Temperley–Lieb Wörter als Grundzustände von quantengruppensymmetrischen Modellen

von

Peter Arndt

Diplomarbeit in Physik

angefertigt im

Physikalischen Institut

vorgelegt der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität

Bonn

im Februar 1995

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie die Zitate kenntlich gemacht habe.

Referent:	Prof. Dr. V. Rittenberg
Korreferent:	Prof. Dr. G. von Gehlen

Inhalt

1 Einleitung **1**

2 Die Darstellung der Temperley–Lieb Algebra auf Liniendiagrammen **3**

3 Definition und Eigenschaften eines verallgemeinerten Majumdar–Ghosh Modells **5**
3.1 Definition des Hamiltonoperators 6
3.2 Der Grundzustand des Modells 7
3.3 Korrelationsfunktionen 10

4 Darstellungen der Temperley–Lieb Algebra auf Spinketten **17**
4.1 Die Spin-$\frac{1}{2}$ Darstellung 17
4.2 Die Korrespondenz zwischen $\mathcal{S}_0$-Liniendiagrammen und valence-bond Zuständen 19
4.3 Die Erweiterung der Korrespondenz auf die Darstellungsräume $\mathcal{S}_k$ 21
4.4 Andere Darstellungen 23

5 Zusammenfassung **23**

A Die $U_qSU(2)$ Algebra **25**

B $U_qSU(2)$ Clebsch–Gordan Koeffizienten **29**

Literatur **30**

1. Einleitung

Spinmodelle mit exakten Lösungen spielen in der Physik eine wichtige Rolle. Einerseits geben sie Einblick in nicht-pertubative Effekte in Vielteilchensystemen, andererseits kann an ihnen die prinzipielle Anwendbarkeit von Näherungsverfahren zur theoretischen Beschreibung von Festkörpern getestet werden. In dieser Arbeit wird eine neue Klasse solcher Modelle betrachtet. Es wird ein eindimensionaler Hamiltonoperator $H = H(a, b, q)$ mit Wechselwirkungen zwischen nächsten und übernächsten Nachbarn definiert. Die Funktionen $a = a(q)$ und $b = b(q)$ bestimmen die Wechselwirkung zu den übernächsten Nachbarn und können so gewählt werden, daß der Grundzustand explizit angegeben werden kann. Das Modell wird zunächst in der Sprache von Temperley–Lieb Algebren [1] formuliert. In speziellen Darstellungen dieser Algebra erhält man verschiedene quantegruppensymmetrische Spinketten.

Die Temperley–Lieb Algebra $T_N(q)$ ist ein Quotient der Hecke Algebra [2]; sie ist eine assoziative Algebra mit Eins, und erzeugt von Generatoren e_i, $i = 1, \ldots, N-1$, die folgende Relationen erfüllen [1]

$$e_i\, e_i = x\, e_i = (q + q^{-1})\, e_i \tag{1.1a}$$

$$e_i\, e_{i\pm1}\, e_i = e_i \tag{1.1b}$$

$$e_i\, e_j = e_j\, e_i \qquad (j \neq i \pm 1)\,. \tag{1.1c}$$

Der Parameter q kann im allgemeinen komplex gewählt werden. In dieser Arbeit wird aber nur der Fall reeller q behandelt werden. Diese Algebra findet einerseits Beachtung, weil Transfermatrizen von vielen Modellen in der statistischen Mechanik als Darstellungen der Temperley–Lieb Algebra geschrieben werden können. Dies führt zu vielen Äquivalenzklassen solcher Modelle [3, 4, 5]. Andererseits ist die Temperley–Lieb Algebra die Kommutante vieler Quantengruppen dargestellt auf Spinketten [6, 7]. Auf einer Spin-$\frac{1}{2}$ Kette dargestellt, vertauschen die Elemente dieser Algebra mit der Quantengruppe $U_qSU(2)$ [8]. Umgekehrt sind auch $U_qSU(2)$ invariante Operatoren auf einer Spin-$\frac{1}{2}$ Kette immer Elemente aus $T_N(q)$ [9, 10]. Andere Darstellungen der Temperley–Lieb Algebra können dazu benutzt werden, Modelle zu definieren, die unter anderen Quantengruppen invariant sind [7, 8, 11, 12, 13]. Deshalb spielt die Temperley–Lieb Algebra eine wichtige Rolle in der Theorie von quantengruppen-symmetrischen Spinketten.

Eine Quantengruppe ist in diesem Zusammenhang eine quasitrianguläre Hopfalgebra [14, 15]; diese Algebren finden zahlreiche Anwendungen auf den Gebieten der integrablen Vertexmodelle [3, 16] und der konformen Feldtheorie [17, 18]. Speziell die Quantengruppe $U_qSU(2)$ ist eine Quanten- oder q-Deformation der $SL(2)$, wobei q wieder ein im allgemeinen komplexer Parameter ist. Den undeformierten Fall findet man für $q = 1$ wieder. Die $U_qSU(2)$ tritt als Symmetriealgebra des anisotropen Heisenbergmodells mit imaginären Randfeldern auf [8]. Auch das zu besprechende Modell, dargestellt auf einer Spin-$\frac{1}{2}$ Kette, ist $U_qSU(2)$ invariant.

Als Grundzustände des auf der Spin-$\frac{1}{2}$ Kette dargestellten Modells werden dimerisierte oder "valence-bond" Zustände gefunden [19]. Diese Zustände faktorisieren in ein Produkt von $U_qSU(2)$-Singulettkonfigurationen auf je zwei benachbarten

Gitterplätzen.

Valence-bond Zustände sind in zweierlei Hinsicht interessant. Zum einen sind sie nicht trivial, und trotzdem kann ihre Wellenfunktion explizit angegeben werden. Sie haben eine einfache Struktur, und ihre Eigenschaften lassen sich leicht analysieren. Andererseits ist bei Modellen mit valence-bond Grundzustand die Energie im Grundzustand lokal minimal. Dies meint, daß, von einer bestimmten Länge an, die minimale Energie pro Gitterplatz in einem endlichen Interval gleich der minimalen Energie pro Gitterplatz für das unendliche System ist. Für die Zustände bedeutet das, daß der Grundzustand für ein endliches System mit der Einschränkung des Grundzustandes des unendlichen Systems auf ein endliches Volumen übereinstimmt. Betrachtet man andere Modelle, so ist dies im allgemeinen nicht der Fall. Man spricht dann von dem Zustand-Erweiterungs-Problem [20].

Das erste Modell mit valence-bond Grundzustand wurde von Majumdar und Ghosh vorgeschlagen [21, 22]. Es handelt sich dabei um ein isotropes Spin-$\frac{1}{2}$ Modell mit Wechselwirkung zwischen nächsten und übernächsten Nachbarn. Der Hamiltonoperator kann in diesem Fall als eine Summe von Projektionsoperatoren geschrieben werden. Der exakte valence-bond Grundzustand dieses Modells wurde in [23] gefunden.

Für ein Modell mit valence-bond Grundzustand konnte auch zum erstenmal die Haldane-Vermutung bewiesen werden [19, 24]. Haldane behauptet [25, 26], daß das antiferromagnetische isotrope Spin-s Heisenbergmodell abhängig vom Spin verschiedenes Verhalten zeigt. Bei halbzahligen s ist das Modell masselos, d.h. im unendlichen System gibt es elementare Anregungen mit beliebig kleinen Energiebeträgen über dem Grundzustand [27]. Die Korrelationen fallen gemäß eines Potenzgesetzes ab. Bei ganzzahligem Spin hingegen ist das Modell massiv, auch für das unendliche System liegen die elementaren Anregungen um einen endlichen Energiebetrag über dem Grundzustand. Weiter werden in diesem Fall exponentiell abfallende Korrelationsfunktionen erwartet.

Die Existenz einer endlichen Lücke im Energiespektrum direkt über dem Grundzustand ist wesentlich für das physikalische Verhalten eines System, nicht nur in einer Dimension. Denn dann ist das System auch bei endlichen, aber kleinen Temperaturen im wesentlichen im Grundzustand, und die Korrelationen im Grundzustand geben ein wichtiges Indiz für die Natur des Modells. In [19] wird der Beweis einer solchen Lücke für ein isotropes Spin-1 Heisenbergmodell, das Majumdar–Ghosh Modell und andere Modelle mit valence-bond Grundzustand geführt. Seitdem wurden eine Reihe anderer Modelle mit valence-bond Zuständen diskutiert [28, 29, 30, 31, 32], unter ihnen auch zweidimensionale [33, 34, 35, 36]. Korrelationsfunktionen solcher Modelle wurden in [37, 38] behandelt. Erst kürzlich wurde gezeigt, daß Modelle mit generalisierten valence-bond Zuständen immer massiv sind [39].

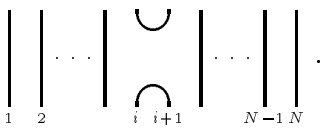
Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt. Im nächsten Kapitel wird die reguläre Darstellung der Temperley–Lieb Algebra auf Liniendiagrammen eingeführt. Mit Hilfe dieser graphischen Darstellung lassen sich Ausdrücke in den Generatoren e_i gemäß (1.1) sehr leicht vereinfachen. Ferner wird auf einem Ideal der Algebra ein Skalarprodukt definiert, so daß es möglich ist, Erwartungswerte von Operatoren zu berechnen. In

Kapitel 3 wird dann das zu betrachtende Modell durch seinen Hamiltonoperator in $T_N(q)$ definiert. Allein unter Ausnutzung der Relationen (1.1) ist es möglich, Bedingungen an die Funktionen $a(q)$ und $b(q)$ zu stellen, so daß als Grundzustand Wörter der Temperley–Lieb Algebra gefunden werden. Diese Wörter werden durch einfache Liniendiagramme dargestellt. Desweiteren können Erwartungswerte von Zweipunktoperatoren im Grundzustand bestimmt werden. Kapitel 4 beschäftigt sich dann mit Darstellungen der Temperley–Lieb Algebra auf Spinketten. Auf einer Spin-$\frac{1}{2}$ Kette dargestellt, ist das Modell eine Verallgemeinerung des q-deformierten Majumdar–Ghosh Modells, dessen Grundzustandsspinkonfiguration bekannt ist. Ein Vergleich der beiden Grundzustände in Liniendiagrammen und Spins führt zu einer Äquivalenz der beiden Darstellungen der Temperley–Lieb Algebra. Am Schluß dieses Kapitels werden kurz Darstellungen von $T_N(q)$ auf Ketten mit mehr als zwei Zuständen pro Gitterplatz behandelt. Eine Zusammenfassung der gefundenen Ergebnisse findet sich in Kapitel 5. In den Anhängen A und B werden die für diese Arbeit relevanten Ergebnisse über die Quantengruppe $U_qSU(2)$ knapp dargestellt. Teile dieser Arbeit wurden schon in [40] veröffentlicht.

2. Die Darstellung der Temperley–Lieb Algebra auf Liniendiagrammen

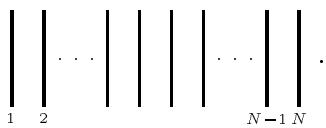
Für die Berechnungen in dieser Arbeit werden nur die im folgenden definierten Liniendiagramme [6] verwendet. Diese Diagramme werden auch in [10, 41, 42] dazu verwendet, Zweipunktkorrelationen für das anisotrope Heisenbergmodell zu berechnen.

Ein Liniendiagramm ist durch N Linien, die N obere und N untere Punkte überschneidungsfrei miteinander verbinden, gegeben. Mittels eines noch zu definierenden Produktes erfüllen auch sie eine Temperley–Lieb Algebra. Als Generatoren e_i hat man

$e_i =$ 

. (2.1)

Die Eins sei

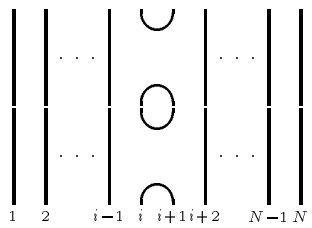
id $=$ 

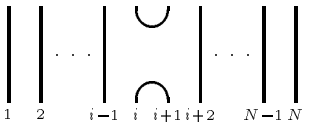
. (2.2)

Das Produkt von Liniendiagrammen ist nun wie folgt definiert: Um das Liniendiagramm $v \cdot w$ zu erhalten, zeichnet man das Diagramm v über das von w und identifiziert die oberen Punkte von w mit den unteren von v. Entstehen bei diesem Prozeß geschlossene Linien, so werden diese aus dem Diagramm entfernt und durch einen multiplikativen Faktor $x = q + q^{-1}$ ersetzt. Die Linien in dem so entstandenen Diagramm schneiden sich nicht, $v \cdot w$ ist also wieder ein Liniendiagramm.

Man überprüft, daß dieses Produkt auf dem Raum der Liniendiagramme die definierenden Relationen einer Temperley–Lieb Algebra (1.1a-c) erfüllt. Für die erste

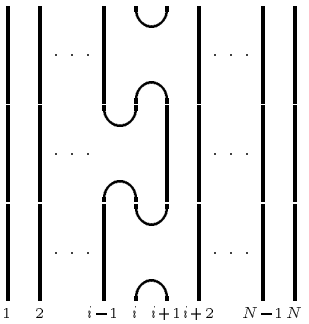
Relation hat man:

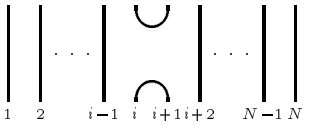
$e_i\, e_i \;=$ 

$= x$ 

$= x\, e_i\,.$ (2.3)

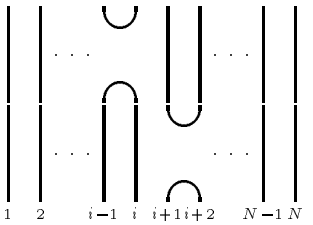
Relation (1.1b) läßt sich in Diagrammen schreiben als

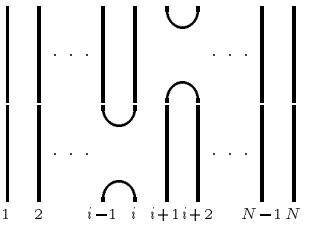
$e_i\, e_{i-1}\, e_i \;=$ 

$=$ 

$= e_i\,.$ (2.4)

Die Vertauschungsrelation (1.1c) für e_{i-1} und e_{i+1} liest sich dann

$e_{i+1}\, e_{i-1} \;=$ 

$=$ 

$= \mathrm{e}_{i-1}\, e_{i+1}\,.$ (2.5)

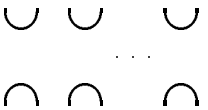
Ordnet man nun die Generatoren von $T_N(q)$ den Generatoren (2.1) zu, so ist eine reguläre Darstellung der Temperley–Lieb auf dem Raum der Liniendiagramme gegeben.

Aber auch Unterräume dieses Raumes können als Darstellungsraum dienen. Sei $\mathcal{S}_k$ der von den Diagrammen, in denen höchstens k Linien obere mit unteren Punkten verbinden, aufgespannte Raum. Dabei seien die ersten $l \leq k$ unteren Punkte mit beliebigen oberen Punkten und die restlichen $N - l$ unteren Punkte nur durch Bögen zwischen nächsten Nachbarn verbunden. Offensichtlich ist

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{S}_N && \text{für } N \text{ gerade} \\ &\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_3 \subset \cdots \subset \mathcal{S}_N && \text{für } N \text{ ungerade.} \end{aligned}$$

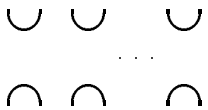
Unter der Wirkung der Temperley–Lieb Algebra bleiben diese Unterräume $\mathcal{S}_k$ invariant und können deshalb als Darstellungsraum dienen. Entsprechende Elemente der Algebra bilden Ideale. Speziell das Ideal $\mathcal{S}_0$ enthält die Diagramme mit getrenntem oberen und

unteren Teil und wird erzeugt von

$$e_1 e_3 \dots e_{N-1} =$$  . (2.6)

Ist q keine Einheitswurzel, so stellt dieses Ideal die $U_q SU(2)$ invarianten Zustände auf einer Spin-$\frac{1}{2}$ Kette dar [6].

Auf $\mathcal{S}_0$ läßt sich einfach ein Skalarprodukt definieren. Dazu definiert man das transponierte Diagramm als das an der Horizontalen gespiegelte Diagramm. Das Skalarprodukt $\langle s_1 | s_2 \rangle$ zweier Wörter $s_1, s_2 \in \mathcal{S}_0$ ist dann definiert durch die Gleichung

$${s_1}^T s_2 = \langle s_1 | s_2 \rangle$$  . (2.7)

Ein Wort in diesem Zusammenhang meint ein Produkt von Generatoren und wird durch ein einziges Liniendiagramm dargestellt. Mit dieser Definition des Skalarproduktes lassen sich nun Erwartungswerte von Operatoren berechnen. Man hat

$$\langle \mathcal{O} \rangle_v = \frac{\langle v | \mathcal{O} | v \rangle}{\langle v | v \rangle} \, . \tag{2.8}$$

Die Darstellung der Temperley–Lieb Algebra auf allen Liniendiagrammen ist eine reguläre Darstellung. Darstellungsunabhänigige Ergebnisse (z.B. Eigenwerte von Operatoren) können dadurch auf andere Darstellungen übertragen werden. Nicht übertragen werden können Entartungen von Eigenwerten.

3. Definition und Eigenschaften eines verallgemeinerten Majumdar–Ghosh Modells

In diesem Kapitel wird der Hamiltonoperator des zu betrachtenden Modells definiert. Hierzu werden nur die Generatoren der Temperley–Lieb Algebra verwendet. Die Darstellung der Algebra auf einer Spin-$\frac{1}{2}$ Kette zeigt, daß der Hamiltonoperator eine Verallgemeinerung des Majumdar–Ghosh Modells beschreibt [21, 22, 28]; da der Hamiltonoperator ein Element der Temperley–Lieb Algebra ist, ist dieses Modell $U_q SU(2)$ symmetrisch. In diesem Kapitel werden wir nur die reguläre Darstellung auf Liniendiagrammen benutzen, um darstellungsunabhängige Eigenschaften dieses Modells zu bestimmen. So können die Grundzustände des Modells und Erwartungswerte von Zweipunktoperatoren im Grundzustand berechnet werden.

3.1. Definition des Hamiltonoperators

Um den Hamiltonoperator zu definieren, führen wir zwei Typen von Zweipunktoperatoren $g^{\pm}_{l,m}$ ein [10]. Sie sind rekursiv bestimmt durch

$$\begin{aligned} g_{l,l+1} &= g^{\pm}_{l,l+1} = e_l - (q+q^{-1})^{-1} && 1 \le l \le N-1 \\ g^{\pm}_{l,m} &= -q^{\pm 1} g^{\pm}_{l,n} g^{\pm}_{n,m} - q^{\mp 1} g^{\pm}_{n,m} g^{\pm}_{l,n} && 1 \le l < n < m \le N \\ g^{\pm}_{m,l} &= q^{\mp 4} g^{\pm}_{l,m} && 1 \le l < m \le N. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Im folgenden werden aber nur die Operatoren $g^{\pm}_{l,m}$ mit $l < m$ benutzt. Diese Operatoren spielen eine wichtige Rolle bei der Darstellung der Temperley–Lieb Algebra auf einer Spin-$\frac{1}{2}$ Kette. In dieser Darstellung sind sie skalare Zweipunktoperatoren und die Verallgemeinerung (q-Deformation) des $SU(2)$-skalaren Operators $-(1/2)\boldsymbol{\sigma}_l \boldsymbol{\sigma}_m$ (siehe Kapitel 4 und Anhang A).

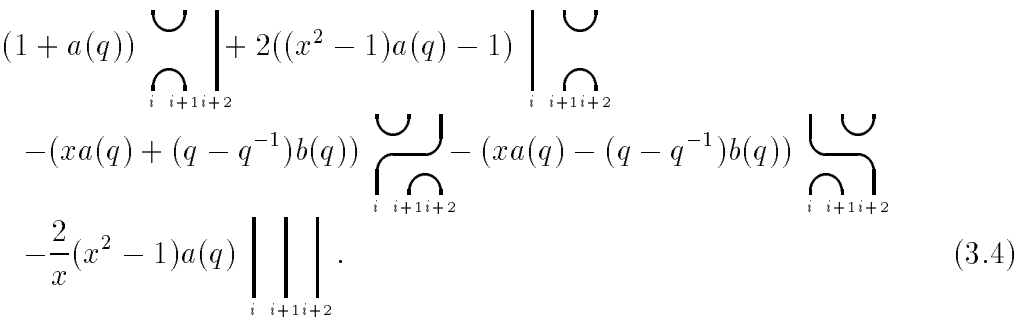
Der Hamiltonoperator sei nun

$$H^{(N)}(a,b,q) = \frac{2-x^2}{2x(x^2-1)} \sum_{i=1}^{N-2} h_{i,i+1,i+2} + 2a(q)(N-2)(x^2-2)^2 \tag{3.2}$$

mit

$$\begin{aligned} h_{i,i+1,i+2} = {} & 2g_{i,i+1} + 2((x^2-2)a(q)-1) g_{i+1,i+2} \\ & + a(q)(g^{+}_{i,i+2} + g^{-}_{i,i+2}) + b(q)(g^{+}_{i,i+2} - g^{-}_{i,i+2}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Unter Benutzung der rekursiven Definition der $g^{\pm}_{l,m}$ (3.1) findet man, daß der Operator $h_{i,i+1,i+2}$ eine Linearkomination der Wörter $e_i, e_{i+1}, e_i e_{i+1}$ und $e_{i+1} e_i$ ist. In Liniendiagrammen ist

$h_{i,i+1,i+2} =$ 

(3.4)

Demnach beschreibt der Hamiltonoperator ein Modell mit Wechselwirkung zwischen nächsten und übernächsten Nachbarn. Die bis hierhin beliebigen Funktionen $a(q)$ und $b(q)$ bestimmen den symmetrischen und antisymmetrischen Beitrag von $g^{+}_{l,m}$ und $g^{-}_{l,m}$ zum Hamiltonoperator. Für $q = 1$ ist $g^{+}_{l,m} = g^{-}_{l,m}$ und damit der Hamiltonoperator unabhängig von $b(q)$. Für $q \neq 1$ findet man unter Vertauschung von q und q^{-1} die Symmetrie

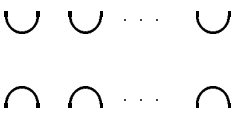
$$H^{(N)}(a,b,q) = H^{(N)}(a,-b,q^{-1}) \; . \tag{3.5}$$

Die anderen Koeffizienten in $H^{(N)}$ sind so gewählt worden, daß Eigenvektoren von $H^{(N)}$ Wörter der Temperley–Lieb Algebra sind.

3.2. Der Grundzustand des Modells

Hier werden wir nun die Darstellung auf Liniendiagrammen benutzen, um Eigenvektoren des Hamiltonoperators zu finden. Es ist möglich, Bedingungen an $a(q)$ und $b(q)$ anzugeben, so daß diese Eigenvektoren auch Grundzustände des Modells sind.

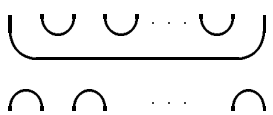
Im folgenden werden Eigenvektoren und Eigenwerte von $H^{(N)}$ gegeben. Betrachten wir zunächst den Fall in dem N gerade ist. Mit Hilfe der Liniendiagramme sieht man leicht, daß

$v_1 = e_1 e_3 \dots e_{N-1} \;=$  (3.6)

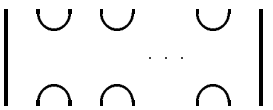
ein Eigenwort ist. Die additive Konstante zu $H^{(N)}$ in (3.2) ist so gewählt worden, daß v_1 Eigenwort zum Eigenwert null ist. Wir können weitere Eigenwörter zu $H^{(N)}$ finden, falls wir die Bedingung

$$a(q) = (2 - x(q - q^{-1})b(q))/(x^2 - 1) \tag{3.7}$$

an die Funktionen $a(q)$ und $b(q)$ stellen. Man findet dann die Eigenwörter

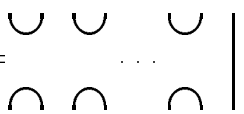
$v_2 = (e_2 e_4 \dots e_{N-2})\, v_1 \;=$  (3.8)

und

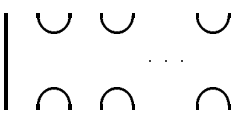
$v_3 = e_2 e_4 \dots e_{N-2} \;=$  . (3.9)

Der Eigenwert dieser Eigenwörter ist wiederum null.

Für den Fall, daß N ungerade und die Bedingung (3.7) erfüllt ist, findet man die Eigenwörter:

$v_4 = e_1 e_3 \dots e_{N-2} \;=$  (3.10)

und

$v_5 = e_2 e_4 \dots e_{N-1} \;=$  . (3.11)

Die Eigenwerte von $v_{4/5}$ sind $\mp b(q)/2\,(q^2 + q^{-2})(q - q^{-1})(q + q^{-1})^{-1}$.

Im folgenden sei die Bedingung (3.7) an die Funktionen $a(q)$ und $b(q)$ erfüllt. Wir untersuchen, welche Bedingung an die Funktion $b(q)$ gestellt werden muß, damit die

Wörter v_i den Grundzustand des Modells beschreiben. Wir werden zeigen: *Die Wörter v_i sind Eigenwörter mit minimalen Eigenwert von $H^{(N)}$, falls*

$$b \leq (\geq) \frac{q^3+2q+2q^{-1}+q^{-3}}{q^5+2q^3-2q^{-3}-q^{-5}} \qquad \textit{für } |q|>1 \ (|q|<1) \tag{3.12}$$

und $a(q)$, $b(q)$ die Bedingung (3.7) erfüllen. Die beiden Fälle $|q|>1$ und $|q|<1$ reflektieren die Symmetrie (3.5).

Zum Beweis betrachten wir zunächst Hamiltonoperatoren $H^{(N)}$ mit gerader Kettenlänge N. Man kann $H^{(N)}$ als eine Summe von $N/2-1$ Hamiltonoperatoren

$$H_i^{(4)} = \frac{2-x^2}{2x(x^2-1)}(h_{i,i+1,i+2}+h_{i+1,i+2,i+3})+4a(q)(x^2-2)^2 \qquad i \text{ ungerade} \tag{3.13}$$

schreiben. Jeder Operator $H_i^{(4)}$ setzt sich dabei aus den drei Generatoren e_i, e_{i+1} und e_{i+2} zusammen. Der Operator $H^{(4)}$ kann exakt diagonalisiert werden. Wir schreiben den Operator $H^{(4)}$ in der Basis der 14 Liniendiagramme für $N=4$. Die Diagonalisierung dieser Matrix liefert die Eigenwerte

$$\begin{aligned}
\lambda_{1-7} &= 0\\
\lambda_{8,9} &= 2-(q-q^{-1})b(q)\\
\lambda_{10} &= 1-(q-q^{-1})(q+q^{-1})^{-1}b(q)\\
\lambda_{11} &= 1-(q^3-q^{-3})(q+q^{-1})^{-1}b(q)\\
\lambda_{12} &= 1-(q^5+2q^3-2q^{-3}-q^{-5})(q^3+2q+2q^{-1}+q^{-3})^{-1}b(q)\\
\lambda_{13/14} &= 1-\frac{1}{2}(q^3+2q+2q^{-1}+q^{-3})^{-1}\Big[(q^5+2q^3+q-q^{-1}-2q^{-3}-q^{-5})b(q)\\
&\quad \pm\Big[(q^{10}+6q^6-2q^4+q^2-12+q^{-2}-2q^{-4}+6q^{-6}+q^{-10})b^2(q)\\
&\quad -8(q^4+q^2-q^{-2}-q^{-4})b(q)+4(q+q^{-1})^2\Big]^{\frac{1}{2}}\Big] \quad .
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind in Abhänigkeit von b für $q=2$ in Abbildung $1(a)$ dargestellt. Alle Eigenwerte sind größer oder gleich null, falls $b(q)$ die Bedingung (3.12) erfüllt. Die Eigenwerte einer Summe von Operatoren läßt sich nach unten durch die Summe der kleinsten Eigenwerte der Summanden abschätzen. Mit (3.12) ist der kleinste Eigenwert von $H^{(N)}$ deshalb größer oder gleich null. Sind die Bedingungen (3.7) und (3.12) erfüllt, so sind also die Wörter v_1, v_2 und v_3 Grundzustände des Hamiltonoperators $H^{(N)}$, weil ihr Eigenwert ebenfalls null ist.

Ist N ungerade kann man $H^{(N)}$ analog als Summe von $(N-3)/2$ Operatoren $H^{(4)}$ und einem Operator $H^{(3)}$ auffassen. In der Basis der Liniendiagramme für $N=3$ ist der Operator $H^{(3)}$ eine 5×5 Matrix. Die Eigenwerte dieser Matrix sind

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= 1-\frac{b(q)}{2}(q^2-q^{-2})\\
\mu_{2,3/4,5} &= \pm\frac{b(q)}{2}(q^2+q^{-2})(q-q^{-1})(q+q^{-1})^{-1}.
\end{aligned}$$

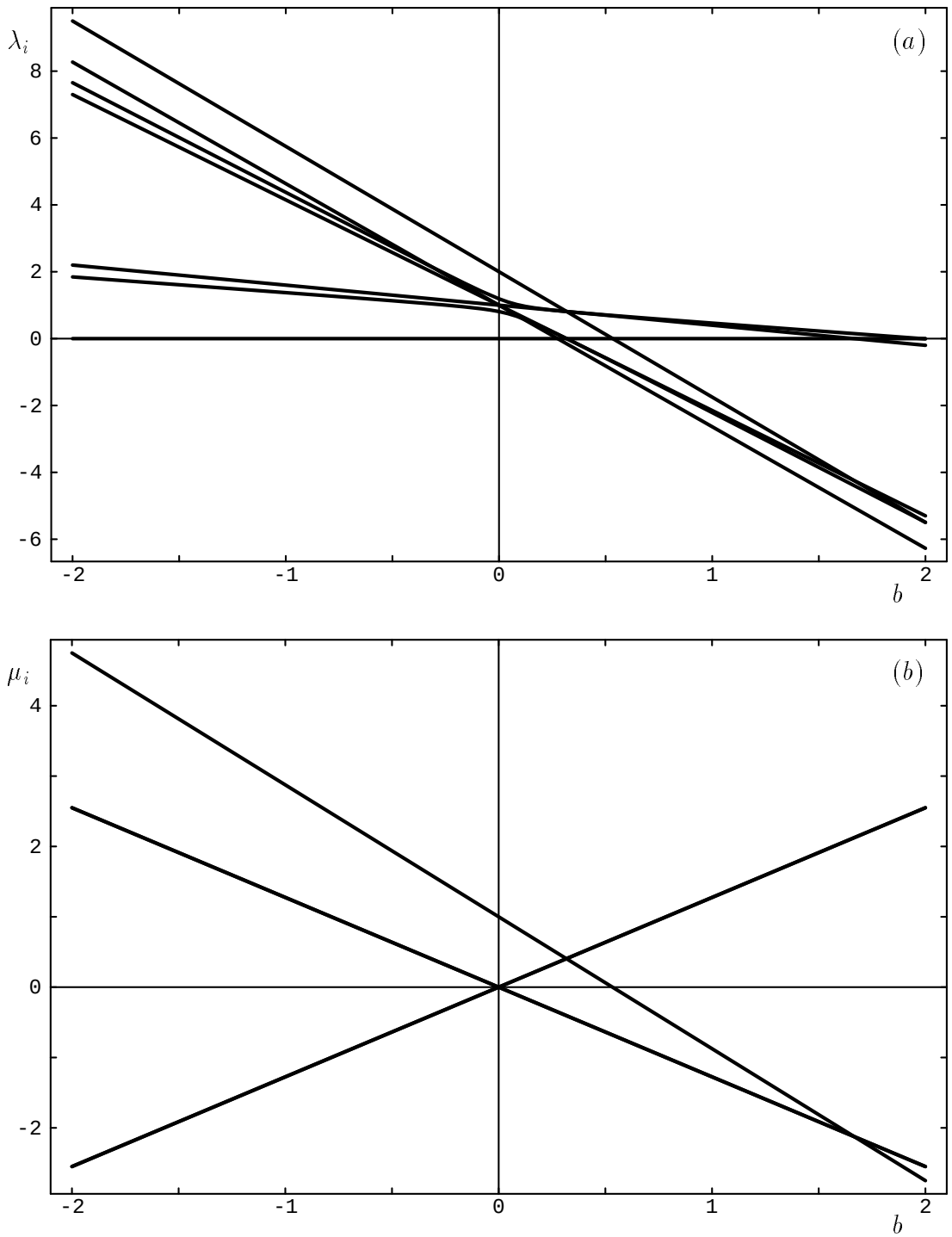


Abbildung 1. Die Spektren von $H^{(4)}$ (a) und $H^{(3)}$ (b) in Abhängigkeit von b für $q = 2$.

Mit (3.12) ist μ_1 immer positiv (Abbildung 1(b)). Beachte, daß mit (3.7) die Eigenwerte $\mu_{2,3}(\mu_{4,5})$ auch Eigenwerte von $H^{(N)}$ mit Eigenvektor $v_4(v_5)$ sind. Unter beiden Bedingungen (3.7) und (3.12) sind also Grundzustände von $H^{(N)}$ durch v_4 oder v_5 gegeben, je nachdem wie q und $b(q)$ gewählt sind. Für $|q| \geq 1$ und $b \leq 0$ ($b \geq 0$) ist der Eigenvektor v_4 (v_5) Grundzustand, für $|q| \leq 1$ und $b \leq 0$ ($b \geq 0$) finden wir v_5 (v_4) als Grundzustand.

Falls wir von Bedingung (3.7) abrücken, so bleibt für den Fall, daß N gerade ist, v_1 Eigenzustand von $H^{(N)}$. In diesem Fall kann man die Funktionen $a(q)$ und $b(q)$ in einem bestimmten Bereich (abhängig von q) wählen, so daß v_1 auch Grundzustand des Modells ist.

3.3. Korrelationsfunktionen

Es sollen die Zweipunktkorrelationen $\langle g^{\pm}_{l,m} \rangle$ in den Grundzuständen v_1 und v_2 berechnet. Die Operatoren $g^{\pm}_{l,m}$ gehen bei einer Darstellung der Temperley–Lieb Algebra auf eine Spin-$\frac{1}{2}$ Kette in $U_q SU(2)$ symmetrischen Zweipunktoperatoren über. Sein Erwartungswert ist deshalb von besonderer Bedeutung. Wir beschränken uns bei der Berechnung auf den Unterraum $\mathcal{S}_0$, da vorerst nur für Vektoren aus $\mathcal{S}_0$ ein Skalarprodukt durch (2.7) definiert ist. In Abschnitt 4.2 werden wir sehen, daß dieses Skalarprodukt mit dem auf der Spin-$\frac{1}{2}$ Kette übereinstimmt. Die Wörter v_1 und v_2 sind Elemente dieses Raumes.

Die Normierung der Zustände v_1 und v_2 läßt sich leicht berechnen. Man erhält:

$$\langle v_1 | v_1 \rangle = \langle v_2 | v_2 \rangle = x^{N/2} \; . \tag{3.14}$$

Unter Zuhilfenahme der rekursiven Definition der Zweipunktoperatoren $g^{\pm}_{l,m}$ lassen sich die Erwartungswerte dieser Operatoren für alle N berechnen. Für die den Zustand v_1 zeigen wir

$$\langle g^{\pm}_{l,l+k} \rangle_{v_1} = \begin{cases} (x - \frac{1}{x}) & \text{für } k = 1 \text{ und } l \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.15}$$

und für v_2

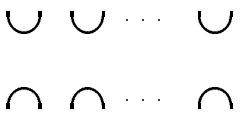
$$\langle g^{\pm}_{l,l+k} \rangle_{v_2} = \begin{cases} (x - \frac{1}{x}) & \text{für } k = 1 \text{ und } l \text{ gerade} \\ & \text{und für } l = 1,\, l + k = N \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.16}$$

Der Erwartungswert $\langle g^{\pm}_{l,m} \rangle_{v_i}$ ist ungleich null, falls die oberen Punkte l und m durch eine Linie im Liniendiagramm für v_i verbunden sind.

Es ist bemerkenswert, daß wir kurzreichweitige Korrelationen finden, obwohl der Operator $g^{\pm}_{l,m}$ eine nicht-lokale Struktur besitzt. Der Grundzustand hat keine langreichweitige Ordnung. Dieses ist von der Interpretation der Wörter v_1 und v_2 als Spinkonfigurationen auf einer Quantenspinkette zu erwarten. Diese Korrespondenz wird im nächsten Kapitel angesprochen werden.

Zum Beweis von (3.15) und (3.16) werden wir nun wieder die Darstellung der Temperley–Lieb Algebra auf Liniendiagrammen benutzen. Beginnen wir mit den Korrelationen $\langle g^{\pm}_{l,l+k} \rangle_{v_1}$ für

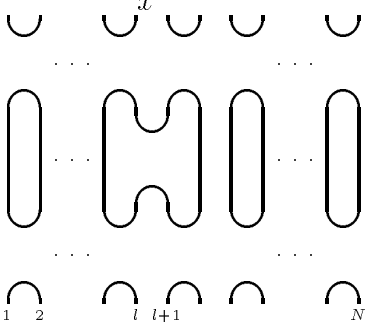
$$v_1 = e_1 e_3 \dots e_{N-1} \; =$$



. (3.17)

Betrachten wir zunächst den Fall $k = 1$. Für gerades l hat man:

$$v_1{}^T \, g^{\pm}_{l,l+1} \, v_1 = v_1{}^T \, (e_l - \frac{1}{x}) \, v_1$$



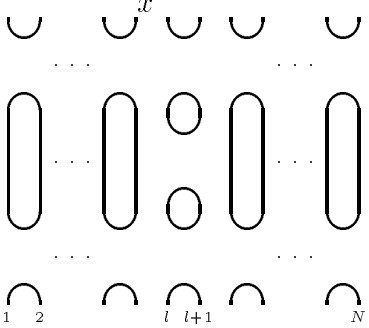
$$= \quad - \frac{1}{x} \, x^{N/2} \, e_1 e_3 \dots e_{N-1}$$

$$= (x^{N/2-1} - x^{N/2-1}) \, e_1 e_3 \dots e_{N-1}$$

$$= 0$$

Ist l ungerade, so ist der Erwartungswert nicht null. Man zeigt

$$v_1{}^T \, g^{\pm}_{l,l+1} \, v_1 = v_1{}^T \, (e_l - \frac{1}{x}) \, v_1$$



$$= \quad - \frac{1}{x} \, x^{N/2} \, e_1 e_3 \dots e_{N-1}$$

$$= (x^{N/2+1} - x^{N/2-1}) \, e_1 e_3 \dots e_{N-1}$$

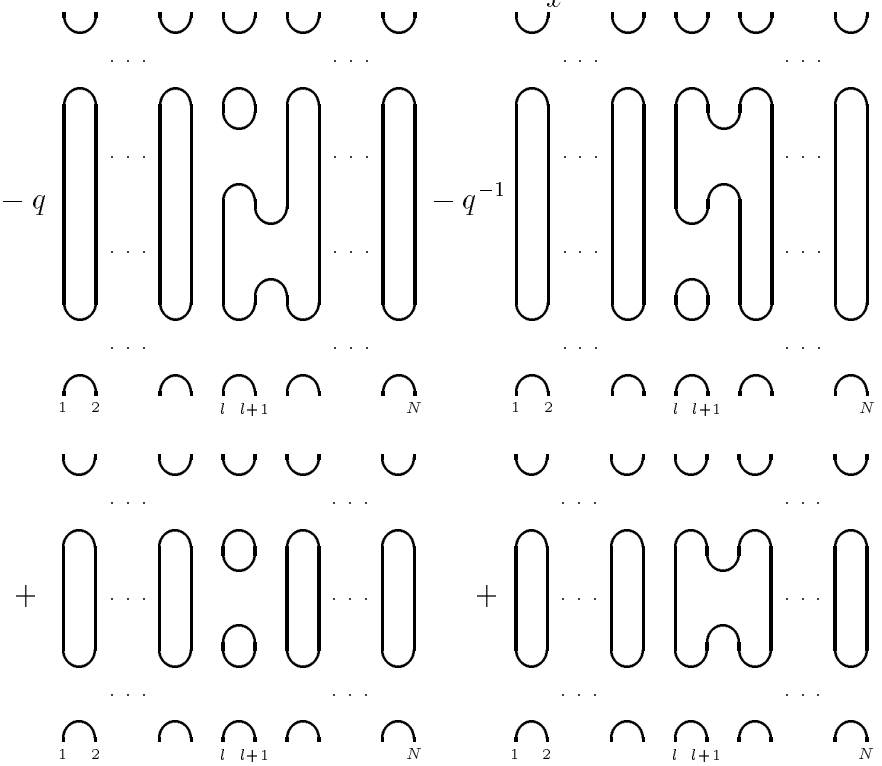
$$= (x - \frac{1}{x}) \, x^{N/2} \, e_1 e_3 \dots e_{N-1}$$

Unter Berücksichtigung der Normierung $\langle v_1 | v_1 \rangle = x^{N/2}$ ist die Aussage (3.15) somit gezeigt.

Die restlichen Aussagen für v_1 werden durch vollständige Induktion über k bewiesen. Dies ist möglich, da die Zweipunktoperatoren $g^{\pm}_{l,m}$ rekursiv definiert sind. Im folgenden wird nur der Operator $g^{+}_{l,m}$ betrachtet; der Beweis für $g^{-}_{l,m}$ ist analog (man vertausche q mit q^{-1}).

Für gerades l kann die Induktion bei $k = 1$ beginnen. Der entsprechende Erwartungswert ist, wie oben gezeigt, null. Für ungerades l muß noch die Verankerung der Induktion bei $k = 2$ gezeigt werden. Dazu zeigen wir

$$
\begin{aligned}
{v_1}^T\, g^+_{l,l+2}\, v_1 &= {v_1}^T\, (-q\, g^+_{l,l+1}\, g^+_{l+1,l+2} - q^{-1}\, g^+_{l+1,l+2}\, g^+_{l,l+1})\, v_1 \\
&= {v_1}^T\, (-q\, (e_l - \frac{1}{x})\, (e_{l+1} - \frac{1}{x}) - q^{-1}\, (e_{l+1} - \frac{1}{x})\, (e_l - \frac{1}{x}))\, v_1 \\
&= {v_1}^T\, (-q\, e_l\, e_{l+1} - q^{-1}\, e_{l+1}\, e_l + e_l + e_{l+1} - \frac{1}{x})\, v_1
\end{aligned}
$$

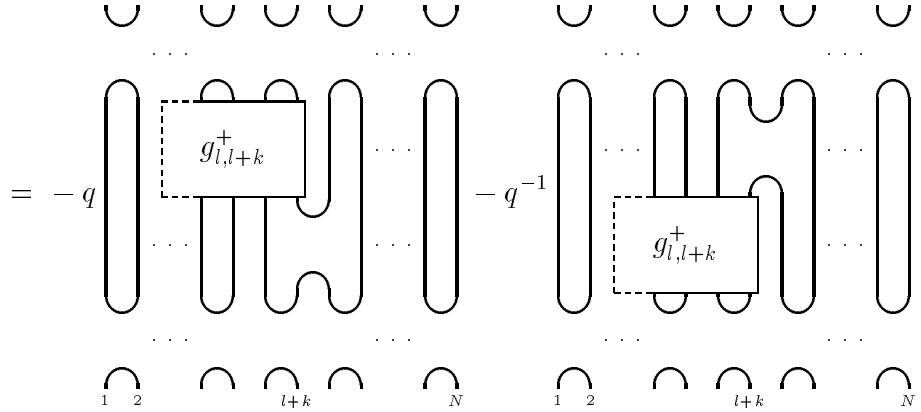


$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{x}\, e_1 e_3 \ldots e_{N-1} \\
&= (-q\, x^{N/2} - q^{-1}\, x^{N/2} + x^{N/2+1} + x^{N/2-1} - x^{N/2-1})\, e_1 e_3 \ldots e_{N-1} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Um den Beweis zu vervollständigen, zeigen man nun, daß $\langle v_1 | g^+_{l,l+(k+1)} | v_1 \rangle = 0$ aus $\langle v_1 | g^+_{l,l+k} | v_1 \rangle = 0$ folgt. Dabei werden die Operatoren $g^+_{l,l+k}$ durch einen Kasten wiedergegeben.

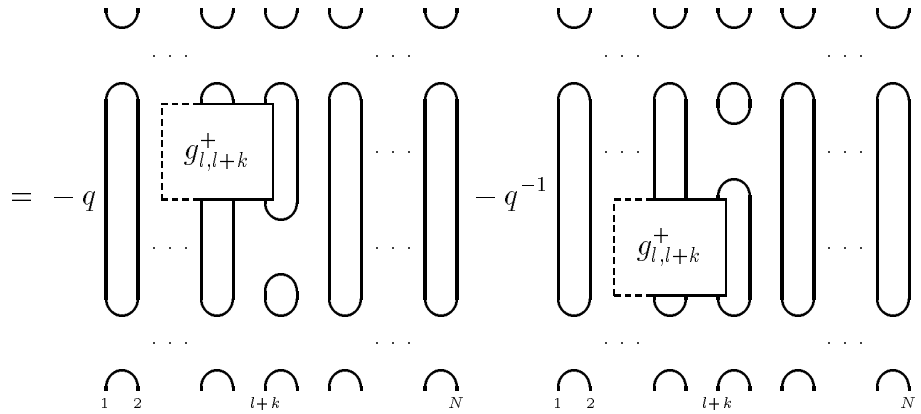
$$
\begin{aligned}
{v_1}^T\, g^+_{l,l+k+1}\, v_1 &= {v_1}^T\, (-q\, g^+_{l,l+k}\, g^+_{l+k,l+k+1} - q^{-1}\, g^+_{l+k,l+k+1}\, g^+_{l,l+k})\, v_1 \\
&= {v_1}^T\, (-q\, g^+_{l,l+k}\, (e_{l+k} - \frac{1}{x}) - q^{-1}\, (e_{l+k} - \frac{1}{x})\, g^+_{l,l+k})\, v_1 \\
&= -q\, {v_1}^T\, g^+_{l,l+k}\, e_{l+k}\, v_1 - q^{-1}\, {v_1}^T\, e_{l+k}\, g^+_{l,l+k}\, v_1
\end{aligned}
$$

Fallunterscheidung: 1. Fall $l+k$ gerade



$$= -q\frac{1}{x}\, {v_1}^T\, g^+_{l,l+k}\, v_1 - q^{-1}\frac{1}{x}\, {v_1}^T\, g^+_{l,l+k}\, v_1$$
$$= 0$$

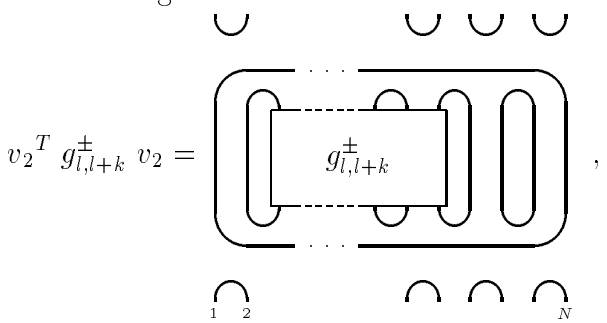
2.Fall $l+k$ ungerade



$$= -qx\, {v_1}^T\, g^+_{l,l+k}\, v_1 - q^{-1}x\, {v_1}^T\, g^+_{l,l+k}\, v_1$$
$$= 0$$

Somit ist der Beweis der Ausage (3.15) vollständig.

Wenden wir uns nun dem Beweis der Aussage (3.16) zu. Betrachtet man ein entsprechendes Liniendiagramm



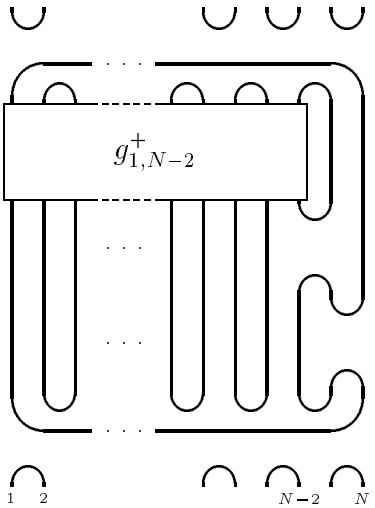
so fällt auf, daß alle Aussagen bis auf $\langle g^{\pm}_{1,N} \rangle_{v_2} = x - \frac{1}{x}$ in obigem Beweis von (3.15) schon enthalten sind. Dazu verbiegt man die äußerste Linie durch die Punkte 1 und N so, daß sie durch die Punkte 0 und 1 oder N und $N+1$ geht. Nach einer Translation des Diagramms nach rechts oder links finden wir dann die Geometrie aus obigem Beweis wieder.

Für die verbleibende Aussage braucht man wieder nur $g^{+}_{1,N}$ betrachten und zeigt

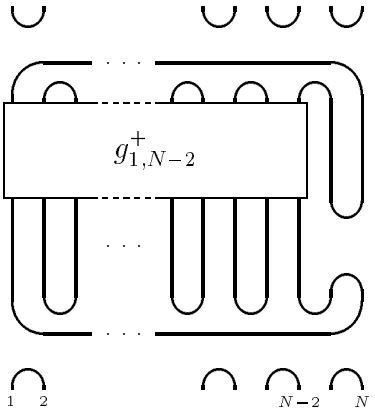
$$
\begin{aligned}
{v_2}^T\, g^{+}_{1,N}\, v_2 &= {v_2}^T\, (-q\, g^{+}_{1,N-1}\, g^{+}_{N-1,N} - q^{-1}\, g^{+}_{N-1,N}\, g^{+}_{1,N-1})\, v_2 \\
&= {v_2}^T\, (-q\, g^{+}_{1,N-1}\, (e_{N-1} - \frac{1}{x}) - q^{-1}\, (e_{N-1} - \frac{1}{x})\, g^{+}_{1,N-1})\, v_2 \\
&= -q\, {v_2}^T\, g^{+}_{1,N-1}\, e_{N-1}\, v_2 - q^{-1}\, {v_2}^T\, e_{N-1}\, g^{+}_{1,N-1}\, v_2 \\
&= -q\, {v_2}^T\, (-q\, g^{+}_{1,N-2}\, g^{+}_{N-2,N-1} - q^{-1}\, g^{+}_{N-2,N-1}\, g^{+}_{1,N-2})\, e_{N-1}\, v_2 \\
&\quad -q^{-1}\, {v_2}^T\, e_{N-1}\, (-q\, g^{+}_{1,N-2}\, g^{+}_{N-2,N-1} - q^{-1}\, g^{+}_{N-2,N-1}\, g^{+}_{1,N-2})\, v_2 \\
&= -q\, {v_2}^T\, (-q\, g^{+}_{1,N-2}\, (e_{N-2} - \frac{1}{x}) - q^{-1}\, (e_{N-2} - \frac{1}{x})\, g^{+}_{1,N-2})\, e_{N-1}\, v_2 \\
&\quad -q^{-1}\, {v_2}^T\, e_{N-1}\, (-q\, g^{+}_{1,N-2}\, (e_{N-2} - \frac{1}{x}) - q^{-1}\, (e_{N-2} - \frac{1}{x})\, g^{+}_{1,N-2})\, v_2 \\
&= q^2\, {v_2}^T\, g^{+}_{1,N-2}\, e_{N-2}\, e_{N-1}\, v_2 - q^2\, \frac{1}{x}\, {v_2}^T\, g^{+}_{1,N-2}\, e_{N-1}\, v_2 \\
&\quad + {v_2}^T\, e_{N-2}\, g^{+}_{1,N-2}\, e_{N-1}\, v_2 - \frac{1}{x}\, {v_2}^T\, g^{+}_{1,N-2}\, e_{N-1}\, v_2 \\
&\quad + {v_2}^T\, e_{N-1}\, g^{+}_{1,N-2}\, e_{N-2}\, v_2 - \frac{1}{x}\, {v_2}^T\, e_{N-1}\, g^{+}_{1,N-2}\, v_2 \\
&\quad + q^{-2}\, {v_2}^T\, e_{N-1}\, e_{N-2}\, g^{+}_{1,N-2}\, v_2 - q^{-2}\, \frac{1}{x}\, {v_2}^T\, e_{N-1}\, g^{+}_{1,N-2}\, v_2
\end{aligned}
$$

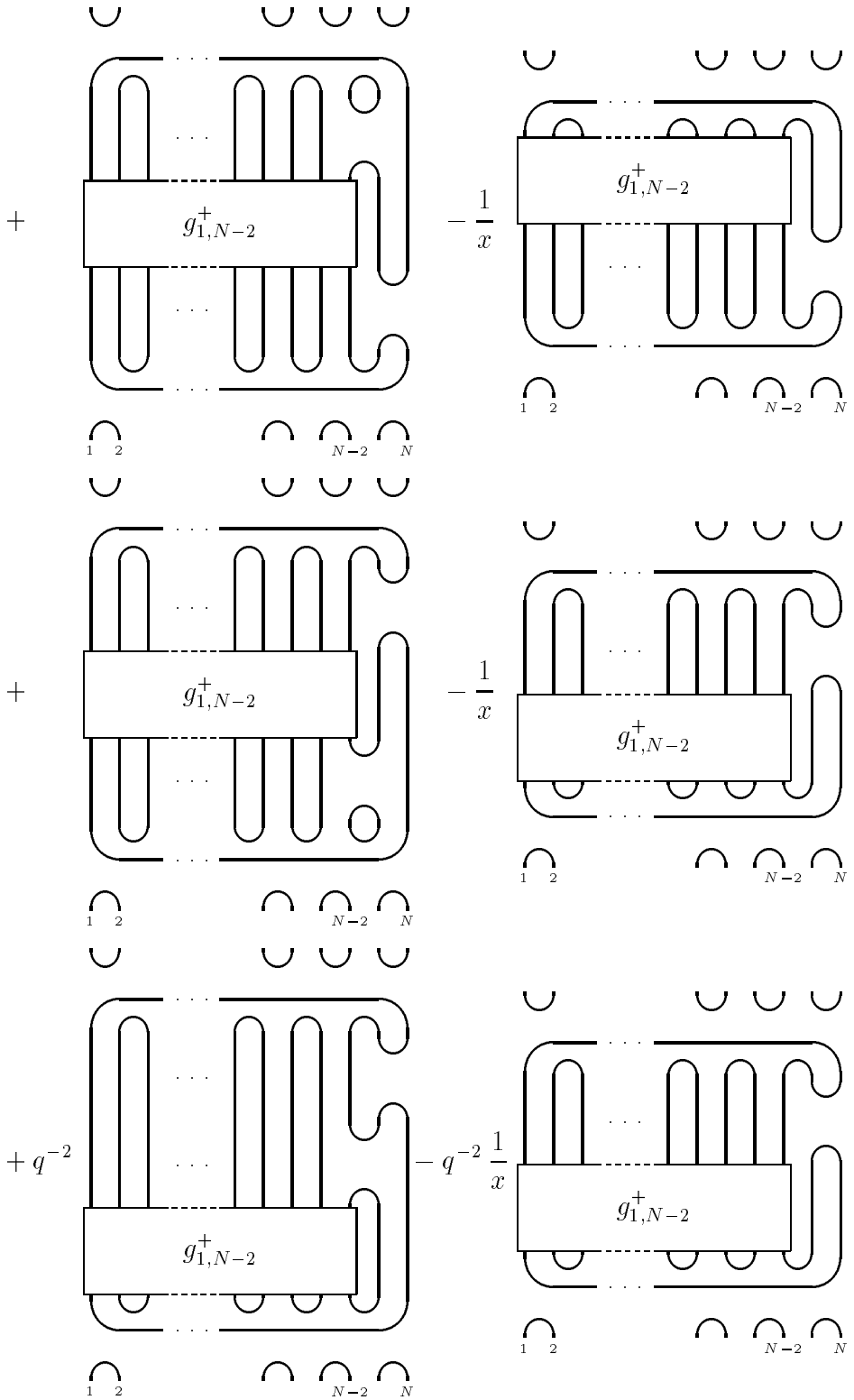
Diese Ausdücke werden nun wieder mit Hilfe der Liniendiagramme ausgewertet. Beachte, daß $g^{+}_{1,N-2}$ nur auf den Gitterplätzen 1 bis $N-2$ wirkt (3.1).

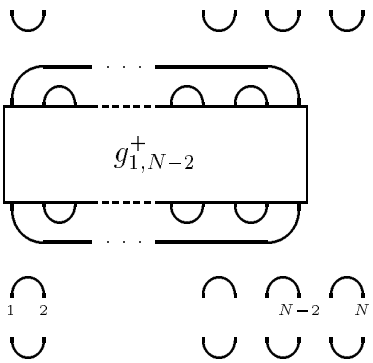
$v_2{}^T\, g^{+}_{1,N}\, v_2 = q^2$

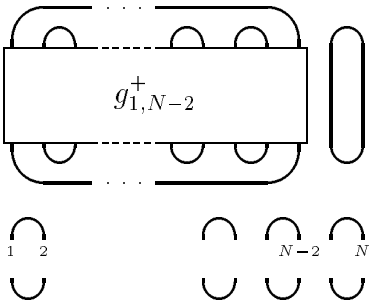


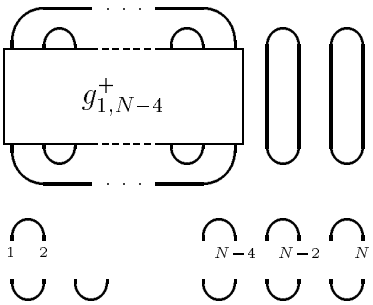
$- q^2\, \frac{1}{x}$

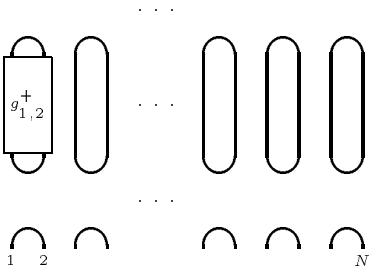



+
$g^+_{1,N-2}$
$-\frac{1}{x}$
$g^+_{1,N-2}$
1 2
N−2 N
+
$g^+_{1,N-2}$
$-\frac{1}{x}$
$g^+_{1,N-2}$
1 2
N−2 N
$+q^{-2}$
$g^+_{1,N-2}$
$-q^{-2}\frac{1}{x}$
$g^+_{1,N-2}$
1 2
N−2 N

$=$ x 

$=$ 

$=$ 

$=$ 

$= (x - \frac{1}{x})\, x^{N/2}\, e_1 e_3 \ldots e_{N-1}$

Somit ist auch die zweite Aussage (3.16) vollständig bewiesen.

4. Darstellungen der Temperley–Lieb Algebra auf Spinketten

In diesem Kapitel sollen nun Darstellungen der Temperley–Lieb Algebra auf Spinketten behandelt werden. Zuerst wird die Darstellung auf einer Spin-$\frac{1}{2}$ Kette besprochen. Mit Hilfe dieser Darstellung werden die Liniendiagramme mit Spinzuständen in Verbindung gebracht. Eine Verallgemeinerung der gefundenen Ergebnisse für Spinketten mit höherem Spin ist möglich.

4.1. Die Spin-$\frac{1}{2}$ Darstellung

Bis hierhin ist nur die Darstellung der Temperley–Lieb Algebra auf Liniendiagrammen benutzt worden. Daher waren alle Ergebnisse unabhängig von speziellen anderen Darstellungen. Hier wird nun die $U_qSU(2)$ Spin-$\frac{1}{2}$ Darstellung von $T_N(q)$ verwendet. Sie ist definiert durch [8]

$$\begin{aligned} e_l &= -\frac{1}{2}\Big(\sigma_l^x\sigma_{l+1}^x + \sigma_l^y\sigma_{l+1}^y + \frac{q+q^{-1}}{2}(\sigma_l^z\sigma_{l+1}^z - 1) + \frac{q-q^{-1}}{2}(\sigma_l^z - \sigma_{l+1}^z)\Big) \\ &= \mathrm{id}_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_{i-1} \otimes \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & q^{-1} & -1 & \\ & -1 & q & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathrm{id}_{i+2} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_N \end{aligned} \tag{4.1}$$

wobei σ^x, σ^y und σ^z Pauli-Matrizen sind. Die 4×4 Matrix in (4.1) ist in der Basis $\{\uparrow_i\uparrow_{i+1}, \uparrow_i\downarrow_{i+1}, \downarrow_i\uparrow_{i+1}, \downarrow_i\downarrow_{i+1}\}$ geschrieben, wobei $\uparrow_i$ und $\downarrow_i$ den Zustand "up" beziehungsweise "down" meint. In dieser Darstellung sind die Operatoren $g_{l,m}^{\pm}$ die $U_qSU(2)$ invarianten Verallgemeinerungen (siehe auch Anhang A) des $SU(2)$ invarianten Operators

$$g_{l,m}^{q=1} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_l\boldsymbol{\sigma}_m. \tag{4.2}$$

Auch der Hamiltonoperator $H^{(N)}$ ist $U_qSU(2)$ invariant.

Offen bleibt aber die Frage, welche Spinkonfigurationen den Liniendiagrammen v_i entsprechen, wie also die Spinkonfiguration des Grundzustandes unter den Bedingungen (3.7) und (3.12) ist. Hierzu betrachten wir den Spezialfall

$$b(q) = 0 \text{ und } a(q) = 2/(x^2-2) \quad . \tag{4.3}$$

Unter diesen Bedingungen wird $H^{(N)}$ in der Darstellung (4.1) der Hamiltonoperator des q-deformierten Majumdar–Ghosh Modells [21, 28]. Dieser ist gegeben durch

$$H^{\mathrm{MG}} = \sum_{i=1}^{N-2} P_{i,i+1,i+2}^{3/2} \quad , \tag{4.4}$$

wobei $P_{i,i+1,i+2}^{3/2}$ den Projektor auf das (q-deformierte) Quartett der Spins an den Gitterplätzen i, $i+1$ und $i+2$ bezeichnet (siehe Anhang A).

Das Majumdar–Ghosh Modell (und seine q-Deformation) hat valence-bond Grundzustände [21, 22, 28]. Die Wellenfunktion eines valence-bond Zustandes faktorisiert und

läßt sich für gerade N schreiben als

$$w_1 = [1,2][3,4]\cdots[N-1,N] \tag{4.5}$$
$$w_2 = [1][2,3][4,5]\cdots[N-2,N-1][N]. \tag{4.6}$$

Für ungerades N hat man

$$w_3 = [1,2][3,4]\cdots[N-2,N-1][N] \tag{4.7}$$
$$w_4 = [1][2,3][4,5]\cdots[N-1,N]. \tag{4.8}$$

Hierbei bezeichnet $[l,m]$ die q-Singulettkonfiguration der Spins an den Gitterplätzen l und m und $[l]$ einen beliebigen Zustand. Mit den Clebsch–Gordan Koeffizienten aus Anhang B hat man

$$[l,m] = (-1)^{\min(l,m)+1}\ (q^{-\frac{1}{2}}\uparrow_l\downarrow_m - q^{\frac{1}{2}}\downarrow_l\uparrow_m)\ . \tag{4.9}$$

Das Vorzeichen ist zunächst unwesentlich wird aber später gebraucht. Der Grundzustand ist also für gerades N fünffach entartet (ein Triplett und zwei Singuletts) und für ungerades N vierfach (zwei Dubletts). Wenn man die Spin-$\frac{1}{2}$ Darstellungen an den Gitterplätzen mit einem Punkt und die Singulettkonfiguration von zwei benachbarten Spins mit einer Linie bezeichnet, können diese Zustände für gerade N graphisch durch

$w_1 =$ (4.10)

$w_2 =$ (4.11)

wiedergegeben werden. Für ungerades N hat der Grundzustand die Form von w_2 ohne den Punkt ganz links oder rechts.

Man sieht leicht, daß die Zustände w_j Grundzustände von H^{MG} sind. Die Anwendung eines jeden Operators $P^{3/2}_{i,i+1,i+2}$ auf einen Zustand w_j gibt null, da zwei der drei Spins an den Gitterplätzen i, $i+1$ und $i+2$ ein Singulett bilden und alle drei Spins dann höchstens Gesamtspin $\frac{1}{2}$ haben. Die Vektoren w_j sind also Eigenvektoren zum Eigenwert null. Alle möglichen Eigenwerte von H^{MG} sind aber positiv oder null, weil H^{MG} die Summe von Projektionsoperatoren ist.

Unter der Benutzung der Darstellung auf Liniendiagrammen hat man die Grundzustände v_i und unter Benutzung der Darstellung auf einer Spinkette mit (4.3) die Grundzustände w_i. Im nächsten Kapitel soll ein expliziter Zusammenhang zwischen diesen beiden hergestellt werden. Damit sind die Grundzustände von $H^{(N)}$ auch ohne die Bedingung (4.3) valence-bond Zustände.

4.2. Die Korrespondenz zwischen $\mathcal{S}_0$-Liniendiagrammen und valence-bond Zuständen

Im folgenden seien die Darstellung auf den Liniendiagrammen $\mathcal{S}_N$ mit

$$g_{\text{LD}} : T_N(q) \to \mathcal{L}(\mathcal{S}_N, \mathcal{S}_N) \tag{4.12}$$

und die Darstellung auf einer Spin-$\frac{1}{2}$ Kette gemäß (4.1) mit

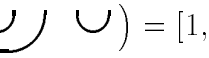
$$g_{\text{S}} : T_N(q) \to \mathcal{L}((\mathbb{C}^2)^{\otimes N}, (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}) \tag{4.13}$$

bezeichnet. Hierbei ist $\mathcal{L}(V, W)$ der Raum der linearen Abbildungen von V nach W. Es wird gezeigt werden, daß diese beiden Darstellungen, wenn man sie auf geeignete Unterräume beschränkt, äquivalent sind, d.h. man hat einen expliziten Zusammenhang zwischen $\mathcal{S}_0$-Liniendiagrammen und valence-bond Spinzuständen.

Hierzu führen wir die lineare Abbildung

$$f : \mathcal{S}_0 \to (\mathbb{C}^2)^{\otimes N} \tag{4.14}$$

ein. Sie sei wie folgt auf der Basis von $\mathcal{S}_0$ definiert: Jede Linie in $v \in \mathcal{S}_0$, die zwei obere Punkte l und m mit $l < m$ verbindet, trägt einen Faktor $[l, m]$ zu dem Zustand in $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ bei. Der untere Teil von v ist immer der gleiche und hat keinen Einfluß auf $f(v)$. Im folgenden werden wir ihn deshalb auch nicht mehr zeichnen. Zum Beispiel hat man

$f\Big($  $\Big) = [1,4][2,3][5,6]$. (4.15)

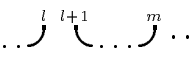
Diese Abbildung ist injektiv. Sie ist surjektiv, falls man als Bildraum $\tilde{\mathcal{S}}_0 = f(\mathcal{S}_0)$ wählt. Zu zeigen bleibt, daß f ein Modulhomomorphismus, also verträglich mit der Algebra ist, d.h.

$$g_{\text{S}}(t) \circ f = f \circ g_{\text{LD}}(t) \qquad \text{für alle } t \in T_N(q) \tag{4.16}$$

ist. Da g_{LD} und g_{S} Darstellungen der Temperley–Lieb Algebra sind und f linear ist, muß (4.16) nur für t ein Generator und auf einer Basis von $\mathcal{S}_0$ verifiziert werden. Sei nun $t = e_l$ und $v \in \mathcal{S}_0$ ein Basisvektor, also ein Diagramm ohne Linie zwischen oberen und unteren Punkten. Da die Operatoren $g_{\text{LD}}(e_l)$ und $g_{\text{S}}(e_l)$ nur auf den Gitterplätzen l und $l+1$ wirken, sind vom Vektor v die Linien an diesen Punkten von Belang. Hier müssen nun zwei Fälle unterschieden werden. Der erste Fall ist der, in dem die oberen Punkte l und $l+1$ in v durch eine Linie miteinander verbunden sind. Hier zeigt man

$$\begin{aligned}
g_{\text{S}}(e_l) \circ f(\cdots \overset{l}{\cup}\overset{l+1}{} \cdots) \\
&= g_{\text{S}}(e_l)(\cdots [l, l+1] \cdots) \\
&= g_{\text{S}}(e_l)(\cdots (-1)^{l+1} \ (q^{-\frac{1}{2}} \uparrow_l \downarrow_{l+1} - q^{\frac{1}{2}} \downarrow_l \uparrow_{l+1}) \cdots) \\
&= \cdots (-1)^{l+1} \ ((q^{-\frac{3}{2}} + q^{\frac{1}{2}}) \uparrow_l \downarrow_{l+1} - (q^{-\frac{1}{2}} + q^{\frac{3}{2}}) \downarrow_l \uparrow_{l+1}) \cdots \\
&= \cdots x \ [l, l+1] \cdots \\
&= x \ f(\cdots \overset{l}{\cup}\overset{l+1}{} \cdots) \\
&= f \circ g_{\text{LD}}(e_l)(\cdots \overset{l}{\cup}\overset{l+1}{} \cdots)
\end{aligned}$$

Der zweite Fall ist nun der, wo der Punkt l durch eine Linie mit dem Punkt $k \neq l+1$ und der Punkt $l+1$ mit einem Punkt m verbunden sind. In diesem Fall zeigt man

$g_{\mathrm{S}}(e_l) \circ f($  $)$

$= g_{\mathrm{S}}(e_l)(\cdots[k,l][l+1,m]\cdots)$

$= g_{\mathrm{S}}(e_l)(\cdots \mathrm{sign}\ (q^{-\frac{1}{2}}\uparrow_k\downarrow_l - q^{\frac{1}{2}}\downarrow_k\uparrow_l)(q^{-\frac{1}{2}}\uparrow_{l+1}\downarrow_m - q^{\frac{1}{2}}\downarrow_{l+1}\uparrow_m\cdots)$

$= g_{\mathrm{S}}(e_l)(\cdots \mathrm{sign}\ (q^{-1}\uparrow_k\downarrow_l\uparrow_{l+1}\downarrow_m - \uparrow_k\downarrow_l\downarrow_{l+1}\uparrow_m$

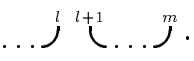
$\qquad - \downarrow_k\uparrow_l\uparrow_{l+1}\downarrow_m + q\downarrow_k\uparrow_l\downarrow_{l+1}\uparrow_m)\cdots)$

$= \cdots - \mathrm{sign}\ (q^{-1}\uparrow_k\uparrow_l\downarrow_{l+1}\downarrow_m - \uparrow_k\downarrow_l\uparrow_{l+1}\downarrow_m - \downarrow_k\uparrow_l\downarrow_{l+1}\uparrow_m + q\downarrow_k\downarrow_l\uparrow_{l+1}\uparrow_m)\cdots$

$= \cdots - \mathrm{sign}\ (q^{-\frac{1}{2}}\uparrow_k\downarrow_m - q^{\frac{1}{2}}\downarrow_k\uparrow_m)(q^{-\frac{1}{2}}\uparrow_l\downarrow_{l+1} - q^{\frac{1}{2}}\downarrow_l\uparrow_{l+1})\cdots$

$= \cdots[k,m][l,l+1]\cdots$

$= f($ $)$

$= f \circ g_{\mathrm{LD}}(e_l)(\cdots$  $\cdots)$

Hierbei kann $m < k < l$, $k < l < m$ oder $l < m < k$ sein. Da in den Ausdrücken $[r,s]$ eine der Zahlen r oder s gerade und die andere ungerade ist, gilt in allen diesen Fällen

$$\mathrm{sign} \equiv (-1)^{\min(k,l)+1}\ (-1)^{\min(l+1,m)+1} = -(-1)^{\min(k,m)+1}\ (-1)^{l+1}\ . \quad (4.17)$$

Somit sind die beiden Darstellungen $g_{\mathrm{S}} : T_N(q) \to \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{S}}_0, \tilde{\mathcal{S}}_0)$ und $g_{\mathrm{LD}} : T_N(q) \to \mathcal{L}(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_0)$ vermöge des Modulisomorphismus f äquivalent.

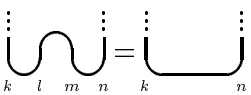
Man kann nun auch zeigen, daß die Skalarprodukte auf diesen Räumen miteinander verträglich sind

$$\langle v|w\rangle = \langle f(v)|f(w)\rangle\ . \quad (4.18)$$

Dazu betrachte zunächst den Fall $v = w$. Hier ist $\langle v|v\rangle = x^{N/2}$ und

$$\begin{aligned}\langle f(v)|f(v)\rangle &= (\prod_{i=1}^{N/2}[k_i,l_i])^{\dagger}\prod_{i=1}^{N/2}[k_i,l_i]\\ &= \prod_{i=1}^{N/2}(q^{-\frac{1}{2}}\uparrow_{k_i}\downarrow_{l_i} - q^{\frac{1}{2}}\downarrow_{k_i}\uparrow_{l_i})^{\dagger}(q^{-\frac{1}{2}}\uparrow_{k_i}\downarrow_{l_i} - q^{\frac{1}{2}}\downarrow_{k_i}\uparrow_{l_i})\\ &= x^{N/2}\end{aligned} \quad (4.19)$$

Ist $v \neq w$ so entstehen beim Errechnen des Skalarproduktes mit Hilfe von Liniendiagrammen weniger als $N/2$ geschlossene Linien. Jedoch kann das entsprechende Diagramm $\langle v|w\rangle$ bzw. der Ausdruck $\langle f(v)|f(w)\rangle$, ohne den Wert des Skalarproduktes zu verändern, schrittweise vereinfacht werden. Denn



(4.20)

und parallel

$$[l,m]^{\dagger}(\cdots[k,l][m,n]\cdots) = \cdots[k,n]\cdots \quad (4.21)$$

Die Zustände auf der rechten Seite haben dabei jeweils zwei Gitterplätze weniger als die auf linken Seite. Dies macht man solange bis zwei Punkte k, n oben und unten durch einen Bogen, ähnlich wie im Fall $v = w$, verbunden sind. Diese geschlossene Linie wird dann aus dem Liniendiagramm entfernt und durch einen Faktor x ersetzt bzw. $[k,n]^\dagger[k,n]$ ergibt einen Faktor x.

Auch die in Abschnitt 3.3 gefundenen Ergebnisse für die Korrelationsfunktionen übertragen sich also auf die Spinkette.

So entsprechen also die Eigenwörter v_i den valence-bond Zuständen w_j. Sind also die Bedingungen (3.7) und (3.12) an die Funktionen $a(q)$ und $b(q)$ erfüllt, so ist der Grundzustand des Spin-$\frac{1}{2}$ Modells $H^{(N)}$ ein valence-bond Zustand. Modelle mit solchen Grundzuständen sind massiv, d.h. sie haben auch für $N \to \infty$ eine Lücke im Energiespektrum über dem Grundzustand [39].

4.3. Die Erweiterung der Korrespondenz auf die Darstellungsräume $\mathcal{S}_k$

Eine sukzessive Verallgemeinerung der obigen Äquivalenz auf die Darstellungsräume $\mathcal{S}_k$ ist möglich. Dazu definiert man zuächst zu der Abbildung $f_0 \equiv f$ die Abbildung

$$f_1 : \mathcal{S}_1 \to (\mathbb{C}^2)^{\otimes N} \tag{4.22}$$

Wieder wird jedem Bogen, der zwei obere Punkte l, m verbindet, der Faktor $[l,m]$ in der Wellenfunktion in $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ zugeordnet. Falls aber der Punkt k mit irgendeinem unteren Punkt verbunden ist, so ergibt dies einen Anteil $\uparrow_k$ zu dem Zustand in $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$. Der untere Teil eines Wortes ist weiterhin nicht relevant.

Die Abbildung ist injektiv und bei Einschränkung des Bildraumes auch surjektiv. Für eine Äquivalenz der Darstellungen bleibt zu zeigen, daß diese Zuordnung auch verträglich mit der Algebra ist. Zusätzlich zu den schon oben gezeigten Identitäten findet man auch

$$\begin{aligned}
g_{\mathrm{S}}(e_l) \circ f_1(\cdots \overset{l}{\vdots} \overset{l+1}{\smile} \ldots \overset{m}{\smile} \cdots) \\
&= g_{\mathrm{S}}(e_l)(\cdots \uparrow_l [l+1, m] \cdots) \\
&= g_{\mathrm{S}}(e_l)(\cdots (-1)^l \, (q^{-\frac{1}{2}} \uparrow_l \uparrow_{l+1} \downarrow_m - q^{-\frac{1}{2}} \uparrow_l \downarrow_{l+1} \uparrow_m) \cdots) \\
&= \cdots - (-1)^l \, (q^{-\frac{1}{2}} \uparrow_l \downarrow_{l+1} \uparrow_m - q^{\frac{1}{2}} \downarrow_l \uparrow_{l+1} \uparrow_m) \cdots \\
&= \cdots [l, l+1] \uparrow_m \cdots \\
&= f_1(\cdots \overset{l}{\smile} \overset{l+1}{\smile} \cdots \overset{m}{\vdots} \cdots) \\
&= f_1 \circ g_{\mathrm{LD}}(e_l)(\cdots \overset{l}{\vdots} \overset{l+1}{\smile} \ldots \overset{m}{\smile} \cdots)
\end{aligned}$$

Für die Erweiterung der Äquivalenz auf den Raum $\mathcal{S}_2 \supset \mathcal{S}_0$ kann man auf die Definition der Funktion f_0 zurückgreifen. Man definiert

$$f_2 : \mathcal{S}_2 \to (\mathbb{C}^2)^{\otimes N} \tag{4.23}$$

so, daß $f_2|_{\mathcal{S}_0} = f_0$ ist. In den verbleibenden Basisvektoren von $\mathcal{S}_2$ verbinden zwei Linien untere Punkte mit oberen Punkten l_1, l_2. Diese beiden Linien liefern den Faktor

$(\uparrow_{l_1}\uparrow_{l_2}+\frac{1}{x}[l_1,l_2])$ zu dem Zustand in $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$. Um die Verträglichkeit mit der Temperley–Lieb Algebra nachzuweisen, betrachtet man auch den Fall

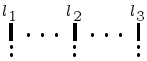
$g_{\mathrm{S}}(e_l)\circ f_2(\cdots$ $\cdots)$

$$
\begin{aligned}
&= g_{\mathrm{S}}(e_l)(\cdots(\uparrow_l\uparrow_{l+1}+\frac{1}{x}[l,l+1])\cdots)\\
&= g_{\mathrm{S}}(e_l)(\cdots\frac{1}{x}[l,l+1]\cdots)\\
&= \cdots[l,l+1]\cdots\\
&= f_2(\cdots$ $\cdots)\\
&= f_2\circ g_{\mathrm{LD}}(e_l)(\cdots$ $\cdots)
\end{aligned}
$$

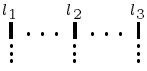
Auf diese Art scheint es möglich, die Abbildungen f_k sukzessiv zu erweitern, indem man $f_k|_{\mathcal{S}_{k-2}} = f_{k-2}$ setzt. In den verbleibenden Basisvektoren verbinden k Linien untere mit oberen Punkten $l_1,\ldots,l_k$. Diesen Linien wird als Faktor zu dem Zustand im Bildraum die Summe des Zustandes $\uparrow_{l_1}\cdots\uparrow_{l_k}$ und einer Linearkombination von Höchstgewichtszuständen mit Spin kleiner oder gleich $k/2-1$ zugeordnet. Diese Linearkombination wird dabei so gewählt, daß f_k verträglich mit der Algebra ist. So entstehen Modulisomorphismen

$$f_k : \mathcal{S}_k \to \tilde{\mathcal{S}}_k \ , \tag{4.24}$$

wobei $\tilde{\mathcal{S}}_k \subset (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ der Raum der Höchstgewichtzustände mit Spin $\leq k/2$ ist. Für $k\leq 4$ hat man

$f_3(\cdots$  $\cdots)$

$$
\begin{aligned}
&= \cdots(\uparrow_{l_1}\uparrow_{l_2}\uparrow_{l_3}+\frac{1}{1+x}(\uparrow_{l_1}[l_2,l_3]+[l_1,l_2]\uparrow_{l_3}))\cdots
\end{aligned}
$$

$f_4(\cdots$  $\cdots)$

$$
\begin{aligned}
&= \cdots(\uparrow_{l_1}\uparrow_{l_2}\uparrow_{l_3}\uparrow_{l_4}+\frac{x-1}{x^2-2}(\uparrow_{l_1}\uparrow_{l_2}[l_3,l_4]+[l_1,l_2]\uparrow_{l_3}\uparrow_{l_4})\\
&\quad+\frac{x-2}{x^2-2}\uparrow_{l_1}[l_2,l_3]\uparrow_{l_4}+\frac{1}{x(x+1)}([l_1,l_2][l_3,l_4]+[l_1,l_4][l_2,l_3]))\cdots
\end{aligned}
$$

Eine allgemeine Zuordnung für alle $k\leq N$ ist noch nicht gefunden worden.

Man definiert das Skalarprodukt für $v,w\in\mathcal{S}_k$ über das Skalarprodukt in $\tilde{\mathcal{S}}_k$ durch

$$\langle v|w\rangle = \langle f_k(v)|f_k(w)\rangle \tag{4.25}$$

Es hat leider keine einfache Interpretation durch Liniendiagramme (vgl. (2.7)).

4.4. Andere Darstellungen

Neben dem $U_qSU(2)$-invariante Modell können auch Modelle konstruiert werden, die unter anderen Quantengruppen invarinat sind. Hierfür benutzt man Darstellungen der Temperley–Lieb Algebra auf Ketten mit $n = 2s + 1$ Zuständen pro Gitterplatz. Eine solche Darstellung von $T_N(q)$ ist durch folgende Matrixelemente gegeben [11]

$$\langle m_i, m_{i+1}|\ e_i\ |m'_i, m'_{i+1}\rangle = (-1)^{m_i - m'_i}\ p^{m_i + m'_i}\ \delta_{m_i+m_{i+1},0}\ \delta_{m'_i+m'_{i+1},0} \quad (4.26)$$

wobei die m_i die Spinvariable am Gitterplatz i ist. Sie nimmt Werte $-s \leq m_i \leq s$ an. Der Wert von p wird durch die Gleichung

$$q + q^{-1} = x = [n]_p \equiv (p^n - p^{-n})(p - p^{-1})^{-1} \quad (4.27)$$

bestimmt. Für $s = 1/2$ ergibt sich die Darstellung aus (4.1) mit $p = q$.

Für diese Darstellungen sind die Matrizen (4.26) Projektoren auf die $U_pSU(n)$-Singulettkonfiguration an benachbarten Gitterplätzen [7, 11]. Diese Konfiguration ist realisiert durch die $U_pSU(n)$ Zerlegungsregel

$$n \times \bar{n} = (n^2 - 1) + 1\ . \quad (4.28)$$

Die Hamiltonoperatoren $H^{(N)}$ sind deshalb $U_pSU(n)$ symmetrisch und die Grundzustände sind wiederum vom valence-bond Typ. So wird der Grundzustand des $U_pSU(3)$ symmetrischen Modells mit einer geraden Anzahl von Gitterplätzen zehnfach entartet sein: ein Oktett und zwei Singuletts. Beachte, daß die Entartung des Grundzustandes von der jeweiligen Darstellung abhängt. Die Ergebnisse für die Korrelationen übertragen sich analog.

5. Zusammenfassung

Die Temperley–Lieb Algebra $T_N(q)$ wurde dazu benutzt ein eindimensionales Modell mit Wechselwirkung zwischen nächsten und übernächsten Nachbarn zu definieren. Mit Hilfe der regulären Darstellung auf Liniendiagrammen war es möglich, Eigenschaften unabhängig von speziellen Darstellungen zu bestimmen. So kann die Wechselwirkung zu den übernächsten Nachbarn so gewählt werden, daß Wörter der Temperley–Lieb Algebra Grundzustände des Modells werden. Diese Wörter lassen sich durch einfache Liniendiagrammen darstellen. Für diese Wörter ist es weiter möglich, Zweipunktkorrelationen zu bestimmen. Man findet kurzreichweitige Korrelationen nur zu nächsten Nachbarn. Da diese Modelle massiv sind, bestimmen diese Korrelationen das physikalische Verhalten auch bei endlichen Temperaturen. Alle diese Ergebnisse wurden mit Hilfe der Liniendiagramme gefunden und übertragen sich entsprechend auf andere Darstellungen der Temperley–Lieb Algebra.

Die Darstellung von $T_N(q)$ auf einer Spin-$\frac{1}{2}$ Kette mit N Gitterplätzen lieferte ein $U_qSU(2)$ symmetrisches Modell. Es zeigte sich, daß es sich dabei um eine Erweiterung des q-deformierten Majumdar–Ghosh Modells handelt, denn auch mit der Bedingung

$$a(q) = (2 - x(q - q^{-1})b(q))/(x^2 - 1) \quad (5.1)$$

an die Funktionen $a(q)$ und $b(q)$ bleibt eine eindimensionale Schar von Modellen mit bekanntem Grundzustand. Für $b(q) = 0$ findet man das q-deformierte Majumdar–Ghosh Modell.

Die Grundzustandspinkonfiguration des Majumdar–Ghosh Modells war schon früher bekannt. Diese Konfiguration läßt sich mit den gefundenen Liniendiagrammen, die den Grundzustand beschreiben, in Verbindung bringen. Dies führt zu einer Äquivalenz der Darstellung von $T_N(q)$ auf Liniendiagrammen mit getrenntem oberen und unteren Teil und der Darstellung auf Spinzuständen mit Gesamtspin null. Diese Äquivalenz läßt sich schrittweise auf Spinzustände mit Gesamtspin ungleich null erweitern. Eine Verbindung zur Darstellung der Temperley–Lieb Algebra auf Pfadräumen [43] ist auch zu erwarten.

Andere Darstellungen von $T_N(q)$ auf Ketten mit n Zuständen pro Gitterplatz führen zu weiteren $U_pSU(n)$ symmetrischen Quantenspinketten. Mit entsprechenden Darstellungen [7] sind auch unter anderen Quantengruppen invariante Modelle denkbar. Auf diese Weise erzeugt man eine große Zahl von verschiedenen Modellen mit bekanntem Grundzustand. Allen diesen Modellen ist gemein, daß sie massiv sind und das die quantengruppeninvarianten Korrelationsfunktionen bei $T = 0$ abgesehen von der konstanten Korrelation zwischen nächsten Nachbarn verschwinden.

Danksagungen

Mein Dank gilt vor allem Prof. Vladimir Rittenberg für die interessante Aufgabenstellung und sein tägliches "Was ist neu bei dir?". Weiter bedanke ich mich bei Thomas Heinzel für die erstklassige Mithilfe mein Studium sinnlos zu verlängern.

Darüberhinaus sie der Arbeitsgruppe von Prof. Rittenberg gedankt. Erst durch die freundliche Atmosphäre in dieser Gruppe konnte diese Arbeit entstehen. Ich denke an viele schöne Stunden mit Birgit Wehefritz zurück. Unserm Paradoxon Horativ Zeno danke ich für einen Einblick in Geheimnisse der Securitate. Renato Dahmen sei für die Einführung in die brasilianische Agrarwirtschaft gedankt. Für die dauernde Unterhaltung (Störung) durch Tetris-spielerei (He is the best) sei Fabian H.L. Eßler gedankt. K.K. Krebs vedient Dank für Kanzlerimitationen. Der Wittlich motivierte mich durch "Leistung muß sich wieder lohnen".

Danke auch an meine drei Musen: Martina, Cathi und Petra

Kein Dank an M. Pessel und R. Lötsch, die mich in dieser schweren Zeit verlassen haben.

Maxl G. Huber sei für den Urlaub in Australien gedankt.

A. Die $U_qSU(2)$ Algebra

Die $U_qSU(2)$ Algebra ist eine q-Deformation der einhüllenden Algebra zu $SL(2)$ [14, 15]. Die drei Generatoren S^+, S^- und S^z erfüllen dabei die Relationen

$$[S^+, S^-] = [2S^z]_q \tag{A.1}$$
$$[S^z, S^\pm] = \pm S^\pm \ , \tag{A.2}$$

wobei die q-Zahl als

$$[x]_q = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} \tag{A.3}$$

definiert ist. Man hat $[x]_q \to x$ im Limes $q \to 1$ und findet für $q = 1$ die üblichen $SU(2)$ Relationen wieder.

Falls q keine Einheitswurzel ist, sind die endlichdimensionalen irreduziblen Darstellungen von $U_qSU(2)$ äquivalent zu den Darstellungen der undeformierten Algebra $SU(2)$. Sie werden durch ganz- oder halbzahliges j beschrieben und mit ρ_j bezeichnet. Sei $|jm\rangle$ ein Basisvektor der Darstellung ρ_j. Die Wirkung der Generatoren ist gegeben durch

$$S^\pm|jm\rangle = \sqrt{[j \mp m]_q[j \pm m + 1]_q}\ |jm \pm 1\rangle$$
$$S^z|jm\rangle = m|jm\rangle \ .$$

Speziell hat man $S^+|jj\rangle = 0$ und $S^-|j - j\rangle = 0$. Eine Basis von ρ_j ist also (wie im undeformierten Fall) durch die Vektoren $|jm\rangle$ mit $m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$ gegeben. Die Dimension von ρ_j ist $2j + 1$.

Als Casimiroperator findet man

$$C = S^-S^+ + [S^z + \frac{1}{2}]_q^2 - [\frac{1}{2}]_q^2 \ , \tag{A.4}$$

für Vektoren aus ρ_j gilt

$$C|jm\rangle = [j]_q[j+1]_q\ |jm\rangle \ . \tag{A.5}$$

Eine wichtige Eigenschaft der Algebra $U_qSU(2)$ ist, daß ihr die Struktur einer Hopf-Algebra gegeben werden kann. Die Hopf-Algebra Struktur ist gegeben durch das Koprodukt $\Delta : U_qSU(2) \to U_qSU(2) \otimes U_qSU(2)$ mit

$$\Delta(S^z) = \mathrm{id} \otimes S^z + S^z \otimes \mathrm{id}$$
$$\Delta(S^\pm) = q^{S^z} \otimes S^\pm + S^\pm \otimes q^{-S^z} \ ,$$

die Antipodenabbildung $S : U_qSU(2) \to U_qSU(2)$ mit

$$S(S^z) = -S^z$$
$$S(S^\pm) = -q^{\pm 1}S^\pm$$

und die Koidentität $\epsilon : U_qSU(2) \to \mathbb{C}$ mit

$$\epsilon(S^z) = 1$$
$$\epsilon(S^\pm) = 0 \ .$$

Das Koprodukt ist ein Homomorphismus ($\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b)$) und ist ko-assoziativ ($(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$), aber nicht ko-kommutativ ($P\Delta \neq \Delta$ mit P dem Transpositionsoperator). Jedoch ist $U_qSU(2)$ eine quasitrianguläre Hopf-Algebra (oder Quantengruppe) und man kann $\Delta(a)$ und $P\Delta(a)$ in Beziehung setzen:

$$P\Delta(a) = R\Delta(a)R^{-1} \qquad \text{für alle } a \in U_qSU(2), \tag{A.6}$$

mit $R \in U_qSU(2) \otimes U_qSU(2)$, der universellen R-Matrix.

Von den Eigenschaften von S sei nur erwähnt, daß S linear, aber antimultiplikativ ist, d.h. $S(ab) = S(b)S(a)$.

Schreibt man nun $\Delta(a) = \sum_r a_r^1 \otimes a_r^2$ für $a \in U_qSU(2)$, so ist die adjungierte Darstellung gegeben durch

$$\begin{aligned} &\mathrm{ad} : U_qSU(2) \to \mathcal{L}(U_qSU(2), U_qSU(2)) \\ &\mathrm{ad}(a)a' = \sum_r a_r^1 \, a' \, S(a_r^2) \; . \end{aligned}$$

Für $q = 1$ ist $\Delta(a) = a \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes a, S(a) = -a$, und man findet die Definition der adjungierten Darstellung für Lie-Algebren wieder: $\mathrm{ad}(a)a' = [a, a']$.

Mit Hilfe des Koproduktes läßt sich auch die Wirkung der Algebra auf tensorierte Darstellungsräume angeben. Die Matrizen $S^i = \sigma^i/2$ geben eine Spin-$\frac{1}{2}$ Darstellung. Tensoriert man diese Darstellung $(n-1)$-fach so erhält man eine Spin-$\frac{1}{2}$ auf einer Kette der Länge N:

$$S^z = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{id}_1 \otimes \mathrm{id}_2 \otimes \cdots \otimes \sigma_i^z/2 \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_N \tag{A.7}$$

$$S^{\pm} = \sum_{i=1}^{N} q^{\sigma_1^z/2} \otimes \cdots \otimes q^{\sigma_{i-1}^z/2} \otimes \sigma_i^{\pm}/2 \otimes q^{-\sigma_{i+1}^z/2} \otimes \cdots \otimes q^{-\sigma_N^z/2} \; . \tag{A.8}$$

Wie im $SU(2)$ Fall sind diese Darstellungen (für q nicht Einheitswurzel) zerlegbar in irreduzible Darstellungen ρ_j. Es gilt

$$\rho_{j_1} \otimes \rho_{j_2} = \bigoplus_{\substack{J=|j_1-j_2| \\ 2J=2j_1+2j_2 \bmod 2}}^{j_1+j_2} \rho_J \; . \tag{A.9}$$

Clebsch–Gordan Koeffizienten werden definiert durch

$$|JM\rangle = \sum_{m_1+m_2=M} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle \; |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \; . \tag{A.10}$$

Mit Hilfe des Casimiroperators lassen sich nun Projektionsoperatoren konstruieren. Als Projektor $P_{i,i+1}^1$ auf das Spin-1 Triplet an den Gitterplätzen i und $i+1$ hat man

$$\begin{aligned} P_{i,i+1}^1 &= \frac{1}{[1]_q[2]_q}(\Delta(C))_{i,i+1} \\ &= \frac{1}{q+q^{-1}} \begin{pmatrix} q+q^{-1} & & & \\ & q & 1 & \\ & 1 & q^{-1} & \\ & & & q+q^{-1} \end{pmatrix}_{i,i+1} \; . \end{aligned} \tag{A.11}$$

Der Projektor auf das Singulett ist dann

$$\begin{aligned} P^0_{i,i+1} &= \mathrm{id} - P^1_{i,i+1} \\ &= \frac{1}{q+q^{-1}} \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & q^{-1} & -1 & \\ & -1 & q & \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{i,i+1} \\ &= \frac{1}{q+q^{-1}}\, e_i \ , \end{aligned} \tag{A.12}$$

wobei e_i durch (4.1) gegeben ist und die Temperley–Lieb Algebra auf einer Spin-$\frac{1}{2}$ Kette darstellt. Da $P^0_{i,i+1}$ im Zentrum von $U_qSU(2)$ liegt, vertauschen also Darstellungen von Elementen aus $T_N(q)$ auf $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ mit $U_qSU(2)$.

Für das Tensorprodukt dreier Spin-$\frac{1}{2}$ Darstellungen hat man

$$\rho_{1/2} \otimes \rho_{1/2} \otimes \rho_{1/2} = \rho_{3/2} \oplus \rho_{1/2} \oplus \rho_{1/2} \tag{A.13}$$

Der Projektor auf das Spin-$\frac{3}{2}$ Quartett an den Plätzen i, $i+1$ und $i+2$ berechnet sich zu

$$\begin{aligned} P^{3/2}_{i,i+1,i+2} &= \frac{((\mathrm{id}\otimes\Delta)\Delta(C))_{i,i+1,i+2} - [\frac{1}{2}]_q[\frac{3}{2}]_q(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})}{[\frac{3}{2}]_q[\frac{5}{2}]_q - [\frac{1}{2}]_q[\frac{3}{2}]_q} \\ &= -\frac{x}{x^2-1}(e_i+e_{i+1}) + \frac{1}{x^2-1}(e_ie_{i+1}+e_{i+1}e_i) + \mathrm{id} \\ &= -\frac{x^2-2}{x(x^2-1)}(g_{i,i+1}+g_{i+1,i+2}) - \frac{1}{x(x^2-1)}(g^+_{i,i+2}+g^-_{i,i+2}) \\ &\quad + \frac{x^2-2}{x^2}\,\mathrm{id} \ . \end{aligned}$$

Kommen wir nun zum Begriff des Tensoroperators. Sind V und W Darstellungsräume von $U_qSU(2)$, dann ist die Abbildung

$$t : V \to \mathcal{L}(W,W) \tag{A.14}$$

ein Tensoroperator vom Typ V in W, falls t ein Modulhomomorphismus (vgl. (4.16)) ist. Dabei ist die Darstellung von $U_qSU(2)$ auf $\mathcal{L}(W,W)$ durch

$$g_{\mathcal{L}(W,W)}(a)\,(f) = \sum_r g_W(a^1_r) \circ f \circ g_W(S(a^2_r)) \tag{A.15}$$

gegeben [9]. Hierbei bezeichnet $g_X(a)$ die Darstellung eines Elementes $a \in U_qSU(2)$ auf X. Falls $(e_i)_{i\in I}$ eine Basis von V ist, so definieren wir die Operatoren $t^i = t(e_i)$.

Für $U_qSU(2)$ findet man zwei Mengen $\{t^{\pm1,0}_l\}_{l\in1,\ldots,N}$, $\{\tilde{t}^{\pm1,0}_m\}_{m\in1,\ldots,N}$ von Tensoroperatoren auf $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$ bezüglich der dreidimensionalen adjungierten Darstellung [10]. Mit Hilfe der Clebsch–Gordan Koeffizienten für die Zerlegung $\rho_1 \otimes \rho_1 = \rho_2 \oplus \rho_1 \oplus \rho_0$ (Anhang B) findet man die skalaren Zweipunktoperatoren

$$\begin{aligned} g^+_{l,m} &= q^{-2}(q^{-1}t^{+1}_l t^{-1}_m + q^{+1}t^{-1}_l t^{+1}_m - t^0_l t^0_m) \\ g^-_{l,m} &= q^{+2}(q^{-1}\tilde{t}^{+1}_l \tilde{t}^{-1}_m + q^{+1}\tilde{t}^{-1}_l \tilde{t}^{+1}_m - \tilde{t}^0_l \tilde{t}^0_m) \ . \end{aligned}$$

Diese Operatoren wirken auf dem Raum $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$. Als skalare Größen sind sie Darstellungen von Elementen der Temperley–Lieb Algebra gemäß (4.1). Diese Elemente sind in (3.1) angegeben. Für $q = 1$ findet man die skalaren Operatoren

$$g_{l,m}^{q=1} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_l\boldsymbol{\sigma}_m. \tag{A.16}$$

B. $U_qSU(2)$ Clebsch–Gordan Koeffizienten

Analog zur $SU(2)$ Algebra kann man Clebsch–Gordan Koeffizienten für die $U_qSU(2)$ definieren. Man errechnet sie auf die gleiche Weise wie im $SU(2)$ Fall. Die Koeffizienten für die Zerlegung $\rho_{1/2} \otimes \rho_{1/2} = \rho_1 \oplus \rho_0$ sind in Tabelle B1, die für $\rho_1 \otimes \rho_1 = \rho_2 \oplus \rho_1 \oplus \rho_0$ in Tabelle B2 gegeben. Für $q = 1$ findet man die bekannten $SU(2)$ Koeffizienten.

Tabelle B1.

	$\vert\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$	$\vert\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$	$\vert\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$	$\vert\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$
$\vert 11\rangle$	1			
$\vert 10\rangle$		$\sqrt{\frac{1}{[2]_q}q}$	$\sqrt{\frac{1}{[2]_q}q^{-1}}$	
$\vert 00\rangle$		$\sqrt{\frac{1}{[2]_q}q^{-1}}$	$-\sqrt{\frac{1}{[2]_q}q}$	
$\vert 1-1\rangle$				1

Tabelle B2.

	$\vert 11\rangle$	$\vert 10\rangle$	$\vert 01\rangle$
$\vert 22\rangle$	1		
$\vert 21\rangle$		$\sqrt{\frac{[2]_q}{[4]_q}q^2}$	$\sqrt{\frac{[2]_q}{[4]_q}q^{-2}}$
$\vert 11\rangle$		$\sqrt{\frac{[2]_q}{[4]_q}q^{-2}}$	$-\sqrt{\frac{[2]_q}{[4]_q}q^2}$

	$\vert 1-1\rangle$	$\vert -11\rangle$	$\vert 00\rangle$
$\vert 20\rangle$	$\sqrt{\frac{[2]_q}{[3]_q[4]_q}q^4}$	$\sqrt{\frac{[2]_q}{[3]_q[4]_q}q^{-4}}$	$\sqrt{\frac{[2]_q^3}{[3]_q[4]_q}}$
$\vert 10\rangle$	$\sqrt{\frac{[2]_q}{[4]_q}}$	$-\sqrt{\frac{[2]_q}{[4]_q}}$	$-\sqrt{\frac{[2]_q}{[4]_q}(q-q^{-1})^2}$
$\vert 00\rangle$	$\sqrt{\frac{1}{[3]_q}q^{-2}}$	$\sqrt{\frac{1}{[3]_q}q^2}$	$-\sqrt{\frac{1}{[3]_q}}$

	$\vert -10\rangle$	$\vert 0-1\rangle$	$\vert -1-1\rangle$
$\vert 2-1\rangle$	$\sqrt{\frac{[2]_q}{[4]_q}q^{-2}}$	$\sqrt{\frac{[2]_q}{[4]_q}q^2}$	
$\vert 1-1\rangle$	$-\sqrt{\frac{[2]_q}{[4]_q}q^2}$	$\sqrt{\frac{[2]_q}{[4]_q}q^{-2}}$	
$\vert 2-2\rangle$			1

Literatur

[1] Temperley H. N. V. und Lieb E. H. 1971 *Proc. R. Soc.* A **322** 251

[2] Martin P.P. 1989 *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** 3103 physical realization of Hecke algebras *Preprint* cond-mat 9402020

[3] Baxter R.J. 1982 *Exactly Solvable Models in Statistical Mechanics* (Academic Press)

[4] Martin P.P. 1990 *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** 7

[5] Martin P.P. und Rittenberg V. 1992 *Int. J. Mod. Phys.* **A7** Suppl. 1B 707

[6] Martin P. P. 1991 *Potts Models und Related Problems in Statistical Mechanics* (World Scientific, Singapore)

[7] Batchelor M. T. und Kuniba A. 1991 *J. Phys. A: Math. Gen.* **24** 2599

[8] Pasquier V. und Saleur H. 1990 *Nucl. Phys.* B **330** 523

[9] Rittenberg V. und Scheunert M. 1992 *J. Math Phys.* **33** 436

[10] Hinrichsen H., Martin P. P., Rittenberg V. und Scheunert M. 1994 *Nucl. Phys.* B **415** 533

[11] Batchelor M. T., Mezincescu L., Nepomechie R. I. und Rittenberg V. 1990 *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** L141

[12] Affleck I. 1990 *J. Phys.: Condens. Matter* **2** 405

[13] Barber M. N. und Batchelor M. T. 1989 *Phys. Rev.* B **40** 4621

[14] Fuchs J. 1992 *Affine Lie Algebras and Quantum Groups* (Cambridge)

[15] Majid S. 1990 *Int. J. Mod. Phys.* **5** 1

[16] de Vega H.J. 1989 *Int. J. Mod. Phys.* **A4** 2371

[17] Alvarez-Gaumé L., Gomez C. und Sierra G. *Nucl. Phys.* B **319** 155

[18] Reshetikhin N. und Smirnov F. 1990 *Commun. Math. Phys.* **131** 157

[19] Affleck I., Kennedy T., Lieb E. H. und Tasaki H. 1988 *Commun. Math. Phys* **115** 477

[20] Werner R.F. 1990 *Lett. Math. Phys.* **19** 319

[21] Majumdar C. K. und Ghosh D. K. 1969 *J. Math. Phys.* **10** 1399

[22] Majumdar C. K. 1970 *J. Phys. C: Solid State Phys.* **3** 911

[23] van den Broek P. M. 1980 *Phys. Lett.* **77A** 261

[24] Affleck I., Lieb E.H., Kennedy T. und Tasaki H. 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 799

[25] Haldane F.D.M. 1983 *Phys. Lett.* **93A** 464

[26] Haldane F.D.M. 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 1153

[27] Affleck I. und Lieb E.H. 1986 *Lett. Math. Phys.* **12** 57

[28] Batchelor M. T. und Yung C. M. 1994 q-deformation of quantum spin chains with exact valence-bond ground state *preprint* cond-mat 9403080

[29] Fannes M., Nachtergaele B. und Werner R.F. 1992 *Ann. Inst. H. Poincaré* **57** 259

[30] Klümper A., Schadschneider A. und Zittartz J. 1993 *Europhysics Letters* **24** 293

[31] Fannes M., Nachtergaele B. und Werner R.F. 1989 *Europhys Lett.* **10** 633

[32] Shastry B. S. und Sutherland B. 1981 *Phys. Rev. Lett.* **47** 964

[33] Kennedy T., Lieb E.H. und Tasaki H. 1988 *J. Stat. Phys* **53** 383

[34] Chayes J., Chayes T. und Kivelson S. 1989 *Commun. Math. Phys.* **123** 53

[35] Takano K. 1994 *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** L269

[36] Klein K.J. 1982 *J. Phys. A: Math. Gen.* **15** 661

[37] Freitag W.-D. und Müller-Hartmann E. 1991 *Z. Phys. B Condensed Matter* **83** 381

[38] Freitag W.-D. und Müller-Hartmann E. 1992 *Z. Phys. B Condensed Matter* **88** 279

[39] Nachtergaele B. 1994 The spectral Gap for some spin chains with discrete symmetry breaking *Preprint*

[40] Arndt P.F., Heinzel T. und Yung C.M. 1994 Temperley–Lieb Words as Valence-Bond Ground States *preprint* BONN-TH-94-26, cond-mat 9411085

[41] Arndt P. F. und Heinzel T. 1995 Numerical investigation of correlation functions for the $U_qSU(2)$ invariant spin-$\frac{1}{2}$ Heisenberg chain *Preprint* BONN-TH-95-02, cond-mat 9501035

[42] Heinzel T. 1995 Numerische Untersuchung von Korrelationsfunktionen für das quantengruppeninvariante Heisenbergmodell *Diplomarbeit* Bonn

[43] Martin P.P. 1987 *J. Phys. A: Math. Gen.* **20** L539