Universität Bonn
Physikalisches Institut

Störungstheoretische Berechnung der unteren Anregungen eines inhomogenen XXX–Modells

by

Tom-Dieter Albert

Abstract

With the help of pertubation theory for the algebraic Bethe Ansatz the two lowest excitations of an inhomogenous XXX model are calculated to first order. The energy eigenvalues are found to be non-trivially modified by the Fouriertransform of the distribution of the coupling-parameters.

Post address:
Nußallee 12
D-53115 Bonn
Germany
e-mail:
t-albert@avzw02.physik.uni-bonn.de

BONN-IB-95-34
Bonn University
December 1995

Universität Bonn
Physikalisches Institut

Störungstheoretische Berechnung der untersten Anregungen eines inhomogenen XXX–Modells

von

Tom-Dieter Albert

Dieser Forschungsbericht wurde von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn als Diplomarbeit angenommen.

Datum: 28. November 1995
Referent: Prof. R. Flume Korreferent: Prof. G. von Gehlen

Contents

1 Einleitung **4**

2 Der Bethe–Ansatz **5**

2.1 Grundlagen 5

2.2 Weiterführende Ergebnisse 11

2.3 Störungsrechnung des Bethe–Ansatzes 14

3 Niedrigliegende Anregungen des inhomogenen XXX–Modells **16**

3.1 Entartung der Eigenwerte 16

3.2 Der Fall l=1 17

3.3 Der Fall l=2 19

4 Zusammenfassung und Ausblick **27**

A Invarianz der Lösungen der Bethe–Ansatz Gleichungen unter komplexer Konjugation **28**

B Skalierungsverhalten der Matrixelemente **30**

Literaturverzeichnis **32**

1 Einleitung

In den über 60 Jahren, die seit der ersten Formulierung des Bethe–Ansatzes [1] vergingen, wurde diese Methode zur Konstruktion von Eigenwerten und Eigenvektoren des Hamiltonoperators verallgemeinert und erfolgreich weiterentwickelt.

Die dabei gefundene mathematische Strukturen erwiesen sich auch als sehr wichtig in der Theorie der Knoten und der Quantengruppen [2], jedoch wird diese Möglichkeit des Zugangs in dieser Arbeit nicht verwendet.

Der hier benutzte sogenannte algebraische Bethe–Ansatz (er ähnelt in der Methode der algebraischen Lösung des harmonischen Oszillators in der Quantenmechanik) wurde auf eine Vielzahl von Modellen der statistischen Mechanik (Heisenberg-Modelle [3], Hubbard-Modell [4]) und auch der relativistischen Feldtheorie in einer Raum- und einer Zeitdimension (Sinus-Gordon Modell [5], (1+1)dimensionele QCD [6]) angewendet. Diese Korrespondenz zwischen 1-D quantenmechanischen statistischen Systemen und 1+1-D euklidischer Feldtheorie ist möglich, da das euklidische Zeitintervall konsistent mit der Temperatur $\beta = \frac{1}{kT}$ identifiziert werden kann [7].

In Kapitel 2 wird die Methode und die wichtigsten Ergebnisse des algebrischen Bethe–Ansatzes aufgeführt, und auf eine mögliche Störungstheorie des Bethe–Ansatzes [8] eingegangen.

In Kapitel 3 werden zuerst die Lösungen der Bethe–Ansatz Gleichungen konstruiert, dann wird die obengenannte Methode verwendet, um die untersten Anregungen eines inhomogenen XXX-Modells zu berechnen, in dem die Kopplungen z_j für die einzelen Gitterplätze verschieden gewählt werden können.
Somit ist es möglich, die Auswirkungen von Unreinheiten in physikalischen Systemen abzuschätzen.

2 Der Bethe–Ansatz

Zur Begriffsbildung werden in diesem Kapitel die Grundzüge des algebraischen Bethe–Ansatzes wiederholt, und die Hauptergebnisse der in [8] entwickelten Methode zur Störungsrechnung im inhomogenen Fall zitiert.
Für eine tiefgreifendere Behandlung des algebraischen Bethe–Ansatzes, auch für die Anwendung auf andere Modelle, siehe [9, 10, 5] und die darin aufgeführten Literaturhinweise.

2.1 Grundlagen

Der algebraische Bethe–Ansatz basiert auf der Konstruktion von simultanen Eigenwerten und Eigenfunktionen des Hamiltonoperators und der Transfermatrix durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, die auf ein Pseudovakuum wirken.
Das hier betrachtete Modell ist das des XXX–Spin-$\frac{1}{2}$–Heisenberg Modells, welches physikalisch eine Kette von N Atomen beschreibt, die über den Spin mit ihren jeweils nächsten Nachbarn wechselwirken.
Dazu wird jedem Gitterplatz j der Kette ein Spinoperator $\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$ (die Komponenten des Vektors $\vec{\sigma}$ sind die Pauli-Matrizen) zugeordnet.
Diese (lokalen) Spinoperatoren wirken auf den Hilbertraum $h_j = \mathbb{C}^2$, der (physikalische) Hilbertraum besteht aus den N-fachen Tensorprodukt dieser Einzelräume:

$$\mathcal{H} = \otimes_{j=1}^{N} h_j \tag{1}$$

Dieser Hilbertraum hat die Dimension $dim\mathcal{H} = 2^N$, und die in ihm wirkenden Operatoren können erzeugt werden als

$$\vec{\sigma}_j = \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2 \cdots \mathbb{I}_2 \otimes \underbrace{\vec{\sigma}}_{\mathrm{j-teStelle}} \otimes \mathbb{I}_2 \cdots \otimes \mathbb{I}_2 \tag{2}$$

Die Dynamik des Systems wird durch folgenden Hamiltonoperator[1] beschrieben:

$$H = \frac{J}{4} \sum_{j=1}^{N} (\vec{\sigma}_j \vec{\sigma}_{j+1} - \mathbb{I}_{\mathrm{N}}) \tag{3}$$

Es werden periodische Randbedingungen $\vec{\sigma}_j = \vec{\sigma}_{j+N}$ eingeführt. Mit Hilfe der Inversen Streu Methode [11] lassen sich sogenannte Laxoperatoren definieren, die als eine Art Eichfeld interpretiert werden können, welches einen Paralleltransport längs der Kette verursacht.

[1] Die Indizes, die die Dimension des Raumes beschreiben, werden der Übersichtlichkeit halber ab jetzt weggelassen.

Aus dem Produkt dieser Laxoperatoren kann man dann die Monodromiematrix bilden, die den Transport einmal um die Kette beschreibt.

Der Laxoperator ist wie folgt definiert:

$$L_j(\lambda) = \frac{1}{2}\left[\frac{(\eta - 2\lambda)}{\eta}\mathbb{1}_0 \otimes \mathbb{1}_\mathrm{j} + \vec{\sigma}_0 \otimes \vec{\sigma}_\mathrm{j}\right] \tag{4}$$

und wirkt nichttrivial nur auf $h_0 \otimes h_j$, wobei der Raum h_0 hier auch wieder $\mathbb{C}^2$ bedeutet, und im folgenden als Hilfsraum bezeichnet wird. Die Monodromiematrix lautet dann

$$T(\lambda) = L_N(\lambda)\, L_{N-1}(\lambda) \cdots L_1(\lambda) \tag{5}$$

Hierbei ist zu beachten, daß in (5) ein geordnetes Produkt steht, da zwar die Matrixelemente der Laxoperatoren an verschiedenen Gitterplätzen miteinander kommutieren, jedoch nicht die Operatoren selber.
Für die Operatoren gilt folgende Relation:

$$R(\lambda - \mu)\, L_j(\lambda) \otimes L_j(\mu) = L_j(\mu) \otimes L_j(\lambda)\, R(\lambda - \mu) \tag{6}$$

Aus dieser (lokalen) Relation erhält man eine globale Relation für die Monodromiematrix:

$$R(\lambda - \mu)\, T(\lambda) \otimes T(\mu) = T(\mu) \otimes T(\lambda)\, R(\lambda - \mu) \tag{7}$$

Der hier auftretende R-Operator erfüllt folgende Bedingung [10]:

$$\begin{aligned}(\mathbb{1} \otimes \mathrm{R}(\lambda - \mu))(\mathrm{R}(\lambda - \nu) \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes \mathrm{R}(\mu - \nu)) = \\ (R(\mu - \nu) \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes \mathrm{R}(\lambda - \nu))(\mathrm{R}(\lambda - \mu) \otimes \mathbb{1})\end{aligned} \tag{8}$$

Dies ist die Yang-Baxter–Gleichung (YBG)[2]. Sie stellt eine hinreichende Bedingung für die Assoziavität eines Produktes von drei T Operatoren dar.
Die Lösung der YBG für das XXX-Modell lautet wie folgt :

$$R(\lambda - \mu) = \mathcal{P} + \frac{\eta}{\lambda - \mu}\mathbb{1} \tag{9}$$

wobei der Permutationsoperator $\mathcal{P}$ wie folgt wirkt: $\mathcal{P}(a \otimes b) = b \otimes a$.
Er wird wie folgt realisiert: $\mathcal{P} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \vec{\sigma} \otimes \vec{\sigma}\right)$ und nimmt in der kanonischen Basis von

[2]Der klassische Limes dieser Gleichung ergibt gerade die Jacobi-Identität, dies sieht man, wenn gesetzt wird: $R = \mathbb{1} + \hbar\mathrm{r} + \mathcal{O}(\hbar^2)$, die 1. Ordnung in $\hbar$ ist trivial erfüllt; die 2. Ordnung ergibt die Jacobi–Identität (siehe auch [2])

$\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ folgende Form an: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Um die Korrespondenz mit der in [5] verwendeten Notation herzustellen, wird $\eta = i$ und $\lambda = \lambda + \frac{i}{2}$ gesetzt. Dann ergibt sich folgende R-Matrix:

$$R(\mu - \lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda-\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(\lambda-\mu) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & g(\lambda-\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda-\mu) \end{pmatrix} \tag{10}$$

mit $f(\lambda - \mu) = 1 + \frac{i}{\lambda-\mu}$ und $g(\lambda-\mu) = \frac{i}{\lambda-\mu}$.

Um eine Verbindung zwischen der Monodromiematrix und dem Hamiltonoperator herzustellen, führen wir folgende Operatoren ein:

$$\mathcal{F}(\lambda) = tr_0\Big(T(\lambda)\Big) \tag{11}$$

wobei die Spurbildung im Hilfsraum erfolgt. Aus der Relation (7) folgt wegen der zyklischen Vertauschbarkeit unter der Spur und da $trA \otimes B = trA\, trB$:

$$[\mathcal{F}(\lambda), \mathcal{F}(\mu)] = 0 \tag{12}$$

Es gilt [8]

$$-J\frac{\eta}{2}\frac{d\,\ln \mathcal{F}(\lambda)}{d\,\lambda}\Big|_{\lambda=0} - J\frac{N}{2}\mathbb{1} = \mathrm{H} \tag{13}$$

d.h. die logarithmische Ableitung der Transfermatrix an der Stelle $\lambda = 0$ ist (bis auf eine additive Konstante) der Hamiltonoperator mit nächster Nachbar–Wechselwirkung.
Allgemein gilt, daß $\mathcal{C}_k = \frac{d^k\,\ln \mathcal{F}(\lambda)}{d\,\lambda^k}\Big|_{\lambda=0}$ (k+1) Gitterplätze miteinander koppelt [13].
Es gilt $\Big[\mathcal{C}_k, \mathcal{C}_j\Big] = 0$.
Da $\mathcal{F}(\lambda)$ ein Polynom vom Grad N in λ ist, erhält man N unabhängige kommutierende Größen, unter denen sich (siehe 13) auch der Hamiltonoperator befindet.
Man hat also N Integrale der Bewegung für ein System mit N Freiheitsgraden, d.h. das Modell ist integrabel. Jetzt wenden wir uns der eigentlichen Konstruktion der Eigenwerte und Eigenfunktionen des Hamiltonoperators zu.
In der Basis des Hilfsraumes nimmt der Laxoperator folgende Form an

$$L(\lambda) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (i\lambda)\mathbb{1} + \sigma^3 & \sigma^- \\ \sigma^+ & (i\lambda)\mathbb{1} - \sigma^3 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Betrachtet man nun den (lokalen) Höchstgewichtszustand $\omega_j = \binom{1}{0}$. auf ihm nimmt der Laxoperator (da $\sigma^+\omega = 0$) folgende Dreiecksgestalt an

$$L_j(\lambda)\omega_j = \begin{pmatrix} a_j(\lambda) & \cdots \\ 0 & d_j(\lambda) \end{pmatrix} \omega_j$$

mit $a_j(\lambda) = (\frac{\eta-2\lambda}{2\lambda}) + \frac{1}{2} = \left(\frac{\eta-\lambda}{\eta}\right)$ und $d_j(\lambda) = (\frac{\eta-2\lambda}{2\lambda}) - \frac{1}{2} = \frac{-\lambda}{\eta}$. Betrachtet man nun den globalen Höchstgewichtszustand bezüglich des Gesamtspinoperators $S^3 = \sum_{j=1}^{N} {s_j}^3$

$$\Omega = \otimes_{j=1}^{N} \omega_j \tag{15}$$

mit $S^+\Omega = 0$ und $S^3\Omega = \frac{N}{2}\Omega$, so hat auch die Monodromiematrix (5) als ein Produkt von Dreiecksmatrizen auf dem Höchstgewichtszustand Dreiecksgestalt:

$$T(\lambda)\Omega := \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \Omega = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ 0 & D(\lambda) \end{pmatrix} \Omega \tag{16}$$

wobei $A(\lambda)\Omega = a(\lambda)\Omega = \left(\frac{\eta-\lambda}{\eta}\right)^N \Omega$
und $D(\lambda)\Omega = d(\lambda)\Omega = \left(\frac{-\lambda}{\eta}\right)^N \Omega$ ist.
Somit ist ω ein Eigenvektor zu $\mathcal{F}(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$.

Um weitere Eigenvektoren zu erhalten, macht man den sogenannten "Bethe–Ansatz"

$$\Phi(\{\lambda_l\}) = B(\lambda_1)B(\lambda_2)\cdots B(\lambda_l)\Omega \tag{17}$$

Um nun die Eigenwerte explizit zu berechnen, muß man die Kommutatorregeln für die A, D, B's kennen. Diese sind aber gerade durch (7) gegeben. Von diesen insgesamt 16 Relationen geben wir nur folgende an:

$$\begin{aligned} \Big[B(\lambda),\, B(\mu)\Big] &= 0 = \Big[C(\lambda),\, C(\mu)\Big] \\ \Big[B(\lambda),\, C(\mu)\Big] &= g(\lambda,\mu)\Big(D(\lambda)A(\mu) - D(\mu)A(\lambda)\Big) \\ D(\mu)A(\lambda) &= f(\lambda,\mu)B(\lambda)D(\mu) + g(\mu,\lambda)B(\mu)D(\lambda) \\ A(\mu)B(\lambda) &= f(\lambda,\mu)B(\lambda)A(\mu) + g(\mu,\lambda)B(\mu)A(\lambda) \end{aligned} \tag{18}$$

Als Resultat erhält man [10]:

$\Phi(\{\lambda_l\})$ ist Eigenvektor zu $\mathcal{F}(\lambda) \iff \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_l$ löst folgende Gleichungen

$$\frac{a(\lambda_j)}{d(\lambda_j)} = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{l} \frac{f(\lambda_k,\lambda_j)}{f(\lambda_j,\lambda_k)} \tag{19}$$

Dies sind die bekannten Bethe–Ansatz Gleichungen. Die Eigenwerte der Transfermatrix sind dann:

$$\begin{aligned} \Lambda(\mu, \{\lambda_l\}) &= a(\mu) \prod_{j=1}^{l} f(\mu, \lambda_j) + d(\mu) \prod_{j=1}^{l} f(\lambda_j, \mu) \\ \mathcal{F}(\mu)\, \Phi(\{\lambda_j\}) &= \Lambda(\mu, \{\lambda_j\})\, \Phi(\{\lambda_j\}) \end{aligned} \tag{20}$$

Wegen Gleichung (13) (und der Kommmutativität der Transfermatrizen) hat man auch die Eigenwerte des Hamiltonoperators erhalten:

$$E(\mu) = -J \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_j^2 + \frac{1}{4}} \tag{21}$$

Das Energiespektrum ist also additiv.
Der Impulsoperator wird über einen Verschiebeoperator $U = e^{ip}$ definiert. Den Verschiebeoperator erhält man, wenn man die Transfermatrix an der Stelle $\mu = 0$ betrachtet:

$$U \;=\; \mathcal{F}(\mu = 0) \tag{22}$$

Für $\mu = 0$ verschwindet der zweite Term in (20), man erhält also für die Eigenwerte des Impulsoperators

$$ip(\lambda_j) = \ln \Lambda(0, \{\lambda_j\}) = \sum_{j=1}^{l} \ln f(0, \lambda_j) = \sum_{j=1}^{l} \ln \frac{\lambda_j - \eta}{\lambda_j} = \sum_{j=1}^{l} \ln \frac{a_j(\lambda_j)}{d_j(\lambda_j)} \tag{23}$$

Somit ist das Eigenwertproblem gelöst.

Die so erhaltenen Lösungen werden wie folgt interpretiert:

- Der Operator $B(\lambda_j)$ erzeugt ein Quasiteilchen (Spinwelle) mit Impuls $p(\lambda_j)$ und der Energie $E(\lambda_j)$. Der Parameter λ_j wird als Rapidität interpretiert; wird dieser Parameter eleminiert, erhält man die Dispersionsrelation $E(p) = -(1 - \cos p)$. Der Operator $C(\lambda_j)$ vernichtet entsprechend ein Quasiteilchen des Impulses $p(\lambda_j)$.
- Es kann gezeigt werden [12], daß die $\{\lambda_j\}$ alle verschieden sein müssen, d.h. die Quasiteilchen dürfen keine gleichen Impulse besitzen, für sie gilt also eine Art Pauli-Prinzip.
- Die Anzahl der erzeugten Teilchen ist beschränkt $l \leq \frac{N}{2}$ [8]

- Wellenfunktionen mit unterschiedlicher Anzahl von B's sind zueinander orthogonal (die Wellenfunktionen sind Eigenvektoren zum Gesamtspin S^3 mit Eigenwert $s = \frac{N}{2} - l$; da dies ein hermitscher Operator ist, sind Eigenvektoren mit unterschiedlichen Eigenwerten orthogonal)

2.2 Weiterführende Ergebnisse

Die oben zitierten Bethe–Ansatz Gleichungen lassen sich mit Hilfe des Impulses umschreiben als:

$$\exp\Big\{-ip(\lambda_j)\Big\}^N = (-1)^l \exp\Big\{i\sum_{\substack{k=1\\ j\neq k}}\theta(\lambda_j-\lambda_k)\Big\} \tag{24}$$

mit $\theta(\lambda) = i\ln\frac{\lambda+i}{\lambda-i}$, welche als Streuphase interpretiert werden kann.
Hierbei treten als Konsequenz der Integrabilität des Modells nur 2-Teilchen-Streuphasen auf[3].
In der logarithmischen Form schreibt sich die BAG als

$$Np(\lambda_j) + \sum_{\substack{k=1\\ j\neq k}}\theta(\lambda_j-\lambda_k) = 2\pi n_k \qquad k=1,\ldots,l \tag{25}$$

Yang und Yang zeigten [14], daß Lösungen für diese Gleichungen existieren, und eindeutig durch die Menge der (natürlichen) Zahlen $\{n_j\}$ für N gerade parametrisiert werden können (der Beweis beruht darauf zu zeigen, daß diese Gleichungen aus einem Variationsprinzip hergeleitet werden können).

Die Streuphase ist antisymmetrisch und beschränkt, und außerdem monoton steigend.
Durch die eindeutige Parametrisierung ist es möglich, zum thermodynamischen Limes zu gehen, dazu führt man die Variable $x = \frac{n_k}{N}$ ein. Damit erhält man

$$p(\lambda(x)) + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{l}\theta(\lambda(x)-\lambda_k) = 2\pi\, x,$$

$$\frac{d\,p(\lambda(x))}{d\,\lambda} + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{l}K(\lambda(x)-\lambda_k) = 2\pi\rho(\lambda(x))$$

wobei

$$\rho(\lambda(x)) = \frac{d\,x}{d\,\lambda} \;\text{ und }\; K(\lambda(x)-\lambda_k) = \frac{d}{d\,\lambda}\theta(\lambda(x)-\lambda_k)$$

Für $N\to\infty$ kann obige Summe durch ein Integral ersetzt werden, da der Abstand zweier λ von der Ordnung $\mathcal{O}(\frac{1}{N})$ ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{l}K(\lambda(x)-\lambda_k) &= \int_{-\infty}^{+\infty}K(\lambda(x),\lambda(y))d\,y\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}K(\lambda(x),\mu)\rho(\mu)d\,\mu\end{aligned}$$

[3]Hier zeigt sich eine interessante formale Analogie zwischen Vertexmodellen und Feldtheorien mit faktorisierbarer S-Matrix, siehe [13]

Somit erhält man folgende Integralgleichung

$$2\pi\rho(\lambda) - \int_{-\infty}^{+\infty} K(\lambda(x), \mu)\rho(\mu)d\,\mu = \frac{d\,p(\lambda(x))}{d\,\lambda} \tag{26}$$

Diese Integralgleichung läßt sich mittels Fouriertransformation lösen [15], da das Integral eine Faltung darstellt:
Wenn F die Fouriertransformation und F^* die dazu inverse Fouriertransformation darstellt, so gilt für die Faltung zweier Funktionen

$$\begin{aligned}(f*g)(x): &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)d\,y \\ F(f*g)(x) &= \sqrt{2\pi}F(f)F(g)\end{aligned}$$

Verwendet man dies, so erhält man für ρ

$$\rho(\lambda) = F^*\left(\frac{\sqrt{2\pi}F(\frac{d\,p(\lambda(x))}{d\,\lambda})}{\sqrt{2\pi} - F(K(\lambda,\mu))}\right)$$

Mit $d\,p(\lambda(x)) = \frac{1}{\lambda^2+\frac{1}{4}}$ und $K(\lambda,\mu) = -\frac{2}{(\mu-\lambda)^2+1}$ erhält man als Lösung

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\cosh\pi\lambda} \tag{27}$$

Für die Berechnung von Korrelationsfunktionen ist es wichtig, die Norm der Bethewellen-Funktionen zu kennen.
Dazu wird zuerst die duale Wellenfunktion Φ^+ konstruiert: für die Laxoperatoren gilt die Beziehung

$$L^*(\lambda^*) = -\sigma^y L(\lambda)\sigma^y$$

Diese Relation lässt sich (da $\sigma^y\sigma^y = \mathbb{1}$) auch auf die Monodromiematrix verallgemeinern

$$T^*(\lambda^*) = (-1)^N\sigma^y\,T(\lambda)\sigma^y \tag{28}$$

wobei $T^*(\lambda^*)$ hermitsche Konjugation der Quantenoperatoren (ohne Matrix Transposition) und komplexe Konjugation von c-Zahlen bedeutet.
Somit folgt $B^+(\lambda^*) = -C(\lambda)$ (N gerade). Für die Wellenfunktionen bedeutet dies

$$\Phi^+ = (-1)^l\,\Phi \tag{29}$$

Die Norm, definiert als $\Phi^+ \Phi$, läßt sich als eine Determinante in folgender Weise schreiben [16, 17]

$$
\begin{aligned}
\Phi^+\Phi &= (-1)^l \langle 0| \prod_{j=1}^{l} C(\lambda_j) \prod_{k=1}^{l} B(\lambda_k)|0\rangle \\
&= (-1)^l \Big\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{l} f(\lambda_j,\lambda_k)\Big\} det_l(\phi'_{jk}) \Big\{ \prod_{j=1}^{l} a(\lambda_j) d(\lambda_j)\Big\}
\end{aligned} \tag{30}
$$

Hierbei bedeutet $\phi'_{jk} = \frac{\partial \phi_j}{\partial \lambda_k}$ und

$$
\phi_j = i \ln \frac{a(\lambda_j)}{d(\lambda_j)} + i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{l} \ln \left(\frac{f(\lambda_j,\lambda_k)}{f(\lambda_k,\lambda_j)} \right) \tag{31}
$$

Damit ergibt sich für ϕ'_{jk}

$$
\begin{aligned}
\phi'_{jk} &= \delta_{jk}\Big(z_j + \sum_{n=1}^{l} K_{nj}\Big) - K_{jk} \\
&= \delta_{jk} \left[\frac{-N}{\lambda_j^2 + \frac{1}{4}} + \sum_{n=1}^{l} \frac{2}{1+(\lambda_j-\lambda_n)^2} \right] - \frac{2}{1+(\lambda_j-\lambda_k)^2}
\end{aligned}
$$

Nun wenden wir uns dem thermodynamischen Limes der Matrix ϕ'_{jk} zu. Dazu wird die $l \times l$ Matrix als ein Produkt zweier Matrizen geschrieben

$$
\phi'_{jk} = \hat{G}\,\theta \qquad\qquad det_l \phi'_{jk} = det\hat{G}\, det\theta
$$

wobei θ eine Diagonalmatrix ist

$$
\theta_{jk} = \delta_{jk}\vartheta_k \qquad\qquad \vartheta_k = z_k + \sum_{n=1}^{l} K_{nk}
$$

und die Matrix $\hat{G}$ ist gegeben durch

$$
\hat{G}_{jk} = \delta_{jk} - \frac{K_{jk}}{\vartheta_k}
$$

Der thermodynamische Limes der Größe ϑ_k läßt sich mit der Integralgleichung (26) berechnen, indem die Summe wieder in ein Integral umgewandelt wird, und dann in Gleichung (26) eingesetzt wird.
Man erhält

$$
\vartheta_k = 2\pi\rho(\lambda_k) N \tag{32}
$$

Die Matrix $\hat{G}$ ergibt im thermodynamischen Limes einen Integraloperator (Fredholmoperator)

$$\hat{G} \to 1 - \frac{\hat{K}}{2\pi} \qquad (\hat{K}\phi)(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(la, \mu)\phi(\mu)d\,\mu \tag{33}$$

Damit erhält man

$$det\phi' = \prod_{j=1}^{l} (2\pi\rho(\lambda_j)N)\, det\left(1 - \frac{\hat{K}}{2\pi}\right) \tag{34}$$

2.3 Störungsrechnung des Bethe–Ansatzes

Hier sollen die wichtigsten Resultate aus [8] aufgeführt werden. Die Laxoperatoren werden durch Einführung eines Inhomogenitätsparameters z_j in der Form $\lambda - z_j$ und Umskalierung wie folgt modifiziert (dies ist möglich, da die R-Matrix in (6) nur von der Differenz $(\lambda - \mu)$ abhängt):

$$\lambda \to \epsilon\,\lambda \qquad z_j \to \epsilon z_j \tag{35}$$

Die damit konstruierten Monodromiematrizen kommutieren für gleiche Sätze an Inhomogenitätsoperatoren $\{z_j\}$ noch, und die logarithmische Ableitung nach $\epsilon\lambda$ ergibt den Hamiltonoperator des XXX-Modells. Die gesamte Philosophie des Bethe–Ansatzes gilt hier noch, doch nun hängen die Lösungen der BAG λ_j von ϵ ab; $\lambda_j(\epsilon)$.

Da man für $\epsilon = 0$ das ursprüngliche XXX-Modell erhält, entwickelt man nun die Bethe–Ansatz Gleichung und die Eigenwerte nach Potenzen von ϵ. In erster Ordnung erhält man folgenden Hamiltonoperator

$$H = J\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N}(\lambda - z_j)\,(\vec{\sigma}_j\,\vec{\sigma}_{j+1} - \mathbb{1}) =: \lambda H_0 - H_1 \tag{36}$$

Dieser Hamilltonoperator H_1 erlaubt es, die Kopplungen an jedem Gitterplatz verschieden zu wählen, und somit die Auswirkungen von Unreinheiten zu berücksichtigen.

Für $|z_j| \ll 1$ kann man H_1 als kleine Störung zu H_0 betrachten, und die Standard-Störungstheorie benutzen.
Bei den zu berechnenden Matrixelementen $\Phi(\{\mu_j\})H_1\Phi(\{\lambda_k\})$ kann man sich auf solche beschränken, für die gilt $card\{\mu_j\} = card\{\lambda_k\}$, da sonst die Matrixelemente Null sind.
Für die Diagonalelemente erhält man:

$$\Phi\, H_1\, \Phi = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} z_j \sum_{k=1}^{l} E_k \tag{37}$$

wobei E_j wie in (21) die Energie im ungestörten Fall darstellt. In dem Fall der Störungstheorie ohne Entartung wird in der Energiekorrektur 1. Ordnung also nur die Kopplungsstärke des homogenen Modells in den Mittelwert der z_j geändert (dies ist wichtig für den antiferromagnetischen Grundzustand).

Für die Nichtdiagonalelemente wurde in [8] eine algebraische Methode zur Berechnung entwickelt

$$
\begin{aligned}
&\langle 0| \prod_{j=1}^{l} C(\lambda_j^C)\, H_1 \prod_{k=1}^{l} B(\lambda_k^B)|0\rangle = \\
&\qquad \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} z_k \sum_{\substack{\{\lambda^{CI}\}\cup\{\mu_2\}\cup\{\lambda^{CIV}\}=\{\lambda^C\} \\ \{\lambda^{BI}\}\cup\{\mu_1\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\}, card\{\mu_1\}=card\{\mu_2\}=1}} \prod_{j_C\in CI}^{n_1} \prod_{m_C\in CIV}^{n_4} \prod_{j_B\in BI}^{n_1} \prod_{m_B\in BIV}^{n_4} \\
&\qquad \times \quad (i\lambda_{j_C}^{CI} - \frac{1}{2})^{N-k+1}(i\lambda_{m_C}^{CIV} + \frac{1}{2})^{k+1}(i\lambda_{j_B}^{BI} + \frac{1}{2})^{N-k+1}(i\lambda_{m_B}^{BIV} - \frac{1}{2})^{k+1} \\
&\qquad \times \quad (i\mu_1 - \frac{1}{2})^{k-1}(i\mu_1 + \frac{1}{2})^{N-k-1}(i\mu_2 + \frac{1}{2})^{k-1}(i\mu_2 - \frac{1}{2})^{N-k-1} \\
&\qquad \times \quad \frac{\lambda_{j_C}^{CI} - \lambda_{m_C}^{CIV} - i}{\lambda_{j_C}^{CI} - \lambda_{m_C}^{CIV}} \frac{\lambda_{m_B}^{BIV} - \lambda_{j_B}^{BI} - i}{\lambda_{m_B}^{BIV} - \lambda_{j_B}^{BI}} \frac{\mu_1 - \lambda_{j_B}^{BI} - i}{\mu_1 - \lambda_{j_B}^{BI}} \frac{\lambda_{m_B}^{BIV} - \mu_1 - i}{\lambda_{m_B}^{BIV} - \mu_1} \\
&\qquad \times \quad \frac{\lambda_{j_C}^{CI} - \mu_2 - i}{\lambda_{j_C}^{CI} - \mu_2} \frac{\mu_2 - \lambda_{m_C}^{CIV} - i}{\mu_2 - \lambda_{m_C}^{CIV}} \mathcal{S}^1(\{\lambda^{CI}\},\{\lambda^{BI}\})\mathcal{S}^4(\{\lambda^{CIV}\},\{\lambda^{BIV}\}) \qquad (38)
\end{aligned}
$$

Hierbei geht die Summe über alle Zerlegungen der Menge $\{\lambda_j\}$ in 3 Teilmengen, wobei mittleren Teilmenge ein Element enthält (andernfalls ist das Matrixelement Null).
Die Skalarprodukte beziehen sich jeweils auf die Teilräume, entsprechend der folgenden Aufteilung des Vakuums:

$$|0\rangle = |0\rangle_4 \otimes |0\rangle_3 \otimes |0\rangle_2 \otimes |0\rangle_1 \qquad (39)$$

wobei nun auch die Monodromiematrix zerlegt wird

$$T(\lambda) = T(4|\lambda)T(3|\lambda)T(2|\lambda)T(1|\lambda) \qquad (40)$$

mit

$$
\begin{aligned}
T(4|\lambda) &= L_N(\lambda)\cdots L_{i+2}(\lambda) \\
T(3|\lambda &= L_{i+1}(\lambda) \\
T(2|\lambda) &= L_i(\lambda) \\
T(1|\lambda) &= L_{i-1}(\lambda)\cdots L_1(\lambda)
\end{aligned}
$$

3 Niedrigliegende Anregungen des inhomogenen XXX–Modells

In diesem Kapitel werden mit der in [8] entwickelten Methode die ersten Anregungen des inhomogenen XXX–Modells (36) berechnet im ferromagnatischen Fall $J = -1$ berechnet.

3.1 Entartung der Eigenwerte

Um den Störoperator H_1 zu diagonalisieren, müssen die folgenden Entartungen der Eigenwerte des ungestörten Operators H_0 im Fall $N \to \infty$ beachtet werden:

1. Entartung durch die SU(2)–Invarianz von H_0.
2. Entartung des Energieeigenwertes bezüglich verschiedener Spin–Multipletts (Yang'sche Symmetrie)(daraus resultieren nichtlokale Erhaltungsgößen im thermodyn. Limes): jeder Energiewert $E(\{\lambda_j\})$
$$E(\{\lambda_j\}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l} \frac{1}{\lambda_j^2 + \frac{1}{4}}$$
läßt sich darstellen durch Energiewerte eines anderen Multipletts
$$E(\{\mu_k\}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\mu_k^2 + \frac{1}{4}}$$
wobei $l \neq m$ ist.
3. Entartung des Energieeigenwertes innerhalb eines Spin–Multipletts: dies entspricht dem vorigen Fall, jedoch ist jetzt $l = m$.
4. Entartung bzgl. der Parität (quadratischen Abhängigkeit der Energie von der Rapidität λ).

In [8] wurde gezeigt, daß der Störoperator H_1 bezüglich der ersten beiden Entarungen schon diagonal ist, im Anhang B werden wir zeigen, daß er auch bezüglich der dritten Entartung diagonal ist.
Es verbleibt also die Entartung bezüglich der quadratischen Rapidität, der Grad dieser Entartung beträgt l^2, mit l Anzahl der B's.

3.2 Der Fall l=1

Die niedrigste Anregung wird durch einen umgeklappten Spin, d. h. $l = 1$ realisiert. In diesem Fall lautet die Bethe–Ansatz Gleichung (BAG)

$$\left(\frac{\lambda + \frac{i}{2}}{\lambda - \frac{i}{2}}\right)^N = 1 \qquad \text{bzw. in exponentieller Form} \qquad \exp\left(ip(\lambda)N\right) = 1. \tag{41}$$

Mit periodischer Randbedingung lautet somit die Gleichung für den Impuls

$$p = \frac{2\pi k}{N}\,; \qquad k = 1, ..., N. \tag{42}$$

Für $N \to \infty$ nimmt der Impuls also alle rationalen Werte in der Brioullin–Zone $[0, 2\,\pi]$ an. Dies wird als freies Quasiteilchen (Spinwelle) interpretiert. Die Lösung der BAG ergibt sich zu

$$\lambda = \frac{1}{2}\cot\frac{p}{2}. \tag{43}$$

Die Berechnung des Matrixelements (38) ist einfach, da man nur einen Summanden erhält

$$\begin{aligned}\langle 0|C(\mu_1)\vec{\sigma}_j\vec{\sigma}_{j+1}B(\mu_2)|0\rangle &= 2\; d(\mu_1)^{j-1}a(\mu_1)^{N-j-1}d(\mu_2)^{N-j-1}a(\mu_2)^{j-1} \\ &= 2\left[(i\mu_1 - \frac{1}{2})(i\mu_2 + \frac{1}{2})\right]^N\left[\frac{(i\mu_1 - \frac{1}{2})(i\mu_2 + \frac{1}{2})}{(i\mu_1 + \frac{1}{2})(i\mu_2 - \frac{1}{2})}\right]^j \frac{1}{(\mu_1^2 + \frac{1}{4})(\mu_2^2 + \frac{1}{4})}\end{aligned} \tag{44}$$

Zur Kontrolle kann nun $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ gesetzt werden, man erhält (wenn über j summiert und durch die Norm geteilt wird) den Ausdruck für die Energie $E^{(0)}$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{j=1}^{N}\langle 0|C(\mu)\;\vec{\sigma}_j\vec{\sigma}_{j+1}B(\mu)|0\rangle = 2\;N\;(-1)^N\left(\lambda^2 + \frac{1}{4}\right)^{N-2}$$

$$E^{(0)} = \frac{1}{4}\frac{\sum_{j=1}^{N}\langle 0|C(\mu)\;\vec{\sigma}_j\vec{\sigma}_{j+1}B(\mu)|0\rangle}{\langle 0|C(\mu)B(\mu)|0\rangle} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(\lambda^2 + \frac{1}{4})} \tag{45}$$

Zur Berechnung der Energiekorrektur für den inhomogenen Fall muß beachtet werden, daß jeder Energieeigenwert zweifach entartet ist, da λ und $-\lambda$ den gleichen Energiewert ergeben[4]

$$E^{(0)} = \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda^2 + \frac{1}{4}} \tag{46}$$

[4] Natürlich läßt sich diese Energie auch als Summe aus mehreren Einteilchenenergien mit entsprechend gewählten μ_j darstellen, diese Matrixelemente verschwinden jedoch,da nun $card\{\lambda\} \neq card\{\mu_j\}$ (siehe Kap. 3.1)

und die Wellenfunktionen $B(\lambda)|0\rangle$ und $B(-\lambda)|0\rangle$ orthogonal zueinander sind. Die in der quantenmechanischen Störungstheorie [18] für entartete Niveaus benutzten Matrixelemente lauten:

$$\mathcal{V}(\lambda,-\lambda) = \sum_{j=1}^{N} z_j \langle 0|C(\lambda)(\vec{\sigma}_j\vec{\sigma}_{j+1} - \mathbb{1})\mathrm{B}(-\lambda)|0\rangle \tag{47}$$

und

$$\mathcal{V}(-\lambda,\lambda) = \sum_{j=1}^{N} z_j \langle 0|C(-\lambda)(\vec{\sigma}_j\vec{\sigma}_{j+1} - \mathbb{1})\mathrm{B}(\lambda)|0\rangle \tag{48}$$

Diese beiden Matrixelemente sind gleich

$$\mathcal{V}(-\lambda,\lambda) = \mathcal{V}(\lambda,-\lambda)^* = \frac{1}{2}\frac{(-1)^N(i\lambda+\frac{1}{2})^{2N}}{(\lambda^2+\frac{1}{4})}\sum_{j=1}^{N} z_j \left(\frac{i\lambda-\frac{1}{2}}{i\lambda+\frac{1}{2}}\right)^{2j} \tag{49}$$

Der konstante Term in (47,48) fällt wegen der Orthogonalität der Bethewellenfunktionen weg. Die Diagonalelemente lassen sich (besonders für $l > 1$) am einfachsten mit Formel (37) berechnen.

Beim Aufstellen der Säkulargleichung ($det(\mathcal{V} - E^{(1)}\mathbb{1}) = 0$) ist zu beachten, daß die Bethewellenfunktionen nicht auf 1 normiert sind. Die Energiekorrektur vereinfacht sich somit zu folgendem Ausdruck (die Norm der Bethewellenfunktionen für λ und $-\lambda$ ist natürlich auch gleich, und beträgt $N(-1)^{N-1}\left(\lambda^2+\frac{1}{4}\right)^{N-1}$):

$$E^{(1)} = \frac{\mathcal{V}(\lambda,\lambda)}{\langle 0|C(\lambda)B(\lambda)|0\rangle} \pm 2\frac{|\mathcal{V}(\lambda,-\lambda)|}{\langle 0|C(\lambda)B(\lambda)|0\rangle} \tag{50}$$

Als endgültigen Ausdruck erhält man

$$\boxed{E^{(1)}(\lambda) = E^{(0)}(\lambda)\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} z_j\right) \pm \sqrt{\sum_{j,k=1}^{N}\frac{z_j z_k}{N^2}\ \exp\left(-i2p_0(\lambda)(j-k)\right)}\right]} \tag{51}$$

Wählt man nun zur Kontrolle alle z_j gleich, so erhält man

$$z_j = 1 \qquad \forall j \qquad\qquad \Longrightarrow$$

$$E^{(1)} \quad = \quad E^{(0)}\left[1 \pm \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{j=1}^{N}\exp(-ip_0(\lambda)2j)\ \sum_{k=1}^{N}\exp\left(ip_0(\lambda)2k\right)}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= E^{(0)}\left[1 \pm \frac{1}{N}\sqrt{\left(\frac{\exp(-ip_0 2N)-1}{\exp(-ip_0)-1}\right)\left(\frac{\exp(ip_0 2N)-1}{\exp(ip_0)-1}\right)}\,\right] \\
&= E^{(0)}
\end{aligned} \tag{52}
$$

da wegen des Bethe–Ansatzes $\exp(\pm ip_0)N = 1$ gilt.
Die Energiekorrektur in 1. Ordnung hängt also sowohl vom Mittelwert der einzelnen Bindungen $\overline{z} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} z_j$ als auch von deren Fouriertransformierten $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} z_j\, exp(\pm ip_0 2j)$ ab.

3.3 Der Fall l=2

Der Fall von 2 umgeklappten Spins ist bereits sehr viel komplexer, da man nun 2 transzendente Gleichungen erhält:

$$
\left(\frac{\lambda_1 - \frac{i}{2}}{\lambda + \frac{i}{2}}\right)^N = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 - \frac{i}{2}}{\lambda_1 - \lambda_2 + \frac{i}{2}}\,; \qquad \left(\frac{\lambda_2 - \frac{i}{2}}{\lambda_2 + \frac{i}{2}}\right)^N = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 - \frac{i}{2}}{\lambda_2 - \lambda_1 + \frac{i}{2}} \tag{53}
$$

bzw. in logarithmischer Form

$$
\begin{aligned}
p_0(\lambda_1) &= \frac{2\pi\lambda_1 + \theta(\lambda_2 - \lambda_1)}{N} \\
p_0(\lambda_2) &= \frac{2\pi\lambda_2 + \theta(\lambda_1 - \lambda_2)}{N}
\end{aligned} \tag{54}
$$

mit $\theta(\lambda) = \frac{1}{i}\ln\frac{\lambda+i}{\lambda-i}$. Für $N \to \infty$ und λ reell ist der Term $\frac{\theta(\lambda_i-\lambda_k)}{N}$ vernachlässigbar, da $|\theta(\lambda_i - \lambda_k)| \leq \pi$ [1].
Diese Art von Lösungen beschreiben also 2 Quasiteilchen, deren Impulse unabhängig voneinander innerhalb der Brioullin–Zone variieren können. Außerdem kann λ auch noch komplexe Werte annehmen. Da die Lösungen der BAG invariant unter komplexer Konjugation sind [19] (siehe Appendix A), kann man ansetzen: $\lambda_1 = x + iy$ und $\lambda_2 = x - iy,\ y > 0$.
Die Impulse sehen nun folgendermaßen aus:

$$
p(\lambda_1) = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{x + i\left(y + \frac{1}{2}\right)}{x + i\left(y - \frac{1}{2}\right)}\right) \qquad p(\lambda_2) = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{x + i\left(y - \frac{1}{2}\right)}{x + i\left(y + \frac{1}{2}\right)}\right) \tag{55}
$$

Wählt man nun einen passenden Zweig des Logharithmus aus (siehe (61)), so spaltet sich der Impuls in folgende 2 Teile auf:

$$p(\lambda_{1,2}) = \frac{1}{2i} \ln \underbrace{\left(\frac{x^2 + \left(y \pm \frac{1}{2}\right)^2}{x^2 + \left(y \mp \frac{1}{2}\right)^2} \right)}_{\geq 0} \;\pm\; \arctan \underbrace{\left(\frac{x}{x^2 + y^2 + \frac{1}{4}} \right)}_{\text{reell}}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} p_x(\lambda_{1,2}) \pm i\, p_y(\lambda_{1,2}) \tag{56}$$

Nun lassen sich die BAG wie folgt schreiben

$$\exp\left\{ \pm i \arctan\left(\frac{x}{x^2 + y^2 - \frac{1}{4}} \right) N \right\} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \ln\left[\frac{x^2 + \left(y \pm \frac{1}{2}\right)^2}{x^2 + \left(y \mp \frac{1}{2}\right)^2} \right] N \right\} = \frac{2y - 1}{2y + 1}$$

Für $N \to \infty$ stellt $y = \frac{1}{2}$ (für beliebiges x) eine Lösung dar. Um für großes N die N–Abhängigkeit der Näherungslösung explizit kontrollieren zu können, entwickelt man die BAG bis zu Gliedern $\mathcal{O}\left(\left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right)$, z.B. für $p(\lambda_1)$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x + i\left(y - \frac{1}{2}\right)}{x + i\left(y + \frac{1}{2}\right)} \right)^N &= \frac{2y - 1}{2y + 1} \\ \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{x+i} \right)^N + \left(y - \frac{1}{2}\right) N \left(\frac{x}{x+i} \right)^{N-1} (x+i)^{-2} &= y - \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{57}$$

Nach y aufgelöst

$$y = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{x}{x+i}\right)^N}{1 + N \left(\frac{x}{x+i}\right)^{N-1} (x+i)^{-2}} \tag{58}$$

Jetzt ist

$$\left(\frac{x}{x+i} \right)^N = \exp(-ip_1 N) = \exp\left\{ -i \arctan\left(\frac{1}{x}\right) N \right\} \; \exp\left\{ -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right) N \right\}$$

Da $\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) > 1$, ist auch $\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) > 1$. Deswegen kann im Nenner von (58) der Term mit N gegenüber 1 vernachlässigt werden. Man erhält also (die Rechnung für $p(\lambda_2)$ verläuft analog)

$$\boxed{y = \frac{1}{2} + a_{1,2}\, e^{-c_0 N}} \tag{59}$$

wobei

$$a_{1,2} = \exp\left\{ \pm 1 \arctan\left(\frac{1}{x} \right) \right\}$$

und

$$c_0 = \exp\left\{ -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) \right\}$$

Damit diese beiden Lösungen für y übereistimmen, muß gelten: $a_1 = a_2$. Dies führt zu folgender Bedingung:

$$\begin{aligned} \exp\left\{ 2i \arctan\left(\frac{1}{x} \right) \right\} = 1 &= \exp(2\pi k i) \\ \arctan\left(\frac{1}{x} \right) &= \frac{\pi k}{N} \\ \boxed{x = \left[\tan\left(\frac{\pi k}{N} \right) \right]^{-1}} \end{aligned} \tag{60}$$

Somit hat man eine explizite Abhängigkeit $x(N)$. Die Zahl k muß nun so gewählt werden, daß x keine Diskontinuitäten aufweist:

$$-\infty \leq \frac{1}{x} \leq +\infty \qquad \to \qquad k \in \left[\frac{N}{2}, \frac{3N}{2} \right] \tag{61}$$

Nun ist es möglich, $k = k_0 N$ zu setzen, so daß $\tan\left(\frac{\pi k}{N}\right) = const.$, dann ist auch $x = const.$, somit unterscheidet sich y nur um Terme $\mathcal{O}\left(e^{-cN}\right)$ von $\frac{1}{2}$. Der Gesamtimpuls beträgt

$$e^{ip(\lambda_1,\lambda_2)} = \left(\frac{x+i}{x-i} \right) \tag{62}$$

und die entsprechende Energie

$$E(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{x^2+1} \tag{63}$$

Da diese Energie kleiner als die Summe der Einteilchenenergien (46) ist, wird diese sogenannte Stringlösung als ein gebundener Zustand interpretiert; hierbei bezeichnet man x als den Schwerpunkt des Strings.

Jetzt ist es auch möglich, den Grenzfall der Norm (30) für die Stringlösung zu berechnen. Die Norm beträgt

$$\begin{aligned} \langle 0|C(\lambda_1)C(\lambda_2)B(\lambda_1)B(\lambda_2)|0\rangle &= \frac{\lambda_1-\lambda_2+i}{\lambda_1-\lambda_2} \frac{\lambda_2-\lambda_1+i}{\lambda_2-\lambda_1} \left[\left({\lambda_1}^2 + \frac{1}{4} \right) \left({\lambda_2}^2 + \frac{1}{4} \right) \right]^{N-1} \\ &\quad \times N \left(N - 2\, \frac{{\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2 + \frac{1}{2}}{1 + (\lambda_1-\lambda_2)^2} \right) \end{aligned} \tag{64}$$

Wähle $x_N(k) = \left[\tan\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right]^{-1}$ so, daß für gegebenes N gilt: $|x - x_N| =$ minimal. Für $N \to \infty$ konvergiert x_N gleichmäßig gegen x.

Gebe $\epsilon > 0$ fest vor, dann gilt für $N > N_0$ und $x > 0$ (für $x < 0$ entsprechend)

$$x_N \in [x-\epsilon, x+\epsilon], \quad \text{d. h.} \quad x_N < x + \epsilon$$

Daraus folgt, daß $\lim_{N\to\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x_N^2}\right)N\right) = 0$, da dieser Ausdruck von e^{-cN} (siehe (59)) majorisiert wird. Setzt man nun in der Norm (64) die Näherungslösungen für den String ein, und vernachlässigt Terme $\mathcal{O}(e^{-cN})$, so erhält man

$$\lambda_1 = x_N + iy \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = x_N - iy$$
$$\boxed{\langle 0|C(\lambda_1)C(\lambda_2)B(\lambda_1)B(\lambda_2)|0\rangle \approx 4x_N^{2N}(x_N^2+1)^{N-1}N} \tag{65}$$

Nun wenden wir uns der Berechnung des Matrixelementes (38) zu. Für $l = 2$ ergeben sich insgesamt 8 Partitionen, diese lauten:

$$\begin{aligned}
&\langle 0|C(\lambda_1^C)C(\lambda_2^C)\vec{\sigma}_j\vec{\sigma}_{j+1}B(\lambda_1^B)B(\lambda_2^B)|0\rangle \\
&2\mathcal{S}^1_{n_1}(\lambda_1^C,\lambda_1^B)\, f(\lambda_1^B,\lambda_2^B)\, f(\lambda_2^C,\lambda_1^C)\, (d_j(\lambda_1^C)a_j(\lambda_1^B))^{N-j+1}\, (d(\lambda_2^C)a_j(\lambda_2^B))^{N-j-1}\, (d_j(\lambda_2^B)a_j(\lambda_2^C))^{j-1} \\
&+2\mathcal{S}^1_{n_1}(\lambda_2^C,\lambda_1^B)\, f(\lambda_1^B,\lambda_2^B)\, f(\lambda_1^C,\lambda_2^C)\, (d_j(\lambda_2^C)a_j(\lambda_1^B))^{N-j+1}\, (d(\lambda_1^C)a_j(\lambda_2^B))^{N-j-1}\, (d_j(\lambda_2^B)a_j(\lambda_1^C))^{j-1} \\
&+2\mathcal{S}^1_{n_1}(\lambda_1^C,\lambda_2^B)\, f(\lambda_2^B,\lambda_1^B)\, f(\lambda_2^C,\lambda_1^C)\, (d_j(\lambda_1^C)a_j(\lambda_2^B))^{N-j+1}\, (d(\lambda_2^C)a_j(\lambda_1^B))^{N-j-1}\, (d_j(\lambda_1^B)a_j(\lambda_2^C))^{j-1} \\
&+2\mathcal{S}^1_{n_1}(\lambda_2^C,\lambda_2^B)\, f(\lambda_2^B,\lambda_1^B)\, f(\lambda_1^C,\lambda_2^C)\, (d_j(\lambda_2^C)a_j(\lambda_2^B))^{N-j+1}\, (d(\lambda_1^C)a_j(\lambda_1^B))^{N-j-1}\, (d_j(\lambda_1^B)a_j(\lambda_1^C))^{j-1} \\
&+2\mathcal{S}^4_{n_4}(\lambda_1^C,\lambda_1^B)\, f(\lambda_2^B,\lambda_1^B)\, f(\lambda_1^C,\lambda_2^C)\, (d_j(\lambda_1^B)a_j(\lambda_1^C))^{j+1}\, (d(\lambda_2^C)a_j(\lambda_2^B))^{N-j-1}\, (d_j(\lambda_2^B)a_j(\lambda_2^C))^{j-1} \\
&+2\mathcal{S}^4_{n_4}(\lambda_2^C,\lambda_1^B)\, f(\lambda_2^B,\lambda_1^B)\, f(\lambda_2^C,\lambda_1^C)\, (d_j(\lambda_1^B)a_j(\lambda_2^C))^{j+1}\, (d(\lambda_1^C)a_j(\lambda_2^B))^{N-j-1}\, (d_j(\lambda_2^B)a_j(\lambda_1^C))^{j-1} \\
&+2\mathcal{S}^4_{n_4}(\lambda_1^C,\lambda_2^B)\, f(\lambda_1^B,\lambda_2^B)\, f(\lambda_1^C,\lambda_2^C)\, (d_j(\lambda_2^B)a_j(\lambda_1^C))^{j+1}\, (d(\lambda_2^C)a_j(\lambda_1^B))^{N-j-1}\, (d_j(\lambda_1^B)a_j(\lambda_2^C))^{j-1} \\
&+2\mathcal{S}^4_{n_4}(\lambda_2^C,\lambda_2^B)\, f(\lambda_1^B,\lambda_2^B)\, f(\lambda_2^C,\lambda_1^C)\, (d_j(\lambda_2^B)a_j(\lambda_2^C))^{j+1}\, (d(\lambda_1^C)a_j(\lambda_1^B))^{N-j-1}\, (d_j(\lambda_1^B)a_j(\lambda_1^C))^{j-1}
\end{aligned} \tag{66}$$

Hierbei bezeichnet $\mathcal{S}^i_{n_i}(\lambda_j^C,\lambda_k^B)$ das Skalarprodukt für $l = 1$ im i-ten Teilraum (siehe (39)):

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^i_{n_i}(\lambda_j^C,\lambda_k^B) &= {}_i\langle 0|C(\lambda_j^C)B(\lambda_k^B)|0\rangle_i \\
&= g(\lambda_j^C,\lambda_k^B)\{a(\lambda_j^C)d(\lambda_k^B) - a(\lambda_k^B)d(\lambda_j^C)\}
\end{aligned} \tag{67}$$

Dabei ist zu beachten, daß für einige Kombinationen das Skalarprodukt (67) in die Norm übergeht, d.h. im Sinne der Regel von de l'Hopital zu berechnen ist [17].

Wir werden folgende drei Fälle betrachten:

1. Die Stringlösung führt zu einer zweifachen Entartung.
2. Beide λ's reell, ein λ ist dabei Null;dies ergibt eine doppelte Entartung.
3. Beide λ's reell und verschieden von Null; dies führt zu einer vierfachen Entartung.

Man hat somit 3 verschiedene Arten von Matrixelementen (66) zu unterscheiden:

$$\begin{array}{lccc} \text{Typ 1} & \lambda_1^C \neq \lambda_2^C & \neq & \lambda_1^B \neq \lambda_2^B \\ \text{Typ 2} & -\lambda_1^C = \lambda_1^B & ; & \lambda_1^C = \lambda_2^B \\ \text{Typ 3} & \lambda_1^C = \lambda_1^B & ; & \lambda_2^C = \lambda_2^B \end{array}$$

Mit diesen 3 Arten Matrixelementen kann man alle in der Störungstheorie auftretende Matrixelemente berechnen. Die Berechnung dieser Elemente erfolgt unter Benutzung des Bethe–Ansatzes und ist zwar langwierig, doch von den Umformungen her elementar. Deswegen werden die Ergebnisse nur angeführt:

<u>Typ 1</u>

$$\langle 0|C(\lambda_1^C)C(\lambda_2^C)\vec{\sigma}_j\vec{\sigma}_{j+1}B(\lambda_1^B)B(\lambda_2^B)|0\rangle =$$

$$\begin{aligned} & 2\,i\,(a(\lambda_1^B)a(\lambda_2^B))^{N-j-1}(a(\lambda_1^C)a(\lambda_2^C))^{j-1}(d(\lambda_1^B)d(\lambda_2^B))^{j-1}(d(\lambda_1^C)d(\lambda_2^C))^{j-1} \\ \times & \Bigg\{ \left(\frac{1}{\lambda_1^C-\lambda_1^B}\right)\left[f(\lambda_1^B,\lambda_2^B)f(\lambda_2^C,\lambda_1^C)a(\lambda_1^B)^2d(\lambda_1^C)^2 - f(\lambda_2^B,\lambda_1^B)f(\lambda_1^C,\lambda_2^C)a(\lambda_1^C)^2d(\lambda_1^B)^2\right] \\ + & \left(\frac{1}{\lambda_2^C-\lambda_2^B}\right)\left[f(\lambda_2^B,\lambda_1^B)f(\lambda_1^C,\lambda_2^C)a(\lambda_2^B)^2d(\lambda_2^C)^2 - f(\lambda_1^B,\lambda_2^B)f(\lambda_2^C,\lambda_1^C)a(\lambda_2^C)^2d(\lambda_2^B)^2\right] \\ + & \left(\frac{1}{\lambda_2^C-\lambda_1^B}\right)\left[f(\lambda_1^B,\lambda_2^B)f(\lambda_1^C,\lambda_2^C)a(\lambda_1^B)^2d(\lambda_2^C)^2 - f(\lambda_2^B,\lambda_1^B)f(\lambda_2^C,\lambda_1^C)a(\lambda_2^C)^2d(\lambda_1^B)^2\right] \\ + & \left(\frac{1}{\lambda_1^C-\lambda_2^B}\right)\left[f(\lambda_2^B,\lambda_1^B)f(\lambda_2^C,\lambda_1^C)a(\lambda_2^B)^2d(\lambda_1^C)^2 - f(\lambda_1^B,\lambda_2^B)f(\lambda_1^C,\lambda_2^C)a(\lambda_1^C)^2d(\lambda_2^B)^2\right] \Bigg\} \end{aligned} \tag{68}$$

<u>Typ 2</u> (mit $-\lambda_1^C = \lambda_1^B = \lambda_1$ und $\lambda_2^C = \lambda_2^B = \lambda_2$ geht $\mathcal{S}(\lambda_2^C, \lambda_2^B)$ in die Norm über)

$$\langle 0|C(-\lambda_1^C)C(\lambda_2^C)\vec{\sigma}_j\vec{\sigma}_{j+1}B(\lambda_1^B)B(\lambda_2^B)|0\rangle =$$

$$
\begin{aligned}
& 2(-1)^{N-2} a(\lambda_1)^{2(N-j-1)} d(\lambda_1)^{2(j-1)} (a(\lambda_2) d(\lambda_2))^{N-2} \\
\times & \left\{ \frac{-i}{2\lambda_1} f(\lambda_1,\lambda_2) f(-\lambda_1,\lambda_2) a(\lambda_1)^4 \right. \\
+ & \frac{i}{2\lambda_1} f(\lambda_2,\lambda_1) f(-\lambda_1,\lambda_2) d(\lambda_1)^4 \\
+ & \frac{i}{\lambda_2-\lambda_1} f(\lambda_1,\lambda_2) f(-\lambda_1,\lambda_2) a(\lambda_1)^2 d(\lambda_2)^2 \\
- & \frac{i}{\lambda_1-\lambda_2} f(\lambda_2,\lambda_1) f(\lambda_2,-\lambda_1) a(\lambda_2)^2 d(\lambda_1)^2 \\
+ & \frac{i}{-\lambda_2-\lambda_1} f(\lambda_2,\lambda_1) f(\lambda_1,-\lambda_2) a(\lambda_1)^2 a(\lambda-2)^2 \\
- & \frac{i}{-\lambda_1-\lambda_2} f(\lambda_2,\lambda_1) f(\lambda_2,-\lambda_1) d(\lambda_1)^2 d(\lambda_2)^2 \\
- & \left. (N-2)\left(\lambda_2^2+\frac{1}{4}\right) f(\lambda_2,\lambda_1) f(\lambda_2,-\lambda_1) \left[\frac{a(\lambda_2)}{d(\lambda_2)}\right]^N \right\}
\end{aligned}
\tag{69}
$$

Typ 3 wird wieder mit Formel (37) berechnet.
Ebenfalls benötigt wird das Matrixelement im Fall der Stringlösung; dies läßt sich als Spezialfall von (68) berechnen, wenn man beachtet, daß nun $(\lambda_1^C - \lambda_2^C - i)$ und $(\lambda_1^B - \lambda_2^B - i)$ von der Ordnung $\mathcal{O}(e^{-c_0 N})$ sind:

$$
\begin{aligned}
& \langle 0|C(x+\frac{i}{2})C(x-\frac{i}{2})\vec{\sigma}_j\vec{\sigma}_{j+1}B(x+\frac{i}{2})B(x-\frac{i}{2})|0\rangle = \\
- & \; 16\, x^{2N}\,(x+i)^{2(N-j-1)}\,(x-i)^{2(j-1)}\,\frac{1}{4x^2+1}
\end{aligned}
\tag{70}
$$

Die Berechnung der Energiekorrektur für die Stringlösung verläuft analog zu (50), wenn das Matrixelement (70) und der Ausdruck für die Norm (65) verwendet werden. Als Ergebnis erhält man

$$
\boxed{E^{(1)}_{String}(x) = E^{(0)}_{String}(x)\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} z_j\right) \pm E^0_{CM}\sqrt{\sum_{j,k=1}^{N}\frac{z_j z_k}{N^2}\;\exp\left(-i2p_0(x)(j-k)\right)}\right]}
\tag{71}
$$

wobei

$$
E^0_{CM} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+\frac{1}{4}}
$$

die Energie des Schwerpunktes des Strings ist.
E^0_{String} und p_0 sind die in (63, 62) definierte Energie und Impuls des Strings.
Wie schon im Falle der niedrigsten Anregung verschwinden auch hier die Summe über j der Nichtdiagonalelemente (68), falls alle z_j gleich gewählt sind; die Energiekorrektur reduziert sich auf die Energie des Strings im homogenen Fall.

$$\sum_{j=1}^{N} \langle 0|C(-\lambda)C(-\mu)\vec{\sigma}_j\vec{\sigma}_{j+1}B(\lambda)B(\mu)|0\rangle =$$

$$\begin{aligned}
&2\,i\,(a(\lambda)a(\mu))^{N-j-1}(a(-\lambda)a(-\mu))^{j-1}(d(\lambda)d(\mu))^{j-1}(d(-\lambda)d(-\mu))^{j-1}\,\{...\} \\
&= \sum_{j=1}^{N} \frac{a(\lambda)^{2N}a(\mu)^{2N}}{a(\lambda)^2a(\mu)^2d(\lambda)^2d(\mu)^2}\left(\frac{d(\lambda)d(\mu)}{a(\lambda)a(\mu)}\right)^{2j}\ \{...\} \\
&= \frac{a(\lambda)^{2N}a(\mu)^{2N}}{a(\lambda)^4a(\mu)^4}\left[\frac{\left(\frac{d(\lambda)d(\mu)}{a(\lambda)a(\mu)}\right)^{2N}-1}{\frac{d(\lambda)d(\mu)}{a(\lambda)a(\mu)}-1}\right]\{\ldots\} \\
&= const.\left[\frac{\left(\frac{\lambda-\mu-i}{\lambda-\mu+i}\right)^2\left(\frac{\mu-\lambda-i}{\mu-\lambda+i}\right)^2-1}{\frac{d(\lambda)d(\mu)}{a(\lambda)a(\mu)}-1}\right] = 0
\end{aligned}$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer ist unabhängig von j und ist deswegen unerheblich für dieses Argument. Im vorletzten Schritt wurden die Bethe–Ansatz Gleichungen (53) verwendet.

Nun wenden wir uns den reellen Lösungen der BAG zu.
Dazu wird zuerst der Fall betrachtet, daß ein λ null ist. Das relevante Matrixelement ist

$$\frac{\langle 0|C(-\lambda)C(0)\vec{\sigma}_j\vec{\sigma}_{j+1}B(\lambda)B(0)|0\rangle}{\sqrt{\langle 0|C(la)C(0)B(-\lambda)B(0)|0\rangle\langle 0|C(\lambda)C(0)B(\lambda)B(0)|0\rangle}}$$
$$= \frac{2(-1)^{N-1}}{N\left(\lambda^2+\frac{1}{4}\right)}\left[\frac{d(\lambda)}{a(\lambda)}\right]^j$$

Wegen der zweifachen Entartung ergibt sich die Energiekorrektur ebenfalls wie in (50):

$$E^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2+\frac{1}{4}}+4\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} z_j\right) \pm \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda^2+\frac{1}{4}}\sqrt{\sum_{j,k=1}^{N}\frac{z_jz_k}{N^2}\exp\left(-i2p_0(\lambda)(j-k)\right)} \qquad (72)$$

Die Energiekorrektur für den Fall zweier freier Teilchen ergibt sich wegen der 4-fachen Entartung als Lösung des charakteristischen Polynoms folgender Matrix:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{V}(\mu_1,\mu_2;\mu_1,\mu_2) & \mathcal{V}(\mu_1,\mu_2;-\mu_1,\mu_2) & \mathcal{V}(\mu_1,\mu_2;\mu_1,-\mu_2) & \mathcal{V}(\mu_1,\mu_2;-\mu_1,-\mu_2) \\ \mathcal{V}(-\mu_1,\mu_2;\mu_1,\mu_2) & \mathcal{V}(-\mu_1,\mu_2;-\mu_1,\mu_2) & \mathcal{V}(-\mu_1,\mu_2;\mu_1,-\mu_2) & \mathcal{V}(-\mu_1,\mu_2;-\mu_1,-\mu_2) \\ \mathcal{V}(\mu_1,-\mu_2;\mu_1,\mu_2) & \mathcal{V}(\mu_1,-\mu_2;-\mu_1,\mu_2) & \mathcal{V}(\mu_1,-\mu_2;\mu_1,-\mu_2) & \mathcal{V}(\mu_1,-\mu_2;-\mu_1,-\mu_2) \\ \mathcal{V}(-\mu_1,-\mu_2;\mu_1,\mu_2) & \mathcal{V}(-\mu_1,-\mu_2;-\mu_1,\mu_2) & \mathcal{V}(-\mu_1,-\mu_2;\mu_1,-\mu_2) & \mathcal{V}(-\mu_1,-\mu_2;-\mu_1,-\mu_2) \end{pmatrix}$$

wobei $\mathcal{V}(\mu_1,\mu_2;\lambda_1,\lambda_2) = \frac{\sum_{j=1}^{N} z_j \langle 0|C(\mu_1)C(\mu_2)\vec{\sigma}_j\vec{\sigma}_{j+1}B(\lambda_1)B(\lambda_2)|0\rangle}{\sqrt{\langle 0|C(\mu_1)C(\mu_2)B(\mu_1)B(\mu_2)|0\rangle\langle 0|C(\lambda_1)C(\lambda_2)B(\lambda_1)B(\lambda_2)|0\rangle}}$.

Die Diagonalmatrixelemente sind alle gleich folgendem Ausdruck

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{z_j}{N}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_1^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{\mu_2^2+\frac{1}{4}}\right)\right] \tag{73}$$

und die Schiefdiagonalelemente sind alle Null (siehe Appendix B).
Bei den restlichen 8 Matrixelementen sind für $\mathcal{V}_{ij}$ und $\mathcal{V}_{ji}$ jeweis Vorfaktoren gleich, so daß die 4 Lösungen der Eigenwertgleichung lautet:

$$\boxed{\begin{aligned} &E^{(1)}(\mu_1,\mu_2) = \\ &E^{(0)}(\mu_1,\mu_2)\Bigg\{\sum_{j=1}^{N}\frac{z_j}{N} \pm 2\Bigg[\sum_{j,k=1}^{N}\frac{z_j\,z_k}{N^2}\Big(\exp\big[-2ip_0(\mu_1)(j-k)\big]+\exp\big[-2ip_0(\mu_2)(j-k)\big]\Big) \\ &\pm 2E^{(0)}(\mu_1)E^{(0)}(\mu_2)\Big[\sum_{j,k=1}^{N}\frac{z_j\,z_k}{N^2}\exp\big[-2ip_0(\mu_1)(j-k)\big]\;\sum_{j,k=1}^{N}\frac{z_j\,z_k}{N^2}\exp\big[-2ip_0(\mu_2)(j-k)\big]\Big]^{\frac{1}{2}}\Bigg]^{\frac{1}{2}}\Bigg\} \end{aligned}} \tag{74}$$

Wie auch schon im Fall $l = 1$ wird der Energieeigenwert des homogenen Systems in einer nichttrivialen Weise geändert, da die Fouriertransformierten der Kopplungsverteilungen auftauchen.

4 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde mit Hilfe der in [8] entwickelten Störungstheorie für den algebraischen Bethe–Ansatz die zwei untersten Anregungen des XXX–Spin-$\frac{1}{2}$–Heisenberg Modells in der 1. Ordnung berechnet.
Von besonderem Vorteil an dieser Methode ist dabei, daß sich eine Vielzahl von Ergebnissen des algebraischen Bethe–Ansatzes verwenden lassen. Dabei zeigte sich, daß die Energiekorrektur in nichttrivialer Weise modifiziert wird, da die Fouriertransformierte der Kopplungsverteilung in das Resultat eingeht.
Die hier vorgestellte Arbeit kann in mehrere Richtungen fortgesetzt werden:

- Berechnung höherer Anregungen; dies ist zwar aufwendig, da die Anzahl der Partitionen in (38) schnell ansteigt (# Partitionen=$l^2 \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l-1}{l-1-k}$, $l > 1$), doch die Berechnung der Energiekorrektur erfolgt nach den gleichen Schritten wie oben angeführt

- Berechnung höherer Ordnungen der Störungstheorie

- Verallgemeinerung der Methode auf XXX–Modelle mit beliebigem Spin S (siehe z.B. [20])

- Verallgemeinerung auf das XXZ–Modell, da dieses die gleiche R–Matrix (10) besitzt, erfolgen die Rechnungen analog wie beim XXX–Modell.

Danksagung

Ich möchte mich bei Professor Flume für die Aufnahme in die Arbeitsgruppe und die Themenstellung sowie die Betreuung bedanken. Dank gilt auch K. Ruhlig für die sehr fruchtbare Zusammenarbeit während der gesamten Diplomarbeit sowie A. Wißkirchen und R. Kersting für die Geduld bei Fragen zum Computereinsatz. Außerdem möchte ich meinen Eltern und meiner Freundin für die Unterstützung während des gesamten Studiums danken.

A Invarianz der Lösungen der Bethe–Ansatz Gleichungen unter komplexer Konjugation

Hier wird in Anlehnung an [19] gezeigt, daß für den Satz an Lösungen der Bethe–Ansatz Gleichungen gilt: $\{\lambda_j\} = \{\lambda_j^*\}$.
Diese wichtige Eigenschaft, erlaubt es, die komplexen Lösungen als paarweise komplex konjuguert zueinander zu bestimmen. Es ist offensichtlich, daß für die BAG

$$\left(\frac{\lambda_j - \frac{i}{2}}{\lambda_j + \frac{i}{2}}\right)^N = \prod_{k=1}^{l} \frac{\lambda_j - \lambda_k - i}{\lambda_j - \lambda_k + i}, \qquad j = 1, \ldots, l \;\; l \leq \frac{N}{2}$$

folgendes gilt:
ist $\{\lambda_j\}$ eine Lösung, so ist die komplex konjugierte Menge $\{\lambda_j\}^*$ ebenfalls eine Lösung.
Ziel ist es jedoch zu zeigen, daß die Lösungen invariant unter komplexer Konjugation sind. Dazu wird nicht nur das System der BAG benötigt, sondern auch verschiedene Eigenschaften der Transfermatrix und der Eigenwerte.
Es gilt (siehe (28))

$$T^*(\lambda^*) = \sigma^y T(\lambda) \sigma^y$$

In Matrixschreibweise bedeutet dies

$$T^*(\lambda^*) = \begin{pmatrix} D(\lambda) & -C(\lambda) \\ B(\lambda) & A(\lambda) \end{pmatrix}$$

wobei $T^*(\lambda)$ wie folgt definiert ist:

$$T^*(\lambda) = \begin{pmatrix} A^+(\lambda) & B^+(\lambda) \\ C^+(\lambda) & D^+(\lambda) \end{pmatrix}$$

Da die Transfermatrix als die Spur dieser Monodromiematrix definiert ist,
$\mathcal{F}(\lambda) = tr_0\, T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$,
folgt $\mathcal{F}^+(\lambda) = \mathcal{F}(\lambda^*)$.
Somit folgt für den Eigenwert der Transfermatrix bezüglich des Bethevektors (siehe (21))

$$\Lambda^*(\lambda, \{\lambda_j\}) = \Lambda(\lambda^*, \{\lambda_j\})$$

Diese Gleichung gilt für jedes λ, falls $\{\lambda_j\}$ die BAG erfüllt.

Ausgeschrieben und λ^* in λ umbenannt bedeutet dies:

$$\begin{aligned} & \left(\lambda - \frac{i}{2}\right)^N \left[\prod_{j=1}^{l}(\lambda - \lambda_j^* + i)(\lambda - \lambda_j) - \prod_{j=1}^{l}(\lambda - \lambda_j + i)(\lambda - \lambda_j^*)\right] \\ 6\ 6\ 6\ 6\ 6 \quad = \quad & \left(\lambda + \frac{i}{2}\right)^N \left[\prod_{j=1}^{l}(\lambda - \lambda_j + i)(\lambda - \lambda_j^*) - \prod_{j=1}^{l}(\lambda - \lambda_j^* + i)(\lambda - \lambda_j)\right] \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung wird der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung in der eckigen Klammer als $f(\lambda)$; und $\left(\lambda + \frac{i}{2}\right)$ als $g(\lambda)$ bezeichnet.
Dann gilt für $\lambda \neq \pm\frac{i}{2}$

$$g(\lambda)^{-N} f(\lambda) = g(\lambda - i)^{-N} f(\lambda - i)$$

Diese Gleichung kann für alle λ nur dann erfüllt sein, wenn
(i) $\quad f(\lambda) = 0$ oder
(ii) $\quad f(\lambda) = g(\lambda)^N$, da $g(\lambda)$ ungleich Null ist.
Die zweite Möglichkeit ist auszuschliesen, da wegen $l \leq \frac{N}{2}$ $f(\lambda)$ ein Polynom in λ vom Grade kleiner N ist. Für $\lambda = \pm\frac{i}{2}$ ergibt sich das gleiche Ergebnis. Damit ist also $f(\lambda) = 0$ für alle λ.

$$\prod_{j=1}^{l}(\lambda - \lambda_j^* + i)(\lambda - \lambda_j) = \prod_{j=1}^{l}(\lambda - \lambda_j + i)(\lambda - \lambda_j^*)$$

Wenn nun einige der Lösungen reell sind oder paarweise komplex konjugiert zueinander, heben sich die entsprechenden Faktoren weg. Nehmen wir jedoch an, daß die gesamte Lösungsmenge dadurch nicht vollständig erschöpft wird, d.h. es existiert $\{\lambda_k\} \subset \{\lambda_j\}$ mit $\{\lambda_k\} \cap \{\lambda_k^*\} = \emptyset$. Diese Elemente werden mit 1 bis $l' \leq l$ numeriert. Die Gleichung nimmt also folgende Form an

$$\prod_{k=1}^{l'}(\lambda - \lambda_k^* + i)(\lambda - \lambda_k) = \prod_{k=1}^{l'}(\lambda - \lambda_k + i)(\lambda - \lambda_k^*)$$

Jetzt wird das Element $\lambda_p \in \{\lambda_k\}$ mit dem größten Imaginärteil ausgewählt. Dem Faktor $(\lambda - \lambda_p)$ auf der linken Seite der Gleichung muß der gleiche Faktor auf der rechten Seite entsprechen.
Doch dieser Faktor erscheint weder unter den $(\lambda - \lambda_k^*)$ aufgrund der Definition von $\{\lambda_k\}$, noch unter den $(\lambda - \lambda_k + i)$, da ja $Im\lambda_p \geq Im\lambda_k$.
Also ist $l' = 0$, womit $\{\lambda_j^*\} = \{\lambda_j\}$ gezeigt ist.
Diese Eigenschaft erlaubt es, nach komplexen Lösungen in Form von Strings zu suchen.
Außerdem folgt, daß die Integrale der Bewegung $\mathcal{C}_k$ bezüglich des Bethevektors reelle Eigenwerte besitzen.

B Skalierungsverhalten der Matrixelemente

In diesem Anhang wird das Skalierungsverhalten der einzelnen Summanden der Matrixelemente (68,69) hergeleitet.
Es gilt für Matrixelemente zwischen verschiedenen Multipletts:

$$\langle 0|C(\lambda_1^C)C(\lambda_2^C)\vec{\sigma}_j\vec{\sigma}_{j+1}B(\lambda_1^B)B(\lambda_2^B)|0\rangle =$$
$$2i\Big[a(\lambda_1^B)a(\lambda_2^B)d(\lambda_1^C)d(\lambda_2^C)\Big]^{N-1}\left(\underbrace{\frac{a(\lambda_1^C)a(\lambda_2^C)d(\lambda_1^B)d(\lambda_2^B)}{d(\lambda_1^C)d(\lambda_2^C)a(\lambda_1^B)a(\lambda_2^B)}}_{=:\exp(i\alpha)}\right)^j \; const.$$

Der mit *const.* abgekürzte Term ist unabhängig von N, j und endlich.
Der Ausdruck $\exp(i\alpha)$ hat den Betrag 1, und stellt dadurch nur einen Phasenfaktor dar. Entscheidend ist das Verhalten von $\Big[a(\lambda_1^B)a(\lambda_2^B)d(\lambda_1^C)d(\lambda_2^C)\Big]^{N-1}$. Für die Matrixelemente erhält man:

$$\langle 0|C(\lambda_1^C)C(\lambda_2^C)H_1B(\lambda_1^B)B(\lambda_2^B)|0\rangle \sim \sum_{j=1}^{N} z_j \frac{\Big[a(\lambda_1^B)a(\lambda_2^B)d(\lambda_1^C)d(\lambda_2^C)\Big]^{N-1}}{\sqrt{Norm(\lambda_1^B,\lambda_2^B)Norm(\lambda_1^C,\lambda_2^C)}}\exp(i\alpha j)$$
$$= \sum_{j=1}^{N} z_j \frac{1}{N^2}\frac{\Big[a(\lambda_1^B)a(\lambda_2^B)d(\lambda_1^C)d(\lambda_2^C)\Big]^{N-1}}{\Big[a(\lambda_1^B)d(\lambda_1^B)a(\lambda_2^B)d(\lambda_2^B)a(\lambda_1^C)a(\lambda_1^C)a(\lambda_2^C)d(\lambda_2^C)\Big]^{\frac{N-1}{2}}}\exp(i\alpha j)$$
$$= \sum_{j=1}^{N} z_j \frac{1}{N^2}\frac{\Big[a(\lambda_1^B)a(\lambda_2^B)d(\lambda_1^C)d(\lambda_2^C)\Big]^{\frac{N-1}{2}}}{\Big[d(\lambda_1^B)d(\lambda_2^B)a(\lambda_1^C)a(\lambda_2^C)\Big]^{\frac{N-1}{2}}}\exp(i\alpha j)$$
$$\Rightarrow \left|\sum_{j=1}^{N} z_j \frac{1}{N^2}\exp\left(i\alpha\frac{N-1}{2}\right)\exp(i\alpha j)\right| \leq const.\frac{1}{N}max|z_j| \tag{75}$$

Hier wurde der asymptotische Ausdruck für sehr großes N für die Norm (64) benutzt:

$$\begin{aligned}\langle 0|C(\lambda_1)C(\lambda_2)B(\lambda_1)B(\lambda_2)|0\rangle &= \frac{\lambda_1-\lambda_2+i}{\lambda_1-\lambda_2}\frac{\lambda_2-\lambda_1+i}{\lambda_2-\lambda_1}\left[\left({\lambda_1}^2+\frac{1}{4}\right)\left({\lambda_2}^2+\frac{1}{4}\right)\right]^{N-1}\\ &\quad\times N\left(N-2\,\frac{{\lambda_1}^2+{\lambda_2}^2+\frac{1}{2}}{1+(\lambda_1-\lambda_2)^2}\right)\\ &\approx \frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2+1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\left[\left({\lambda_1}^2+\frac{1}{4}\right)\left({\lambda_2}^2+\frac{1}{4}\right)\right]^{N-1} N^2\end{aligned}$$

Damit werden diese Matrixelemente null, wenn $N \to \infty$.

Für die Matrixelemente, die zwischen der Stringlösung und 2 freien Teilchen mischen, gilt ($\lambda_{1,2} = x \pm \frac{i}{2}$ Stringlösungen und μ_1, μ_2 reell):

$$\langle 0|C(\lambda_1)C(\lambda_2)\vec{\sigma}_j\vec{\sigma}_{j+1}B(\mu_1)B(\mu_2)|0\rangle =$$

$$2i\left[a(\lambda_1)a(\lambda_2)d(\mu_1)d(\mu_2)\right]^{-1}\left(\underbrace{\frac{a(\lambda_1)a(\lambda_2)d(\mu_1)d(\mu_2)}{d(\lambda_1)d(\lambda_2)a(\mu_1)a(\mu_2)}}_{=:\exp(i\alpha)}\right)^j \left[a(\mu_1)a(\mu_2)d(\lambda_1)d(\lambda_2)\right]^{N-1} const.$$

Auch hier ist der mit *const.* abgekürzte Term endlich und von N, j unabhängig. Da der Term $\exp(i\alpha)$ vom Betrage 1 ist und nur eine komplexe Phase liefert, ist das Verhalten von $\left[a(\mu_1)a(\mu_2)d(\lambda_1)d(\lambda_2)\right]^{N-1}$ entscheidend.

$$\begin{aligned}
\frac{\langle 0|C(\lambda_1)C(\lambda_2)H_1B(\mu_1)B(\mu_2)|0\rangle}{\sqrt{Norm(\lambda_1,\lambda_2)\,Norm(\mu_1,\mu_2)}} &\sim \sum_{j=1}^{N} z_j \frac{\left[a(\mu_1)a(\mu_2)d(\lambda_1)d(\lambda_2)\right]^{N-1}}{\sqrt{Norm(\lambda_1,\lambda_2)\,Norm(\mu_1,\mu_2)}}\exp(i\alpha j)\\
&= \sum_{j=1}^{N} z_j \frac{\left[a(\mu_1)a(\mu_2)d(\lambda_1)d(\lambda_2)\right]^{N-1}}{\sqrt{N}\,x^N(x^2+1)^{\frac{N-1}{2}}\,N\left[\left(\mu_1^2+\frac{1}{4}\right)\left(\mu_2^2+\frac{1}{4}\right)\right]^{\frac{N-1}{2}}}\exp(i\alpha j)\\
&= \sum_{j=1}^{N} z_j \frac{\left[(i\mu_1+\frac{1}{2})(i\mu_2+\frac{1}{2})(ix-1)(ix)\right]^{N-1}}{N^{\frac{3}{2}}\,x^N\,(x^2+1)^{\frac{N-1}{2}}\left[\left(\mu_1^2+\frac{1}{4}\right)\left(\mu_2^2+\frac{1}{4}\right)\right]^{\frac{N-1}{2}}}\exp(i\alpha j)
\end{aligned}$$

Betrachtet man von den Summanden das Betragsquadrat, so sieht man, daß diese wie $N^{-\frac{3}{2}}$ skalieren:

$$\begin{aligned}
\text{Betragsquadrat} \;\Rightarrow\; &\sim \frac{\left[a(\mu_1)a(\mu_2)d(\lambda_1)d(\lambda_2)(x^2+1)x^2\right]^{N-1}}{N^3\left[a(\mu_1)a(\mu_2)d(\lambda_1)d(\lambda_2)\right]^{N-1}x^{2N}(x^2+1)^{N-1}}\\
&= \frac{1}{x^2N^3}
\end{aligned} \tag{76}$$

Für x endlich verschwindet auch dieser Term im Limes $N \to \infty$.

References

[1] H.Bethe; Zur Theorie der Metalle I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette, *Zeitschrift für Physik* **71**, 205–26, (1931).

[2] J. Fuchs; *Affine Lie Algebras and Quantum Groups*, Cambridge University Press, (1992).

[3] L.A. Takhtajan, L.D. Faddeev; The Quantum Method of the Inverse Problem and the XYZ Model, *Russian Math. Surveys* **34**, 11-68, (1979).

[4] B.S. Shastry; Decorated Star-Triangle Relations and the Exact Integrability of One-Dimensinal Hubbard Model, *J. Stat. Phys*, **50**, 57-79, (1988).

[5] V.E. Korepin, N.M. Bogoliubov, A.G. Izergin; *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge University Press, (1993).

[6] L.D. Faddeev, G.P. Korchemsky; High Energy QCD as a Completely Integrable Model, Preprint hepth/9404173.

[7] A. Das; *Field Theory - A Path Integral Approach*, Singapur: World Scientific, (1993).

[8] Klaus Ruhlig; *Allgemeine Störungstheorie des Algebraischen Bethe–Ansatzes im Fall des inhomogenen XXX–Modells*, Diplomarbeit, Universität Bonn, (1995)

[9] L.A. Takhtajan; *Introduction to Bethe Ansatz*, Lecture Notes in Physics **242**, Berlin: Springer, (1985).

[10] L. D. Faddeev; Lectures on the Quantum Inverse Scattering Method in *Integrable Systems* (ed. S. Xing-Chang), S.24-70, Singapur: World Scientific (1990).

[11] L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan; *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*, Berlin: Springer-Verlag, (1987).

[12] A.G. Izergin, V.E. Korepin; Pauli Principle for One-Dimensional Bosons and Algebraic Bethe Ansatz, *Lett. Math. Phys.* **6**, 283-9, (1982).

[13] J. de Vega; Yang-Baxter Algebras, Integrable Theories and Quantum Groups, *Int. Journ. of Mod. Phys. A* **4**, 2371-2463, (1989).

[14] C.N. Yang, C.N. Yang; Thermodynamics of a One-Dimensional Systems of Bosons with Repulsive Delta-Functions Interaction, *J. Math. Phys.* **10**, 1115-22, (1969).

[15] H. Hochstadt; *Integral Equations*, John Wiley & Sons, (1973)

[16] M. Gaudin; *La Fonction d'Onde de Bethe*, Paris: Masson, (1983).

[17] V.E. Korepin; Calculation of Norms of Bethe Wave Functions, *Comm. Math. Phys.* **86**, 391–418, (1982).

[18] Landau–Lifshitz; *Lehrbuch der Theoretische Physik Bd.3*, Berlin: Akademie–Verlag, (1979).

[19] A.A. Vladimirov; Proof of the Invariance of the Bethe–Ansatz Solutions under Complex Conjugation, *Theor. Math. Phys.* **66**, 102-5, (1986).

[20] G.M. Babujian; Exact Solution of the Isotropic Heisenberg Chain with Arbitrary Spin: Thermodynamics of the Model, *Nucl. Phys.* **B215**, 317-336, (1983).