunning (1962)) ($|q| < 1$) an

$$\begin{aligned} &\sum_{\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{Z}^n,\ l\in\mathbb{Z}_K} q^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}B\boldsymbol{\mu}}\ e^{-2\pi i l(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{c}-\gamma)}\ \mathbf{w}^{\boldsymbol{\mu}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det(2B/2)\ t^n}} \sum_{l\in\mathbb{Z}_K} e^{2\pi i l\gamma} \sum_{\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{Z}^n} \tilde{q}^{\frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}+\log(\mathbf{w})/2\pi i+l\mathbf{c})B^{-1}(\boldsymbol{\mu}+\log(\mathbf{w})/2\pi i+l\mathbf{c})}, \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{w}^{\boldsymbol{\mu}} = \prod_j w_j^{\mu_j}$.

Die Bearbeitung des Ausdrucks in der zweiten Klammer bedarf einiger, weniger bekannter Methoden – wir werden ihn deswegen etwas dataillierter ausführen – als erstes eines Theorems, welches auf *Euler* zurückgeht (Andrews (1976)) ($|q| < 1, |w| < |q|^{-b}$)

$$\sum_{m\geq 0} \frac{q^{bm}}{(q)_m}\ w^m = \prod_{n\geq 0} (1 - w\ q^{n+b})^{-1}.$$

Zweitens wenden wir id $= \exp\circ\log$ an und setzen die Taylor-Entwicklung von $\log(1-x)$ ein

$$\exp\left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{w^r}{r} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi t(n+b)r} \right\}.$$

Den Exponenten dieses Ausdrucks schreiben wir mithilfe *inverser Mellin-Transformation* (vgl. z.B. Davies (1978)) als

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{3/2-i\infty}^{3/2+i\infty} ds\ \Gamma(s)\ D(s+1, w)\ \zeta(s,b)\ (2\pi t)^{-s},$$

wobei $\Gamma(s)$ die Gamma-Funktion mit $\mathrm{Res}_{s=-n}\Gamma(s) = \frac{(-)^n}{n!}$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$, $\zeta(s,b)$ die verallgemeinerte Riemannsche ζ-Funktion $\zeta(s,b) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+b)^{-s}$ mit $\zeta(-n,b) = -\frac{\varphi_{n+1}(b)}{(n+1)}$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ mit $\mathrm{Res}_{s=1}\zeta(s,b) = 1$ (dabei bezeichnen wir mit $\varphi_n(x)$ die von $\frac{te^{xt}}{(e^t-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\ \varphi_n(x)$ erzeugten Bernoulli-Polynome) und schließlich $D(s,w) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{w^r}{r^s}$ $(|w| < 1)$ ist.

Drittens werten wir das Integral aus, indem wir den Integrationsweg entlang der reellen Achse verschieben und so Schritt für Schritt eine Summe der Residuen des Integranden in $s = 1, 0, -1, \ldots$ erhalten (der erste ist Pol von ζ, die weiteren sind Pole von Γ)

$$-\frac{1}{\log(q)} \sum_{p=0}^{\infty} \log^p(q)\ \frac{\varphi_p(b)}{p!}\ (w\partial_w)^p\ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{w^r}{r^2}.$$

Mithilfe der Erzeugendenfunktion der Bernoulli-Polynome und der Reihendefinition des Eulerschen Dilogarithmus $\mathrm{Li}_2(w) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{w^r}{r^2}$ kann man auch kompakter schreiben

$$-w\partial_w\ \frac{q^{bw\partial_w}}{q^{w\partial_w} - 1}\quad \mathrm{Li}_2(w).$$

Insgesamt erhalten wir für $Z(q)$

$$Z(q) = \oint \prod_j \frac{dw_j}{2\pi i\ w_j}\ \frac{1}{K\sqrt{t^n \det B}} \sum_{\boldsymbol{\mu}\in\mathbb{Z}^n,\ l\in\mathbb{Z}_K} \exp\left\{\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mu},l}(q,\mathbf{w})\right\},$$

wobei

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\boldsymbol{\mu},l}(q,\mathbf{w}) = &\log(q)\ \beta\ +\ 2\pi i l\gamma \\ &+ \frac{4\pi^2}{\log(q)}\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu} + \frac{\log(\mathbf{w})}{2\pi i} + l\mathbf{c})B^{-1}(\boldsymbol{\mu} + \frac{\log(\mathbf{w})}{2\pi i} + l\mathbf{c})^t \\ &- \frac{1}{\log(q)} \sum_{p=0}^{\infty} \log^p(q) \sum_{a=1}^{n} \frac{\varphi_p(b_a)}{p!}\ (w_a\partial_{w_a})^p \sum_{r_a=1}^{\infty} \frac{w_a^{r_a}}{r_a^2}\end{aligned}$$

in niedrigster Ordnung in $\log(q)$ auf

$$\frac{1}{\log(q)}\Big(4\pi^2\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu} + \frac{\log(\mathbf{w})}{2\pi i} + l\mathbf{c})B^{-1}(\boldsymbol{\mu} + \frac{\log(\mathbf{w})}{2\pi i} + l\mathbf{c})^t - \sum_a\ \mathrm{Li}_2(w_a)\Big)$$

reduziert. Wir werden weiter unten die Substitution $w_a = e^{\sqrt{-2\pi t}\ v_a}$ durchführen und dann die Summe über $\boldsymbol{\mu}$ zusammen mit dem einfachen Kurvenintegral als beidseitig unendliches Integral über v_a auffassen. Da wir die Sattelpunktsbedingung jedoch in den 'alten' Variablen w_a formulieren möchten, interpretieren wir zunächst Summe und Integral als unendliches Kurvenintegral über alle Zweige des analytisch fortgesetzten Logarithmus $\log(\mathbf{w})$.

Nun zur *Sattelpunktsapproximation* – der Wert des Integrals wird durch den Wert des Integranden im Sattelpunkt abgeschätzt:
Eine notwendige Bedingung für einen Sattelpunkt - also ein Minimum in $\mathbf{w}$ - ist (in niedrigster Ordnung in $\log(q)$)

$$\begin{aligned} 0 &= w_a \partial_{w_a}\ \mathcal{E}_l(q,\mathbf{w}) + \mathcal{O}(\log^0(q)) \\ &= \frac{1}{\log(q)} \Big(- B^{-1}_{aa'} (\log(\mathbf{w}) + 2\pi i l \mathbf{c})_{a'} + \log(1-w_a) \Big) \end{aligned}$$

oder in exponenzierter Form (mögliche Phasen unterschlagend)

$$w_{a'} = \prod_{a=1}^{n} (1-w_a)^{B_{aa'}}.$$

Die Schreibweise dieser Gleichung erinnert stark an die stationären TBA-Gleichungen und in der Tat sind sie gleichwertig. Wir werden im folgenden voraussetzen, daß eine eindeutige Lösung mit $0 < w_a < 1$ existiert und l für diese Lösung verschwindet.
Einsetzen der Sattelpunktsbedingung in $\mathcal{E}_l(q,\mathbf{w})$ und Einführen des Rogers-Dilogarithmus

$$\mathrm{L}(z) = \mathrm{Li}_2(z) + \frac{1}{2}\log(z)\log(1-z),$$

führt auf (Summation über doppelt vorkommende Indizes wird nicht ausgeschrieben)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_l(q,\mathbf{w}=\mathbf{w}_s) = \log(\tilde{q})\ &\Big\{ - \frac{1}{24\ \mathrm{L}(1)} \sum_{a=1}^{n} \mathrm{L}(w_a) \Big\} \\ &+ \log^0(q)\ \Big\{ \varphi_1(b_a)\ \log(1-w_a) \Big\} \\ &+ \log^1(q)\ \Big\{ \beta - \frac{\varphi_2(b_a)}{2}\ \frac{w_a}{1-w_a} \Big\} + \mathcal{O}(\log^2(q)). \end{aligned}$$

Der $\log(\tilde{q})$-Teil ist eine von der Integration unabhängige Konstante (die das Verhalten für $q \nearrow 1$ dominiert), kann vor das Integral gezogen werden und liefert eine erste, grobe Abschätzung. Vergleich mit modularer Kovarianz ergibt Dilogarithmusidentitäten für die effektive zentrale Ladung und bestärkt unsere Identifikation der Sattelpunktsbedingung mit den stationären TBA-Gleichungen.

Mit dem Ziel, Korrekturen höherer Ordnung (in $\log(q)$) zu berechnen, wechseln wir nun die Variablen $w_a = e^{\sqrt{-2\pi t}\ v_a} = e^{\sqrt{\log(q)}\ v_a} \to v_a$ ($\partial_{v_a} = \sqrt{\log(q)}\ w_a \partial_{w_a}$) und entwickeln $\mathcal{E}_l(q,\mathbf{v})$ in eine Taylor-Reihe um den Sattelpunkt $\mathbf{v}_s$

$$Z(q) = \int \frac{1}{K\sqrt{\det B}} \sum_{l\in\mathbb{Z}_K} \exp(\mathcal{E}_l(q,\mathbf{v}_s+\mathbf{\Delta})) \prod_j \frac{d\mathbf{\Delta}_j}{\sqrt{2\pi}},$$

wobei

$$\mathcal{E}_l(q,\mathbf{v}_s+\mathbf{\Delta}) = \mathcal{E}_l(q,\mathbf{v})\big|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_s} + \sum_a \mathbf{\Delta}_a \partial_{\mathbf{v}_a} \mathcal{E}_l(q,\mathbf{v})\big|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_s}$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{a,a'} \mathbf{\Delta}_a \mathbf{\Delta}_{a'}\ \partial_{v_a}\partial_{v_{a'}} \mathcal{E}_l(q,\mathbf{v})\big|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_s}$$
$$+ \frac{1}{6}\sum_a \mathbf{\Delta}_a^3\ \partial_{v_a}^3 \mathcal{E}_l(q,\mathbf{v})\big|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_s} + \dots \quad .$$

Die erste Ableitung von $\mathcal{E}_l(q,\mathbf{v})$ ist nun

$$\partial_{v_a} \mathcal{E}_l(q,\mathbf{v})\big|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_s} = -\sum_{p=1}^{\infty} \log^{p-1/2}(q)\ \frac{\varphi_p(b_a)}{p!}\ \sum_{r_a=1}^{\infty} w_a^{r_a} r_a^{p-1},$$

die zweite

$$\partial_{v_a}\partial_{v_{a'}}\ \mathcal{E}_l(q,\mathbf{v})\big|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_s} = -(B^{-1})_{aa'} - \delta_{a,a'}\frac{w_a}{1-w_a}$$
$$-\delta_{a,a'}\ \sum_{p=1}^{\infty} \log^{p}(q)\ \frac{\varphi_p(b_a)}{p!}\ \sum_{r_a=1}^{\infty} w_a^{r_a} r_a^{p}$$

und die höheren für $n \geq 3$ sind

$$\partial_{v_a}^n\ \mathcal{E}_l(q,\mathbf{v})\big|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_s} = -\sum_{p=0}^{\infty} \log^{p-1+n/2}(q)\ \frac{\varphi_p(b_a)}{p!}\ \sum_{r_a=1}^{\infty} w_a^{r_a} r_a^{p+n-2}.$$

Die nächste $\log(q)$ Ordnung von $Z(q)$ ergibt sich dann durch die Auswertung des Integrals als Gaußsches Integral

$$\int \frac{d^n x}{(2\pi)^{n/2}} e^{\frac{1}{2}xAx^t - d\cdot x - c} = \frac{1}{\sqrt{\det A}} e^{\frac{1}{2}dA^{-1}d^t - c},$$

und wir erhalten

$$Z(q) = \exp\left(\log(\tilde{q})\Big\{-\frac{1}{24\mathrm{L}(1)}\ \sum_{a=1}^{n}\mathrm{L}(w_a)\Big\}\right)$$
$$\exp\left(\sum_{a=1}^{n}\varphi_1(b_a)\ \log(1-w_a)\right)\Big/\ K\sqrt{\det(B\cdot A)}$$
$$\Big(1+\mathcal{O}\big(\log(q)\big)\Big),$$

wobei

$$A_{aa'} = (B)^{-1}_{aa'} + \delta_{a,a'}\frac{w_a}{1-w_a}.$$

Die nächste Ordnung in $\log(q)$ führt zum Ersetzen von $\Big(1+\mathcal{O}\big(\log(q)\big)\Big)$ durch (Summation über $a, a' = 1, \ldots n$ nicht ausgeschrieben)

$$\begin{aligned}
\exp\Bigg[\log^1(q)\ \Bigg(\Big\{\beta - \frac{\varphi_2(b_a)}{2}\ \frac{w_a}{1-w_a}\Big\} \\
&+ \frac{1}{2}\varphi_1(b_a)\frac{w_a}{1-w_a}A^{-1}_{aa'}\varphi_1(b_{a'})\frac{w_{a'}}{1-w_{a'}} \\
&- \frac{1}{2}\varphi_1(b_a)\frac{w_a}{(1-w_a)^2}A^{-1}_{aa} \\
&+ \frac{1}{2}\frac{w_a}{(1-w_a)^2}A^{-1}_{aa}A^{-1}_{aa'}\varphi_1(b_{a'})\frac{w_{a'}}{1-w_{a'}} \\
&- \frac{1}{8}\frac{w_a(1+w_a)}{(1-w_a)^3}(A^{-1}_{aa})^2 \\
&+ \frac{1}{12}\frac{w_a}{(1-w_a)^2}(A^{-1}_{aa'})^3\frac{w_{a'}}{(1-w_{a'})^2} \\
&+ \frac{1}{8}\frac{w_a}{(1-w_a)^2}A^{-1}_{aa}A^{-1}_{aa'}A^{-1}_{a'a'}\frac{w_{a'}}{(1-w_{a'})^2}\Bigg)\Bigg] \\
&\qquad \Big(1+\mathcal{O}\big(\log^2(q)\big)\Big).
\end{aligned} \tag{$*$}$$

Man findet diesen Ausdruck durch Ausnutzung geeigneter Ableitungen der Gaußschen Integrationsformel und Sammeln aller Terme der Ordnung $\log(q)$.

In diagrammatischer Interpretation ist der Exponent nichts anderes als die Erzeugendenfunktion der zusammenhängenden Feynman-Diagramme der Ordnung $\log(q)$ (mit den entsprechenden Faktoren diskreter Symmetrie), die durch die in $\mathcal{E}_l(q, \mathbf{v}_s + \boldsymbol{\Delta})$ kodierten Feynman-Regeln erlaubt sind.
Dies erlaubt die nächste Ordnung noch per Hand 'aufzuschreiben' – man findet 35 'neue' Diagramme, d.h. Diagramme, die sich nicht nur durch Übergang zu einer Wechselwirkung höherer $\log(q)$-Ordnung ($p \mapsto p+1$) zu gegebenem Diagramm ergeben. Die übernächste Ordnung ist allerdings mit 367 Diagrammen vor Wahl der Ordnung der Wechselwirkungen schon ein wenig unhandlich. So können zwar prinzipiell beliebig hohe Ordnungen ausgewertet werden, die Zahl der Diagramme wächst jedoch sehr schnell. Ist $\operatorname{rang} B = 1$, so vereinfacht sich das Problem (es gibt nur eine Art von 'Propagator') und nur in diesem Fall haben wir mehr als die hier aufgeführten Ordnungen betrachtet.

4.3 ... und modulare Kovarianz

In diesem Abschnitt vergleichen wir die im letzten Abschnitt gefundene Asymptotik mit den Vorhersagen modularer Kovarianz.

Sei nun $Z(q)$ Charakter einer RCFT (mit effektiver zentraler Ladung $c_{\text{eff}} = c - 24h_{\min}$) zur physikalischen Tiefstgewichtsdarstellung λ mit konformem Gewicht h_λ, also $Z(q) =: Z^{(\lambda)}(q) = \chi_{h_\lambda,c}(q)$ (vgl. 2.1-2)

$$Z^{(\lambda)}(q) = q^{h_\lambda - c/24} \sum_{m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} d_m^{(\lambda)}\ q^m,$$

wobei $d_m^{(\lambda)}$ die Multiplizität der Zustände zum Grad m, also insbesondere eine nicht-negative, ganze Zahl ist. Es folgt die Identifikation

$$h_\lambda - c/24 = \min_{\mathbf{m}\geq\mathbf{0}}(\frac{1}{2}\mathbf{m}B\mathbf{m}^t + \mathbf{b}\cdot\mathbf{m} + \beta). \qquad (**)$$

Weiterhin wissen wir dank modularer Kovarianz, daß sich $Z^{(\lambda)}(q)$ auch als Potenzreihe in $\tilde{q}$ schreiben läßt

$$Z^{(\lambda)}(q) = \sum_{\lambda'} S_{\lambda,\lambda'}\ Z^{(\lambda')}(\tilde{q}) = \sum_{\lambda'} S_{\lambda,\lambda'}\ \tilde{q}^{\,h_{\lambda'} - c/24} \sum_{m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} d_m^{(\lambda')}\ \tilde{q}^{\,m}.$$

Vergleicht man dies (genauer: den ersten Term dieser Reihe) mit den Ergebnissen des letzten Abschnitts, so ergibt sich

$$c_{\text{eff}} = \frac{1}{\mathrm{L}(1)} \sum_{a=1}^{n} \mathrm{L}(w_a) \qquad (A)$$

$$S_{\lambda,\min} = \frac{\exp\left(\sum_{a=1}^{n} \varphi_1(b_a^{(\lambda)})\ \log(1-w_a)\right)}{K\sqrt{\det(B\cdot A)}} \qquad (B)$$

$$0 = \text{Exponent von } (*) \text{ in } 4.2\Big|_{\beta=\beta^{(\lambda)},\mathbf{b}=\mathbf{b}^{(\lambda)}} \qquad (C)$$

$$0 = \text{höhere Ordnungen in } \log(\mathrm{q}) \text{ der Entwicklung von } Z^{(\lambda)}(q), \qquad (D)$$

wobei $A = B^{-1} + \operatorname{diag}(\frac{\mathbf{w}}{1-\mathbf{w}})$, $\mathbf{w} = (1-\mathbf{w})^B$ und alle weiteren Größen in Abschnitt 4.1 und 2.1-2 definiert sind.
In Worten:

(A) gibt die effektive zentrale Ladung der RCFT als Summe von Dilogarithmen, wobei die Argumente durch die Sattelpunktsgleichung $\mathbf{w} = (1-\mathbf{w})^B$ und $0 < w_a < 1$ definiert sind, insbesondere nur von B abhängen.
(B) gibt den allgemeinen Zusammenhang zwischen bestimmten Elementen der modularen S-Matrix und den Argumenten der Dilogarithmusidentitäten (A), w_a an. Insbesondere finden wir für die Quantendimensionen

$$\frac{S_{\lambda,\min}}{S_{0,\min}} = \prod_{a=1}^{n} (1-w_a)^{b_a^{(\lambda)} - b_a^{(0)}},$$

wobei 0 und min die Vakuumdarstellung bzw. die Darstellung minimalen, konformen Gewichts bezeichnen.
(C) kann als zu (**) alternative Berechnung von β aufgefaßt werden, bestimmt also das konforme Gewicht der Darstellung λ.
(D) schließlich ist Kurzschreibweise einer prinzipiell berechenbaren, unendlichen Menge komplizierter Konsistenzbedingungen an B und $\mathbf{b}$. Sie zu lösen, ist vom Typ, (C) für gegebenes β nach B und $\mathbf{b}$ aufzulösen – außer im Fall $\operatorname{rang} B = 1$ (vgl. folgenden Abschnitt) ein hoffnungsloses Unterfangen, so scheint es.

4.4 Ein Klassifikationsansatz

In diesem Abschnitt wollen wir die Klassifikation (beachte die Zusatzannahme, s.u.) des Falls $\operatorname{rang} B = 1$ vorstellen, daß heißt, wir geben die Menge aller Summenformen an, die die ersten Konsistenzbedingungen erfüllen und identifizieren sie mit Charakteren von RCFTn. Im Fall $\operatorname{rang} B = 2$ ist die Klassifikation nicht abgeschlossen, wir geben nur die Ergebnisse einer numerischen Studie an, bei der eine große Zahl von Matrizen auf Erfüllung einiger Konsistenzbedingungen untersucht wurden.

Dabei machen wir in beiden Fällen die zusätzliche *Annahme*, daß $\mathbf{b}$ gleich Null gesetzt werden kann, daß heißt, daß in der entsprechenden RCFT ein Charakter von der Summenform mit $\mathbf{b} = 0$ ist. (Wir erwarten, daß dies der Charakter zu minimalem konformem Gewicht ist, machen jedoch keinen Gebrauch von dieser Erwartung).
Unter dieser Annahme haben wir folgende Klassifikation im **Fall** $\operatorname{rang} B = 1$:

Die einzigen Nullstellen (numerisch) der ersten nicht-trivialen Konsistenzbedingung (Ordnung $\log^2(q)$ und $b = 0$) in $w \in]0,1[$ sind $w = \tau,\ 1/2$ und τ^2 ($\tau^2 + \tau - 1 = 0$). Sie führen auf die effektiven zentralen Ladungen $c_{\text{eff}} = 3/5,\ 1/2$ und $2/5$ der Virasoro-minimalen $(3,5)-$, $(3,4)-$ und $(2,5)$-Modelle; die entsprechenden 'Matrizen' B sind $1/2,\ 1$ und 2. Gegeben w und damit B, konnten wir die ersten Konsistenzbedingungen nach weiteren $b \neq 0$ auflösen und fanden die bekannten Resultate: für $(3,5)$ $b = 0, 1/2$, für $(3,4)$ $b = 0, \pm 1/2$ und für $(2,5)$ $b = 0, 1$.

Nun zum **Fall** $\operatorname{rang} B = 2$:

Wir betrachten 2×2 Matrizen B mit folgenden Eigenschaften: symmetrisch, nicht-diagonal (da sonst auf den Fall $\operatorname{rang} B = 1$ reduzierbar) und mit positiven Einträgen auf der Diagonalen (sonst ist das Spektrum nicht nach unten beschränkt); hat B negative, nicht-diagonale Einträge, so verlangen wir, daß B positiv definit ist (sonst ist wiederum das Spektrum nicht nach unten beschränkt).

Unsere *Kriterien*: Zu gegebener Matrix von diesem Typ, berechnen wir mit (4.3.A) (und einem pari-Programm) die 'effektive zentrale Ladung' c_{eff}. Diese muß, wenn die Summenform ein Charakter einer RCFT sein soll, rational sein – in numerischen Rechnungen verlangt man bei hinreichender Genauigkeit ein Abbrechen der Kettenbruchentwicklung. Analog berechnet man mit (4.3.D) das 'effektive konforme Gewicht' $\beta = h - c/24$ der Summenform und verlangt wiederum, daß dies eine rationale Zahl ist (notwendig für den Charakter einer RCFT). In allen uns bekannten Fällen, ist tatsächlich das so ($\mathbf{b} = 0$) berechnete β identisch zu $-c_{\text{eff}}/24$ und die Summenform, falls Charakter, der Charakter zur Darstellung minimalen konformen Gewichts.

Diese beiden Kriterien stellen sicher, daß die Asymptotik der Summenform von geeignetem Typ ist. Können wir darüberhinaus eine Übereinstimmung der Multiplizitäten der ersten Terme der Summenform mit denen eines Charakters einer RCFT, typischerweise von bosonischer Form, mit der entsprechenden Asymptotik finden, so betrachten wir die *Identifikation* der beiden Partitionen als gelungen.

Da die Menge der möglichen 2×2 Matrizen unendlich ist und wir, anders als im eindimensionalen Fall, keine zusätzlichen effektiven Bedingungen an B finden konnten, mußten wir uns bei den numerischen Untersuchungen auf eine Teilmenge beschränken, können also nicht sicher sein, tatsächlich alle Matrizen geeigneter Asymptotik gefunden zu haben. Die von uns betrachtete Teilmenge besteht aus den Matrizen B, deren Einträge B_{ij} von der Form $\pm n/d$ mit $0 \leq n, d \leq 11$ sind (und obige Eigenschaften erfüllen); und enthält fast eine halbe Millionen Elemente.

Wir sollten bemerken, daß es Matrizen B gibt, die mehrere (dann drei) Lösung der Sattelpunktsgleichungen in $w \in]0,1[$ haben (so z.B. $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$); auch hatten alle Matrizen eine Lösung (im Rahmen der Genauigkeit) – zwei unverstandene Beobachtungen.

Im folgenden geben wir zunächst die Matrizen an, deren Summenformen mit Charakteren RCFTn im obigen Sinne identifiziert werden konnten:
Als erstes eine Serie, den Modellen $U(1)_{2a(a+b)}$ (kompaktifiziertes freies Boson) entsprechend

$$D_{a,b} := B = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad c_{\text{eff}} = 1, \quad \mathbf{w} = [1/2, 1/2]$$

mit

$$\begin{aligned} Z_{D_{a,b}}(z,q) &= \frac{1}{\eta(\tau)} \sum_{n=0}^{2(a+b)-1} \Theta_{2na,2a(a+b)}(z,\tau) \\ &= \frac{1}{\eta(\tau)} \sum_{n=0}^{2(a+b)-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}+\frac{n}{2(a+b)}} q^{2a(a+b)m^2} z^{2a(a+b)m}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen wir mit Z_B die Summenform zu gegebenem B ($\mathbf{b} = 0$, $\beta = -c_{\text{eff}}/24$) und hier mit $Z_B(z,q)$ die Summenform in die ein weiterer Faktor der Form $z^{a(m_1-m_2)}$ eingefügt wurde. Dieser kann insbesondere dazu verwandt werden, auf die verschiedenen Θ-Funktionen zu projizieren. Die Formel scheint nicht nur für jedes Paar positiver ganzer Zahlen a, b zu gelten, sondern auch für negative b, wenn nur $\det(B) > 0$, d.h. $a^2 > b^2$.

Bezeichnen wir den Übergang von $B \to B^{-1}$, entsprechend $\mathbf{w} \to 1 - \mathbf{w}$ und $c_{\text{eff}} \to \operatorname{rang} B - c_{\text{eff}}$ mit *Konjugation* (allgemeiner mag man auch nur bestimmte w_a konjugieren, verliert dann aber meist die Symmetrie von B), so finden wir, daß $D_{a,b}$ und $D_{a,-b}$ konjugiert sind; insbesondere ist $D_{a,0} = D_{1,0} = (Ising)^2$ konjugationsinvariant (entsprechend ist im ein-dimensionalen Fall das Ising-Modell $(3,4)$ selbstkonjugiert). Da weiterhin $D_{a,b}$ und $D_{a+b,-b}$ zu den gleichen Charakteren führen, liegt es nahe, die Menge der a, b auf den 'Fundamentalbereich' $b^2 < a^2$, $a > 0$ und damit auf positiv definite B einzuschränken (damit wird gleichzeitig das Problem der 'fehlenden' Konjugierten der $D_{a,b}$ mit $b > a$ behoben).
Im Sonderfall

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_{\text{eff}} = 1,$$

mit $\det(B) = 0$ (B nicht invertierbar) bricht die ganze Argumentation der vorangegangenen Abschnitte zusammen. Trotzdem gilt die Partitionsidentität. Die Tatsache, daß Z_B zu

$$Z_B(q) = \sum_{m\geq 0} q^{m^2/4} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{(q)_k (q)_{m-k}} = \sum_{m,k\geq 0} \frac{q^{m^2/4}}{(q)_m} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}$$

(wobei $\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \frac{(q)_m}{(q)_k (q)_{m-k}}$ ist) umgeschrieben werden kann, deuten wir als Hinweis, daß allgemeinere Summenformen betrachtet werden sollten (vgl. Dashmahapatra etal (1993)).

Der Beweis der bisher gegebenen Identitäten ist elementar vermöge (l ist der Summationsindex der Θ-Funktion)

$$\frac{1}{\eta(\tau)} = \sum_{\substack{n,m\geq 0\\ n-m=l}} \frac{q^{nm}}{(q)_n (q)_m}, \qquad l \in \mathbb{Z}.$$

Daneben gibt es vier Einzelfälle, die mit Virasoro-minimalen Modellen des Typs (p, p')

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad c_{\text{eff}} = 5/7, \qquad (3,7),$$
$$B = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_{\text{eff}} = 4/7, \qquad (2,7),$$
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_{\text{eff}} = 3/4, \qquad (3,8)$$

und der $\mathbb{Z}_3$ parafermionischen Theorie

$$B = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad c_{\text{eff}} = 4/5$$

identifiziert werden konnten. In allen vier Fällen erfüllen die entsprechenden konjugierten Theorien beide Kriterien (das erste trivialerweise)

$$B^{-1}_{(3,7)} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad c_{\text{eff}} = 9/7,$$
$$B^{-1}_{(2,7)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_{\text{eff}} = 10/7,$$
$$B^{-1}_{(3,8)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_{\text{eff}} = 5/4,$$
$$B^{-1}_{(\mathbb{Z}_3)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad c_{\text{eff}} = 6/5.$$

Eine Identifizierung ist jedoch wegen $c_{\text{eff}} > 1$ ungleich schwieriger. Während $c_{\text{eff}} < 1$ eine RCFT im wesentlichen eindeutig als Virasoro-minimales Modell charakterisiert und Charaktere dann bekannt und berechenbar sind, ist $c_{\text{eff}} \geq 1$ nicht notwendig charakteristisch für eine RCFT (man denke allein an $c_{\text{eff}} = 1$), schlimmer noch: die Charaktere sind nicht immer bekannt und wenn bekannt, nicht immer effektiv berechenbar. Geht man jedoch davon aus, daß die in unserem Klassifikationsansatz einfachen Theorien auch im $\mathcal{W}$-Algebra-Zugang 'einfach' sind, so ist die Zahl der möglichen RCFT klein und in der Tat konnten wir (Eholzer (1994)) sie (die zweite nur bedingt) identifizieren: Die erste Theorie $B^{-1}_{(3,7)}$ mit $\mathcal{W}(2,4)$ bei $c(6,7) = -3/7$, die zweite $B^{-1}_{(2,7)}$ unter Vorbehalt (hier wurde der Charakter nicht berechnet, jedoch ist die Summenform konsistent mit den Generatoren der $\mathcal{W}$-Algebra und den auftretenden konformen Gewichten) mit $\mathcal{W}(2,6,8)$ bei $c(14,13) = -830/7$, die dritte $B^{-1}_{(3,8)}$ mit $\mathcal{W}(2,4)$ bei $c(8,5) = -115/4$ und schließlich die vierte $B^{-1}_{(\mathbb{Z}_3)}$ mit $\mathcal{W}(2,3)$ bei $c(6,5) = 6/5$.

Fehlschläge: Da die Zahl der Matrizen, die das erste, nicht aber das zweite Kriterium erfüllen, verhältnismäßig klein ist, geben wir hier auch diese Menge an (auch in der vagen Hoffnung, sie möge durch leichte Veränderung der Summenform durch Charaktere interpretierbar sein). Zunächst die Einzelfälle

$$B = \begin{pmatrix} 11 & 9 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}, \quad c_{\text{eff}} = 3/10,$$

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad c_{\text{eff}} = 2/5,$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad c_{\text{eff}} = 1/2,$$

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad c_{\text{eff}} = 1/2,$$

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad c_{\text{eff}} = 3/5,$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_{\text{eff}} = 7/10,$$

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad c_{\text{eff}} = 6/7,$$

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_{\text{eff}} = 8/7,$$

$$B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_{\text{eff}} = 6/5.$$

Für die beiden letzten Fälle macht Konjugation keinen Sinn.

'Entlang' der Serie der oben angegebenen ($c_{\text{eff}} = 1$)-Theorien haben wir zwei Serien (die das zweite Kriterium nicht erfüllen)

$$B = \frac{1}{2} D_{a,b}, \quad c_{\text{eff}} = 6/5, \quad \mathbf{w} = \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right],$$
$$B = 2D_{a,b}, \quad c_{\text{eff}} = 4/5, \quad \mathbf{w} = \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right].$$

Schließlich noch eine Serie mit $c_{\text{eff}} = 1$

$$D_{a,b,c} := \frac{1}{b+ac} \begin{pmatrix} a^2 & b \\ b & c^2 \end{pmatrix}, \quad (a \neq c \in \mathbb{Z}),\ w = 1 - w',\ w^c = (1-w)^a,\ c_{\text{eff}} = 1.$$

Abschließend einige Bemerkungen zum **Fall** $\operatorname{rang} B = 3$:

Ein großes Problem ist neben der schieren Anzahl der zu untersuchenden Fälle die Lösung der Sattelpunktsbedingung. Konnte man den zweidimensionalen Fall noch auf die Lösung *einer* nicht-linearen Gleichung reduzieren und so vergleichsweise effektiv lösen, ist dies hier nicht mehr möglich. Es bleibt ein nicht-lineares, gekoppeltes Gleichungssystem, kein numerisches Verfahren garantiert Konvergenz, abgesehen davon, daß die Existenz einer Lösung in $w \in]0,1[$ nicht sicher ist.

4.5 Weitere Beispiele: ADET-Klassifikation

In diesem Abschnitt werden wir einige weitere Beispiele von Summenformen vorstellen. Die erste Klasse entspricht den in Abschnitt 3.1 vorgestellten, rein elastischen Streutheorien, klassifiziert durch ADET-Graphen (vgl. Anhang C). Es scheint, daß diese RCFTn in gewissem Sinne ihre integrablen Störungen 'kennen': die Charaktere lassen sich in den entsprechenden Summenformen schreiben, wobei in die Streumatrix als auch in den Charakter im wesentlichen (die Streumatrix braucht zudem die Coxeterzahl) die Inzidenz-Information des entsprechenden Graphen eingeht. Die entsprechenden Summenformen wurden in Andrews (1976), Lepowsky, Primc (1985), dann später in Kedem, Klassen, McCoy, Melzer (1993) und Terhoeven (1992) gefunden.

Weitere Beispiele, die wir hier nicht erwähnen wollen, sind zum einen die in Terhoeven (1992) und Kuniba, Nakanishi, Suzuki (1993) vermuteten Summenformen für allgemeine parafermionische Theorien, zum anderen die mit q-Binomialkoeffizienten 'verzierten' Partitionen (vgl. Dashmahapatra etal. (1993) und Referenzen), Charaktern der unitären Virasoro minimalen Modelle entsprechend, die in Berkovich (1994) bewiesen werden konnten. Auch sollten wir hier auf die von Berkovich, McCoy (1994) vermuteten Summenformen für alle Virasoro-minimalen Modelle verweisen.

All diese Beispiele bestärken die Vermutung, daß sich alle Charakterfunktionen von RCFTn in einer oder mehreren (prominentestes Beispiel ist das Ising Modell, vgl. A_1 und E_8) Summenformen schreiben lassen und ein besseres Verständnis ihrer Bedeutung von großer Wichtigkeit für die Klassifikation von RCFTn (vgl. Nahm, Recknagel, Terhoeven (1993)) sein könnte.

Die A_{k-1}-Serie ($k \geq 2$)
entspricht den $\mathbb{Z}_k$ parafermionischen Theorien mit zentraler Ladung

$$c_k = c_{\text{eff}} = \frac{2(k-1)}{k+2}.$$

Die konformen Gewichte der physikalischen Tiefstgewichtsdarstellungen sind

$$h^L_M = \frac{L(L+2)}{4(k+2)} - \frac{M^2}{4k} + \max(0, (|M| - L)/2),$$

wobei $L \in \{0, \dots k\}$ und $M \in \{-k+1, \dots k\}$. Der minimale Wert wird für die Vakuumdarstellung min $= 0 = (L = 0, M = 0)$ angenommen. Die formale (einige Charaktere gleichen sich) modulare S-Matrix für diesen Summationsbereich ist

$$b_{(L,M),(L',M')} = \frac{1}{\sqrt{k(k+2)}}\, e^{\pi i M M'/k} \sin\Big(\pi \frac{(L+1)(L'+1)}{k+2}\Big).$$

Zum einen kennt man die Charaktere der $\mathbb{Z}_k$ Parafermionen in der Form $\kappa^L_M(q) = \eta(q)\ c^L_M(q)$, wobei $\eta(q) = q^{1/24}(q)_\infty$ und $c^L_M(q)$ die sogenannten A_1-String-Funktionen zum Level k ($k \geq 2$) (Kac, Peterson (1984)) sind

$$c^l_m(\tau) \quad = \quad \eta(\tau)^{-3} \sum_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ -|x|<|y|\leq|x| \\ (x,y)\ or\ (1/2-x,1/2+y)\in((l+1)/2(k+2),m/2k)+\mathbb{Z}^2}} \operatorname{sign}(x)\ q^{(k+2)x^2-ky^2},$$

sogenannte indefinite Hecke-Modulformen. Nach Lepowsky, Primc (1985) lassen diese sich aber auch in der Summenform

$$\kappa^L_{L+2s}(q) \ = \ q^{h^L_{L+2s}-c_k/24} \sum_{\substack{m_1,\dots,m_{k-1}\geq\ 0 \\ \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(k-1)}B\mathbf{m}=s/k \bmod 1}} \frac{q^{\frac{1}{2}\mathbf{m}B\mathbf{m}^t-\frac{1}{2}\mathbf{e}^{(k-L)}B\mathbf{m}+s(s-k+L)/k-\max(0,s-k+L)}}{(q)_{m_1}\cdots(q)_{m_{k-1}}}$$

schreiben, wobei

$$L \in \{0, \dots k\},\ \ s \in \{0, \dots k-1\},$$

$B_{ij} = 2\min_{ij}(k - \max_{ij})/k$ das Zweifache des Inversen der Cartan Matrix von A_{k-1} (vgl. Anhang C) und $\mathbf{e}^{(j)}_i = \delta_{i,j}$ ($j = 0, \dots k$, $i = 1, \dots k-1$); weiterhin $\mathbf{b}^L = -\frac{1}{2}\mathbf{e}^{(k-L)}B$, $\beta^{(L,s)} = h^L_{L+2s} - c_k/24 - \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(s)}B\mathbf{e}^{(s)} + \frac{1}{2}\mathbf{e}^{(k-L)}B\mathbf{e}^{(s)}$ ($M = \max(-(L+2s), L+2s-2k)$), $\mathbf{c} = (\mathbf{e}^{(k-L)}B)^t$ und $\gamma = s/k$.

Die $\mathbb{Z}_k$ parafermionischen Charaktere haben (wie auch die String-Funktionen) die folgenden Symmetrien $\kappa^L_M = \kappa^L_{-M}$ und $\kappa^L_M = \kappa^{k-L}_{M+k}$, also $\kappa^L_M = 0$, wenn $M \neq L \bmod 2$ und $\kappa^L_M = \kappa^L_{M+2k}$. Die Elemente der 'effektive' S-Matrix, die sich unter Beachtung der Entartungen der parafermionsichen Charaktere ergibt, ist folglich eine Summe der oben angegebenen S-Matrix-Elemente. Allerdings sollte man nur die erste der beiden Symmetrien ausnutzen: Nur dann ist die erhaltene S-Matrix, $S_{(L,M),(L',M')} = b_{(L,M),(L',M')} + b_{(k-L,M+k),(L',M')} = 2\ b_{(L,M),(L',M')}$, unitär und die Verlinde Formel ergibt sinnvolle Resultate. Der Grund ist wohl (im Fall $\mathbb{Z}_3$ ist dies explizit nachgerechnet, Eholzer (1994)), daß es eine 'versteckte' $\mathbb{Z}_{k>2}$ Quantenzahl zur Nullmode des $\mathcal{W}_k$-Generators der zugrundeliegenden $\mathcal{W}(2, 3, \dots k)$ Symmetriealgebra des Modells gibt, der die erste der beiden Symmetrien bricht.

Die Lösung der Sattelpunktsbedingungen ist durch

$$w_a = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{k+2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi(a+1)}{k+2}\right)} = \left(\frac{S_{(0,0),(0,0)}}{S_{(0,0),(a,a)}}\right)^2 \quad \text{für} \quad a \in \{1, \dots k-1\}$$

gegeben und führt mit (4.3.A) auf die (effektive) zentrale Ladung der RCFT.

Die D_k-Serie ($k \geq 3$)
entspricht einem freien Boson kompaktifiziert mit Radius $r = \sqrt{k/2}$ und durch die $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie der Theorie dividiert. Die zentrale Ladung ist $c_k = 1$. Die konformen Gewichte sind

$$h_l = \frac{l^2}{4k}$$

für $l \in \{-k+1, \dots k\}$ wobei $l = 0$ der Vakuumdarstellung entspricht. Die modulare S-Matrix ist

$$S_{l,l'} = \frac{1}{\sqrt{2k}}\, e^{-\pi i l l'/k}.$$

Die Charaktere dieser Modelle sind bis auf $\eta(\tau)^{-1}$ die sogenannten Jacobi-Theta-Funktionen

$$\Theta_{l,k}(z,\tau,u) = e^{-2\pi i k u} \sum_{m \in \mathbb{Z}+l/2k} q^{km^2} e^{-2\pi i z k m},$$

die sich vermöge $\Theta_{l+l',k}(z,\tau,u) = \Theta_{l',k}(z - \frac{l}{k}\tau, \tau, u - \frac{l^2}{4k^2}\tau + \frac{l}{2k}z)$ alle mithilfe von $\Theta_{0,k}(z,\tau,u)$ schreiben lassen.
Die entsprechenden Summenformen der Charaktere lassen sich daher alle aus

$$q^{-1/24} \sum_{\substack{m_1,\dots,m_k \geq 0 \\ \frac{1}{2}(1,0^{k-1})B\mathbf{m} = s/2 \bmod 1}} \frac{q^{\frac{1}{2}\mathbf{m}B\mathbf{m}^t} e^{\pi i z(m_k - m_{k-1})}}{(q)_{m_1} \cdots (q)_{m_k}} = \frac{1}{\eta(\tau)}\, \Theta_{sk,k}(z,\tau,0),$$

herleiten, wobei $s \in \{0,1\}$ und B wiederum das Zweifache des Inversen der Cartan Matrix von D_k ($k \geq 3$) ist (vgl. Anhang C).

Man findet, daß sich $\Theta_{l,k}(0,\tau,0)/\eta(\tau)$ in der Summenform mit $\beta_l = \frac{l^2}{4k} - \frac{1}{24}$, $\mathbf{b}^l = \frac{l}{2k}(0^{k-2}, 1, -1)$ und $\mathbf{c} = \frac{1}{2}(1, 0^{k-1}) \cdot B$ schreiben läßt.

Eine Produktform der Partitionen

$$\Theta_{l,n}(z,\tau,u) = e^{-2\pi i n u} q^{l^2/4n} e^{-\pi i l z}$$
$$\prod_{m=1}^{\infty} \left[(1-q^{2mn})(1+q^{(2m-1)n+l} e^{-2\pi i n z})(1+q^{(2m-1)n-l} e^{2\pi i n z})\right]$$

folgt mithilfe der Jacobi-Dreifachprodukt-Identität

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+e^{2\pi iz}q^{2n-1})(1+e^{-2\pi iz}q^{2n-1}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2}e^{2\pi imz}.$$

Ist k ein ganzzahliges Vielfaches von 4, so läßt sich die Summe über beide Sektoren $s=0,1$ auch als $\Theta_{0,k/4}(z,\tau)/\eta(\tau)$ schreiben.

Die Asymptotik der Vakuumdarstellung für $z=0$ führt auf die Dilogarithmus-Identität

$$\frac{1}{L(1)}\left[2L\left(\frac{1}{k}\right)+\sum_{a=2}^{k-1}L\left(\frac{1}{a^2}\right)\right] = 1 = c_{U(1)}.$$

Die Fälle E_6, E_7 und E_8:

Die entsprechenden Charakteridentitäten sind vom Typ 'Summenform = Rocha-Caridi Form', wobei die Matrix B der Summenform das Zweifache des Inversen der Cartan Matrizen zu E_6, E_7 bzw. E_8 (vgl. Anhang C) ist und auf der rechten Seite $\chi_{1,1}+\chi_{1,5}+2\chi_{1,3}$, $\chi_{1,1}+\chi_{1,3}$ bzw. $\chi_{1,1}$ steht, wobei $\chi_{r,s}$ die Charaktere (vgl. Rocha-Caridi (1984), Goddard etal (1986)) der unitären $(p,p')=(6,7),(4,5)$ bzw. $(3,4)$ Virasoro minimalen Modelle mit zentraler Ladung 6/7, 7/10 bzw. 1/2 sind

$$\chi_{r,s}^{(p,p')}(q) = \frac{1}{\eta(q)}\big(\Theta_{rp-sp',pp'}-\Theta_{rp+sp',pp'}\big)(0,\tau,0).$$

Für die entsprechenden Dilogarithmus Identitäten verweisen wir auf Klassen, Melzer (1990).

Die T_k-Serie ($k\geq 1$)

entspricht den nicht-unitären $(2,2k+3)$ Virasoro-minimalen Modellen mit

$$c_{\text{eff}} = \frac{2k}{2k+3} = 1-\frac{6}{2(2k+3)}, \quad c^k = -\frac{2k}{2k+3}(6k+5).$$

Die konformen Dimensionen sind

$$h_l = -\frac{l(2k+1-l)}{2(2k+3)}, \quad l\in\{0,\ldots,\mathbb{Z}_k\}$$

und nehmen den kleinsten Wert für $l=k$ an. Die modulare S-matrix ist reell

$$S_{l,l'} = \sqrt{\frac{4}{2k+3}}(-1)^{l+l'+k}\sin\Big(2\pi\frac{(l+1)(l'+1)}{2k+3}\Big).$$

Unter Ausnutzung einer Produktdarstellung der Charaktere und der sogenannten Andrews-Gordon-Identitäten (vgl. Andrews (1976), Bressoud (1980)) findet man folgende Summenform der Charaktere der Theorie (vgl. Feigin etal (1992))

$$\chi_l^{(2,2k+3)}(q) = q^{h_l - c^k/24} \sum_{m_1,\ldots,m_k \geq 0} \frac{q^{\frac{1}{2}\mathbf{m}B\mathbf{m}^t + \mathbf{b}^{(l)}\cdot\mathbf{m}}}{(q)_{m_1}\cdots(q)_{m_k}},$$

wobei $B_{ij} = 2\min_{ij}$ $(i,j \in \{1,\ldots k\})$ das Zweifache des Inversen der 'Cartan'-Matrix (definiert durch 2 −Inzidenz Matrix) des entsprechenden 'Tadpole'-Graphen T_k (vgl. Anhang C) ist, $\mathbf{b}^{(l)} = (0^l, 1, 2, \ldots, k-l) = \big((\mathbf{e}^{(k)} - \mathbf{e}^{(l)})B\big)$ und $\beta^{(l)} = h_l - c_{\mathrm{eff}}^k/24$.

Die Lösung der Sattelpunktsbedingungen ist

$$w_a = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2k+3}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi(a+1)}{2k+3}\right)} = \frac{\sin^2\left(2\pi\frac{k+1}{2k+3}\right)}{\sin^2\left(2\pi\frac{(k+1)(a+1)}{2k+3}\right)} = \left(\frac{S_{\min,0}}{S_{\min,a}}\right)^2 \quad \text{für} \quad a \in \{1,\ldots k\}$$

und führt mit $(4.3.A)$ auf die entsprechende Dilogarithmusidentität für c_{eff}.

5 Klassifikation RCFTn, hyperbolische 3-Mannigfaltigkeiten und der Dilogarithmus

Zunächst beschreiben wir kurz den Zustand der Klassifikation RCFTn; etwas genauer gehen wir auf das Spektrum der effektiven zentralen Ladungen ein, betrachten dann die mögliche Bedeutung von Summenformen und entsprechenden Identitäten des Rogers-Dilogarithmus für diese Klassifikation und kommentieren kurz die möglichen Interpretationen der Existenz der Summenformen.

In den folgenden Abschnitten geben wir einen kleinen Einblick in hyperbolische Geometrie und das Klassifikationsprogramm hyperbolischer 3-Mannigfaltigkeiten. Insbesondere zeigen wir das Auftreten des Dilogarithmus und seiner Varianten bei der Berechnung topologischer Invarianten, wie dem Volumen und der Chern-Simons- bzw. η-Invariante auf (und kommentieren kurz einige Zusammenhänge zur algebraischen K-Theorie). Die entsprechenden Spektren geben wir, soweit bekannt, an.

Wir schließen in 5.4 mit einer kurzen Skizze des Auftretens des Rogers-Dilogarithmus bei der Volumenberechnung von sogenannten Grassmannschen Simplizes.

5.1 Die Klassifikation RCFTn

Der Stand der Klassifikation rationaler, konformer Quantenfeldtheorien in zwei Dimensionen (RCFT) ist in gewissem Sinne vergleichbar mit den noch folgenden Klassifikationsansätzen für (hyperbolische) 3-Mannigfaltigkeiten: Man kennt eine große Liste von Beispielen und es existieren Teilklassifikationen. Sie ist jedoch weit von Vollständigkeit entfernt, von besonderem Interesse für phänomenologische Stringtheorie wäre z.B. eine Liste aller unitären $N = 2$ supersymmetrischen Theorien mit $c = 9$. Auch sind noch nicht alle Strukturprinzipien verstanden, z.B. ist die Struktur der Symmetriealgebra von chiralen RCFTn im Kern ungeklärt (Gaberdiel (1994), Nahm (1994b), Fuchs, Ganchev, Vecsernyés (1994)).

Unser Ziel hier ist nicht, diese Klassifikation in aller Komplexität zu beschreiben (eine gute Referenz gibt es nicht und so verweisen wir allgemeiner auf Bouwknegt, Schoutens (1993), Eholzer, Honecker, Hübel (1993) und Referenzen). Wir wollen uns stattdessen auf ein Teilproblem konzentrieren; was ist die Menge der effektiven zentralen Ladungen (einer wesentlichen Kennzahl) aller RCFTn? Wir wissen:

- Der minimale Wert ist $c_{\text{eff}} = 0$ und entspricht der trivialen RCFT mit Charakter 1 und trivialer Darstellung der Symmetriealgebra. Der kleinste nicht-triviale Wert ist $c_{\text{eff}} = 1/2$ und entspricht dem $(3,4)$ Virasoro-minimalen (Ising) Modell.
- Die Menge der effektiven zentralen Ladungen kleiner 1 ist gegeben durch $\{1 - 6/n \,|\, n \in \mathbb{N},\, n \neq \text{Primzahlpotenz}\}$ und entspricht den (p,q) Virasoro-minimalen Modellen ($c_{\text{eff}} = 1 - 6/pq$, p,q koprim) mit diagonaler Zustandssumme (nicht-diagonale Zustandssummen, wenn interpretierbar als erweiterte Symmetrie, führen zu endlicher Entartung).
- Die Menge ist additiv; die Summe zweier effektiver zentraler Ladungen entspricht dem Tensorprodukt der RCFTn.
- Die Menge ist laut Definition in $\mathbb{Q}$ enthalten.
- Die Menge ist vermutlich wohlgeordnet (jede nicht-leere Teilmenge hat ein kleinstes Element) und hat die Ordnungszahl ω^ω (dabei bezeichnet ω die Ordnungszahl der Menge der natürlichen Zahlen und ω^ω die Ordnungszahl einer lexikographisch geordneten Menge $\prod_{k\in\Lambda} A_k$, wobei A_k und Λ Mengen der Ordnungszahl ω sind). Es gibt Häufungspunkte von links, der erste ist $c_{\text{eff}} = 1$ und diese sind abzählbar unendlich entartet (für die anderen effektiven zentralen Ladungen erwarten wir endliche Entartung).

Wir vermuten weiterhin: Mindestens ein Charakter jeder RCFT läßt sich in einer verallgemeinerten Summenform vom Typ

$$Z(q) \;=\; \sum_{\substack{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^d_{\geq 0},\mathbf{m}'\in\mathbb{Z}^{d'}_{\geq 0} \\ KC(\mathbf{m},\mathbf{m}')^t - K\mathbf{g}=0 \ \mathrm{mod}\ K}} q^{\frac{1}{2}(\mathbf{m},\mathbf{m}')B(\mathbf{m},\mathbf{m}')^t+\mathbf{b}(\mathbf{m},\mathbf{m}')^t+\beta} \begin{bmatrix} A(\mathbf{m},\mathbf{m}')^t+\mathbf{a} \\ \mathbf{m} \end{bmatrix} \frac{1}{(q)_{\mathbf{m}'}}$$

schreiben, wobei $d, d' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, C, B sind $(d+d')\times(d+d')$-Matrizen mit rationalen Einträgen, A eine $d \times (d+d')$-Matrix mit rationalen Einträgen, d.h. nur d Zeilen, die in vielen Fällen gleich $E \cdot (\mathbb{1} - B)$ ist, wobei E die Matrix ist, die man durch Weglassen der letzten d' Zeilen von der $(d+d')\times(d+d')$-Einheitsmatrix erhält. Entsprechend sind $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ($\mathbf{b}'$) $\mathbf{c}$ ($\mathbf{c}'$) d- (bzw. d'-)Vektoren mit rationalen Einträgen,

$\mathbf{g}$ ist ein $(d+d')$-Vektor, β eine rationale Zahl und K die kleinste, positive, ganze Zahl, so daß KC und $K \gg$ nur noch ganzzahlige Einträge haben. Die verwendeten q-Symbole sind $\left[{\mathbf{n} \atop \mathbf{m}}\right] = \prod_j \left[{n_j \atop m_j}\right]$, $\left[{N \atop m}\right] = \frac{(q)_N}{(q)_m (q)_{N-m}}$, wenn $N \geq m \geq 0$ und sonst 0, $(w)_m = (1-w)(1-wq)\ldots(1-wq^{m-1})$ und $(q)_{\mathbf{m}'} = \prod_j (q)_{m'_j}$.

Dann folgt mit einer leichten Abwandlung der Argumentation aus Abschnitt 4.2, (vgl. Anhang D) daß sich die effektive zentrale Ladung in der Form

$$c_{\text{eff}} = \frac{1}{\mathrm{L}(1)} \left\{ \sum_{j=1}^{d} \mathrm{L}(w_j) + \sum_{j=1}^{d'} \mathrm{L}(w'_j) - \sum_{j=1}^{d} \mathrm{L}(w''_j) \right\}$$

mit

$$\left(\mathbf{w}, \mathbf{w}', \mathbf{w}''\right) = \left(1-\mathbf{w}, 1-\mathbf{w}', 1-\mathbf{w}''\right)^{\mathcal{B}}, \qquad (*)$$

$$\tilde{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(B+B^t) & (A - (1\!\!1_d, 0_{d'}))^t \\ A - (1\!\!1_d, 0_{d'}) & 0 \end{pmatrix},$$

und

$$\mathcal{B} = \mathcal{P}^t\, \tilde{\mathcal{B}}\, \mathcal{P}\, \mathrm{diag}(1^d, 1^{d'}, (-1)^d), \quad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1\!\!1_d & 0 & 1\!\!1_d \\ 0 & 1\!\!1_{d'} & 0 \\ 0 & 0 & 1\!\!1_d \end{pmatrix}$$

schreiben läßt; und unsere Vermutung (Existenz einer verallgemeinerten Summenform für jede RCFT) impliziert damit, daß jede effektive zentrale Ladung in dieser Form geschrieben werden kann. Die Klassifikation der effektiven zentralen Ladungen wäre damit auf die Klassifikation der Matrizen B und A zurückgeführt, doch fehlt es zum jetzigen Zeitpunkt an geeigneten Kriterien – für den Spezialfall der Summenformen vom Typ $d = 0$ findet sich ein Beginn der Klassifikation in Abschnitt 4.4. Offensichtlich wäre auch wegen $(*)$, daß jede RCFT ein Element der Bloch-Gruppe (vgl. 5.2) von $\mathbb{C}$ (wahrscheinlich kann man auf eine geeignete Potenz des Fusionskörpers einschränken) definiert.

Ein tatsächliches Verständnis der Existenz der Charakter- und entsprechenden Dilogarithmusidentitäten fehlt jedoch bisher:

Offen ist z.B. , ob diese Dilogarithmusidentitäten auch vermittels des thermodynamischen Bethe Ansatz (Kaptitel 3) über geeignete Streutheorien und entsprechende Streumatrizen hergeleitet werden können – somit ergäbe sich eine Interpretation im Rahmen gestörter RCFTn. Verallgemeinerte TBA-Gleichungssysteme werden in der Literatur (vgl. Ravanini, Tateo, Valeriani (1993)) schon eifrig diskutiert.

Einen Zusammenhang zu den sogenannten Crystal bases integrabler Module affiner Algebren legen Szenes und Frenkel (1993) nahe. Der Zusammenhang zu den Basen von Lepowsky, Primc (1985) ist unklar.

5.2 Hyperbolische 3-Mannigfaltigkeiten und die Bloch-Gruppe

Mit einer *hyperbolischer 3-Mannigfaltigkeit* werden wir im folgenden eine orientierbare, vollständige, hyperbolische 3-Mannigfaltigkeit M endlichen Volumens meinen. Diese ist dann entweder kompakt oder hat endlich viele *Spitzen* (diese sind isometrisch zu einer Hälfte $T \times \mathbb{R}_{\geq R_0}$ der 'Doppelspitze' $T \times \mathbb{R}$ mit Metrik $e^{-r}ds^2 + dr^2$, wobei ds^2 die flache Metrik auf dem Torus $T = S^1 \times S^1$, entlang diesem ist die Spitze mit dem Rumpf der Mannigfaltigkeit verklebt, bezeichnet; sie sind unendlich lang, aber von endlichem Volumen).

Ausgezeichnet sind die hyperbolischen 3-Mannigfaltigkeit M mit Spitzen dadurch, daß sie nach Epstein, Penner (1988) eine Triangulierung in sogenannte ideale Tetraeder Δ haben

$$M = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n.$$

Betrachte dazu das *Halbraum-Modell* $\mathbb{H}^3 = \{(z, r) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+ | r > 0\}$ des hyperbolischen 3-Raums mit der Standardmetrik

$$ds^2 = \frac{dzd\bar{z} + dr^2}{r^2}.$$

Die Geodäten sind die vertikalen Linien oder Halbkreise in vertikalen Ebenen mit Endpunkten in $\mathbb{C} \times \{0\}$; die geodätischen Ebenen sind vertikale Ebenen oder Halbkugelschalen mit Rand in $\mathbb{C} \times \{0\}$. *Ideale Tetraeder* Δ sind Tetraeder, deren Eckpunkte alle im Rand $\partial \mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ von $\mathbb{H}^3$ liegen (und deren Flächen geodätisch sind). Die Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien von $\mathbb{H}^3$ ist $PSL(2, \mathbb{C})$ und operiert auf dem Rand $\partial \mathbb{H}^3$ durch gebrochen-lineare Transformationen. Zu vier beliebigen, verschiedenen Punkten (z_1, z_2, z_3, z_4) existiert ein eindeutiges Element in $PSL(2, \mathbb{C})$, das (z_1, z_2, z_3, z_4) auf $(\infty, 1, z, 0)$ transformiert, wobei

$$r(z_1, z_2, z_3, z_4) = z = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_4)(z_1 - z_3)} \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$$

das Doppelverhältnis von z_1, z_2, z_3, z_4 bezeichnet. Somit können wir jedem idealen Tetraeder in $\mathbb{H}^3$ mit gegebener Reihenfolge der Eckpunkte eine Zahl in $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ zuordnen. Wenden wir eine gerade Permutation auf die Eckpunkte an, so daß die Orientierung des Tetraeders erhalten bleibt, finden wir die drei möglichen Werte z, $1 - 1/z$ und $1/(1 - z)$. Diese lassen sich jeweils den Paaren der gegenüberliegenden Kanten zuordnen und ihre Phase, $\arg(z), \ldots$, mit den entsprechenden hyperbolischen Kantenwinkeln identifizieren; man nennt sie daher auch die *Kanteninvarianten* des idealen Tetraeders (vgl. Ratcliff (1994)).

Die sogenannte *Dehn-Invariante* $\Psi: \{P\} \to \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\mathbb{Z},\ P \mapsto \sum_{\text{Kanten } k} l_k \otimes \alpha_k/2\pi$, die einem Polyeder P mit Kanten k, Kantenlängen l_k und Kantenwinkeln α_k ein Element des $\mathbb{Z}$-Moduls $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (das ist nichts anderes als der freie $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ geteilt durch die Untergruppe erzeugt von $(x+x', y) - (x, y) - (x', y)$, $(x, y + y') - (x, y) - (x, y')$ und $(ax, y) - (x, ay)$ mit $x, x' \in \mathbb{R}$, $y, y' \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $a \in \mathbb{Z}$ – insbesondere verschwindet der Beitrag einer Kante mit Kantenwinkel in $\pi\mathbb{Q}$) zuordnet, kann durch Abschneiden mit geeignet gewählten *Horosphären* (im Halbraum euklidische Sphären, die die Grenzebene tangieren oder euklidische Ebenen parallel zur Grenzebene) auch für ideale Tetraeder definiert werden (Dupont, Sah (1982), auch Debrunner (1989)). Für ein ideales Tetraeder Δ mit Doppelverhältnis z (offensichtlich ist der Ausdruck von der Wahl der Kante unabhängig) findet man

$$\begin{aligned}\Psi(\Delta(z)) = &\log 2 \sin \arg(z) \otimes (\arg(z)/\pi) \\ &+ \log 2 \sin \arg(1 - 1/z) \otimes (\arg(1 - 1/z)/\pi) \\ &+ \log 2 \sin \arg(1/(1 - z)) \otimes (\arg(1/(1 - z))/\pi).\end{aligned}$$

Alle (kompakten) hyperbolischen 3-Mannigfaltigkeiten lassen sich aus denen mit Spitzen M durch *Dehn-Chirurgie* $M \to M^T_{(p,q)}$, Herausschneiden und wieder Einkleben eines Volltorus (oder Ersetzen einer Spitze durch einen Volltorus), allerdings unter Identifizierung eines Fundamentalzykels μ auf dem Rand des Torus T mit der Linearkombination $p\mu + q\lambda$ (für geeignete, koprime, ganze Zahlen p und q) auf dem Rand des Rumpfes, gewinnen (vgl. Meyerhoff (1992)).

Beispiel: Das sogenannte *Achter-Knoten-Komplement* (vgl. Thurston (1977), Ratcliff (1994)) ist die vermutlich einfachste, hyperbolische 3-Mannigfaltigkeit. Sie läßt sich topologisch, wie der Namen verspricht, als Komplement $S^3 - K$ des sogenannten Achter-Knotens K in der 3-Sphäre S^3 auffassen. Eine andere Konstruktion ist das geeignete Zusammenkleben zweier idealer Tetraeder mit Kanteninvarianten $z, 1 - 1/z, 1/(1 - z)$ und $w, \ldots$. Durch das Verkleben und Auszeichnen einer Kante ist die Mannigfaltigkeit durch ein Paar (z, w) eindeutig charakterisiert. In der Wahl von Ratcliff (1994) existiert eine hyperbolische Struktur für $z = 1/2 + \sqrt{1/4 + 1/w(1-w)}$ und $w \in \{w \in \mathbb{C} | \mathrm{Im} w > 0\} - \{1/2 + it/2 | t \geq \sqrt{15}\}$; diese ist vollständig nur für $z = w = e^{i\pi/3} = 1/2 + \sqrt{3}i/2 = 1/(1-z) = 1 - 1/z$, also genau dann, wenn die beiden verklebten idealen Tetraeder regulär sind und hat dann eine Spitze. Die entsprechende Dehn-Invariante verschwindet. Vervollständigung auch anderer hyperbolischer Strukturen ist möglich und zwar genau dann, wenn die sogenannten *Invarianten der Dehn-Chirurgie* (p, q) koprime, ganze Zahlen sind; diese letztgenannten Invarianten sind durch $p, q \in \mathbb{R}$ mit

$$p \log(z(1-w)) + q \log(z^2(1-z)^2) = 2\pi i$$

definiert (der Zweig der Logarithmen wird so gewählt, daß die Faktoren von q und p für $z = w = e^{\pi i/3}$ verschwinden). In der Tat lassen sie sich auch als Parameter einer geeigneten Dehn-Chirurgie (vgl. Ratcliff (1994)) entlang der Spitze des Achter-Knoten-Komplements (homeomorph zum Achter-Knoten) auffassen, wenn entweder $|p| > 4$ oder $|q| > 1$ ist (die ausgeschlossenen Werte entsprechen Werten außerhalb u.u. auf dem Rand des Modulraums hyperbolischer Strukturen, insbesondere $p(w = (1+\sqrt{5})/2) = 0$, $\lim_{w\to\infty} p(w) = 4$). Für $|p|$ oder $|q| \to \infty$ erhält man wieder die Parameter der nicht-kompakten, hyperbolischen 3-Mannigfaltigkeit mit einer Spitze $z = w = e^{i\pi/3}$

Nun zur *Bloch-Gruppe* $\mathcal{B}(F)$, das ist eine abelsche Gruppe, die einem Körper F zugeordnet werden kann. Es gibt verschiedene Definitionen, die für algebraisch geschlossene Körper (Polynom mit Koeffizienten im Körper zerfällt in Linearfaktoren, z.B. $\mathbb{C}$) gleichwertig sind, im allgemeinen aber nur bis auf Torsion (Teilmenge der nilpotenten Elemente) übereinstimmen (vgl. Zagier (1988), Dupont, Sah (1982) und Neumann, Yang (1994), anders dagegen Beilinson etal (1990)). Eine mögliche Definition ist die der additiven Gruppe aller formalen Linearkombinationen von Symbolen (z_1, z_2, z_3, z_4) mit $z_j \in \mathbb{P}^1(F) = F \cup \{\infty\}$ und Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, die folgenden Bedingungen genügen: *primitive Elemente*

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0, \text{ falls } z_i = z_j \text{ für } i \neq j,$$

Permutationssymmetrie

$$(z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, z_{\sigma(3)}, z_{\sigma(4)}) = \pi(\sigma)(z_1, z_2, z_3, z_4),$$

wobei $\sigma \in S_4$ und $\pi : S_4 \to \{\pm 1\}$ den Signaturcharakter bezeichnet, *Pentagonidentität*

$$\sum_j (-)^j (z_1, \ldots, \widehat{z_j}, \ldots, z_5) = 0,$$

für beliebige Fünf-Tupel $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$, *projektive Invarianz*

$$(g \cdot z_1, g \cdot z_2, g \cdot z_3, g \cdot z_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4),$$

für beliebiges $g \in PGL(2, F)$ und schließlich eine Bedingung ohne eigentlichen Namen, die der Alliteration zuliebe vielleicht *'Pass'bedingung* genannt werden sollte (auch kann sie zumindest in den einfachsten Fällen (vgl. Ratcliff (1994)) auf Bedingungen für das Zusammenpassen idealer Tetraeder zu einer 3-Mannigfaltigkeit mit hyperbolischer und vollständiger Metrik (vgl. Neumann, Zagier (1985)) zurückgeführt werden – ein expliziter Beweis existiert jedoch nicht in der Literatur und wird z.B. von Neumann, Yang (1994) angekündigt); wir verlangen, daß die Elemente von $\mathcal{B}(F)$ unter der folgenden Abbildung verschwinden

$$\begin{array}{cccc} \beta: & \mathbb{Z}(\mathbb{P}^1(F)^4) & \to & \Lambda^2_{\mathbb{Z}}(F - \{0,1\}) \\ & \sum_i n_i\ (z_1, z_2, z_3, z_4) & \mapsto & \sum_i n_i\ r(z_1, z_2, z_3, z_4) \wedge r(z_3, z_2, z_1, z_4), \end{array}$$

wobei $n_i \in \mathbb{Z}$, $r(z_1, z_2, z_3, z_4)$ wieder das Doppelverhältnis (mit $r(0) := 0$) bezeichnet, insbesondere $r(z_3, z_2, z_1, z_4) = 1 - r(z_1, z_2, z_3, z_4)$ und $\Lambda^2_{\mathbb{Z}}(F - \{0,1\})$ die additive Gruppe aller formalen Linearkombinationen von $x \wedge y$, $x, y \in F - \{0,1\}$ und Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ mit den Relationen $x \wedge x = 0 = 0 \wedge x$ und $(x_1 x_2) \wedge y = x_1 \wedge y + x_2 \wedge y$ ist. Man überprüft leicht die Konsistenz der Passbedingung mit den anderen Forderungen, z.B. $z \wedge (1-z) = -(1-z) \wedge z = -(1/z) \wedge (1 - 1/z) = (z-1) \wedge z$.

Eine im wesentlichen äquivalente Definition ergibt sich durch konsequente Bildung der Doppelverhältnisse $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (\infty, 1, z, 0) \to [r(\infty, 1, z, 0)]$. Dann ist die Bloch-Gruppe der Kern der Abbildung $\sum_i n_i\ [z_i] \mapsto \sum_i n_i\ [z_i] \wedge [1 - z_i]$ in der additiven Gruppe erzeugt von Symbolen $[z]$ mit $z \in \mathbb{P}^1(F)$ und

$$\begin{aligned} &[0] = [1] = [\infty] = 0, \\ &[z] + [1/z] = 0,\ [z] + [1-z] = 0, \\ &[z] - [y] + \left[\frac{1-z}{1-y}\right] + [y/z] - \left[\frac{1-1/z}{1-1/y}\right] = 0, \quad z, y \in F - \{0,1\}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Relation nur eine Variante der Argumente der Fünf-Terme-Relation des Dilogarithmus ist (vgl. Anhang A).

Geometrisch kann die Fünf-Terme-Relation als Zerlegung eines idealen Pentaeders in einerseits zwei, andererseits drei Tetraeder interpretiert werden (vgl. auch den nächsten Abschnitt). In der Sprache der Homologie simplizialer Komplexe ist es nichts anderes als eine *4-Zykel Bedingung*: der orientierte 4-Simplex $(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4)$ verschwindet unter der Randabbildung $\partial(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4) =$

$\sum_{i \bmod 5}(-)^i(z_0,\ldots,\widehat{z}_i,\ldots,z_4) = \sum_{i \bmod 5}(z_i,z_{i+1},z_{i+2},z_{i+3})$, ist also 4-Zykel, wobei die orientierten 3-Simplizes im Bild der Randabbildung als (orientierte) ideale Tetraeder interpretiert werden.

Die geometrische Bedeutung der Passbedingung ist, wie oben erwähnt, unklar – auch ist ein Zusammenhang zur Dehn-Invariante nicht ausgeschlossen. Sie und entsprechende Verallgemeinerungen der Bloch-Gruppe spielen jedoch eine wesentliche Bedeutung in der algebraischen K-Theorie von Körpern (man würde sie daher gerne auch in anderen Zugängen besser verstehen), einem recht aktiven Gebiet der modernen Mathematik. Insbesondere kann man in diesem Rahmen zeigen (Goncharov (1993)), daß sich alle Funktionalrelationen für den Bloch-Wigner-Dilogarithmus $\mathrm{D}(z)$ (vgl. Anhang A) formal durch wiederholtes Anwenden der Fünf-Terme-Relation ergeben. (Eine ähnliche Aussage erwartet man daher für den Rogers-Dilogarithmus).

In diesem Zusammenhang wollen wir abschließend noch das *Borel-Theorem* und die sogenannten *Zagier-Vermutungen* erwähnen: Sei F ein Körper mit r_1 reellen $F \hookrightarrow \mathbb{R}$ und r_2 komplexen Einbettungen $F \hookrightarrow \mathbb{C}$, die wir mit $\sigma_1,\ldots\sigma_{r_1}$, σ_{r_1+1}, $\bar\sigma_{r_1+1},\ldots\sigma_{r_1+r_2}$, $\bar\sigma_{r_1+r_2}$ bezeichnen wollen. Definiere die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} c: & \mathcal{B}(F) & \to & \mathbb{R}^{r_2} \\ & \sum_i n_i\,[z_i] & \mapsto & \left(\sum_i n_i \mathrm{D}(\sigma_{r_1+1}(z_i)),\ldots \sum_i n_i \mathrm{D}(\sigma_{r_1+r_2}(z_i))\right) \end{array},$$

dann ist der Kern von c die Torsionsuntergruppe von $\mathcal{B}(F)$ (Untergruppe der unipotenten Elemente) und das Bild von c ein maximales Gitter in $\mathbb{R}^{r_2}$. Der Rang von $\mathcal{B}(F)$ ist damit r_2. Schließlich ist das Volumen der Fundamentalzelle diese Gitters mit dem Wert der Dedekind-Zeta-Funktion ζ_F in 2 (einer wichtigen Invariante des Körpers) eng verknüpft. Man vermutet, daß ein ähnlicher Zusammenhang zwischen Polylogarithmen und den Werten von ζ_F bei ganzzahligen Argumenten besteht.

5.3 Volumen hyperbolischer 3-Mannigfaltigkeiten

Während im Euklidischen Raum Volumen alles andere als eine topologische Invariante ist – globale Skalentransformationen erlauben beliebige Volumenänderung – führt in der hyperbolischen Geometrie die Fixierung der skalaren Krümmung auf -1 zu einer gewissen Versteifung, die sogenannte *Mostow-Steifheit* (Mostow/Prasad): Sind M_1 und M_2 hyperbolische Mannigfaltigkeiten (Dimension $\geq$ 3) endlichen Volumens und existiert ein Isomorphismus

$$\Phi\colon \pi_1(M_1) \to \pi_1(M_2),$$

dann existiert sogar eine Isometrie $F\colon M_1 \to M_2$, die Φ (bis auf Konjugation) induziert.

Mit anderen Worten: Eine Invariante der Geometrie einer hyperbolischen Mannigfaltigkeit ist sogar eine Invariante des Homotopietyps. Insbesondere ist die hyperbolische Metrik (wenn sie existiert) und damit das Volumen (aber auch die Chern-Simons- und η-Invariante) eine Invariante des Homotopietyps.

Das Volumen eines Tetraeders im $\mathbb{H}^3$ mit Eckpunkten $ABCD$, von denen A und C auf dem Rand $\partial\,\mathbb{H}^3$ liegen, AB senkrecht auf BCD und CD senkrecht auf DAB stehen, eines sogenannte *Orthoschemas*, mit Kantenwinkeln α an AB und CD und $\pi/2-\alpha$ an AC ist gerade durch die *Lobatschewsky-Funktion* $\text{Л}(\alpha)/2$ (vgl. Anhang A) gegeben (Milnor (1982), Vinberg(1991), Ratcliff (1994)). Durch Zerlegen eines idealen Tetraeders $\Delta(z)$ mit Kantenwinkeln $\arg(z)$, $\arg(1/(1-z))$ und $\arg(1-1/z)$ in sechs Orthoschemen (für jeden dieser Winkel jeweils zwei) findet man

$$\begin{aligned} Vol\,(\Delta(z)) &= \text{Л}(\arg(z)) + \text{Л}(\arg(1/(1-z))) + \text{Л}(\arg(1-1/z)) \\ &= \mathrm{D}(z) = \mathrm{D}(1-1/z) = \mathrm{D}(1/(1-z)), \end{aligned}$$

wobei $\mathrm{D}(z)$ der *Bloch-Wigner Dilogarithmus* ist (vgl. Anhang A, sowie Dupont, Sah (1982), Neumann, Zagier (1985)). Für hyperbolische 3-Mannigfaltigkeiten mit Spitzen ergibt sich somit über die Triangulierung in ideale Tetraeder eine vergleichsweise einfache Volumenberechnung.

Über das *Volumenspektrum*, die Menge aller Volumen hyperbolischer 3-Mannigfaltigkeiten (vgl. Meyerhoff (1992), Thurston (1982), Gromov (1979)) ist folgendes bekannt:

- Die Menge ist in $\mathbb{R}_+$ enthalten, wohlgeordnet und abgeschlossen und hat Ordinalität ω^ω.
- Häufungspunkte sind genau die Mannigfaltigkeiten mit Spitzen; die durch Dehn-Chirurgie erzeugten Mannigfaltigkeiten haben kleineres Volumen. Zu beliebiger gegebener Konstante $C > 0$ gibt es endlich viele hyperbolische 3-Mannigfaltigkeiten, so daß man durch Dehn-Chirurgie auf diesen 'Keimen' alle Mannigfaltigkeiten mit Volumen kleiner C erhält.
- Jedes Element ist höchstens endlich entartet; Entartung tritt tatsächlich auf.
- Das Minimum ist nicht bekannt; es wird vermutlich von der $(5,-1)$- bzw. $(5,2)$-Dehn-Chirurgie des Achter-Knoten-Komplements angenommen und beträgt dann $0.9427\ldots$ (auch eine Abschätzung nach unten existiert, vgl. Meyerhoff (1992)).

- Das kleinste Volumen einer Mannigfaltigkeit mit (dann einer) Spitze, der erste Häufungspunkt des Spektrums, ist vermutlich das des Achter-Knoten-Komplements und beträgt dann $2.02988\ldots = 2\mathrm{D}(e^{i\pi/3})$.
- Von keinem Element ist bekannt, daß es rational oder irrational wäre.
- Neumann und Zagier (1985) haben unter anderem das Volumenspektrum der von einer nicht-kompakten 3-Mannigfaltigkeit M durch Dehn-Chirurgie an einer Spitze erzeugten Mannigfaltigkeiten M_ν studiert. Sie finden, daß

  $$\#\{M_\nu \mid Vol(M_\nu) < Vol(M) - 1/x\} = 6\pi x + \mathcal{O}(x^{1/2}).$$

  Für den konkreten Fall von (p,q)-Dehn-Chirurgie am Achter-Knoten-Komplement (vgl. vorhergehenden Abschnitt) geben sie an

  $$Vol(M_{(p,q)}) = Vol(M) - \frac{2\sqrt{3}\pi^2}{p^2+12q^2} + \frac{4\sqrt{3}(p^4 - 72p^2q^2 + 144q^4)\pi^4}{3(p^2+12q^2)^4} + \ldots$$

5.4 Chern-Simons- und η-Invariante

Die Chern-Simons-Invariante CS(M) einer kompakten $(4n-1)$-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit M ist eine Obstruktion gegen konforme Immersion der Mannigfaltigkeit in den Euklidischen Raum. Sie nimmt Werte auf dem Kreis $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ an.

Die η-Invariante ist ein Maß für den Fehler der Hirzebruchschen Signaturformel für 4-Mannigfaltigkeiten mit Rand und nimmt Werte in $\mathbb{R}$ an. Sie steht in enger Beziehung zur Chern-Simons-Invariante, $3\eta(M) = 2\mathrm{CS}(M) \bmod \mathbb{Z}$, enthält aber mehr Information.

Über das Spektrum der Chern-Simons-Invariante ist nicht viel bekannt; Meyerhoff (1986) erweiterte die Definition auf hyperbolische 3-Mannigfaltigkeiten mit Spitzen. Zwei Aussage über die Chern-Simons-Invariante sind (Meyerhoff (1992)):

- Die Menge der Chern-Simons-Invarianten der Dehn-Chirurgien des Achter-Knoten-Komplements ist in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dicht.
- Gegeben eine rationale Zahl in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, dann existieren hyperbolische 3-Mannigfaltigkeiten gleichen Volumens, deren Chern-Simons-Invariante sich um diese Zahl unterscheiden.

Eine glückliche Ausnahme bilden wieder die Mannigfaltigkeiten, die man durch Dehn-Chirurgie des Achter-Knoten-Komplements erhält. Parametrisiert man wie in Abschnitt 5.2 die entsprechenden Mannigfaltigkeiten $M_{(p,q)}$, p, q koprime, ganze Zahlen (wenn $|q| = 1$, dann $|p| > 4$) durch zwei komplexe Zahlen z, w in der positiven imaginären Halbebene mit

$$\log(z) + \log(1-z) + \log(w) + \log(1-w) = 0$$

und

$$p\log(z(1-w)) + q\log(z^2(1-z)^2) = 2\pi i,$$

oder in exponenzierter Form auch

$$(z,w)_a = \prod_b (1-(z,w)_b)^{B_{ab}}, \quad B = -\frac{1}{p+2q}\begin{pmatrix} 2q & p \\ p & 2q \end{pmatrix},$$

so gilt nach Yoshida (1985):

- Die η-Invariante der hyperbolischen 3-Mannigfaltigkeit $M_{(p,q)}$ ist durch

$$\begin{aligned}\eta(M_{(p,q)}) = &- \frac{1}{3\pi^2}\mathrm{Re}\,(\mathrm{L}(z) + \mathrm{L}(w) - \mathrm{L}(1)) \\ &- \frac{1}{3p\pi}\arg(z(1-z)) - \frac{1}{p}\mathrm{def}(p,q;1) - \frac{q}{3p}\end{aligned}$$

gegeben, wobei $\mathrm{L}(z)$ den Rogers-Dilogarithmus (vgl. Anhang A) bezeichnet und $\mathrm{def}(p,q;1) := -\sum_{k=1}^{|p|-1}\cot(k\pi/p)\cot(kq\pi/p)$ der sogenannte *Hirzebruch-Defekt* ist.

Verblüffend und unverstanden bleibt die Ähnlichkeit dieses Ausdrucks zu dem für die effektive zentrale Ladung von RCFTn in 5.1 (4.3) und den Gleichungen für die Argumente des Dilogarithmus in 4.4.

Die aktuelle Mathematik beschäftigt sich im wesentlichen mit Aussagen des Typs: Die Chern-Simons-Invariante $\mathrm{CS}\,(M)$ einer Mannigfaltigkeit M ist modulo rationale Zahlen durch ein Element $\beta(M)$ in der Bloch Gruppe $\mathcal{B}(k(M))$ bestimmt, wobei $k(M)$ der sogenannte *invariante Spur-Körper* zu M ist (vgl. Neumann, Yang (1994)) – ist M Quotient des $\mathbb{H}^3$ durch eine diskrete Untergruppe Γ von $PSL(2,\mathbb{C})$, so ist der von den Spuren der Quadrate von Elementen in Γ erzeugte Unterkörper von $\mathbb{C}$ der invariante Spurkörper zu M.

5.5 Volumen Grassmannscher Hypersimplizes

Beim Versuch den Beweis einer kombinatorischen Formel für die erste Pontrjagin-Klasse (Gabrielov, Gelfand, Losik (1975)) mithilfe der Geometrie Grassmannscher Mannigfaltigkeiten zu verstehen, fanden Gelfand und MacPherson (1982) eine weitere geometrische Interpretation des Rogers-Dilogarithmus für reelle Argumente. Diese wollen wir hier kurz skizzieren.

Seien e_1, e_2, e_3, e_4 die Koordinatenachsen im $\mathbb{R}^4$, die wir mit Punkten im $\mathbb{PR}^3$ identifizieren. Sei H die Untergruppe der projektiven Automorphismen des $\mathbb{PR}^3$, $PGL\,(4,\mathbb{R})$, die die Punkte e_i fest lassen und H^0 die Zusammenhangskomponente der Identität in H (man kann H identifizieren mit der 3-dimensionalen Cartan-Untergruppe der diagonalen Matrizen im $PGL\,(4,\mathbb{R})$, der Gruppe $GL\,(4,\mathbb{R}))$ modulo Vielfache der Identität.) Insbesondere operiert H^0 auf der vier-dimensionalen Grassmannschen Mannigfaltigkeit G_2^2 der 2-dimensionalen Untervektorräume im $\mathbb{R}^4$. Dann ist ein *Grassmannscher Simplex* Γ_2^2 der Abschluß eines generischen (ein Punkt $l \in G_2^2$ heißt generisch, wenn er die Koordinatenachsen nur im Ursprung schneidet) Orbits von H^0 in G_2^2, topologisch ein Volloktaeder.

Bezeichne $\Gamma_2^2(l)$ den Grassmannschen Simplex zu einem Punkt $l \in G_2^2$ (den wir auch mit einer Linie im $\mathbb{PR}^3$ identifizieren) und $r(l)$ das Doppelverhältnis der vier Ebenen (le_1), (le_2), (le_3) und (le_4) im $\mathbb{RP}^3$, dann definiert die projektiv invariante Gleichung $r(l)$ =konstant den klassischen sogenannte Tetraeder-Komplex.

Nun zum Volumen: Betrachtet man G_2^2 als Raum der Ebenen im $\mathbb{R}^4$, so ergibt sich eine natürliche Operation von $SO(4)$ auf G_2^2. Bezeichne P die $SO(4)$-invariante Volumenform mit Maß 1 auf $SO(4)$, und integriert man P über einen kontinuierliche Familie Grassmannscher Simplizes $\Gamma_2^2(l)$, so daß $r(l)$ die Werte $[x_1, x_2] \subset [0,1]$ durchläuft, so findet man für den Wert des Integrals $\mathrm{L}(x_2) - \mathrm{L}(x_1)$, wobei $\mathrm{L}(x)$ den Rogers-Dilogarithmus bezeichnet.

Für eine 'Komplexifizierung' der hier vorgestellten Geometrie verweisen wir auf Hain, MacPherson (1990); Dupont, Sah (1993) geben eine in gewissem Sinne 'duale' Interpretation als Auswertung einer reell-wertigen Kohomologie-Klasse auf einer geeigneten Homologie-Klasse des Grades 3 der integralen Gruppen-Homologie der universellen Überlagerungsgruppe von $PSL(2, \mathbb{R})$ mit der diskreten Topologie.

6 Zusammenfassung und Ausblick

6.1 Zusammenfassung: Was haben wir erreicht?

Wir haben in dieser Arbeit den Versuch dokumentiert, anhand des strukturellen Elements Dilogarithmus zu einem Fortschritt bei der Klassifikation RCFTn zu gelangen. Wie so oft in der Grundlagenforschung war der Fortschritt in der gewollten Richtung mäßig, als Nebenprodukte taten sich jedoch ungeahnte Welten auf: Erhofft hatten wir einen direkten Zusammenhang von der Fusions-Algebra zur effektiven zentralen Ladung mithilfe des Dilogarithmus (in der Tat stellen wir im vierten Kapitel (insbesondere 4.3) dieser Arbeit unseren Beitrag zur Klärung dieses Zusammenhangs dar) - doch zeigt sich, daß weit mehr als nur die Kenntnis der Fusions-Algebra notwendig ist, um auf diesem Weg im allgemeinen Fall die effektive zentrale Ladung zu berechnen; als Nebenprodukt erhalten wir allerdings ein ausgezeichnetes Werkzeug, um für eine Summenform (vom Typ 4.1) zu entscheiden, ob diese die für einen Charakter einer RCFT zu fordernden modularen Eigenschaften erfüllt. Dies erlaubt uns, unter einer zusätzlichen Annahme die Charaktere in der Summenform mit einer Matrix vom Rang eins zu klassifizieren (für den Fall Rang zwei erhalten wir eine ganze Reihe interessanter Charakteridentitäten). Darüberhinaus beschreiben wir detailliert eine ganze Reihe von Beispielen - insbesondere die sogenannten ADET-Fälle, für die auch die zugehörigen Streutheorien bekannt sind.

Einer der vom Big picture (Verbindungen von Geometrie und Algebra) aus interessantesten Punkte, die strukturelle Ähnlichkeit zu Klassifikationsversuchen hyperbolischer 3-Mannigfaltigkeiten, bleibt Quelle der Verwunderung. Nebenprodukt unserer Bemühungen um ein besseres Verständnis ist hier der in Abschnitt 2.4 und Anhang B vorgestellten Nachweis, daß die Konstruktion topologischer Invarianten aus den Dualitätsdaten von RCFTn auch für nicht-unitäre Theorien möglich ist.

6.2 Ausblick: Was bleibt zu tun, mag noch versucht werden?

Ganz oben auf der Liste steht (in Fortsetzung von Kapitel 5) der Wunsch nach einer geometrischen Interpretation der effektiven zentralen Ladung und der

Fusions-Algebra über den Rogers-Dilogarithmus (ohne mod) und (hyperbolische) 3-Geometrie (Fortsetzung von Kapitel 5) und damit auch ein möglicher Zusammenhang zu den topologischen Invarianten aus Kapitel 2.

Völlig ausgeklammert haben wir (in Fortsetzung von Kapitel 4) die Beiträge anderer Sattelpunkte in der Charakterasymptotik – diese mag man auch als Solitonbeiträge auffassen. In Verbindung damit stehen Versuche, den gesamten Charakter einer RCFT durch analytische Fortsetzung des Dilogarithmus zu erzeugen. Wir verbleiben mit einem Verweis auf Nahm (1994a).

In Anhang D besprechen wir kurz die bisher ungelösten Probleme bei der Verallgemeinerung unseres Verfahrens der Berechnung der Charakterasymptotik auf die im fünften Kapitel erwähnten, verallgemeinerte Summenformen (mit q-Binomialkoeffizient). Die entsprechenden Streutheorien (vgl. Kapitel 3), genauer: Steumatrizen, sind nicht bekannt (anders die entsprechenden TBA-Gleichungen). Der Zusammenhang zwischen Summenformen und integrablen Störungen RCFTn – eine mögliche Beschreibung sind Streutheorien – bleibt unverstanden. Neuere Arbeiten von Koubek (1994) deuten an, daß man mithilfe der sogenannten Formfaktoren, genauer: durch Abzählen gewisser Konsistenzgleichungen, direkt von einer gegebenen Streutheorie zu Summenformen von Charakteren RCFTn gelangen kann.

Auch im Rahmen von RCFTn selbst (Kapitel 2) gibt es noch einige dunkle Punkte. So werden RCFTn mit Rand (vgl. Cardy (1986)) und insbesondere Streutheorien solcher Modelle (Fring, Köberle (1994), Goshal, Zamolodchikov (1994)) zur Zeit verstärkt untersucht. Bemerkenswert sind sicherlich auch Versuche N-Punkt-Funktionen RCFTn mit Rand in hyperbolischer 2-Geometrie zu interpretieren (Kleban, Vassileva (1994)).

Jetzt aber Schluß und Ruhe dem Wanderer.

Über allen Gipfeln
Ist Ruh,
In allen Wipfeln
Spürest du
Kaum einen Hauch;
Die Vöglein schweigen im Walde.
Warte nur, balde
Ruhest du auch.

Anhang A: Dilogarithmus

In diesem Anhang wollen wir kurz den Dilogarithmus (genauer: die verschiedenen Dilogarithmen), seine Definition, einige Funktionalrelationen und spezielle Werte, sowie sein Monodromieverhalten vorstellen. Wir beginnen als Einführung mit dem Logarithmus.

Als Hauptreferenzen empfehlen wir Zagier (1988), Lewin (1981, 1992) und Kirillov (1994).

A.1 Der Logarithmus

Der Logarithmus kann durch die Reihe

$$\mathrm{Li}_1(z) := -\log(1-z) = \sum_{k\geq 1} \frac{z^k}{k}, \quad |z| < 1$$

definiert und analytisch auf die universelle Überdeckung von $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ fortgesetzt werden.

Er hat drei fundamentale Eigenschaften, die wir analytisch, topologisch und algebraisch nennen werden (vgl. Hain, MacPherson (1990)):

Analytische Eigenschaft: Der Logarithmus kann als Kurvenintegral über eine elementare Funktion dargestellt werden

$$-\log(1-z) = -\int_1^{1-z} \frac{dx}{x} = \int_0^z \frac{dx}{1-x}.$$

Topologische Eigenschaft: Der Logarithmus ist eine auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ mehrwertige Funktion. Bezeichne σ_1 die Homotopieklasse von Schleifen ausgehend vom Basispunkt $1/2$ in $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit Windungszahl 1 um 1. Sei $M(\sigma_1)$ der Monodromieoperator, der eine Funktion auf ihre analytische Fortsetzung entlang σ_1 abbildet. Dann ist

$$M(\sigma_1)\log(1-z) = \log(1-z) + 2\pi i.$$

Man sagt auch, $M(\sigma_1)$ operiere auf dem zwei-dimensionalen Vektorraum der Funktionenkeime in $z = 1/2$ mit Basis $\log(1-z)$, 1 durch die Matrix

$$M(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2\pi i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analog hat man für die Basis $\log(z)$, 1 bei Schleifen um 0

$$M(\sigma_0) = \begin{pmatrix} 1 & 2\pi i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Monodromiegruppe ist in beiden Fällen die diskrete Gruppe der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}(1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbb{Z}(p)$ die Untergruppe $(2\pi i)^p\mathbb{Z}$ von $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Algebraische Eigenschaft: Der Logarithmus erfüllt bei geeigneter Wahl der Zweige die Drei-Terme-Funktionalrelation

$$\log(1-x) + \log(1-y) - \log(1-x)(1-y) = 0,$$
$$\mathrm{Li}_1(x) + \mathrm{Li}_1(y) - \mathrm{Li}_1(x+y-xy) = 0.$$

A.2 Der Eulersche Dilogarithmus

wird in Analogie zum Logarithmus durch die Reihe

$$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{k\geq 1} \frac{z^k}{k^2}, \quad |z| < 1$$

definiert.

Analytische Eigenschaft: Der Eulersche Dilogarithmus kann als iteriertes Kurvenintegral über elementare Funktionen dargestellt werden

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{\log(x)}{1-x}dx = \int_0^z \frac{dx}{1-x}\int_0^{1-x}\frac{dy}{1-y}.$$

Topologische Eigenschaft: Der Eulersche Dilogarithmus ist eine auf $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ mehrwertige Funktion. Bezeichne σ_0 (bzw. σ_1) die Homotopieklasse von Schleifen ausgehend vom Basispunkt $1/2$ in $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ mit Windungszahl 1 um 0 (1). Seien $M(\sigma_0)$ und $M(\sigma_1)$ die entsprechenden Monodromieoperatoren, dann ist

$$M(\sigma_0)\mathrm{Li}_2(z) = \mathrm{Li}_2(z), \quad M(\sigma_1)\mathrm{Li}_2(z) = \mathrm{Li}_2(z) - 2\pi i \log(z).$$

Man kann auch sagen: $M(\sigma_0)$ und $M(\sigma_1)$ operieren auf dem drei-dimensionalen Vektorraum der Funktionenkeime in $z = 1/2$ mit Basis $\mathrm{Li}_2(z)$, $\log(z)$, 1 durch die Matrizen

$$M(\sigma_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\pi i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & -2\pi i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die entsprechende Monodromiegruppe ist in der diskreten Gruppe der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}(1) & \mathbb{Z}(2) \\ 0 & 1 & \mathbb{Z}(1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

enthalten.

Algebraische Eigenschaft: Der Eulersche Dilogarithmus erfüllt die sogenannte Fünf-Terme-Relation, hier in Schaeffers Form (vgl. Lewin (1981))

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}_2(x) - \mathrm{Li}_2(y) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{1-x}{1-y}\right) + \mathrm{Li}_2(y/x) - \mathrm{Li}_2\left(\frac{1-1/x}{1-1/y}\right) \\ = \mathrm{Li}_2(1) - \log x \log\left(\frac{1-x}{1-y}\right), \quad 1-x, y < 1. \end{aligned}$$

Auch wollen wir an dieser Stelle die Sechs-Terme-Beziehung erwähnen (vgl. Lewin (1981) Appendix (20))

$$2\mathrm{Li}_2(x) + 2\mathrm{Li}_2(y) + 2\mathrm{Li}_2(z) = \mathrm{Li}_2(-xy/z) + \mathrm{Li}_2(-yz/x) + \mathrm{Li}_2(-zx/y),$$

wobei $1/x + 1/y + 1/z = 1$.

A.3 Der Bloch-Wigner-Dilogarithmus

$\mathrm{D}(z)$ ist eine auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ stetige (außer in $\{0, 1, \infty\}$, wo er verschwindet, sogar reell analytische), reellwertige Variante des Dilogarithmus. (Das Analogon für den Fall des Logarithmus ist die ebenfalls stetige und reellwertige Funktion $\mathrm{D}_1 : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \log|z|$ mit $\mathrm{D}_1(x) + \mathrm{D}_1(y) - \mathrm{D}_1(xy) = 0$, sowie $\mathrm{D}_1(1/z) = -\mathrm{D}_1(z)$.)

Er kann durch (vgl. Zagier (1988) und Referenzen)

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(z) &= \mathrm{Im}\left\{\mathrm{Li}_2(z) + \log(1-z)\log|z|\right\}, \quad |z| \le 1 \\ \mathrm{D}(z) &= -\mathrm{D}(1/z), \quad |z| \ge 1 \end{aligned}$$

$(\mathrm{Im}(\log(1-z)) = \arg(1-z))$ definiert werden und erfüllt alle Funktionalrelationen des Dilogarithmus allerdings ohne Korrekturen (seien es Konstanten oder Produkte von Logarithmen). So lautet die Fünf-Terme-Relation $(x, y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$

$$\mathrm{D}(x) + \mathrm{D}(y) + \mathrm{D}\left(\frac{1-x}{1-xy}\right) + \mathrm{D}(1-xy) + \mathrm{D}\left(\frac{1-y}{1-xy}\right) = 0.$$

Mithilfe der Symmetrien (diese folgen aus der Fünf-Terme-Relation und $\mathrm{D}(0) = 0$)

$$\mathrm{D}(z) = \mathrm{D}\left(\frac{z-1}{z}\right) = \mathrm{D}\left(\frac{1}{1-z}\right) = -\mathrm{D}\left(\frac{1}{z}\right) = -\mathrm{D}\left(1-z\right) = -\mathrm{D}\left(\frac{z}{z-1}\right),$$

kann man die Argumente leicht in die Form der für den Eulerschen Dilogarithmus gegebenen Relation bringen; hier sind sie so gewählt, daß sie, wenn zyklisch numeriert, $1 - z_i = \frac{z_{i-1}}{1-z_{i-1}} \frac{z_{i+1}}{1-z_{i+1}} = z_{i-2} z_{i+2}$ erfüllen. Von den Symmetrien sind nur $\mathrm{D}(z) + \mathrm{D}(1-z) = 0$ und $\mathrm{D}(z) + \mathrm{D}(1/z) = 0$ unabhängig (und definieren eine treue Darstellung von $S_3 \ni \sigma$ durch $\mathrm{D}(z) = \pi(\sigma)\mathrm{D}(\sigma \cdot z)$).

Der Bloch-Wigner-Dilogarithmus ist eine für unsere Zwecke zu schöne Funktion (er 'sieht' nicht die Strukturen, die wir suchen), insbesondere verschwindet er auf der reellen Achse $\mathrm{D}(\bar{z}) = -\mathrm{D}(z)$.

A.4 Der Rogers-Dilogarithmus

$\mathrm{L}(z)$ ist die für uns wesentliche Variante des Dilogarithmus (vgl. Rogers (1907)) – wir werden immer diesen meinen, wenn wir ohne genauere Spezifikation vom Dilogarithmus sprechen. Er ist durch

$$\mathrm{L}(z) = \mathrm{Li}_2(z) + \frac{1}{2} \log z \log(1-z), \quad 0 \le z < 1$$

oder auch $\mathrm{L}(z) = \left[\mathrm{Li}_2(z) - \mathrm{Li}_2(1-z) + \mathrm{Li}_2(1)\right]/2$ definiert.

Analytische Eigenschaft: Die analytische Fortsetzung in der komplexen Zahlenebene mit Schnitten von $-\infty$ nach 0 und von 1 nach ∞ ist

$$\mathrm{L}(z) = -\frac{1}{2} \int_0^z dt \left(\frac{\log(1-t)}{t} + \frac{\log t}{1-t}\right), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \left((-\infty, 0) \cup (1, \infty)\right).$$

Topologische Eigenschaft: Auch der Rogers-Dilogarithmus ist eine auf $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ mehrwertige Funktion. Seien wie in A.2 $M(\sigma_0)$ und $M(\sigma_1)$ die Monodromieoperatoren für Schleifen um 0 und 1, so gilt

$$M(\sigma_0)\mathrm{L}(z) = \mathrm{L}(z) + \pi i \log(1-z), \quad M(\sigma_1)\mathrm{L}(z) = \mathrm{L}(z) - \pi i \log(z).$$

Man kann auch sagen: $M(\sigma_0)$ und $M(\sigma_1)$ operieren auf dem vier-dimensionalen Vektorraum der Funktionenkeime in $z = 1/2$ mit Basis $\mathrm{L}(z)$, $\log(z)/\sqrt{2}$, $\log(1-z)/\sqrt{2}$, 1 durch die Matrizen

$$M(\sigma_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2}\pi i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{2}\pi i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2}\pi i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{2}\pi i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die entsprechende Monodromiegruppe ist in der diskreten Gruppe der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}(1)/\sqrt{2} & \mathbb{Z}(1)/\sqrt{2} & \mathbb{Z}(2)/2 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbb{Z}(1)/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbb{Z}(1)/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

enthalten. (Setzt man $M(\sigma_2) := M(\sigma_0)M(\sigma_1)M(\sigma_0^{-1})M(\sigma_1^{-1})$ (eine Art Pochhammer-Kontur), dann vertauscht $M(\sigma_2)$ mit $M(\sigma_0)$ und $M(\sigma_1)$).

Algebraische Eigenschaften: Um Funktionalrelationen für den Rogers-Dilogarithmus aufzuschreiben (ohne in einem Sumpf von Fallunterscheidungen zu versinken), ist es von Vorteil eine Wahl der Fortsetzung zu treffen und sich dann auf einen Zweig oder auch nur die reelle Achse beschränken. Eine ausgezeichnete Wahl erlaubt den Erhalt der Symmetrien bis auf Konstanten und die Stetigkeit auf $\mathbb{R} \ni x$ (dann Unstetigkeit in ∞) und ist durch $\mathrm{L}(x) = 2\mathrm{L}(1) + \mathrm{L}(1/x)$, $x > 1$ und $\mathrm{L}(x) = -\mathrm{L}(x/(x-1))$, $x < 0$ gegeben. Vermöge $\mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(1-x) = \mathrm{L}(1)$ für $0 < x < 1$ läßt sich die letzte Relation auch als $\mathrm{L}(x) = \mathrm{L}(1/(1-x)) - \mathrm{L}(1)$ schreiben. Dann gilt

$$\mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(1-x) = \mathrm{L}(1), \quad x \in \mathbb{R}$$
$$\mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(1/x) = \begin{cases} 2\mathrm{L}(1) & x > 0 \\ -\mathrm{L}(1) & x < 0 \end{cases}$$

und für die Fünf-Terme-Beziehung findet man $(x, y \in \mathbb{R})$

$$\mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(y) + \mathrm{L}\left(\frac{1-x}{1-xy}\right) + \mathrm{L}(1-xy) + \mathrm{L}\left(\frac{1-y}{1-xy}\right) = \begin{cases} -3\mathrm{L}(1), & x < 0,\ y < 0,\ xy > 1, \\ 3\mathrm{L}(1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Spezielle Werte: Kennt man den Wert von $\zeta(2) = \sum_n 1/n^2 = \pi^2/6$, so ist es durch geeignete Spezialisierung obiger Relationen ein Leichtes folgende kurze Liste spezieller Werte des Rogers Dilogarithmus zu erstellen

$$\mathrm{L}(0) = 0, \quad \mathrm{L}(1) = \frac{\pi^2}{6},$$

weiterhin

$$\mathrm{L}((3-\sqrt{5})/2) = \frac{2}{5}\mathrm{L}(1), \quad \mathrm{L}(1/2) = \frac{1}{2}\mathrm{L}(1), \quad \mathrm{L}((\sqrt{5}-1)/2) = \frac{3}{5}\mathrm{L}(1),$$
$$\mathrm{L}(-\infty) = -\mathrm{L}(1), \quad \mathrm{L}(-1) = -\frac{1}{2}\mathrm{L}(1), \quad \mathrm{L}(+\infty) = 2\mathrm{L}(1),$$

wobei $\mathrm{L}(\pm\infty)$ als $\lim_{\mathbb{R}\ni x\to\pm\infty} \mathrm{L}(x)$ zu lesen ist.

A.5 Die Lobatschewsky-Funktion

(Milnor (1982)) ist definiert durch

$$\text{Л}(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1} \frac{\sin(2k\omega)}{k^2} = -i\left[\mathrm{Li}_2(e^{2i\omega}) - \mathrm{Li}_2(e^{-2i\omega})\right].$$

Sie tritt vor allem in Formeln zur Berechnung von Volumina von Polyedern im drei-dimensionalen hyperbolischen Raum auf. Es gilt für $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

$$\mathrm{D}(z) = \text{Л}(\arg(z)) + \text{Л}(\arg(1-1/z)) + \text{Л}(\arg(1/(1-z))).$$

Anhang B: Fusing-Matrix und Relationen am Beispiel von (2,5)

B.1 Fusing-Matrix des $(2,5)$ Virasoro-minimalen Modells

Wir schreiben die in Abschnitt 2.3 gegebene Fusing-Matrix hier explizit aus

$$F_{nm}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}-z & -\alpha\\ z/\alpha & z\end{pmatrix},$$

wobei $z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, also $z^2 = 1 + z$ und die 'Eich'freiheit durch den Quotienten der Normierungskonstanten $\mathcal{N}^{\mathbb{1}}/\mathcal{N}^{\Phi}$ jetzt in α steckt. Weitere Fusing-'Matrizen' (diese machen nicht wirklich Sinn als Matrizen, sondern dienen hier nur als Kurzschreibweise) sind ($\beta = 1$ ist weder für Pentagonidentität noch 'Nilpotenz' notwendig)

$$F_{nm}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix} = F_{nm}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix} = F_{nm}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix} = F_{nm}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$F_{nm}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix} = F_{nm}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1/\beta\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$F_{nm}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix} = F_{nm}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ \beta & 0\end{pmatrix},$$

$$F_{nm}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix} = F_{nm}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$F_{nm}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

und

$$F_{nm}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix} = F_{nm}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix} = F_{nm}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix} = F_{nm}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Man liest ab

$$F_{\mathbb{1}} = F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix} = 1 \quad \text{und} \quad F_{\Phi} = F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix} = -z$$

und erhält damit

$$|F| = \sum_i \frac{1}{F_i^2} = 1 + \frac{1}{z^2} = 3 - z.$$

Die insgesamt 15 verschiedenen, nicht-verschwindenden Fusing-'Matrix'elemente (die von der Zahl der $\mathbb{1}$n und Φs in sechs Klassen, $\mathbb{1}^6$, $\mathbb{1}^3\Phi^3$, $\mathbb{1}^2\Phi^4$, $\mathbb{1}^1\Phi^5$, $\mathbb{1}^2\Phi^4$ und Φ^6, mit einem, vier, drei, sechs und einem Element angeordnet werden können) tragen die folgende $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ Symmetrie

$$F_{nm}\begin{bmatrix} ji \\ lk \end{bmatrix} = F_{nm}\begin{bmatrix} ij \\ kl \end{bmatrix} = F_{nm}\begin{bmatrix} kl \\ ij \end{bmatrix};$$

in der Eichung $\beta = 1$ und $\alpha = \pm i\sqrt{z}$ weiterhin

$$F_{nm}\begin{bmatrix} ij \\ kl \end{bmatrix} = F_{mn}\begin{bmatrix} lj \\ ki \end{bmatrix},$$

dann also die Symmetriegruppe $\mathbb{Z}_2^3$.

Die in Abschnitt 2.4 definierten umnormierten Fusing-Matrizen $f_{qn}\left[\begin{smallmatrix} pk \\ ml \end{smallmatrix}\right] := F_{qn}\left[\begin{smallmatrix} pk \\ ml \end{smallmatrix}\right]\sqrt{F_q F_n}$ sind entsprechend

$$f_{nm}\begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \Phi\Phi \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -z & -\alpha\sqrt{-z} \\ z\sqrt{-z}/\alpha & -z^2 \end{pmatrix},$$

$$f_{nm}\begin{bmatrix} \mathbb{1}\Phi \\ \Phi\Phi \end{bmatrix} = f_{nm}\begin{bmatrix} \Phi\mathbb{1} \\ \Phi\Phi \end{bmatrix} = f_{nm}\begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \mathbb{1}\Phi \end{bmatrix} = f_{nm}\begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \Phi\mathbb{1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -z \end{pmatrix},$$

$$f_{nm}\begin{bmatrix} \mathbb{1}\mathbb{1} \\ \Phi\Phi \end{bmatrix} = f_{nm}\begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \mathbb{1}\mathbb{1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-z}/\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_{nm}\begin{bmatrix} \mathbb{1}\Phi \\ \mathbb{1}\Phi \end{bmatrix} = f_{nm}\begin{bmatrix} \Phi\mathbb{1} \\ \Phi\mathbb{1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta\sqrt{-z} & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_{nm}\begin{bmatrix} \mathbb{1}\Phi \\ \Phi\mathbb{1} \end{bmatrix} = f_{nm}\begin{bmatrix} \Phi\mathbb{1} \\ \mathbb{1}\Phi \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -z \end{pmatrix},$$

$$f_{nm}\begin{bmatrix} \mathbb{1}\mathbb{1} \\ \mathbb{1}\mathbb{1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$f_{nm}\begin{bmatrix} \mathbb{1}\Phi \\ \mathbb{1}\mathbb{1} \end{bmatrix} = f_{nm}\begin{bmatrix} \Phi\mathbb{1} \\ \mathbb{1}\mathbb{1} \end{bmatrix} = f_{nm}\begin{bmatrix} \mathbb{1}\mathbb{1} \\ \Phi\mathbb{1} \end{bmatrix} = f_{nm}\begin{bmatrix} \mathbb{1}\mathbb{1} \\ \mathbb{1}\Phi \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In der Tat tragen diese Symbole in der Eichung $\beta^2 = 1$, $\alpha = -\sqrt{-z}$ die Symmetrie eines orientierten Tetraeders, erzeugt von

$$f_{ij}\begin{bmatrix} nm \\ lk \end{bmatrix} = f_{ij}\begin{bmatrix} kl \\ mn \end{bmatrix} = f_{kn}\begin{bmatrix} mj \\ il \end{bmatrix}.$$

B.2 Pentagonidentitäten

Wir sortieren die Menge der Pentagonidentitäten des Virasoro-minimalen $(2,5)$ Modells nach der Zahl der verschiedenen Fusing-Matrix-Elemente.
Zunächst eine mit zwei verschiedenen Fs:

$$F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}^2 = F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}^3$$

Dann zwei mit drei verschiedenen Fs:

$$F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}^2 = F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}^2,$$

$$F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}^2 = F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}^2.$$

Dann die mit vier verschiedenen Fs:

$$F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix} = F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}^2\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix},$$

$$F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix} = F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}^2,$$

$$F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}^2 = F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix} = F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}^2,$$

$$F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix} = F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}^2,$$

$$F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix} = F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}^2,$$

$$F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix} = F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}^2,$$

$$F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}=F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}^2\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}=F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}^2,$$

$$F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}=F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}^2,$$

$$F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}=F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}^2\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}^2=F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}=F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}^2.$$

Dann die mit fünf verschiedenen Fs:

$$F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}=F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}=F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}=F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix},$$

$$F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}=F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}=F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}=F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}=F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix},$$

$$F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}=F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix},$$

$$F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}=F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix},$$

$$F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}=F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix},$$

$$F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}=F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}=F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}=F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}=F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}=F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}=F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}=F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}=F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}=F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}=F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}=F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix},$$

$$F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}=F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}=F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}=F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}=F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}=F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix},$$

$$F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}^2=F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\\Phi\Phi\end{bmatrix}+F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}^3.$$

Dann eine mit sechs verschiedenen Fs:

$$F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}^2=F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}+F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}^2.$$

Dann die mit sieben verschiedenen Fs:

$$\begin{aligned}F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}={}&\\&F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}^2\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}+F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}={}&\\&F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\\Phi\Phi\end{bmatrix}+F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}={}&\\&F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\\Phi\Phi\end{bmatrix}+F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}^2.\end{aligned}$$

B.3 Orthogonalitätsrelationen

Analog ordnen wir die die Menge der 'Orthogonalitäts'relationen. Zunächst die mit einem F

$$1 = F_{\mathbb{1}\mathbb{1}} \begin{bmatrix} \mathbb{1}\mathbb{1} \\ \mathbb{1}\mathbb{1} \end{bmatrix}^2, \quad 1 = F_{\Phi\Phi} \begin{bmatrix} \Phi\mathbb{1} \\ \Phi\Phi \end{bmatrix}^2, \quad 1 = F_{\Phi\Phi} \begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \mathbb{1}\Phi \end{bmatrix}^2,$$

$$1 = F_{\Phi\Phi} \begin{bmatrix} \Phi\mathbb{1} \\ \mathbb{1}\Phi \end{bmatrix}^2, \quad 1 = F_{\Phi\Phi} \begin{bmatrix} \mathbb{1}\Phi \\ \Phi\mathbb{1} \end{bmatrix}^2.$$

Dann die mit zwei verschiedenen Fs

$$1 = F_{\mathbb{1}\Phi} \begin{bmatrix} \mathbb{1}\mathbb{1} \\ \Phi\Phi \end{bmatrix} \cdot F_{\Phi\mathbb{1}} \begin{bmatrix} \Phi\mathbb{1} \\ \Phi\mathbb{1} \end{bmatrix}, \quad 1 = F_{\mathbb{1}\Phi} \begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \mathbb{1}\mathbb{1} \end{bmatrix} \cdot F_{\Phi\mathbb{1}} \begin{bmatrix} \mathbb{1}\Phi \\ \mathbb{1}\Phi \end{bmatrix},$$

$$1 = F_{\mathbb{1}\Phi} \begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \mathbb{1}\mathbb{1} \end{bmatrix} \cdot F_{\Phi\mathbb{1}} \begin{bmatrix} \mathbb{1}\Phi \\ \mathbb{1}\Phi \end{bmatrix}, \quad 1 = F_{\Phi\Phi} \begin{bmatrix} \mathbb{1}\Phi \\ \Phi\Phi \end{bmatrix} \cdot F_{\Phi\Phi} \begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \Phi\mathbb{1} \end{bmatrix},$$

$$1 = F_{\mathbb{1}\Phi} \begin{bmatrix} \mathbb{1}\mathbb{1} \\ \Phi\Phi \end{bmatrix} \cdot F_{\Phi\mathbb{1}} \begin{bmatrix} \Phi\mathbb{1} \\ \Phi\mathbb{1} \end{bmatrix}' \quad 1 = F_{\Phi\Phi} \begin{bmatrix} \mathbb{1}\Phi \\ \Phi\Phi \end{bmatrix} \cdot F_{\Phi\Phi} \begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \Phi\mathbb{1} \end{bmatrix}.$$

Dann die mit drei verschiedenen Fs

$$1 = F_{\mathbb{1}\mathbb{1}} \begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \Phi\Phi \end{bmatrix}^2 + F_{\mathbb{1}\Phi} \begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \Phi\Phi \end{bmatrix} \cdot F_{\Phi\mathbb{1}} \begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \Phi\Phi \end{bmatrix},$$

$$1 = F_{\mathbb{1}\Phi} \begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \Phi\Phi \end{bmatrix} \cdot F_{\Phi\mathbb{1}} \begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \Phi\Phi \end{bmatrix} + F_{\Phi\Phi} \begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \Phi\Phi \end{bmatrix}^2.$$

Schließlich die mit vier verschiedenen Fs

$$0 = F_{\mathbb{1}\mathbb{1}} \begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \Phi\Phi \end{bmatrix} \cdot F_{\mathbb{1}\Phi} \begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \Phi\Phi \end{bmatrix} + F_{\mathbb{1}\Phi} \begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \Phi\Phi \end{bmatrix} \cdot F_{\Phi\Phi} \begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \Phi\Phi \end{bmatrix},$$

$$0 = F_{\mathbb{1}\mathbb{1}} \begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \Phi\Phi \end{bmatrix} \cdot F_{\Phi\mathbb{1}} \begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \Phi\Phi \end{bmatrix} + F_{\Phi\mathbb{1}} \begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \Phi\Phi \end{bmatrix} \cdot F_{\Phi\Phi} \begin{bmatrix} \Phi\Phi \\ \Phi\Phi \end{bmatrix}.$$

B.4 Zerlegungsrelationen

Auch die Zerlegungsrelationen ordnen wir nach steigender Komplexität

$$F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\\mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_1}\cdot|F| = F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\\mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}^4\cdot\frac{1}{F_1^2} + F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}^2\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\\Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2^2},$$

$$\begin{aligned}F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2}\cdot|F| &= F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\\Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2}\cdot\frac{1}{F_1}\\ &+ F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2}\cdot\frac{1}{F_1}\\ &+ F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_1}\cdot|F| &= F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\\mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\\Phi\Phi\end{bmatrix}^2\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\\Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_1^2}\\ &+ F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}^2\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2^2}\\ &+ F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2}\cdot|F| &= F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\\mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}^2\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2}\cdot\frac{1}{F_1}\\ &+ F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\\Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}^2\cdot\frac{1}{F_2}\cdot\frac{1}{F_1}\\ &+ F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}^2\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_1}\cdot|F| &= F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\\mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}^2\cdot\frac{1}{F_1^2}\\ &+ F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}^2\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2^2}\\ &+ F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\\mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2}\cdot|F| = {} & F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}^2\cdot\frac{1}{F_2}\cdot\frac{1}{F_1}\\
&+F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}^3\cdot\frac{1}{F_2}\cdot\frac{1}{F_1}\\
&+F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}^2\cdot\frac{1}{F_2^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_1}\cdot|F| = {} & F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}^2\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2^2}\\
&+F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}^2\cdot\frac{1}{F_1^2}\\
&+F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}^2\cdot\frac{1}{F_2^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2}\cdot|F| = {} & F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}^2\cdot\frac{1}{F_2}\cdot\frac{1}{F_1}\\
&+F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2}\cdot\frac{1}{F_1}\\
&+F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}^2\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2}\cdot|F| = {} & F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}^2\cdot\frac{1}{F_2^2}\\
&+F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2}\cdot\frac{1}{F_1}\\
&+F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2}\cdot\frac{1}{F_1}\\
&+F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}^2\cdot\frac{1}{F_2^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2}\cdot|F| = {} & F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2^2}\\
&+F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2}\cdot\frac{1}{F_1}\\
&+F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}^2\cdot\frac{1}{F_2}\cdot\frac{1}{F_1}\\
&+F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}^2\cdot\frac{1}{F_2^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_1}\cdot|F| &= F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2^2}\\
&+ F_{\mathbb{1}\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2^2}\\
&+ F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}^2\cdot\frac{1}{F_1^2}\\
&+ F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}^2\cdot\frac{1}{F_2^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2}\cdot|F| &= F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}^2\cdot\frac{1}{F_2}\cdot\frac{1}{F_1}\\
&+ F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2^2}\\
&+ F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2}\cdot\frac{1}{F_1}\\
&+ F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}^2\cdot\frac{1}{F_2^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2}\cdot|F| &= F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2}\cdot\frac{1}{F_1}\\
&+ F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2^2}\\
&+ F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2}\cdot\frac{1}{F_1}\\
&+ F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}^2\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}^2\cdot\frac{1}{F_2^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2}\cdot|F| &= F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2^2}\\
&+ F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}^2\cdot\frac{1}{F_2}\cdot\frac{1}{F_1}\\
&+ F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}^2\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2}\cdot\frac{1}{F_1}\\
&+ F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}^2\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}^2\cdot\frac{1}{F_2^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2}\cdot|F| = {} & F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2^2}\\
&+F_{\mathbb{1}\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\mathbb{1}}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \mathbb{1}\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2^2}\\
&+F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}^2\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\mathbb{1}\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2}\cdot\frac{1}{F_1}\\
&+F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\mathbb{1}\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\mathbb{1}\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}^2\cdot F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{F_2}\cdot\frac{1}{F_1}\\
&+F_{\Phi\Phi}\begin{bmatrix}\Phi\Phi\\ \Phi\Phi\end{bmatrix}^4\cdot\frac{1}{F_2^2}.
\end{aligned}$$

Anhang C: ADET-Klassifikation

Die unten angegebenen Graphen $\mathcal{G}$ mit Vertizes $a = 1, 2, \ldots n$ und die damit verknüpften Inzidenz-, $I^{\mathcal{G}}_{ab} = \#\{$ Verbindungslinien zwischen a und $b\}$ und 'Cartan'-Matrizen, $C^{\mathcal{G}} := 2 - I^{\mathcal{G}}$ (vgl. Kapitel 3.1) bzw. Streumatrizen treten in dem von uns betrachteten Rahmen in der Klassifikation einer besonders einfachen Klasse von Streutheorien, nämlich solcher von der Form $S = \prod f$, auf.

Eine ähnlich herausragende Bedeutung spielen sie auch in Vermutungen zu Summenformen für allgemeine parafermionische Theorien (vgl. Terhoeven (1992), Kuniba, Nakanishi, Suzuki (1993)).

Daneben treten sie (oder insbesondere die ADE-Graphen) an vielen weiteren Stellen der Physik und Mathematik auf, so z.B. bei der Klassifikation von quadratischen Matrizen mit ganzzahligen, positiven Einträgen und Norm (Eigenwert des Perron-Frobenius-Eigenvektors) kleiner zwei (vgl. Goodman etal (1989)).

C.1 A-Serie

Der Graph zu A_n ist

$$\bullet^1 - \bullet^2 - \bullet^3 \cdots {}^{n-1}\bullet - \bullet^n \, .$$

Die Coxeterzahl von A_n ist $n+1$, die Exponenten sind $s = 1, 2, 3, \ldots n$. Die zugehörige Streutheorie wird mit der Störung der unitären $\mathbb{Z}_{n+1}$-parafermionischen Theorie mit zentraler Ladung $c = c_{\text{eff}} = \frac{2N}{N+1}$ durch das Feld des konformen Gewichts $h = 1 - \frac{n+1}{n+3}$ identifiziert; insbesondere für $n = 1$ mit der Störung des Ising-Modells durch das Feld des konformen Gewichts $h = 1/2$.

C.2 D-Serie

Der Graph zu D_n ist

$$\bullet^1 - \bullet^2 \cdots {}^{n-2}\bullet\!\!\left\langle \begin{matrix} \bullet^{n-1} \\ \bullet_n \end{matrix}\right. \, .$$

Die Coxeterzahl von D_n ist $2n-2$, die Exponenten sind $s = 1, 3, 5 \ldots 2n-3, n-1$. Die zugehörige Streutheorie wird mit der Störung der unitären Theorie eines freien Bosons kompaktifiziert auf dem Torus mit Radius $r = \sqrt{n/2}$ und Division der $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie (Orbifold) mit zentraler Ladung $c = c_{\text{eff}} = 1$ durch das Feld des konformen Gewichts $h = 1 - \frac{2n-2}{2n}$ identifiziert.

C.3 E_6, E_7 und E_8

Der Graph zu E_6 ist

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \bullet_6 & & & & \\ & & & & | & & & & \\ \bullet^1 & - & \bullet^2 & - & \bullet^3 & - & \bullet^4 & - & \bullet^5 \end{array}.$$

Die Coxeterzahl von E_6 ist 12, die Exponenten sind $s = 1, 4, 5, 7, 8, 11$. Die zugehörige Streutheorie wird mit der Störung des unitären $(6, 7)$ Virasoro-minimalen Modells mit zentraler Ladung $c = c_{\text{eff}} = 6/7$ durch das Feld des konformen Gewichts $h = 1/7$ identifiziert.

Der Graph zu E_7 ist

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & \bullet_7 & & & & & & \\ & & & & | & & & & & & \\ \bullet^1 & - & \bullet^2 & - & \bullet^3 & - & \bullet^4 & - & \bullet^5 & - & \bullet^6 \end{array}.$$

Die Coxeterzahl von E_7 ist 18, die Exponenten sind $s = 1, 5, 7, 9, 11, 13, 17$. Die zugehörige Streutheorie wird mit der Störung des unitären $(4, 5)$ Virasoro-minimalen Modells mit zentraler Ladung $c = c_{\text{eff}} = 7/10$ durch das Feld des konformen Gewichts $h = 1/10$ identifiziert.

Der Graph zu E_8 ist

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & \bullet^8 & & & & & & & & \\ & & & & | & & & & & & & & \\ \bullet^1 & - & \bullet^2 & - & \bullet^3 & - & \bullet^4 & - & \bullet^5 & - & \bullet^6 & - & \bullet^7 \end{array}.$$

Die Coxeterzahl von E_8 ist 30. Die Exponenten sind $s = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$. Die zugehörige Streutheorie wird mit der Störung des unitären $(3, 4)$ Virasoro-minimalen Modells (Ising) mit zentraler Ladung $c = c_{\text{eff}} = 1/2$ durch das Feld des konformen Gewichts $h = 1/16$ identifiziert.

C.4 T-Serie

Der Graph zu $T_n = A_{2n}/\mathbb{Z}_2$ ('Tadpole'-Graph) ist

$$\bullet^1 - \bullet^2 - \bullet^3 \cdots {}^{n-1}\bullet - {}^{n}\bullet\!\bigcirc.$$

Man ordnet ihm die Coxeterzahl $2n + 1$ und die Exponenten $s = 1, 3, 5, \ldots 2n - 1$ zu. Die zugehörige Streutheorie wird mit der Störung des nicht-unitären $(2, 2n+3)$ Virasoro-minimalen Modells mit zentraler Ladung $c = 1 - \frac{3(2n+1)^2}{2n+3}$ und effektiver zentraler Ladung $c_{\text{eff}} = \frac{2n}{2n+3}$ durch das Feld des konformen Gewichts $h = 1 - \frac{2(2n+1)}{2n+3}$ identifiziert.

Anhang D: Asymptotik verallgemeinerter Summenformen

In diesem Anhang beschreiben wir kurz einen Versuch, die in Abschnitt 4.2 benutzte Methode der Berechnung der Charakterasymptotik auf die in 5.1 vorgestellten verallgemeinerten Summenformen anzuwenden. Das Verfahren scheitert an unserer Ignoranz eines Analogons der Jacobi-Inversionsformel für Theta-Funktionen über Gitter mit nicht-positiv-definiter, quadratischer Form (wobei nur über das Innere des Lichtkegels summiert wird), die auch als Verallgemeinerungen der in Kapitel 4.5 aufgetretenen indefiniten Hecke-Modulformen aufgefaßt werden können. Fährt man ungeachtet dieser Problematik wie in Abschnitt 4.2 fort (und wendet die Jacobi-Inversionsformel formal an), so findet man in niedrigster Ordnung die in Abschnitt 5.1 angegebene korrekte Asymptotik (wiederum ergibt sich die effektive zentrale Ladung als Summe von Dilogarithmen – diesmal sind Vorzeichen möglich), höhere Ordnungen machen jedoch keinen Sinn.

Ausgangspunkt ist folgende Identität (Andrews (1976), (3.3.7))

$$\frac{1}{(z)_N} = \sum_{m=0}^{\infty} \begin{bmatrix} N+m-1 \\ m \end{bmatrix} z^m,$$

die mit Cauchys Theorem zu

$$q^{bm} \begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} = \oint \frac{dw}{2\pi i w} \frac{w^{-m}}{(wq^b)_{N-m+1}}$$

und durch eine weitere Anwendung des gleichen Tricks zu

$$\begin{aligned} q^{b_j m_j} \begin{bmatrix} (A(\mathbf{m},\mathbf{m}')^t+\mathbf{a})_j \\ m_j \end{bmatrix} &= \oint \frac{dw}{2\pi i w}\ w^{-m_j}\ \frac{(wq^{(A(\mathbf{m},\mathbf{m}')^t)_j - m_j + a_j + b_j + 1})_\infty}{(wq^{b_j})_\infty} \\ &= \oint \frac{dw}{2\pi i w}\ \frac{dz}{2\pi i z}\ \frac{w^{-m_j}}{(wq^{b_j})_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\ q^{n(A(\mathbf{m}\mathbf{m}')^t - \mathbf{m})_j}\ (wzq^{a_j+b_j+1})_\infty \end{aligned}$$

umgeschrieben werden kann (unten wechseln wir von z zu w_j''/w ($w = w_j$) und schreiben m_j'' statt n). Schon in 4.2 hatten wir

$$\frac{q^{b'm'}}{(q)_{m'}} = \oint \frac{dw'}{2\pi i w'}\ \frac{w'^{-m'}}{(w'q^{b'})_\infty}.$$

In Vektorschreibweise (Vektoren gleichen Typs tragen den gleichen Index und über diesen wird summiert) erhalten wir insgesamt folgenden Ausdruck für die verallgemeinerten Summenformen aus 5.1

$$
\begin{aligned}
Z(q) = \oint \frac{d(\mathbf{w},\mathbf{w}',\mathbf{w}'')}{2\pi i(\mathbf{w},\mathbf{w}',\mathbf{w}'')} & \left(\frac{(\mathbf{w}'' q^{\mathbf{o}''})_\infty}{(\mathbf{w} q^{\mathbf{o}})_\infty (\mathbf{w}' q^{\mathbf{o}'})_\infty}\right) \\
& \left(\sum_{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}_K^{d+d'}} \frac{1}{K^{d+d'}} \sum_{(\mathbf{m},\mathbf{m}',\mathbf{m}'')\in\mathbb{Z}^D}{}' q^{\frac{1}{2}(\mathbf{m},\mathbf{m}',\mathbf{m}'')\mathcal{B}(\mathbf{m},\mathbf{m}',\mathbf{m}'')^t+\beta} \right. \\
& \qquad \left. e^{-2\pi i \mathbf{l}(C(\mathbf{m},\mathbf{m}')^t-\mathbf{g})} \left((\mathbf{w},\mathbf{w}',\mathbf{w}''/\mathbf{w})^{-(\mathbf{m},\mathbf{m}',\mathbf{m}'')}\right)\right),
\end{aligned}
$$

wobei $(\mathbf{o},\mathbf{o}',\mathbf{o}'') = (\mathbf{b},\mathbf{b}',\mathbf{b}+\mathbf{a}+\mathbf{1})$, $D = d+d'+d$ und

$$
\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(B+B^t) & (A-(\mathbb{1}_d,0_{d'}))^t \\ A-(\mathbb{1}_d,0_{d'}) & 0 \end{pmatrix}.
$$

Die erste Klammer im Integral dieses Ausdrucks kann genau wie in 4.2 verarbeitet werden und führt asymptotisch auf den Dilogarithmus. Das Problem ist die zweite Klammer, da die Matrix $\mathcal{B}$ für interessante Fälle nicht positiv-definit ist – allerdings läuft die Summe auch nicht über ganz $\mathbb{Z}^D$, sondern nur über den Teil mit $\mathbf{m},\mathbf{m}',\mathbf{m}'' \geq 0$ und $(A-(\mathbb{1}_d,0_{d'}))(\mathbf{m},\mathbf{m}')^t+\mathbf{a} \geq 0$ – es fehlt ein Analogon der Jacobi-Inversionsformel für diesen Fall. Wendet man diese formal an, so ergibt sich

$$
Z(q) = \oint \frac{d(\mathbf{w},\mathbf{w}',\mathbf{w}'')}{2\pi i\ (\mathbf{w},\mathbf{w}',\mathbf{w}'')} \frac{1}{K^{d+d'}\sqrt{\det(\mathcal{B})\ t^D}} \sum_{\substack{\mathbf{l}\in\mathbb{Z}_K^{d+d'} \\ (\mathbf{m},\mathbf{m}',\mathbf{m}'')\in\mathbb{Z}^D}} \exp\left(\mathcal{E}_{\mathbf{m},l}(q,\mathbf{w},\mathbf{w}',\mathbf{w}'')\right),
$$

wobei $\mathcal{E}_{\mathbf{m},l}(q,\mathbf{w},\mathbf{w}',\mathbf{w}'')$ in niedrigster Ordnung auf

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\log(q)}\Big\{ \frac{4\pi^2}{2} & \left((\mathbf{m},\mathbf{m}',\mathbf{m}'') + \log(\mathbf{w},\mathbf{w}',\mathbf{w}''/\mathbf{w})/2\pi i + (\mathbf{l},\mathbf{0})(\mathbf{C},\mathbf{0})\right) \\
& \mathcal{B}^{-1}\left((\mathbf{m},\mathbf{m}',\mathbf{m}'') + \log(\mathbf{w},\mathbf{w}',\mathbf{w}''/\mathbf{w})/2\pi i + (\mathbf{l},\mathbf{0})(\mathbf{C},\mathbf{0})\right)^t \\
& + (-\mathbf{1},-\mathbf{1},+\mathbf{1})\mathrm{Li}_2(\mathbf{w},\mathbf{w}',\mathbf{w}'')\Big\}.
\end{aligned}
$$

reduziert. Setzt man in diesen Ausdruck die entsprechende Sattelpunktsbedingung ein, findet man die in 5.1 angegebene Dilogarithmusidentität.

Dank

Was Goethe zum Dank eingefallen ist, paßt nicht so ganz: Danke Gott, wenn er dich preßt und dank' ihm, wenn er wieder dich entläßt – oder doch?

Werner Nahm gebührt die erste Stelle – sicherlich nicht nur nach Seniorität (versehen mit einem Faktor der Hilfsbereitschaft und -fähigkeit).

Daneben waren Gespräche und Diskussionen mit Don Zagier, Andreas Recknagel, Ruth Kellerhals und Alexander Berkovich sehr hilfreich, in anderen Sinnen ebenso mit Rolf Schimmrigk, Wolfgang Eholzer, Michael Rösgen, Andreas Honecker, Raimund Varnhagen, Ralf Hübel, Michael Flohr, Andreas Wißkirchen, Falk Rohsiepe, Ralf Kaufmann und Peter Arndt.

Danken möchte ich auch der Studienstiftung des deutschen Volkes für viele Jahre der finanziellen und ideellen Förderung.

Meinen Eltern. Meinen Freunden.

Literaturverzeichnis

L. Alvarez-Gaumé, G. Sierra, C. Gomez (1990), in: Physics and mathematics of strings, Editoren: Brink etal, World Scientific, 16-184.

G.E. Andrews (1976), *The theory of partitions*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol. 2, Addison Wesley.

G.E. Andrews (1986), *q-series: their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics, and computer algebra* (Conference Board of the Mathematical Sciences, Regional Conference Series in Mathematics, Number 66).

M. F. Atiyah (1988), *Publ. Math. I. H. E. S.* **68**, 175.

V. V. Bazhanov, N. Yu. Reshetikhin (1989), *Int. J. Mod. Phys.* **A4**, 115.

H. M. Babujan (1983), *Nucl. Phys.* **B215**, 317-36.

A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov (1984), *Nucl. Phys.* **B241**, 333.

A. A. Beilinson, A. B. Goncharov, V. V. Schechtman, A. N. Varchenko (1990), in: The Grothendieck Festschrift, Vol. 1, Editoren: P. Cartier etal, Birkhäuser, 135-72.

A. Berkovich (1994), *Nucl. Phys.* **B431**, 315-48.

A. Berkovich, B. M. McCoy (1994), *Continued fractions and fermionic representations for characters of M(p,p') minimal models*, preprint BONN-TH-94-28, ITPSB 96-060, hep-th/9412030.

P. Bouwknegt, K. Schoutens (1993), *Phys. Rep.* **223**, 183.

D.M Bressoud (1980), *Analytic and combinatorical generalizations of the Rogers-Ramanujan identities* (Memoirs of the American Mathematical Society, Number 227, Volume 24).

A. Cappelli, C. Itzykson, J.-B. Zuber (1987), *Comm. Math. Phys.* **113**, 1.

J. L. Cardy (1985), *Phys. Rev. Lett.* **54**, 1354-6.

J. L. Cardy (1986), *Nucl. Phys.* **B270**, 186-204.

J. L. Cardy (1989), *Nucl. Phys.* **B324**, 581-96.

J. L. Cardy, G. Mussardo (1989), *Phys. Lett.* **B225**, 275-8.

P. Christe, M. J. Martins (1990), *Mod. Phys. Lett.* **A5**, 2189-95.

S. Dasmahapatra, R. Kedem, T. R. Klassen, B. M. McCoy, E. Melzer (1993), Int. J. Mod. Phys. **B7**, 3617-48.

B. Davies (1978), *Integral transforms and their applications*, Applied mathematical sciences, Vol. 25, Springer-Verlag.

H. E. Debrunner (1989), *El. Math.* **44**, 66-70.

Vl. S. Dotsenko, V. A. Fateev (1984), *Nucl. Phys.* **B240**, 312-48.

J. L. Dupont, C.-H. Sah (1982), *J. Pure Appl. Algebra* **25**, 159-95; ibid **30**, 217.

J. L. Dupont, C.-H. Sah (1993), *Comm. Math. Phys.* **161**, 265-82.

B. Durhuus, H. P. Jakobson, R. Nest (1993), *Rev. Math. Phys* **5**, 1-67.

W. Eholzer (1994), private Mitteilung.

W. Eholzer, A. Honecker, R. Hübel (1993), *Phys. Lett.* **B308**, 42.

D. B. A. Epstein, R. Penner (1988), *J. Diff. Geom.* **27**, 67-80.

A. Erdélyi (1953) Editor: *Higher transcendental functions*, Vol. 1, McGraw-Hill Book Company.

B. L. Feigin, D. B. Fuchs (1982), *Funct. Anal. Appl.* **16**, 114.

B. L. Feigin, T. Nakanishi, H. Ooguri (1992), *Int. J. Mod. Phys.* **A7** Suppl. 1A, 217-238.

P. Fendley (1992), *Nucl. Phys.* **B374**, 667-91.

P. Fendley, K. Intriligator (1992), *Nucl. Phys.* **B372**, 533-58.

M. Flohr (1993), *Comm. Math. Phys.* **157**, 179.

A. Fring, R. Köberle (1994), *Nucl. Phys.* **B421**, 159-72.

E. Frenkel, A. Szenes (1993), *Crystal bases, dilogarithm identities and torsion in algebraic K-groups*, hep-th/9304118.

J. Fuchs (1993), *The quantum symmetry of rational field theories*, hep-th/9312026.

J. Fuchs, A. Ganchev, P. Vecsernyés (1994), *Towards a classification of rational hopf algebras*, hep-th/9402153.

M. Gaberdiel (1994), *Int. J. Mod. Phys.* **A9**, 4619-36.

A. M. Gabrielov, I. M. Gelfand, M. V. Losik (1975), *Funct. Anal. Appl.* **9**, 103ff, 186ff.

I. M. Gelfand, R. D. MacPherson (1982), *Adv. Math.* **44**, 279-312.

F. Gliozzi, R. Tateo (1994), *ADE functional dilogarithm identities and integrable models*, hep-th/9411203.

F. M. Goodman, P. De la Harpe, V. Jones (1989), *Coxeter Graphs and Towers of Algebras*, Springer.

P. Goddard, A. Kent, D. Olive (1986), *Comm. Math. Phys.* **103**, 105-119.

A. B. Goncharov (1993), in: The Gelfand mathematical seminars, 1990-1992, Editoren: Corwin etal, Birkhäuser, 113-35.

S. Goshal, A. Zamolodchikov (1994), *Int. J. Mod. Phys.* **A9**, 3841-85.

M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten (1987), *Superstring theory, Vol. 1 & 2* (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).

M. Gromov (1979), in: Séminaire Bourbaki, no. **546**.

R. C. Gunning (1962), *Lectures on Modular Forms*, Princeton University Press.

R. M. Hain, R. MacPherson (1990), *Ill. J. Math.* **14**, 392-475.

O. Hölder (1928), Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Math. Phys. **80**, 312-25.

C. Itzykson, J.-M. Drouffe (1989), *Statistical field theory*, Vol. 2, chapter 9, CUP.

C. Itzykson, H. Saleur, J.-B. Zuber (1988) :Editoren, *Conformal Invariance and Applications to Statistical Mechanics*, World Scientific.

V. Kac (1978), in: Proc. Intern. Congress of Mathematicians (Helsinki).

V. G. Kac, D. H. Peterson (1984), *Advances in Math.* **53**, 125-264.

R. Kedem, T. R. Klassen, B. M. McCoy, E. Melzer (1993), *Phys. Lett.* **B304**, 263; ibid **B307**, 68.

A. Kent (1991), *Phys. Lett.* **B 269**, 315-318.

J. Kellendonk, M. Rösgen, R. Varnhagen (1994), *Int. J. Mod. Phys.* **A9**, 1009-23.

A. N. Kirillov (1989), *J. Soviet Math.* **47**, 2450-9.

A. N. Kirillov (1994), *Dilogarithm identities*, hep-th/9408113.

T. R. Klassen, E. Melzer (1990), *Nucl. Phys.***B338**, 485-528.

T. R. Klassen, E. Melzer (1991), *Nucl. Phys.***B350**, 635-89.

T. R. Klassen, E. Melzer (1991a), in: Quantum field theory, statistical mechanics, quantum groups, and topology, Proc. of the Miami NATO workshop, Editoren: Curtright etal., Plenum.

T. R. Klassen, E. Melzer (1992), *Nucl. Phys.***B370**, 511.

P. Kleban, I. Vassileva (1994), *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3929-32.

A. Klümper, P. A. Pearce (1991), *J. Stat. Phys.* **64**, 13.

R. Köberle (1991), in: Lecture notes of the J. A. Swieca Summer School 1990, hep-th/9110012.

A. Koubek (1994), *Nucl. Phys.* **B435**, 703-34.

A. Kuniba, T. Nakanishi (1992), *Mod. Phys. Lett.***A7**, 3487-94.

A. Kuniba, T. Nakanishi, J. Suzuki (1993), *Mod. Phys. Lett.* **A8**, 1649-60.

A. LeClair (1989), *Phys. Lett.* **B230**, 103.

J. Lepowsky, M. Primc (1985), *Structure of the standard modules for the affine Lie algebra* $A_1^{(1)}$, AMS Series: Contemporary Mathematics, Vol. 46.

J. Lepowsky, R. Wilson (1981), *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **78**, 7254-8; (1984), *Invent. Math.* **77**, 199-290; (1985), *ibid* **79**, 417-42.

L. Lewin (1981), *Polylogarithms and associated functions*, North Holland.

L. Lewin (1991), Editor: *Structural properties of polylogarithms*, AMS Mathematical Surveys and Monographs, vol. 37.

G. Meinardus (1954), *Math. Zeitschr.*, Bd. **1**, 289-302.

R. Meyerhoff (1986), in: Low-dimensional topology and Kleinian geometry, Editor: D. B. A. Epstein, London Math. Soc. lecture notes series, **112**, 209-15.

R. Meyerhoff (1992), *The mathematical intelligencer* **14**, 37-53.

J. Milnor (1982), *Bull. Amer. Math. Soc.* **6**, 9-24.

G. Moore, N. Seiberg (1990), in: Superstrings '89, Proc. of the Trieste Spring School, Editoren: Green etal, World Scientific, 1-129.

G. Mussardo (1992), *Phys. Rep.* **218**, 215-379.

W. Nahm (1993), in: Low-dimensional topology and quantum field theory, proceedings of the NATO workshop at the Isaac Newton Institut, Editor: H. Osborn, Plenum Press.

W. Nahm (1994), in: Interface between physics and mathematics, Editoren: Nahm, Shen, World Scientific, 154-65.

W. Nahm (1994a), talk given at the International Conference of Mathematical Physics, Paris.

W. Nahm (1994b), *Int. J. Mod. Phys.* **B8**, 3693-702.

W. Nahm, A. Recknagel, M. Terhoeven (1993), *Mod. Phys. Lett.* **A8**, No. 19, 1835-47.

W. D. Neumann, D. Zagier (1985), *Topology* **24**, 307-32.

W. D. Neumann (1992), in: Topology 90, proceedings of the research semester in low dimensional topology at Ohio state, Walter de Gruyter Verlag, 243-72.

W. D. Neumann, J. Yang (1994), *Rationality problems for K-theory and Chern-Simons invariants of hyperbolic 3-manifolds*, preprint.

J. G. Ratcliffe (1994), *Foundations of hyperbolic manifolds*, Springer.

F. Ravanini, R. Tateo, A. Valleriani (1993), *Int. J. Mod. Phys.* **A8**, 1707.

B. Richmond, G. Szekeres (1981), *J. Austral. Math. Soc. (Series A) 31*, 362-73.

A. Rocha-Caridi (1984), in: Vertex operators in mathematics and physics, Editoren: Mandelstam, Singer, World Scientific, 451ff.

L. J. Rogers (1907), *Proc. Lond. Math. Soc.* **4**. 169-89.

R. Schimmrigk (1995), private Mitteilung: 'Nicht wirklich.'

V. Schomerus (1994), *Construction of field algebras with quantum symmetry from local observables*, hep-th/9401042.

M. Terhoeven (1992), *Lift of dilogarithm to partition identities*, preprint BONN-HE-92-36, hep-th/9211120.

M. Terhoeven (1994), *Mod. Phys. Lett.* **A9**, 133.

W. P. Thurston (1977), *The geometry and topology of 3-manifolds*, lecture notes, Princeton, Princeton University Press.

W. P. Thurston (1982), *Bull. Amer. Math. Soc.* **6**, 357-81.

V. G. Turaev, O. Viro (1992), *Topology* **31**, 865.

E. Verlinde (1988), *Nucl. Phys.* **B300**, 360.

E. B. Vinberg (1991), *Amer. Math. Soc. Transl.* **148**, 15-27.

E. Witten (1989), *Nucl. Phys.* **B322**, 629-97.

T. Yoshida (1985), *Invent. Math.* **81**, 473-514.

D. Zagier (1988), *The remarkable dilogarithm*, in: Number theory and related topics - papers presented at the Ramanujan colloquium, Bombay, TIFR; *J. Math. Phys. Sci.* **22**, 131-45.

A. B. Zamolodchikov (1989), in: Advanced studies in pure mathematics 19, Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics, 641-74.

Al. B. Zamolodchikov (1990), *Nucl. Phys.* **B342**, 695.

Al. B. Zamolodchikov (1991), *Phys. Lett.* **B253**, 391.

Al. B. Zamolodchikov (1991a), *Nucl. Phys.* **B366**, 122-32.

Index

∞