Assoziative Algebren als Hilfsmittel in der Darstellungstheorie konformer Feldtheorien

von

David Brungs

Diplomarbeit in Physik
angefertigt im
Physikalischen Institut

vorgelegt der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

im Juli 1999

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie die Zitate kenntlich gemacht habe.

Referent: Prof. W. Nahm

Koreferent: Prof. V. Rittenberg

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Erfolgsgeschichte der zweidimensionalen konformen Feldtheorie [9, 24, 34, 36] beginnt im Jahr 1984, als Belavin, Polyakov und Zamolodchikov zeigen, daß die in ihr auftretende unendliche Zahl von Symmetrien es erlaubt, alle Korrelationsfunktionen explizit zu berechnen [2]. Seitdem hat die konforme Feldtheorie einen raschen Aufschwung genommen und Anwendungen vor allem in der Stringtheorie und der statistischen Physik gefunden. Darüber hinausgehend sind Ideen aus der konformen Feldtheorie auch in die Mathematik eingeflossen: Nachdem Frenkel, Lepowsky und Meurman 1984 die Mondschein-Darstellung der Monstergruppe konstruiert hatten [17], konnte Borcherds 1986 die Vertexalgebrastruktur dieser Darstellung aufdecken [4, 18]. Der von ihm eingeführte Begriff einer Vertexalgebra stellt dabei eine Axiomatisierung der konformen Feldtheorie dar [1]. Die Theorie der Vertexalgebren und Vertexoperatoralgebren [2] hat sich in der Folge zu einem eigenständigen Feld der Mathematik entwickelt.

Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit ist die Dissertationsschrift von Zhu (1990, veröffentlicht 1996 [45]). Die dort entwickelte Methode, irreduzible Darstellungen einer Vertexoperatoralgebra zu klassifizieren, hat seitens der konformen Feldtheorie bereits einige Beachtung gefunden [13, 23, 33]. Bevor wir ihre Wirkungsgeschichte in Mathematik und Physik nachzeichnen, wollen wir sie in einen größeren Zusammenhang stellen:

Das normalgeordnete Produkt einer konformen Feldtheorie ist im allgemeinen nicht assoziativ. Da nicht assoziative Strukturen schwierig zu behandeln sind [3], liegt es nahe, nach assoziativen Strukturen zu suchen, die zumindest einzelne Aspekte der Theorie zutreffend beschreiben: Die universelle einhüllende Algebra der Feldmoden nimmt in dieser Hinsicht eine herausgehobene Stellung ein, da sie die Eigenschaften aller Darstellungen getreu widerspiegelt. Nachteilig ist, daß die Feldmodenalgebra unendlich viele Erzeuger hat. Demgegenüber ist die Algebra der Nullmoden zumeist endlich erzeugt

[1] Für seine Arbeiten auf diesem Gebiet wurde Borcherds im vergangenen Jahr 1998 mit der Fields-Medaille ausgezeichnet.

[2] Zur Unterscheidung zwischen Vertexalgebren und Vertexoperatoralgebren siehe Abschnitt 2.1.

[3] Zum Beispiel klärt das Wedderburn-Theorem die Struktur halbeinfacher assoziativer Algebren vollständig, während ein vergleichbarer Struktursatz für nicht assoziative Algebren nicht bekannt ist.

oder sogar endlichdimensional. Seit den Anfängen der konformen Feldtheorie ist bekannt, daß irreduzible Tiefstgewichtsdarstellungen durch die Wirkung der Nullmoden auf den Tiefstgewichtszustand charakterisiert werden können [3, 30, 44]. Die Nullmodenalgebra enthält also noch die volle Information über die möglichen Tiefstgewichte.

Auf der Suche nach assoziativen Strukturen geht Zhu einen anderen Weg: Er stattet den Zustandsraum der Theorie mit einem nicht assoziativen Produkt aus und erhält nach Herausteilen eines geeigneten Unterraumes eine assoziative Algebra. Er zeigt weiter, daß die irreduziblen Darstellungen dieser Algebra in einer eineindeutigen Beziehung zu den irreduziblen Darstellungen der Vertexoperatoralgebra stehen.

Der Wirkungsbereich der Zhuschen Methode blieb zunächst auf die Mathematik beschränkt [19, 28, 39]. Spätestens seit der Arbeit von Lucke [33] wird sie jedoch auch in der physikalisch orientierten Forschung eingesetzt [13, 23].

Neben den Anwendungen gibt es auch Bemühungen, die Konstruktion der assoziativen Zhu-Algebra aus physikalischer Sicht zu verstehen: Eholzer und Gaberdiel [13] analysieren zu diesem Zweck das Fusionstensorprodukt, Gaberdiel und Goddard [23] stellen Zhus Theorie in den Rahmen ihrer axiomatischen Grundlegung der konformen Feldtheorie.

Der in der vorliegenden Arbeit gewählte Zugang zur assoziativen Zhu-Algebra ist rein elementar und orientiert sich an drei Fragen:

1. Zhu stattet die Vakuumdarstellung mit einem besonderen Produkt aus. Was ist die Bedeutung dieses Produktes?

2. Die assoziative Zhu-Algebra ist ein gewisser Quotient der Vakuumdarstellung. Wie kann man diese Konstruktion verstehen?

3. Sowohl die Nullmodenalgebra als auch die assoziative Zhu-Algebra können zur Klassifikation von Darstellungen benutzt werden. Was ist der Zusammenhang zwischen diesen Algebren?

Die Klärung dieser Fragen ist Gegenstand des zweiten bis vierten Kapitels.

Das fünfte Kapitel behandelt die kommutative (und assoziative) Algebra, die Zhu in seiner Arbeit definiert — und die bisher von physikalischer Seite kaum Beachtung gefunden hat (siehe jedoch [10, 32]). Zwar macht diese kommutative Zhu-Algebra im Vergleich zur assoziativen Zhu-Algebra nur schwächere Aussagen über die zugrundeliegende konforme Feldtheorie [4], ihre Berechnung ist jedoch einfacher: Kommutative und assoziative Algebren sind polynomial, was das Spektrum der zu Verfügung stehenden Methoden erheblich erweitert [5].

[4] Ihre Dimension ist eine obere Schranke für die Anzahl der irreduziblen Darstellungen.

[5] Als Stichwort sei hier nur die Methode der Gröbner-Basen genannt.

Die assoziative Zhu-Algebra hat im Laufe der Zeit einige Verallgemeinerungen erfahren: Kac und Wang machen Zhus Methode 1994 für Vertexoperatorsuperalgebren verfügbar [28], Dong, Li und Mason übertragen sie 1995 auf getwistete Vertexoperatoralgebren (Orbifold-Theorien) [12]. Schließlich gelingt den letztgenannten Autoren 1996 die Verallgemeinerung des Verfahrens auf eine große Klasse von Nicht-Tiefstgewichtsdarstellungen [11]. Das sechste Kapitel der vorliegenden Arbeit ist diesen verallgemeinerten Zhu-Algebren gewidmet.

Kapitel 2

Konforme Feldtheorie

2.1 Vertexoperatoralgebren

2.1.1 Definition

Als unverzichtbare Bestandteile einer zweidimensionalen (chiralen) konformen Feldtheorie gelten [24]:

- ein Isomorphismus zwischen dem Raum der Zustände und dem Raum der Felder
- konforme Symmetrie, eingerichtet mit Hilfe eines Feldes, dessen Moden eine Virasoro-Algebra bilden
- ein festgelegtes Transformationsverhalten der Felder unter Dilatationen und Translationen
- die Dualitätsrelation

Die vorliegende Arbeit stützt sich auf den Formalismus der Vertexoperatoralgebren [4, 16, 18]. Die Besonderheit dieser Formulierung der konformen Feldtheorie liegt darin, daß Felder als formale Potenzreihen behandelt werden. Dadurch bleiben analytische Fragestellungen wie Konvergenz zunächst (aber nicht prinzipiell) ausgeklammert, und die algebraische Struktur der Theorie tritt deutlich zutage. Im folgenden beschreiben wir, wie Vertexoperatoralgebren die oben genannten Eigenschaften im einzelnen modellieren:

- Der **Zustandsraum** V ist ein $\mathbb{N}$-graduierter komplexer Vektorraum $V = \bigoplus_{h\in\mathbb{N}} V_h$. Gelegentlich werden wir V als $\mathbb{Z}$-graduierten Vektorraum $V = \bigoplus_{h\in\mathbb{Z}} V_h$ mit $V_h = 0$ für $h < 0$ auffassen, und zwar ohne daß wir dies ausdrücklich erwähnen. Zustände $\phi \in V_h$ nennen wir homogen. Wir bezeichnen mit $\mathrm{End}(V)\{z\}$ die formalen Potenzreihen in z mit ganzzahligen Exponenten und Koeffizienten in End(V). Der **Raum der Felder** $\mathcal{F}$ ist ein Unterraum von End(V)$\{z\}$. Der lineare Isomorphismus $Y\colon V \to \mathcal{F}$ bildet einen Zustand ϕ auf das Feld $Y(\phi)$ ab. Um die Abhängigkeit von der formalen Variablen z zu verdeutlichen, schreiben wir für $Y(\phi)$ meist $Y(\phi, z)$ oder kurz $\phi(z)$. Für einen homogenen Zustand $\phi \in V_h$ definieren wir die **Feldmoden** $\phi_n \in \mathrm{End}(V)$ gemäß

$$\phi(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n \, z^{n-h}. \tag{2.1}$$

Wir setzen die Modenabbildung $\phi \mapsto \phi_n$ linear $(\phi+\psi)_n = \phi_n+\psi_n$ auf inhomogene Zustände fort.

- Es gibt in V zwei ausgezeichnete Zustände. Dies ist zum einen das **Vakuum** $\Omega \in V_0$ mit
$$Y(\Omega, z) = \mathrm{id}$$
und zum anderen der **Virasoro-Zustand** $L \in V_2$, dessen Feldmoden eine Virasoro-Algebra
$$[L_m, L_n] = (n-m)L_{m+n} + \frac{c}{2}\binom{n+1}{3}\delta_{m+n} \tag{2.2}$$
mit einer gewissen zentralen Ladung $c \in \mathbb{C}$ bilden.

- Die Felder transformieren sich unter **Dilatationen** gemäß
$$Y(L_0\phi, z) = h\, Y(\phi, z) \Leftrightarrow L_0\phi = h\, \phi \tag{2.3}$$
für $\phi \in V_h$. Die Graduierung von V stimmt also mit der Eigenraumzerlegung von L_0 überein. $h = h_\phi$ ist die **konforme Dimension** des Zustandes ϕ.

  Die Felder transformieren sich unter **Translationen** gemäß
$$Y(L_1\phi, z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} Y(\phi, z). \tag{2.4}$$
Wir schreiben deshalb meist $\partial\phi$ anstelle von $L_1\phi$ [1].

  Felder, die sich außerdem unter speziellen konformen Transformationen gemäß
$$Y(L_{-1}\phi, z) = 0 \Leftrightarrow L_{-1}\phi = 0$$
transformieren, heißen **quasiprimär**.

[1] Eine **Vertexalgebra** besitzt kein Virasoro-Feld, sondern nur einen Operator $\partial \in \mathrm{End}(V)$ mit $Y(\partial\phi, z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} Y(\phi, z)$ [4, 31].

- Schließlich gilt die **Dualitätsrelation** [2]

$$\begin{aligned} Y(\phi(z-w)\psi, w) &= \left\{ \begin{array}{ll} \phi(z)\psi(w) & \text{für } |z| > |w| \\ \psi(w)\phi(z) & \text{für } |z| < |w| \end{array} \right\} \\ &= :\!\phi(z)\psi(w)\!:. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Die Gleichung ist in dem Sinne zu verstehen, daß linke und rechte Seite bei Integration das gleiche Ergebnis liefern; genauer gilt

$$\oint\limits_{C(w)} \mathrm{d}z\, f(z,w)\, Y(\phi(z-w)\psi, w) = \oint\limits_{C(w)} \mathrm{d}z\, f(z,w)\, :\!\phi(z)\psi(w)\!:$$

für alle rationalen Funktionen $f(z,w)$, deren Pole bei $z = w$, $z = 0$ oder $w = 0$ liegen.

Bemerkung: Wir verwenden das gemäß $\oint \frac{\mathrm{d}z}{z} = \oint_{C(0)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = 1$ normierte Cauchy-Integral. Wenn wir Cauchy-Integrale schreiben, meinen wir eigentlich die Residuenbildung bei formalen Potenzreihen. Unsere Schreibweise wird in Anhang A näher erläutert.

Die Eigenschaften von Vertexoperatoralgebren sind hiermit vollständig beschrieben. Aus physikalischen Gründen beschränken wir uns in der vorliegenden Arbeit auf Vertexoperatoralgebren, die nur *einen* Zustand mit verschwindender konformer Dimension (nämlich das Vakuum) besitzen:

$$V_0 = \mathbb{C}\Omega$$

Die Dualitätsrelation (2.5) ist bekanntlich äquivalent zur **Operatorproduktentwicklung** der konformen Feldtheorie:

$$\begin{aligned} :\!\phi(z)\psi(w)\!: &= Y(\phi(z-w)\psi, w) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (z-w)^{n-h_\phi}\, Y(\phi_n\psi, w) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (z-w)^{n-h_\phi-h_\psi}\, \chi^{(n)}(w) \end{aligned}$$

mit $\chi^{(n)} = \phi_{n-h_\psi}\psi$.

2.1.2 Folgerungen

Der Kommutator der Feldmoden $[\phi_m, \psi_n] = \phi_m\psi_n - \psi_n\phi_m \in \mathrm{End}(V)$ kann mit Hilfe der Dualitätsrelation berechnet werden. Man erhält

$$\begin{aligned} [\phi_m, \psi_n] &= \sum_{i<h_\phi} \binom{h_\phi - m - 1}{h_\phi - i - 1} (\phi_i\psi)_{m+n} \\ &= \left(\oint \mathrm{d}z\, (1+z)^{h_\phi - m - 1}\, \phi(z)\psi \right)_{m+n}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

[2] Die Dualitätsrelation wird in der mathematischen Literatur meist Jacobi-Identität genannt.

Insbesondere ist
$$[L_0, \phi_n] = n\,\phi_n \tag{2.7}$$
und
$$[L_1, \phi_n] = (n - h_\phi + 1)\phi_{n+1}. \tag{2.8}$$

Ebenfalls aus der Dualitätsrelation gewinnt man die Feldmoden von $\phi_m\psi$ [3]:
$$(\phi_m\psi)_n = \sum_{i\geq m} \binom{i-h_\phi}{i-m}\,\phi_i\psi_{n-i} + (-1)^{m-h_\phi} \sum_{i<h_\phi} \binom{m-i-1}{h_\phi-i-1}\psi_{n-i}\phi_i \tag{2.9}$$

Speziell für $\psi = \Omega$ folgt
$$\phi_n\Omega = 0 \text{ für } n < h_\phi, \tag{2.10}$$
$$\phi_{h_\phi}\Omega = \phi, \tag{2.11}$$
$$\phi_{h_\phi+n}\Omega = \frac{1}{n!}L_1^n\phi \tag{2.12}$$
und
$$\phi(z)\Omega = \mathrm{e}^{zL_1}\phi. \tag{2.13}$$
Im allgemeinen Fall erhält man
$$\phi(z)\psi = \mathrm{e}^{zL_1}\psi(-z)\phi. \tag{2.14}$$

Mit Hilfe von (2.7) und (2.11) zeigt man
$$\phi_n V_h \subset V_{h+n}, \tag{2.15}$$
die Numerierung der Feldmoden paßt also zur $\mathbb{Z}$-Graduierung von V.

Bemerkung: Die in der mathematischen Literatur übliche Numerierung der Feldmoden gemäß
$$\phi(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_{(n)}\, z^{-n-1} \tag{2.16}$$
paßt *nicht* zur Graduierung von V. Ein gewisser Vorteil dieser Konvention besteht darin, daß die Moden unabhängig von der konformen Dimension des Feldes definiert sind. Dies erlaubt es, auch inhomogene Felder in der Form (2.16) zu schreiben, während dies in der Form (2.1) nicht möglich ist. Ein Feld $\phi(z)$ verschwindet genau dann, wenn alle seine Feldmoden $\phi_{(n)}$ verschwinden. Daß dies auch für die Feldmoden ϕ_n gilt, bedarf hingegen einer kurzen Begründung:

Sei $\phi = \phi^{(0)} + \cdots + \phi^{(r)}$ ein inhomogener Zustand mit $\phi^{(h)} \in V_h$. Aus
$$\phi_n = \sum_{h=0}^{r} \phi^{(h)}_{(h-n-1)} = 0$$

[3] Die unendliche Summe auf der rechten Seite der Gleichung ist als Element von $\mathrm{End}(V)$ wohldefiniert, da angewendet auf $\chi \in V_l$ nur endlich viele Summanden ein von Null verschiedenes Ergebnis liefern.

für alle $n \in \mathbb{Z}$ erhält man durch wiederholtes Bilden des Kommutators mit L_1

$$\sum_{h=0}^{r} h^i \, \phi^{(h)}_{(h-n-1)} = 0$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle $i \in \mathbb{N}$ [35]. Da die Vandermonde-Matrix $(h^i)_{h,i\in\{0,\dots,r\}}$ invertierbar ist, folgt $\phi(z) = 0$.

2.2 Darstellungen

Wir stellen eine Vertexoperatoralgebra V dar, indem wir die Feldmoden auf die Zustände eines Darstellungsraumes M wirken lassen: Die lineare Abbildung $Y^M\colon V \to \mathrm{End}(M)\{z\}$ ordnet jedem Zustand $\phi \in V_h$ ein Feld

$$Y^M(\phi, z) = \phi^M(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi^M_n \, z^{n-h}$$

zu, dessen Moden ϕ^M_n die Zustände $v \in M$ ineinander abbilden. Die im ersten Abschnitt für Y formulierten Eigenschaften fordern wir analog für Y^M:

$$Y^M(\Omega, z) = \mathrm{id} \tag{2.17}$$

$$[L^M_m, L^M_n] = (n-m)L^M_{m+n} + \frac{c}{2}\binom{n+1}{3}\delta_{m+n} \tag{2.18}$$

$$Y^M(L_0\phi, z) = h_\phi \, Y^M(\phi, z) \tag{2.19}$$

$$Y^M(L_1\phi, z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} Y^M(\phi, z) \tag{2.20}$$

$$:\!\phi^M(z)\psi^M(w)\!: = Y^M(\phi(z-w)\psi, w) \tag{2.21}$$

Dabei kann auf die Forderung der Eigenschaften (2.18), (2.19) und (2.20) verzichtet werden, da sie aus (2.17) und (2.21) abgeleitet werden können [10]. Die Formeln (2.6) und (2.9) gelten entsprechend für den Kommutator $[\phi^M_m, \psi^M_n]$ und die Feldmoden $(\phi_m\psi)^M_n$. Wenn kein Mißverständnis möglich ist, verzichten wir auf die Kennzeichnung der Feldmoden durch den Darstellungsraum M, schreiben also ϕ_n anstelle von ϕ^M_n.

Ein Unterraum $N \subset M$ ist eine **Unterdarstellung** von M, wenn N durch die Feldmoden ϕ_n in sich abgebildet wird. **Quotienten** M/N von Darstellungen M durch Unterdarstellungen N sowie **direkte Summen** $\bigoplus_{i\in I} M_i$ von Darstellungen M_i ergeben wieder Darstellungen.

Offensichtlich kann die Vertexoperatoralgebra V selbst als Darstellung mit $Y^M = Y$ aufgefaßt werden. Diese Darstellung wird als die **Vakuumdarstellung** der Theorie bezeichnet.

Während in der Vakuumdarstellung jeder Zustand als Summe von L_0-Eigenzuständen geschrieben werden kann, wollen wir dies für allgemeine Darstellungen nicht fordern.

Falls ein Zustand $v \in M$ Eigenzustand von L_0 ist, so nennen wir den entsprechenden Eigenwert $h \in \mathbb{C}$ das **konforme Gewicht** von v. Man zeigt leicht, daß die Anwendung von ϕ_n auf v das konforme Gewicht um n verändert.

Ein Zustand $v \in M$ heißt **Tiefstgewichtszustand**, falls v von allen negativen Feldmoden annihiliert wird. Wir verwenden diese Bezeichnung (mißbräuchlich) auch dann, wenn v nicht Eigenzustand von L_0 ist. Die Menge aller Tiefstgewichtszustände ist

$$\Omega(M) = \{v \in M | \phi_n v = 0 \text{ für alle } \phi \in V, n < 0\}.$$

Von herausragender physikalischer Bedeutung sind die **Tiefstgewichtsdarstellungen**, die von einem Tiefstgewichtszustand v mit konformem Gewicht h erzeugt werden [4]:

$$M = \mathbb{C}\{\phi^{(1)}_{n_1} \dots \phi^{(r)}_{n_r} v | r \in \mathbb{N}, \phi^{(i)} \in V, n_i \in \mathbb{N}\}$$

Ein Zustand $\phi^{(1)}_{n_1} \dots \phi^{(r)}_{n_r} v$ mit **Level** $n = n_1 + \dots + n_r$ hat dann das konforme Gewicht $h + n$. Für Tiefstgewichtsdarstellungen ist folglich

$$M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Eig}(L_0, h + n).$$

Falls der Darstellungsraum M nicht in Eigenräume von L_0 zerfällt, verlangen wir, daß die Zustände von M zumindest nach ihrem Level geordnet werden können. Wir lassen also nur solche Darstellungsräume M zu, die $\mathbb{N}$-graduiert sind

$$M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$$

und bei denen die Feldmoden ϕ_n den Level um n verändern

$$\phi_n M_m \subset M_{m+n} \text{ [5]}.$$

Hinsichtlich der Dimension des Darstellungsraumes M treffen wir keinerlei Einschränkungen. Auch die Teilräume M_n dürfen unendlichdimensional sein.

Bemerkung: Die Darstellungen einer Vertexoperatoralgebra V bilden eine Kategorie. Die Morphismen dieser Kategorie sind lineare Abbildungen $f\colon M \to N$ mit $f\phi^M_n = \phi^N_n f$ und $fM_n \subset N_n$. Kerne und Bilder von Morphismen sind Unterdarstellungen.

Eine Darstellung M heißt **irreduzibel**, falls sie keine echten Unterdarstellungen besitzt, das heißt, falls 0 und M die einzigen Unterdarstellungen sind. Andernfalls heißt M **reduzibel**. M ist **zerlegbar**, falls M isomorph zu einer direkten Summe von irreduziblen Darstellungen ist.

[4] v ist also Eigenzustand der Virasoro-Nullmode L_0. Für die anderen Nullmoden muß dies nicht unbedingt gelten.

[5] Diese Darstellungen heißen in [12] **zulässige** Darstellungen.

Das **Radikal** $\mathrm{Rad}(M)$ einer Darstellung M ist die maximale Unterdarstellung, die M_0 trivial schneidet. Man überzeugt sich leicht, daß

$$\begin{aligned}\mathrm{Rad}(M) &= \{v \in M \,|\, \langle w^*, \phi^{(0)}_{n_0} \ldots \phi^{(r)}_{n_r} v\rangle = 0 \\ &\qquad\qquad \text{für alle } r \in \mathbb{N}, \phi^{(i)} \in V, n_i \in \mathbb{Z}, w^* \in M_0^*\} \\ &= \{v \in M \,|\, \langle w^*, \phi^{(0)}(z_0) \ldots \phi^{(r)}(z_r) v\rangle = 0 \\ &\qquad\qquad \text{für alle } r \in \mathbb{N}, \phi^{(i)} \in V, w^* \in M_0^*\}.\end{aligned}$$

Eine Darstellung M mit $\mathrm{Rad}(M) = 0$ heißt **minimal**. Jeder Darstellung kann eine minimale Darstellung $M/\mathrm{Rad}(M)$ zugeordnet werden. Die zur Vakuumdarstellung von V gehörige minimale Darstellung $V/\mathrm{Rad}(V)$ trägt die Struktur einer Vertexoperatoralgebra, falls $L \notin \mathrm{Rad}(V)$ [6].

Das Radikal enthält alle Tiefstgewichtszustände mit Level $n > 0$. Diese tragen nicht zu den Korrelationsfunktionen

$$\langle w^*, \phi^{(0)}(z_1) \ldots \phi^{(r)}(z_r) v\rangle$$

bei und werden deshalb auch **Nullzustände** genannt.

Zu den minimalen Darstellungen zählen unter anderen die irreduziblen Darstellungen. Unterdarstellungen von minimalen Darstellungen, Quotienten durch Unterdarstellungen sowie direkte Summen sind wieder minimal.

Eine Darstellung M heißt **rekonstruierbar** (vergleiche [33]), falls M minimal ist und von M_0 erzeugt wird. (Die Wahl dieser Bezeichnung klärt sich in Abschnitt 4.2.) Jeder Darstellung kann eine rekonstruierbare Darstellung $\bar{M} = \langle M_0\rangle / \mathrm{Rad}(\langle M_0\rangle)$ zugeordnet werden, wobei $\langle M_0\rangle$ die von M_0 erzeugte Unterdarstellung ist.

Zu den rekonstruierbaren Darstellungen zählen die irreduziblen Darstellungen M mit $M_0 \neq 0$ und die in [37] diskutierten minimalen Jordan-Tiefstgewichtsdarstellungen [7]. Während direkte Summen von rekonstruierbaren Darstellungen stets rekonstruierbar sind, gilt dies in Allgemeinheit weder für Unter- noch für Quotientendarstellungen. *Irreduzible* Unterdarstellungen N von rekonstruierbaren Darstellungen M sind jedoch rekonstruierbar, da sie M_0 nichttrivial schneiden müssen und somit von $N \cap M_0$ erzeugt werden.

Eine Vertexoperatoralgebra V heißt **schwach rational**, wenn jede rekonstruierbare Darstellung zerlegbar ist, das heißt in eine direkte Summe irreduzibler (und somit rekonstruierbarer) Unterdarstellungen aufgespalten werden kann. Eine Vertexoperatoralgebra heißt **rational**, wenn *jede* Darstellung zerlegbar ist [8]. In Abschnitt 4.3 werden wir

[6] Abweichend vom üblichen Sprachgebrauch verlangen wir von der Vakuumdarstellung einer Vertexoperatoralgebra nicht von vorneherein, daß sie minimal oder — gleichbedeutend — irreduzibel ist.

[7] $M = \mathbb{C}\{\phi^{(1)}_{n_1} \ldots \phi^{(r)}_{n_r} v | r \in \mathbb{N}, \phi^{(i)} \in V, n_i \in \mathbb{N}\}$ heißt Jordan-Tiefstgewichtsdarstellung, wenn $v, (L_0 - h\,\mathrm{id})v, \ldots, (L_0 - h\,\mathrm{id})^{k-1}v$ linear unabhängig sind und $(L_0 - h\,\mathrm{id})^k v = 0$ ist (für ein $k \in \mathbb{N}$).

[8] In [12] wurde gezeigt, daß Vertexoperatoralgebren, die in diesem Sinne rational sind, nur endlich viele irreduzible Darstellungen besitzen, so daß wir letzteres nicht eigens fordern müssen (siehe auch Abschnitt 4.3).

ein handhabbares notwendiges *und* hinreichendes Kriterium für schwache Rationalität entwickeln.

2.3 Normalgeordnete Produkte

2.3.1 Definition

In der konformen Feldtheorie wird üblicherweise das normalgeordnete Produkt

$$\phi \circ \psi = N(\phi, \psi) = \oint \mathrm{d}z \, \frac{\phi(z)}{z} \, \psi = \phi_{h_\phi} \psi$$

mit den Feldmoden

$$(\phi \circ \psi)_n = \sum_{i \geq h_\phi} \phi_i \psi_{n-i} + \sum_{i < h_\phi} \psi_{n-i} \phi_i \tag{2.22}$$

verwendet. Eine naheliegende Abwandlung dieses Produktes besteht darin, die Summe nicht bei $i = h_\phi$, sondern bei einem beliebigen $i = k \in \mathbb{Z}$ aufzuspalten:

$$(\phi *_k \psi)_n = \sum_{i \geq k} \phi_i \psi_{n-i} + \sum_{i < k} \psi_{n-i} \phi_i \tag{2.23}$$

Dabei ist zunächst noch unklar, ob überhaupt ein Zustand $\phi *_k \psi \in V$ mit diesen Feldmoden existiert. Unter der Annahme, daß dies der Fall ist, erhält man jedoch [6]

$$\begin{aligned}
\phi *_k \psi &= (\phi *_k \psi)(0)\Omega \\
&= \mathrm{e}^{-L_1} (\phi *_k \psi)(1)\Omega \text{ wegen (2.13)} \\
&= \mathrm{e}^{-L_1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\phi *_k \psi)_n \Omega \\
&= \mathrm{e}^{-L_1} \sum_{i \geq k} \phi_i \psi(1)\Omega + \mathrm{e}^{-L_1} \sum_{i < k} \psi(1) \phi_i \Omega \\
&= \mathrm{e}^{-L_1} \oint_{C(1)} \mathrm{d}z \, \frac{z^{h_\phi - k}}{z - 1} :\phi(z)\psi(1): \Omega \\
&= \oint_{C(1)} \mathrm{d}z \, \frac{z^{h_\phi - k}}{z - 1} :\phi(z - 1)\psi(0): \Omega \\
&= \oint_{C(0)} \mathrm{d}z \, \frac{(1+z)^{h_\phi - k}}{z} \, Y(\phi(z)\psi, 0) \, \Omega \\
&= \oint \mathrm{d}z \, \frac{(1+z)^{h_\phi - k}}{z} \, \phi(z)\psi .
\end{aligned}$$

Es bleibt nachzuweisen, daß

$$\phi *_k \psi = N_k(\phi, \psi) = \oint \mathrm{d}z \, \frac{(1+z)^{h_\phi - k}}{z} \, \phi(z)\psi \tag{2.24}$$

tatsächlich die Feldmoden (2.23) besitzt. (Da in die obige Rechnung nur die Summe $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\phi *_k \psi)_n$ aller Feldmoden eingeht, dürfen wir dies nicht ohne weiteres erwarten.) Für $k = h_\phi$ wissen wir bereits, daß $\phi *_{h_\phi} \psi = \phi \circ \psi$ die gewünschten Feldmoden hat. Die restlichen Fälle $k > h_\phi$ und $k < h_\phi$ folgen mit vollständiger Induktion unter Zuhilfenahme von

$$\begin{aligned}
&(\phi *_{k-1} \psi - \phi *_k \psi)_n \\
&\quad= \left(\oint \mathrm{d}z\,(1+z)^{h_\phi - k}\phi(z)\psi\right)_n \\
&\quad= [\phi_{k-1}, \psi_{n-k+1}] \text{ nach (2.6)} \\
&\quad= \left(\sum_{i\geq k-1}\phi_i\psi_{n-i} + \sum_{i<k-1}\psi_{n-i}\phi_i\right) - \left(\sum_{i\geq k}\phi_i\psi_{n-i} + \sum_{i<k}\psi_{n-i}\phi_i\right).
\end{aligned}$$

Nachdem nun die normalgeordneten Produkte N_k explizit vorliegen, klärt sich auch die Bedeutung des Produktes $\phi * \psi$, das Zhu in [45] verwendet: Es stimmt mit dem normalgeordneten Produkt

$$\phi *_0 \psi = N_0(\phi, \psi) = \oint \mathrm{d}z\,\frac{(1+z)^{h_\phi}}{z}\phi(z)\psi = \sum_{i=0}^{h_\phi}\binom{h_\phi}{i}\phi_i\psi$$

überein.

Zur Verwendung in späteren Kapiteln geben wir schließlich noch die Feldmoden von normalgeordneten Produkten mit mehr als zwei Faktoren an:

$$\left(\phi^{(1)} *_k \cdots *_k \phi^{(r)}\right)_n = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_r\in\mathbb{Z}\\ i_1+\cdots+i_r=n}} {:}\phi^{(1)}_{i_1}\ldots\phi^{(r)}_{i_r}{:} \tag{2.25}$$

Dabei ist für das N_k-Produkt auf der linken Seite und das Feldmoden-Produkt auf der rechten Seite die gleiche Klammerung zu wählen. Für geklammerte Feldmodenprodukte $S = \phi^{(1)}_{i_1}\ldots\phi^{(r)}_{i_r}$ setzen wir $|S| = i_1 + \cdots + i_r$ und definieren die Normalordnung ${:}S{:}$ rekursiv durch

$${:}S\,T{:} = \left\{\begin{array}{ll} {:}S{:}\,{:}T{:} & \text{für } |S| \geq k \\ {:}T{:}\,{:}S{:} & \text{für } |S| < k \end{array}\right\}. \tag{2.26}$$

Für normalgeordnete Produkte $\phi^{(1)} \circ \cdots \circ \phi^{(r)}$ ist abweichend hiervon

$${:}S\,T{:} = \left\{\begin{array}{ll} {:}S{:}\,{:}T{:} & \text{für } |S| \geq h_S \\ {:}T{:}\,{:}S{:} & \text{für } |S| < h_S \end{array}\right\}$$

zu definieren. Dabei ist $h_S = h_{\phi^{(1)}} + \ldots + h_{\phi^{(r)}}$ für $S = \phi^{(1)}_{i_1}\ldots\phi^{(r)}_{i_r}$.

Unsere Darstellung beschränkt sich im folgenden auf die normalgeordneten Produkte N und N_0. Wenn wir V mit dem N-Produkt $\phi\circ\psi$ oder dem N_0-Produkt $\phi*\psi$ ausstatten, so erhalten wir die Algebren $(V,\circ)$ und $(V,*)$. Beide Algebren besitzen als Einselement den Vakuumzustand Ω. Sie sind im allgemeinen weder assoziativ noch kommutativ. Die Berechnung des Kommutators und des Assoziators ist unter anderem Gegenstand der beiden folgenden Unterabschnitte.

2.3.2 Eigenschaften des N-Produktes

Das N-Produkt erfüllt die Produktregel

$$\partial(\phi \circ \psi) = \partial\phi \circ \psi + \phi \circ \partial\psi,$$

das heißt, ∂ ist eine Derivation der Algebra $(V, \circ)$. Der Kommutator des N-Produktes lautet

$$[\phi, \psi] = \phi \circ \psi - \psi \circ \phi = \sum_{i>0} (-1)^{i-1} \frac{1}{i!} \partial^i \phi_{h_\phi - i} \psi \equiv 0 \bmod \partial V. \tag{2.27}$$

Der Assoziator

$$\begin{aligned} A(\phi, \psi, \chi) &= \phi \circ (\psi \circ \chi) - (\phi \circ \psi) \circ \chi \\ &= \phi \circ [\psi, \chi] - [\phi \circ \psi, \chi] + [\phi, \chi] \circ \psi \\ &\equiv 0 \bmod \partial V \circ V \end{aligned} \tag{2.28}$$

kann berechnet werden [9], indem man

$$[\phi_{h_\phi}, \chi_{h_\chi}] = [\phi, \chi]_{h_\phi + h_\chi} \tag{2.29}$$

auf den Zustand ψ anwendet.

Aus (2.29) folgt im übrigen, daß der Kommutator $[.,.]$ die Jacobi-Identität erfüllt [35]:

$$\begin{aligned} [[\phi, \psi], \chi] + \text{zykl.} &= [[\phi, \psi], \chi]_{h_\phi + h_\psi + h_\chi} \Omega + \text{zykl.} \\ &= [[\phi_{h_\phi}, \psi_{h_\psi}], \chi_{h_\chi}] \Omega + \text{zykl.} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Für eine nicht assoziative Algebra ist dies eine durchaus bemerkenswerte Eigenschaft.

2.3.3 Eigenschaften des N_0-Produktes

Die Algebra $(V, *)$ besitzt die Derivation $\mathrm{d} = L_0 + L_1$, es gilt also

$$\mathrm{d}(\phi * \psi) = \mathrm{d}\phi * \psi + \phi * \mathrm{d}\psi.$$

Für den Kommutator ergibt sich

$$\begin{aligned} [\![\phi, \psi]\!] &= \phi * \psi - \psi * \phi \\ &= \oint \mathrm{d}z\, (1+z)^{h_\phi - 1} \phi(z)\psi - \mathrm{d} \oint \mathrm{d}z\, \frac{(1+z)^{h_\psi}}{z} Q(z)\phi(-z)\psi \\ &\equiv \oint \mathrm{d}z\, (1+z)^{h_\phi - 1} \phi(z)\psi \bmod \mathrm{d}V \end{aligned} \tag{2.30}$$

[9] Wir bezeichnen mit $\partial V \circ V$ den von $\{\partial\phi \circ \psi | \phi, \psi \in V\}$ erzeugten Unterraum von V.

mit
$$Q(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} z^n \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N}\\ i+j=n-1}} (-L_0-1)_i L_1^j \in \mathrm{End}(V)\{z\}^{10}.$$

Inbesondere ist
$$[\![L,\phi]\!] \equiv \mathrm{d}\phi \equiv 0 \bmod \mathrm{d}V. \tag{2.31}$$

Zum Beweis ersetzen wir zunächst in
$$\psi * \phi = \oint \mathrm{d}w \, \frac{(1+w)^{h_\psi}}{w} \, \psi(w)\phi$$

$\psi(w)\phi$ durch $\mathrm{e}^{wL_1}\phi(-w)\psi$ (siehe (2.14)) und erhalten
$$\psi * \phi = \oint \mathrm{d}w \, \frac{(1+w)^{h_\psi}}{w} \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-w)^{i-h_\phi} \mathrm{e}^{wL_1} \phi_i \psi.$$

Eine kurze Rechnung zeigt, daß
$$\mathrm{e}^{wL_1}\chi = (1+w)^{-L_0}\chi + \mathrm{d}\, Q(w)\chi$$

für alle $\chi \in V$. Damit wird
$$\psi * \phi = \oint \mathrm{d}w \, \frac{(1+w)^{-h_\phi}}{w} \, \phi(-\frac{w}{1+w})\psi + \mathrm{d} \oint \mathrm{d}w \, \frac{(1+w)^{h_\psi}}{w} \, Q(w)\phi(-w)\psi.$$

Die Substitution $1+w = (1+z)^{-1}, \mathrm{d}w/w = (1+z)\mathrm{d}z/z$ im ersten Integral liefert
$$\psi * \phi = \oint \mathrm{d}z \, \frac{(1+z)^{h_\phi - 1}}{z} \, \phi(z)\psi + \ldots$$

Wenn wir dies schließlich von
$$\phi * \psi = \oint \mathrm{d}z \, \frac{(1+z)^{h_\phi}}{z} \phi(z)\psi$$

abziehen, erhalten wir (2.30).

Der Assoziator des N_0-Produktes ist
$$A(\phi,\psi,\chi) = \phi * (\psi * \chi) - (\phi * \psi) * \chi = R(\phi,\psi)\chi + R(\psi,\phi)\chi \tag{2.32}$$

mit
$$\begin{aligned} R(\phi,\psi)\chi &= \oint \mathrm{d}z \oint \mathrm{d}w \frac{(1+z)^{h_\phi}(1+w)^{h_\psi}}{z(z-w)} \phi(z)\psi(w)\chi \\ &= \sum_{k\geq 1} \phi \diamond_k (\psi \diamond_{-k} \chi). \end{aligned}$$

[10]Für $x(x-1)\ldots(x-i+1)$ schreiben wir abkürzend $(x)_i$.

Dabei haben wir zur Abkürzung

$$\phi \diamond_k \psi = \oint \mathrm{d}z \frac{(1+z)^{h_\phi}}{z^{k+1}} \phi(z)\psi = \sum_{i=0}^{h_\phi} \binom{h_\phi}{i} \phi_{i+k}\psi$$

definiert.

Die Beziehungen (2.30) und (2.32) gehen auf [45] zurück. Gleiches gilt für die Beobachtung, daß

$$\phi \diamond_k \psi \equiv 0 \bmod \mathrm{d}V * V \tag{2.33}$$

für alle $k \geq 1$ und alle $\phi, \psi \in V$ und somit

$$A(\phi, \psi, \chi) \equiv 0 \bmod \mathrm{d}V * V.$$

Mit Hilfe einer partiellen Integration zeigt man leicht die Rekursionsformel

$$k\phi \diamond_k \psi = \mathrm{d}\phi \diamond_{k-1} \psi - (k-1)\phi \diamond_{k-1} \psi, \tag{2.34}$$

die sich für $k = 1$ auf

$$\phi \diamond_1 \psi = \mathrm{d}\phi * \psi. \tag{2.35}$$

reduziert. Die Kongruenz (2.33) gilt also für $k = 1$, und die übrigen Fälle $k > 1$ folgen mit vollständiger Induktion.

Es fällt auf, daß der Assoziator (2.32) symmetrisch in seinen ersten beiden Argumenten ist [11]. Wegen

$$[\![[\![\phi, \psi]\!], \chi]\!] + \text{zykl.} = A(\psi, \phi, \chi) - A(\phi, \psi, \chi) + \text{zykl.}$$

hat dies zur Folge, daß der Kommutator $[\![., .]\!]$ die Jacobi-Identität erfüllt.

2.4 Lie-Algebra der Feldmoden

Die Moden der Felder $\phi(z)$ sind bis hierhin Endomorphismen der Vakuumdarstellung oder eines allgemeinen Darstellungsraumes gewesen. In beiden Fällen bilden die Feldmoden eine Lie-Algebra mit dem Lie-Produkt $[\phi_m, \psi_n] = \phi_m\psi_n - \psi_n\phi_m$. Es ist jedoch möglich, die Lie-Algebra $\hat{V}$ der Feldmoden ohne Rückgriff auf Darstellungen zu definieren [4, 12]:

Sei dazu $L(V) = V \otimes_{\mathbb{C}} [t, t^{-1}]$ der Vektorraum der Laurent-Polynome mit Koeffizienten in V. Dieser Vektorraum wird aufgespannt von den formalen Feldmoden $\phi(n) = \phi \otimes t^{h_\phi - n - 1}$. $L(V)$ erhält eine $\mathbb{Z}$-Graduierung, indem man $\phi(n)$ den Grad n verleiht. Der Ableitungsoperator $\partial = L_1 \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ erhöht den Grad um 1:

$$\begin{aligned} \partial(\phi(n-1)) &= \partial(\phi \otimes t^{h_\phi - n}) \\ &= (\partial\phi) \otimes t^{h_\phi - n} + (h_\phi - n)\phi \otimes t^{h_\phi - n - 1} \\ &= (\partial\phi)(n) + (h_\phi - n)\phi(n) \\ &= (\mathrm{d}\phi)(n) - n\phi(n). \end{aligned}$$

[11] Dies gilt im übrigen auch für den Assoziator des N-Produktes.

Man erhält nun die Lie-Algebra $\hat{V}$, indem man $L(V)/\partial L(V)$ in Anlehnung an (2.6) mit dem Lie-Produkt

$$\begin{aligned}[\phi(m),\psi(n)] &= \sum_{i<h_\phi}\binom{h_\phi-m-1}{h_\phi-i-1}(\phi_i\psi)(m+n) \\ &= \left(\oint \mathrm{d}z\,(1+z)^{h_\phi-m-1}\,\phi(z)\psi\right)(m+n)\end{aligned}$$

ausstattet. In $\hat{V}$ gilt die Beziehung

$$(\mathrm{d}\phi)(n) = n\phi(n). \tag{2.36}$$

$\hat{V}$ besitzt die Dreieckszerlegung

$$\hat{V} = \hat{V}_+ \oplus \hat{V}_0 \oplus \hat{V}_-$$

in Lie-Unteralgebren

$$\begin{aligned}\hat{V}_\pm &= \mathbb{C}\{\phi(m)|\phi\in V, \pm m>0\}, \\ \hat{V}_0 &= \{\phi(0)|\phi\in V\}.\end{aligned}$$

Von besonderer Bedeutung wird die Nullmoden-Lie-Algebra

$$\hat{V}_0 = L(V)_0/(\partial L(V))_0 = \{\phi(0)|\phi\in V\}/\{\mathrm{d}\phi(0)|\phi\in V\}$$

sein. Das Lie-Produkt von Nullmoden lautet

$$[\phi(0),\psi(0)] = \left(\oint \mathrm{d}z\,(1+z)^{h_\phi-1}\,\phi(z)\psi\right)(0).$$

Bemerkenswerterweise ist der auf der rechten Seite auftretende Zustand

$$\oint \mathrm{d}z\,(1+z)^{h_\phi-1}\,\phi(z)\psi \equiv [\![\phi,\psi]\!] \bmod \mathrm{d}V$$

(vergleiche (2.30)). Da in $\hat{V}_0$ Nullmoden von derivativen Zuständen verschwinden, folgt

$$[\phi(0),\psi(0)] = [\![\phi,\psi]\!](0).$$

Die Abbildung $f\colon V/\mathrm{d}V \to \hat{V}_0, [\phi]\mapsto \phi(0)$ ist also ein surjektiver Homomorphismus von Lie-Algebren. Es stellt sich heraus, daß f sogar ein Isomorphismus ist [12]: Aus der Gleichheit $\phi(0)=0$ in $\hat{V}_0 = L(V)_0/(\partial L(V))_0$ folgt die Gleichheit $\phi(0) = (\mathrm{d}\psi)(0)$ in $L(V)_0$ für ein geeignetes $\psi\in V$. Wenn wir $\chi = \phi - \mathrm{d}\psi$ als Summe von homogenen Anteilen $\chi^{(h)}\in V_h$ schreiben, erhalten wir

$$\chi(0) = (\chi^{(0)}+\cdots+\chi^{(r)})(0) = \chi^{(0)}\otimes t^{-1}+\cdots+\chi^{(r)}\otimes t^{r-1} = 0.$$

Ein Laurent-Polynom kann jedoch nur verschwinden, wenn alle seine Koeffizienten Null sind. Folglich ist $\chi = \phi - \mathrm{d}\psi = 0$ und $\phi\in\mathrm{d}V$. Damit ist die Injektivität der Abbildung f bewiesen.

Bemerkung: Wir unterscheiden sorgfältig zwischen den Feldmoden $\phi(n)$ der Lie-Algebra $\hat{V}$ und den entsprechenden Feldmoden ϕ_n einer Darstellung.

2.5 Universelle einhüllende Algebra

Die hier vorgestellte Konstruktion ist an [19] und [29] angelehnt, jedoch dadurch vereinfacht, daß sie die Existenz der universellen einhüllenden Algebra von Lie-Algebren ausnutzt:

Sei $E(V)$ die universelle einhüllende Algebra der Lie-Algebra $\hat{V}$ [7]. $E(V)$ spiegelt wesentliche Eigenschaften der Vertexoperatoralgebra V nicht wider. Zwar gilt in $E(V)$ die Kommutatorrelation

$$[\phi(m), \psi(n)] = \sum_{i<h_\phi} \binom{h_\phi - m - 1}{h_\phi - i - 1} (\phi_i \psi)(m+n),$$

die zur Berechnung der Feldmoden $(\phi_m \psi)(n)$ notwendige Relation

$$(\phi_m \psi)(n) = \sum_{i \geq m} \binom{i - h_\phi}{i - m} \phi(i)\psi(n-i) + (-1)^{m-h_\phi} \sum_{i<h_\phi} \binom{m - i - 1}{h_\phi - i - 1} \psi(n-i)\phi(i)$$

ist in $E(V)$ jedoch nicht erfüllt. Wenn wir diese Relation der universellen einhüllenden Algebra auferlegen wollen, so ist $E(V)$ zunächst geeignet zu vervollständigen, da die unendlichen Summen auf der rechten Seite nur als Endomorphismen eines Darstellungsraumes wohldefiniert sind:

Wir bezeichnen mit

$$E(V)_n = \mathbb{C}\{\phi^{(1)}(n_1) \dots \phi^{(r)}(n_r) | r \in \mathbb{N}, n_1 + \dots + n_r = n\}$$

die Elemente von $E(V)$ mit Grad n und mit

$$E(V)_n^k = \bigcup_{i \geq k} E(V)_{n+i} E(V)_{-i} \subset E(V)_n$$

jene Elemente, die Darstellungszustände $v \in M_l$ mit Level $l < k$ annihilieren. Dann ist $\|S\|_n = \inf\{2^{-k} | S \in E(V)_n^k\}$ eine Pseudonorm auf dem Ring $E(V)_n$ und folglich $\mathrm{d}(S,T) = \|S - T\|$ eine Metrik [1]. $\bar{E}(V)_n$ sei die Vervollständigung von $E(V)_n$ bezüglich dieser Metrik.

Wir implementieren nun die vollständigen Darstellungsrelationen

$$\begin{aligned} :\phi^M(z)\psi^M(w): &= Y^M(\phi(z-w)\psi, w) \\ Y^M(\Omega, z) &= \mathrm{id} \end{aligned}$$

in $\tilde{E}(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \bar{E}(V)_n$. Diese Relationen sind äquivalent zu den durch Integration

$$\oint_{C(0)} \mathrm{d}w \oint_{C(w)} \mathrm{d}z \, \dots \, (z-w)^{h_\phi - l - 1} w^{h_\psi - m - 1} z^{-n}$$

gewonnenen Relationen in $\bar{E}(V)_{l+m+n}$. Die **universelle einhüllende Algebra** $U(V)$ der Vertexoperatoralgebra V ist der Quotient von $\tilde{E}(V)$ durch das von diesen Relationen erzeugte zweiseitige Ideal. Wir bezeichnen das Bild von $\bar{E}(V)_n$ und $\bar{E}(V)_n^k$ in $U(V)$ mit $U(V)_n$ beziehungsweise $U(V)_n^k$.

Die Universalität der Algebra $U(V)$ besteht darin, daß *alle* Darstellungen M von V als $\mathbb{N}$-graduierte Darstellungen von $U(V)$ aufgefaßt werden können. (Eine Darstellung von $U(V)$ heißt $\mathbb{N}$-graduiert, falls $U(V)_m M_n \subset M_{m+n}$.) Umgekehrt ist jede $\mathbb{N}$-graduierte Darstellung von $U(V)$ auch eine Darstellung von V.

Bemerkung: Darstellungen der Algebra $U(V)$ sind in natürlicher Weise $U(V)$-Moduln. Viele Sachverhalte können in der Sprache der Moduln einfacher dargestellt werden als in der Sprache der Darstellungen.

2.6 Erzeugende Unterräume

Wir nennen einen Unterraum $U \subset V$ **erzeugend**, falls

$$V = \mathbb{C}\{\partial^{i_1}\phi^{(1)} \circ (\partial^{i_2}\phi^{(2)} \circ (\ldots \circ (\partial^{i_r}\phi^{(r)} \circ \Omega)\ldots))|r \in \mathbb{N}, i_l \in \mathbb{N}, \phi^{(l)} \in U\}. \qquad (2.37)$$

(Für nicht assoziative Produkte, die wie im vorliegenden Fall von rechts nach links geklammert sind, verzichten wir im folgenden auf die Klammerung.) Wir verlangen von einem erzeugenden Unterraum außerdem, daß er graduiert ist. Ein erzeugender Unterraum heißt **minimal**, falls er keinen Unterraum enthält, der ebenfalls erzeugend ist. Einen Beweis des folgenden Kriteriums findet man in [29].

Kriterium für erzeugende Unterräume: Sei $D(V) = V_+ \circ V_+ + \partial V$ mit $V_+ = \bigoplus_{h>0} V_h$. Ein graduierter Unterraum U ist genau dann erzeugend, wenn $V_+ = U + D(V)$. Ein erzeugender Unterraum U ist genau dann minimal, wenn $V_+ = U \oplus D(V)$.

Das in (2.37) verwendete Erzeugendensystem von V kann noch erheblich verkleinert werden [42]: Wir wählen eine Basis B des erzeugenden Unterraumes U sowie eine beliebige Ordnung $>$ auf $\{\partial^i\phi | i \in \mathbb{N}, \phi \in B\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{C}\{\partial^{i_1}\phi^{(1)} \circ \ldots \circ \partial^{i_r}\phi^{(r)} \circ \Omega | \\ &\qquad r \in \mathbb{N}, i_l \in \mathbb{N}, \phi^{(l)} \in B, \partial^{i_1}\phi^{(1)} \geq \ldots \geq \partial^{i_r}\phi^{(r)}\}. \end{aligned} \qquad (2.38)$$

2.7 W-Algebren

Die physikalisch relevanten Vertexoperatoralgebren werden W-Algebren genannt. Sie zeichnen sich gegenüber allgemeinen Vertexoperatoralgebren dadurch aus, daß ihr Zustandsraum durch wiederholtes Ableiten der quasiprimären Zustände $Q(V) = \ker L_{-1}$ erzeugt werden kann:

$$V = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \partial^k Q(V),$$

Wegen

$$\begin{aligned} V &= Q(V) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} \partial^k Q(V) \\ &= Q(V) \oplus \partial V \\ &= Q(V) + D(V) \end{aligned} \tag{2.39}$$

sind W-Algebren auch im Sinne des vorigen Abschnitts quasiprimär erzeugt.

Die Zerlegung (2.39) des Zustandsraumes in quasiprimäre und derivative Zustände ermöglicht es, $Q(V) \cong V/\partial V$ mit der Struktur einer Algebra auszustatten. Sei dazu $\pi\colon V \to V$ die Projektion auf den direkten Summanden $Q(V)$. Für $[\phi], [\psi] \in V/\partial V$ definieren wir dann

$$[\phi] \circ [\psi] = [\pi(\phi) \circ \pi(\psi)].$$

Dieses Produkt ist im allgemeinen nicht assoziativ, jedoch aufgrund von (2.27) kommutativ.

Eine eingehende Untersuchung der **quasiprimären Algebra** $Q(V)$ findet man zum Beispiel in [15].

2.7.1 Stromalgebren

Zur Festlegung der Bezeichnungen für spätere Kapitel skizzieren wir im vorliegenden Abschnitt die Konstruktion der Stromalgebren.

Sei $\mathbf{g}$ eine einfache komplexe Lie-Algebra mit dualer Coxeter-Zahl g. Wir bezeichnen die höchste Wurzel von $\mathbf{g}$ mit θ und den dazugehörigen Höchstgewichtsvektor mit T. ρ ist die halbe Summe der positiven Wurzeln von $\mathbf{g}$. Wir normieren die Killing-Form auf $(\theta, \theta) = 2$ und wählen eine Orthonormalbasis $u^{(1)}, \ldots, u^{(\dim \mathbf{g})}$ von $\mathbf{g}$.

Die **affine Lie-Algebra**

$$\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}\mathbf{k}$$

ist die Erweiterung der Loop-Algebra $\mathbf{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ durch ein zentrales Element $\mathbf{k}$. Das Lie-Produkt auf $\hat{\mathbf{g}}$ ist gegeben durch

$$[a_m, \mathbf{k}] = 0$$

und

$$[a_m, b_n] = [a, b]_{m+n} + n(a, b)\delta_{m+n}\mathbf{k}.$$

Dabei haben wir zur Abkürzung $a_m = a \otimes t^{-m}$ gesetzt.

Wir unterscheiden nicht zwischen der Lie-Algebra $\mathbf{g}$ und ihrer Einbettung $\mathbf{g} \otimes t^0$ in $\hat{\mathbf{g}}$. Die affine Lie-Algebra $\hat{\mathbf{g}}$ besitzt eine Dreieckszerlegung $\hat{\mathbf{g}} = \hat{\mathbf{g}}_+ \oplus \hat{\mathbf{g}}_0 \oplus \hat{\mathbf{g}}_-$ in Lie-Unteralgebren

$$\hat{\mathbf{g}}_\pm = \mathbb{C}\{a_m | a \in \mathbf{g}, \pm m > 0\}$$

und

$$\hat{\mathbf{g}}_0 = \mathbf{g} \oplus \mathbb{C}\mathbf{k}.$$

Aus jeder affinen Lie-Algebra $\hat{\mathbf{g}}$ kann eine W-Algebra gewonnen werden, deren Vakuumzustand Ω Eigenzustand von $\mathbf{k}$ zum **Level** $k \in \mathbb{C}\backslash\{g\}$ ist:

Sei dazu $U(\hat{\mathbf{g}})$ die universelle einhüllende Algebra der Lie-Algebra $\hat{\mathbf{g}}$. Der vom Vakuumzustand Ω erzeugte Vektorraum $\mathbb{C}\Omega$ kann als $U(\hat{\mathbf{g}}_- \oplus \hat{\mathbf{g}}_0)$-Modul aufgefaßt werden, wenn man neben $\mathbf{k}\Omega = k\Omega$ die Eigenschaften $\hat{\mathbf{g}}_-\Omega = 0$ und $\mathbf{g}\Omega = 0$ fordert. Der $U(\hat{\mathbf{g}})$-Modul

$$\mathbf{g}_k = U(\hat{\mathbf{g}}) \otimes_{U(\hat{\mathbf{g}}_- \oplus \hat{\mathbf{g}}_0)} \mathbb{C}\Omega$$

erhält die Struktur einer W-Algebra, indem man den quasiprimären Zuständen $a_1\Omega \in \mathbf{g}_k$ die **Ströme**

$$Y(a_1\Omega, z) = J^a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, z^{n-1}$$

zuordnet und Y gemäß (2.9) auf ganz $\mathbf{g}_k$ fortsetzt [19]. Der Virasoro-Zustand dieser W-Algebra ist

$$L = \frac{1}{2(k+g)} \sum_{i=1}^{\dim \mathbf{g}} u_1^{(i)} u_1^{(i)} \Omega$$

(Sugawara-Konstruktion) und ihre zentrale Ladung

$$c_k = \frac{k \dim \mathbf{g}}{2(k+g)}.$$

Der maximale echte $\hat{\mathbf{g}}$-Untermodul $J_k = \mathrm{Rad}(\mathbf{g}_k)$ von $\mathbf{g}_k$ wird für $k \in \mathbb{N}$ vom Tiefstgewichtsvektor $T_1^{k+1}\Omega$ erzeugt [27]:

$$J_k = U(\hat{\mathbf{g}}) T_1^{k+1}\Omega. \tag{2.40}$$

Für $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ist $L \notin J_k$, und der irreduzible Quotient $\bar{\mathbf{g}}_k = \mathbf{g}_k / J_k$ trägt ebenfalls die Struktur einer W-Algebra. Die W-Algebren $\mathbf{g}_k$ und $\bar{\mathbf{g}}_k$ werden als **Stromalgebren** bezeichnet.

2.7.2 W_3-Algebra

Die W_3-Algebra ist die durch folgende Eigenschaften charakterisierte W-Algebra:

- Neben dem Virasoro-Zustand $L \in V_2$ gibt es einen weiteren quasiprimären Zustand $W \in V_3$ derart, daß $\mathbb{C}\{L, W\}$ erzeugender Unterraum von V ist.
- Die Kommutatoren der Feldmoden von L und W lauten

$$[L_m, W_n] = (n - 2m) W_{m+n}$$

und

$$[W_m, W_n] = \frac{c}{3}\binom{n+2}{5}\delta_{m+n} + \frac{1}{30}(n-m)(2m^2 - mn + 2n^2 - 8)L_{m+n} + \frac{16}{22+5c}(n-m)\Lambda_{m+n} \qquad (2.41)$$

mit $\Lambda = L \circ L - \frac{3}{10}\partial^2 L$.

Zur expliziten Konstruktion der W_3-Algebra aus diesen Eigenschaften kann man ähnlich wie im vorangegangenen Abschnitt verfahren. Wie dort haben wir zwischen der W-Algebra W_3 und der irreduziblen W-Algebra $\bar{W}_3 = W_3/\mathrm{Rad}(W_3)$ zu unterscheiden.

Kapitel 3

Assoziative Zhu-Algebra

3.1 Definition

Die Untersuchung des normalgeordneten Produktes $N_0(\phi, \psi) = \phi * \psi$ in Abschnitt 2.3 hat gezeigt, daß der Assoziator $\phi * (\psi * \chi) - (\phi * \psi) * \chi$ in $\mathrm{d}V * V$ liegt. Ausgehend von dieser Beobachtung hat Zhu in [45] die nach ihm benannte assoziative Algebra

$$A(V) = (V, *)/\mathrm{d}V * V$$

konstruiert [1]. Zum Nachweis, daß $V/\mathrm{d}V * V$ die Struktur einer assoziativen Algebra trägt, müssen wir uns vergewissern, daß $\mathrm{d}V * V$ ein zweiseitiges Ideal der Algebra $(V, *)$ ist: $\mathrm{d}V * V$ ist ein rechtsseitiges Ideal, da

$$(\mathrm{d}\phi * \psi) * \chi \equiv \mathrm{d}\phi * (\psi * \chi) \equiv 0 \bmod \mathrm{d}V * V,$$

und ein linksseitiges Ideal, da

$$\begin{aligned} \chi * (\mathrm{d}\phi * \psi) &\equiv (\chi * \mathrm{d}\phi) * \psi \bmod \mathrm{d}V * V \\ &= \mathrm{d}(\chi * \phi) * \psi - (\mathrm{d}\chi * \phi) * \psi \\ &\equiv 0 - \mathrm{d}\chi * (\phi * \psi) \\ &\equiv 0 \bmod \mathrm{d}V * V. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\mathrm{d}V * V = \langle \mathrm{d}V \rangle$ das von den derivativen Zuständen $\mathrm{d}V$ erzeugte zweiseitige Ideal. $A(V)$ hat das Einselement $[\Omega]$ und das zentrale Element $[L]$ (siehe (2.31)). $A(V)$ trägt keine Graduierung, da wir durch den nicht graduierten Unterraum $\mathrm{d}V * V$ geteilt haben. $A(V)$ besitzt jedoch eine Filtrierung durch die Unteralgebren $\left[\bigoplus_{h'=0}^{h} V_{h'}\right]$.

[1] Zhu definiert seine assoziative Algebra als $A(V) = V/V \circ_1 V$. Gleichung (2.35) zeigt, daß die hier angegebene Definition mit der ursprünglichen übereinstimmt.

Die Bedeutung der assoziativen Zhu-Algebra für die Darstellungstheorie von Vertexoperatoralgebren gründet auf dem folgenden

Theorem von Zhu [11, 45]: Sei M eine Darstellung von V. Dann wird M_0 durch

$$\pi\colon A(V) \to \mathrm{End}(M_0), [\phi] \mapsto \phi_0^M$$

zu einer Darstellung von $A(V)$. Sei umgekehrt $\pi\colon A(V) \to W$ eine Darstellung von $A(V)$. Dann gibt es eine Darstellung M von V mit $M_0 \cong W$ und $\phi_0^M v = \pi([\phi])v$ für alle $\phi \in V$, $v \in M_0$. Für irreduzible Darstellungen ist die Beziehung zwischen M und W eineindeutig.

3.2 Struktur

Wir zeigen in diesem Abschnitt, wie aus den Restklassen $[\chi] = \chi + \langle \mathrm{d}V \rangle$ der assoziativen Zhu-Algebra $A(V)$ besonders aussagekräftige Repräsentanten ausgewählt werden können.

Sei dazu B eine Basis eines minimalen erzeugenden Unterraumes. Dann kann jedes $\chi \in V$ als Linearkombination der Produkte $\partial^{i_1}\phi^{(1)} \circ \cdots \circ \partial^{i_r}\phi^{(r)}$ mit $\phi^{(l)} \in B$ geschrieben werden [2]. Da der Anteil von $\mathrm{d}^{i_1}\phi^{(1)} * \cdots * \mathrm{d}^{i_r}\phi^{(r)}$ mit höchster konformer Dimension gleich $\partial^{i_1}\phi^{(1)} \circ \cdots \circ \partial^{i_r}\phi^{(r)}$ ist, kann jedes $\chi \in V$ auch durch die Produkte $\mathrm{d}^{i_1}\phi^{(1)} * \cdots * \mathrm{d}^{i_r}\phi^{(r)}$ mit $\phi^{(l)} \in B$ ausgedrückt werden [3]. Alle Produkte, die einen derivativen Zustand $\mathrm{d}^i\phi$ $(i > 0)$ als Faktor enthalten, liegen im Ideal $\langle \mathrm{d}V \rangle = [0]$. Folglich hat jedes $[\chi] \in A(V)$ einen Standardrepräsentanten, der eine Linearkombination der Produkte $\phi^{(1)} * \cdots * \phi^{(r)}$ mit $\phi^{(l)} \in B$ ist. Dies bedeutet insbesondere, daß $A(V)$ als Algebra von $\{[\phi] | \phi \in B\}$ erzeugt wird.

Gelegentlich ist auch ein Standardrepräsentant bezüglich der N-Produkte $\phi^{(1)} \circ \cdots \circ \phi^{(r)}$ mit $\phi^{(l)} \in B$ hilfreich (siehe [19]). Daß dieser existiert und wie er berechnet werden kann, zeigen die folgenden Überlegungen:

Wir wählen eine Ordnung auf $\{\partial^i\phi | i \in \mathbb{N}, \phi \in B\}$ mit der Eigenschaft, daß $\partial^i\phi > \partial^j\psi$, wann immer $i > j$. Im folgenden stellen wir Zustände $\chi \in V$ stets im Erzeugendensystem

$$\{\partial^{i_1}\phi^{(1)} \circ \ldots \circ \partial^{i_r}\phi^{(r)} | r \in \mathbb{N}, i_l \in \mathbb{N}, \phi^{(l)} \in B, \partial^{i_1}\phi^{(1)} \geq \ldots \geq \partial^{i_r}\phi^{(r)}\} \tag{3.1}$$

dar (siehe Abschnitt (2.6)).

[2] Es sei daran erinnert, daß wir nicht assozoative Produkte stets als von rechts nach links geklammert ansehen.

[3] Man zeigt dies leicht durch vollständige Induktion über die konforme Dimension von χ.

Zur Berechnung eines Standardrepräsentanten von $[\chi] \in A(V)$ betrachten wir zunächst den homogenen Anteil von χ mit höchster konformer Dimension. Wir wählen aus ihm einen Summanden $\partial^{i_1}\phi^{(1)} \circ \cdots \circ \partial^{i_r}\phi^{(r)}$ mit $i_1 > 0$ aus, ersetzen diesen mit Hilfe der Beziehung

$$\begin{aligned} \partial^i \phi \circ \psi &= i!\phi_{h_\phi+i}\psi \\ &\equiv i!(-1)^i \sum_{j=1}^{h_\phi} \binom{h_\phi+i-1}{j-1}\binom{h_\phi-j+i-1}{h_\phi-j}\phi_j\psi \bmod \langle \mathrm{d}V\rangle \end{aligned} \tag{3.2}$$

(Herleitung siehe unten) durch eine Summe von Zuständen niedrigerer konformer Dimension und rechnen die Zustände $\phi_j\psi$ mit $j < h_\phi$ in das Erzeugendensystem (3.1) um. Wir wiederholen dies, bis der höchstdimensionale Anteil von χ nur noch aus Summanden mit $i_1, \ldots, i_r = 0$ besteht. Anschließend wenden wir uns den homogenen Anteilen von χ mit niedrigerer konformer Dimension zu und verfahren mit ihnen in der gleichen Weise. So erzeugen wir einen Repräsentanten von $[\chi]$, der eine Linearkombination der Produkte $\phi^{(1)} \circ \cdots \circ \phi^{(r)}$ mit $\phi^{(l)} \in B$ ist.

An dieser Stelle ist der Hinweis angebracht, daß Standardrepräsentanten im allgemeinen *nicht* eindeutig sind.

Zum Beweis der oben verwendeten Beziehung (3.2) nutzen wir aus, daß die Zustände

$$\phi \diamond_k \psi = \sum_{i=0}^{h_\phi} \binom{h_\phi}{i} \phi_{i+k}\psi$$

für $k \geq 1$ in $\mathrm{d}V * V = \langle \mathrm{d}V\rangle$ liegen (siehe (2.33)). Offensichtlich kann $\phi_n\psi$ für $n > h_\phi$ mit Hilfe dieser Zustände modulo $\mathrm{d}V * V$ durch $\phi_1\psi, \ldots, \phi_{h_\phi}\psi$ ausgedrückt werden. Eine explizite Formel hierfür ist bisher nur in Spezialfällen bekannt (siehe zum Beispiel [19]). Wir zeigen nun, daß

$$\phi_n\psi = \sum_{i=1}^{h} f_{h,i}(n)\phi_i\psi + \sum_{k=1}^{n-h} f_{h,h}(n-k)\phi \diamond_k \psi \tag{3.3}$$

für alle $h = h_\phi \in \mathbb{N}$ und alle $n > 0$. Dabei ist

$$(-1)^{n+i} f_{h,i}(n) = p_{h,i}(n) = \binom{n-1}{i-1}\binom{h-n}{h-i}$$

für $i = 1, \ldots, h$ das eindeutig bestimmte Polynom $(h-1)$-ten Grades mit Nullstellen $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, h$ und $p_{h,i}(i) = 1$.

Gleichung (3.3) ist richtig für $n = 1, \ldots, h$, da leere Summen definitionsgemäß verschwinden. Für $n > h$ folgt (3.3) durch vollständige Induktion:

Die Induktionsbehauptung (3.3) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=1}^{n-h-1} f_{h,h}(n-k)\phi \diamond_k \psi &= (\phi \diamond_{n-h} \psi - \phi_n \psi) + \sum_{i=1}^{h} f_{h,i}(n)\phi_i\psi \\
&= \sum_{i=0}^{h-1} \binom{h}{i} \phi_{i+n-h}\psi + \sum_{i=1}^{h} f_{h,i}(n)\phi_i\psi \\
&= \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} \sum_{j=1}^{h} f_{h,j}(i+n-h)\phi_j\psi \\
&\quad + \sum_{i=0}^{h-1} \binom{h}{i} \sum_{k=1}^{i+n-2h} f_{h,h}(i+n-h-k)\phi \diamond_k \psi.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir für $\phi_{i+n-h}\psi$ die Induktionsvoraussetzung eingesetzt und anschließend die Summen zusammengefaßt. Da

$$\sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} (-1)^i p(i) = 0 \tag{3.4}$$

für alle Polynome p mit Grad kleiner h [4], fällt die erste der beiden Doppelsummen weg. Die innere Summation der zweiten Doppelsumme kann wegen $f_{h,h}(i+n-h-k) = 0$ für $k = i+n-2h+1, \ldots, n-h-1$ auf $k = 1, \ldots, n-h-1$ erweitert werden. Die Induktionsbehauptung ist somit äquivalent zu

$$\sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} \sum_{k=1}^{n-h-1} f_{h,h}(i+n-h-k)\phi \diamond_k \psi = 0.$$

Dies folgt wiederum mit Hilfe von (3.4).

3.3 Isomorphie zur Nullmodenalgebra

In Abschnitt 2.4 haben wir gesehen, daß $\hat{V}_0$ und $V/\mathrm{d}V$ isomorphe Lie-Algebren sind. Die assoziative Zhu-Algebra $A(V) = V/\mathrm{d}V * V$ kann, ausgestattet mit dem Lie-Produkt $[\![\phi, \psi]\!] = \phi * \psi - \psi * \phi$, ebenfalls als Lie-Algebra aufgefaßt werden. Wegen $\mathrm{d}V \subset \mathrm{d}V * V$ ist die Lie-Algebra $A(V)$ isomorph zu einem Quotienten der Nullmoden-Lie-Algebra $\hat{V}_0$. Wir können also hoffen, daß $A(V)$ auch als Algebra isomorph zu einer geeigneten definierten Nullmodenalgebra ist. Der Versuch, den Lie-Algebrenhomomorphismus $V/\mathrm{d}V \to \hat{V}_0, [\phi] \mapsto \phi(0)$ zu einem Algebrenhomomorphismus $A(V) \mapsto U(V)_0$ zu machen, scheitert daran, daß erstens

$$(\phi * \psi)(0) = \phi(0)\psi(0) + \sum_{i \geq 1} \phi(i)\psi(-i) + \psi(i)\phi(-i) \neq \phi(0)\psi(0)$$

[4] Zum Beweis betrachte man die Basis $\{(i)_j | j = 0, \ldots, h-1\}$ dieser Polynome.

(siehe (2.23)) und zweitens

$$(\mathrm{d}\phi * \psi)(0) = \sum_{i\geq 1} i(\phi(i)\psi(-i) - \psi(i)\phi(-i)) \neq 0$$

(siehe (2.36)). Beide Male liegen jedoch die störenden Terme im Ideal

$$U(V)_0^1 = \bigcup_{i\geq 1} U(V)_i U(V)_{-i}$$

von $U(V)_0$. Folglich gibt es einen Algebrenhomomorphismus

$$f\colon A(V) \to U(V)_0/U(V)_0^1, [\phi] \mapsto [\phi(0)].$$

Wir zeigen nun, daß f ein Isomorphismus zwischen der assoziativen Zhu-Algebra $A(V)$ und der **Nullmodenalgebra** $Z(V) = U(V)_0/U(V)_0^1$ ist. (Dies wurde bereits in [19] ohne Angabe eines Beweises festgestellt.)

Sei B eine Basis eines (minimalen) erzeugenden Unterraumes. Jede Restklasse von $Z(V)$ hat einen Repräsentanten, der nur aus Nullmoden besteht. Die Algebra $Z(V)$ wird folglich von $\{[\phi(0)] | \phi \in B\}$ erzeugt [5]. Im vorangegangenen Abschnitt wurde gezeigt, daß die Algebra $A(V)$ die Erzeuger $\{[\phi] | \phi \in B\}$ besitzt. Da f die Erzeuger von $A(V)$ auf die Erzeuger von $Z(V)$ abbildet, ist f surjektiv. Die Injektivität von f kann mit Hilfe des Theorems von Zhu (siehe Abschnitt 3.1) bewiesen werden:

Für jedes $\phi \in V$ mit $\phi(0) \in U(V)_0^1$ müssen wir $[\phi] = 0$ zeigen. Wir betrachten dazu die adjungierte Darstellung von $A(V)$

$$\pi\colon A(V) \to \mathrm{End}(A(V)), [\phi] \mapsto ([\psi] \mapsto [\phi * \psi]).$$

Nach dem Theorem gibt es eine Darstellung M von V mit $M_0 = A(V)$ und

$$\phi_0^M v = \pi([\phi])v$$

für alle $\phi \in V, v \in M_0$ [6]. Sei nun $\phi \in V$ mit $\phi(0) \in U(V)_0^1 = \bigcup_{i\geq 1} U(V)_i U(V)_{-i}$ gegeben. Da ϕ_0^M alle Zustände mit Level 0 annihiliert, folgt

$$0 = \pi([\phi])v$$

für alle $v \in M_0$. Wenn wir schließlich $v = [\Omega] \in A(V) = M_0$ wählen, erhalten wir $[\phi] = 0$. Damit ist die Isomorphie zwischen der assoziativen Zhu-Algebra $A(V)$ und der Nullmodenalgebra $Z(V)$ bewiesen.

[5] Dies rechtfertigt im übrigen, $Z(V)$ als Nullmodenalgebra zu bezeichnen.

[6] An dieser Stelle geht entscheidend ein, daß die Dimension von M_0 keinerlei Einschränkungen unterliegt.

Kapitel 4

Nullmodenalgebra

Im vorliegenden Kapitel stellen wir dar, wie die Nullmodenalgebra

$$Z(V) = U(V)_0/U(V)_0^1$$

zur Klassifikation der Darstellungen einer Vertexoperatoralgebra benutzt werden kann.

Sei M eine Darstellung von V, aufgefaßt als $\mathbb{N}$-graduierter $U(V)$-Modul. (Im folgenden nennen wir $\mathbb{N}$-graduierte $U(V)$-Moduln kurz V-Moduln.) Wegen $SM_0 \subset M_0$ für alle $S \in U(V)_0$ ist M_0 ein $U(V)_0$-Modul. Da die Elemente von $U(V)_0^1 = \bigcup_{i \geq 1} U(V)_i U(V)_{-i}$ jeden Zustand in M_0 annihilieren, ist M_0 sogar ein $Z(V)$-Modul. Wir bezeichnen ihn mit $O(M)$.

Bemerkung: O ist ein Funktor von der Kategorie der Darstellungen von V in die Kategorie der Darstellungen von $Z(V)$. In der obigen Argumentation kann M_0 durch den (möglicherweise größeren) Vektorraum $\Omega(M)$ der Tiefstgewichtszustände ersetzt werden. Der Funktor Ω wird jedoch für die Klassifikation von Darstellungen ohne Bedeutung sein.

4.1 Verma-Moduln

Unser Ziel ist nun die Rekonstruktion des V-Moduls M aus dem $Z(V)$-Modul $W = O(M)$. Inwieweit dieses Ziel überhaupt erreichbar ist, klärt sich in Abschnitt 4.2.

Ein $Z(V)$-Modul W ist insbesondere ein $U(V)_0$-Modul. Indem wir $U(V)_-$ alle Zustände von W annihilieren lassen, wird W zu einem Modul über

$$P = U(V)_0 \oplus U(V)_-.$$

Die universelle einhüllende Algebra $U(V)$ ist in natürlicher Weise ein (rechter) P-Modul. Wir definieren nun

$$M(W) = U(V) \otimes_P W$$

als Tensorprodukt der P-Moduln $U(V)$ und W. $M(W)$ trägt die von $U(V)$ induzierte $\mathbb{Z}$-Graduierung

$$M(W) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M(W)_n = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} U(V)_n \otimes W$$

mit $M(W)_n = 0$ für $n < 0$. $M(W)$ ist außerdem ein $U(V)$-Modul. (Dabei wirken Elemente von $U(V)$ von links auf den ersten Faktor des Tensorproduktes.) Insgesamt ergibt sich, daß $M(W)$ ein $\mathbb{N}$-graduierter $U(V)$-Modul, also eine Darstellung von V ist. Wir bezeichnen $M(W)$ als den zu W gehörigen **Verma-Modul** (vergleiche [12]). Er ist charakterisiert durch die folgende

universelle Eigenschaft: Sei M ein V-Modul, W ein $Z(V)$-Modul und $f\colon W \to O(M) = M_0$ ein Homomorphismus von $Z(V)$-Moduln. Dann kann f in eindeutiger Weise zu einem Homomorphismus $F\colon M(W) \to M$ von V-Moduln fortgesetzt werden, das heißt, es gibt ein eindeutiges F mit $F(1 \otimes v) = f(v)$ für alle $v \in W$.

Zum Beweis der Existenz von F erweitert man zunächst den $Z(V)$-Modulhomomorphismus f zu einem Homomorphismus von P-Moduln und nutzt dann die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes aus. Wegen

$$F(S \otimes v) = F(S\,1 \otimes v) = SF(1 \otimes v) = Sf(v)$$

für alle $S \in U(V), v \in W$ ist F eindeutig. Die gleiche Rechnung zeigt auch, daß F surjektiv ist, falls f surjektiv ist und M als $U(V)$-Modul von M_0 erzeugt wird.

Bemerkung: M ist ein Funktor von der Kategorie der Darstellungen von $Z(V)$ in die Kategorie der Darstellungen von V. Die Wirkung dieses Funktors auf die Morphismen ergibt sich aus der universellen Eigenschaft.

4.2 Klassifikationssatz

Jeder Darstellung M von V ist die Darstellung $O(M)$ von $Z(V)$ zugeordnet und jeder Darstellung W von $Z(V)$ die Darstellung $M(W)$ von V. Wir untersuchen nun diese Zuordnungen genauer:

Zunächst stellen wir fest, daß $M(W)_0$ die ursprüngliche Darstellung von $Z(V)$ trägt:

$$O(M(W)) = M(W)_0 = U(V)_0 \otimes W = 1 \otimes U(V)_0 W = 1 \otimes W \cong W \tag{4.1}$$

Sodann bemerken wir, daß die Zuordnung O nicht zwischen einer Darstellung M und der assoziierten rekonstruierbaren Darstellung $\bar{M} = \langle M_0 \rangle / \mathrm{Rad}(\langle M_0 \rangle)$ (siehe Abschnitt 2.2) zu unterscheiden vermag:

$$O(M) = O(\bar{M}) \tag{4.2}$$

Dies bedeutet, daß wir mit Hilfe von O höchstens die rekonstruierbaren Darstellungen klassifizieren können. $M(W)$ ist im allgemeinen *nicht* rekonstruierbar. Die assoziierte rekonstruierbare Darstellung bezeichnen wir mit

$$L(W) = \overline{M(W)} = M(W)/\mathrm{Rad}(M(W)). \tag{4.3}$$

(Man beachte, daß $M(W) = \langle M(W)_0 \rangle$.)

Wir sind nun bereit, den Klassifikationssatz zu formulieren (vergleiche auch [33]).

Klassifikationssatz: Die rekonstruierbaren Darstellungen von V werden vollständig und eindeutig durch die Darstellungen von $Z(V)$ klassifiziert. Den irreduziblen Darstellungen von V entsprechen dabei die irreduziblen Darstellungen von $Z(V)$. Zu jeder rekonstruierbaren Darstellung M von V gehört die Darstellung $O(M)$ von $Z(V)$ und umgekehrt zu jeder Darstellung W von $Z(V)$ die rekonstruierbare Darstellung $L(W)$ von V. Es gilt

$$(O \circ L)(W) \cong W \tag{4.4}$$

für alle Darstellungen W von $Z(V)$ und

$$(L \circ O)(M) \cong M \tag{4.5}$$

für alle *rekonstruierbaren* Darstellungen M von V.

Bemerkung: Die Funktoren O und L sind also zueinander inverse Äquivalenzen der Kategorie der Darstellungen von $Z(V)$ und der Kategorie der rekonstruierbaren Darstellungen von V.

(4.4) folgt unmittelbar aus (4.1) und (4.2). Zum Beweis von (4.5) können wir die universelle Eigenschaft von $M(W)$ ausnutzen: Sei M eine rekonstruierbare Darstellung von V. Die identische Abbildung id: $M_0 \to M_0$ kann zu einem surjektiven Homomorphismus $F\colon M(M_0) \to M$ fortgesetzt werden. Wegen $F|_{M_0} = \mathrm{id}$ liegt $\ker F$ im Radikal $\mathrm{Rad}(M(M_0))$. Folglich gibt es einen surjektiven Homomorphismus $\tilde{F}\colon M \to L(M_0) = M(M_0)/\mathrm{Rad}(M(M_0))$. $\tilde{F}$ ist sogar injektiv, da $\tilde{F}|_{M_0} = \mathrm{id}$ und $\mathrm{Rad}(M) = 0$.

Damit ist der Klassifikationssatz für rekonstruierbare Darstellungen bewiesen. Der Beweis ist erheblich einfacher als derjenige, den Zhu in [45] für sein Theorem gibt. Die Nullmodenalgebra erscheint uns deshalb gegenüber der assoziativen Zhu-Algebra $A(V)$ das natürlichere Klassifikationsobjekt zu sein. Die Stärke des Theorems von Zhu liegt darin, daß aus ihm unmittelbar die Isomorphie $A(V) \cong Z(V)$ gefolgert werden kann (siehe Abschnitt 3.3).

An dieser Stelle sei auch auf den Spezialfall einer kommutativen Nullmodenalgebra $Z(V)$ hingewiesen. (Wegen $[L(0), \phi(0)] = 0$ ist $Z(V)$ kommutativ, sobald V einen erzeugenden Unterraum U mit $\dim U \leq 2$ besitzt.) Dann sind die irreduziblen Darstellungen von $Z(V)$ eindimensional, und die irreduziblen Darstellungen von V werden von einem Tiefstgewichtszustand erzeugt, der Eigenzustand *aller* Nullmoden ist.

4.3 Rationalität

Die Zuordnungen O und L verhalten sich bezüglich direkter Summen additiv:

$$O\left(\bigoplus\nolimits_{i\in I} M^{(i)}\right) = \bigoplus\nolimits_{i\in I} O(M^{(i)})$$

und

$$L\left(\bigoplus\nolimits_{i\in I} W^{(i)}\right) = \bigoplus\nolimits_{i\in I} L(W^{(i)})$$

Folglich ist eine rekonstruierbare Darstellung M genau dann zerlegbar, wenn $O(M)$ eine zerlegbare Darstellung von $Z(V)$ ist.

Eine Vertexoperatoralgebra V ist schwach rational, wenn jede rekonstruierbare Darstellung zerlegbar ist (siehe Abschnitt (2.2)). Dies gilt genau dann, wenn jede Darstellung von $Z(V)$ zerlegbar ist. Letzteres wiederum ist äquivalent zu der Forderung, daß $Z(V)$ halbeinfach ist [8]. Insgesamt ergibt sich das folgende

Kriterium für schwache Rationalität: Eine Vertexoperatoralgebra V ist genau dann schwach rational, wenn $Z(V)$ halbeinfach ist.

Unter milden zusätzlichen Voraussetzungen [1] ist eine halbeinfache Nullmodenalgebra $Z(V)$ auch endlichdimensional [12]. Dann besitzt $Z(V)$ (bis auf Isomorphie) nur endlich viele irreduzible Darstellungen $W^{(1)}, \ldots, W^{(r)}$, und es gilt

$$Z(V) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W^{(i)}) \tag{4.6}$$

(Wedderburn-Theorem [8, 33]). Insbesondere ist die Anzahl der irreduziblen Darstellungen höchstens so groß wie die Dimension von $Z(V)$. Jede rekonstruierbare Darstellung der schwach rationalen Vertexoperatoralgebra V zerfällt in eine direkte Summe der irreduziblen Darstellungen $L(W^{(1)}), \ldots, L(W^{(r)})$.

Leider ist es nicht möglich, aus der endlichen Dimension der Nullmodenalgebra $Z(V)$ auf ihre Halbeinfachheit zurückzuschließen [2]. Die schwächere Folgerung, daß $Z(V)$ und V nur endlich viele irreduzible Darstellungen besitzen, ist jedoch erlaubt [25]. Weiter ist folgende Proposition aus [12] anwendbar: Wenn V nur endlich viele irreduzible Darstellungen hat, dann besitzt jede Darstellung M, die in endlichdimensionale Eigenräume von L_0 zerfällt, eine endliche Kompositionsreihe

$$M = M^{(0)} \supset M^{(1)} \supset \ldots \supset M^{(r)}$$

mit irreduziblen Faktoren $M^{(i)}/M^{(i+1)}$.

[1] Diese sind gegeben, sobald V abzählbare Dimension hat.

[2] Ein Gegenbeispiel findet man in [22]: Die Triplett-W-Algebra ($c = -2$) hat eine endlichdimensionale Nullmodenalgebra und besitzt dennoch eine reduzible rekonstruierbare Darstellung ($\mathcal{R}_0$), die nicht zerlegbar ist.

4.4 Beispiel: Stromalgebren

Man überzeugt sich leicht, daß die Nullmodenalgebra der W-Algebra $\mathbf{g}_k$ die universelle einhüllende Algebra der zugrundeliegenden Lie-Algebra $\mathbf{g}$ ist:

$$Z(\mathbf{g}_k) = U(\mathbf{g})$$

Die Nullmodenalgebra der irreduziblen W-Algebra $\bar{\mathbf{g}}_k = \mathbf{g}_k/\mathrm{Rad}(\mathbf{g}_k)$ ($k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$) ist die halbeinfache Algebra

$$Z(\bar{\mathbf{g}}_k) = U(\mathbf{g})/\left\langle T^{k+1}\right\rangle,$$

wobei $\left\langle T^{k+1}\right\rangle$ das von T^{k+1} erzeugte zweiseitige Ideal bezeichnet.

$\bar{\mathbf{g}}_k$ ist also (schwach) rational. Die irreduziblen Darstellungen von $Z(\bar{\mathbf{g}}_k)$ sind genau die Höchstgewichtsdarstellungen (λ) von $\mathbf{g}$ zu den Gewichten λ mit $(\lambda, \theta) \leq k$. Nach (4.6) ist insbesondere

$$\dim Z(\bar{\mathbf{g}}_k) = \sum_{(\lambda,\theta)\leq k} (\dim(\lambda))^2. \tag{4.7}$$

Die irreduziblen Darstellungen von $\bar{\mathbf{g}}_k$ lauten: $L((\lambda))$ mit $(\lambda, \theta) \leq k$.

4.5 Beispiel: W_3-Algebra

Die Nullmodenalgebra der W_3-Algebra ist die polynomiale Algebra

$$Z(W_3) = \mathbb{C}[L_0, W_0].$$

(Im vorliegenden Abschnitt schreiben wir für Nullmoden in $Z(V)$ ausnahmsweise ϕ_0 anstelle von $\phi(0)$.)

Da $Z(W_3)$ kommutativ ist, sind alle irreduziblen Darstellungen eindimensional $\mathbb{C}v$ und haben die Form

$$L_0 v = hv, W_0 v = wv$$

mit frei wählbaren Eigenwerten $h, w \in \mathbb{C}$. Die irreduziblen Darstellungen von W_3 sind folglich die Tiefstgewichtsdarstellungen mit beliebigen Tiefstgewichten $(h, w) \in \mathbb{C}^2$.

Für eine allgemeine („generische“) Wahl der zentralen Ladung $c \in \mathbb{C}$ ist das Radikal $\mathrm{Rad}(W_3)$ trivial und $Z(\bar{W}_3) = Z(W_3)$. Für spezielle Werte von c treten jedoch in W_3 Nullzustände auf. Es ist dazu zweckmäßig, die zentrale Ladung gemäß

$$c_{p,q} = 50 - 24\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) \tag{4.8}$$

zu parametrisieren. Für teilerfremde $p, q \in \mathbb{N}$ mit $q > p > 2$ erhält man die sogenannte minimale Serie [41].

Zur Berechnung von $Z(\bar{W}_3)$ haben wir eigentlich aus $Z(W_3)$ die Nullmoden ψ_0 *aller* Zustände $\psi \in \mathrm{Rad}(W_3)$ herauszuteilen. Man erhält jedoch bereits starke Aussagen allein durch die Betrachtung eines Nullzustandes ϕ und seines Abkömmlings $W_1\phi$: ϕ_0 und $(W_1\phi)_0$ können in $Z(W_3)$ als Polynome in L_0 und W_0 geschrieben werden:

$$\phi_0 = p(L_0, W_0), (W_1\phi)_0 = q(L_0, W_0)$$

$Z(\bar{W}_3)$ ist dann ein (unbekannter) Quotient von

$$\tilde{Z} = \mathbb{C}[L_0, W_0] / \langle p(L_0, W_0), q(L_0, W_0) \rangle \, .$$

Falls die durch p und q gegebenen Relationen in $Z(W_3)$ unabhängig voneinander sind, ist $\tilde{Z}$ endlichdimensional und besitzt nur endlich viele irreduzible Darstellungen, deren Eigenwerte h und w Lösungen der polynomialen Gleichungen

$$p(h, w) = 0 \text{ und } q(h, w) = 0 \tag{4.9}$$

sind. Die irreduziblen Darstellungen von $Z(\bar{W}_3)$ sind ausnahmslos unter diesen irreduziblen Darstellungen von $\tilde{Z}$ zu suchen, insbesondere gibt es derer nur endlich viele.

Wir haben mit Hilfe des Computeralgebrasystems Mathematica [43] alle Nullzustände ϕ der W_3-Algebra mit Level $n \leq 12$ bestimmt, die bei geeigneter Wahl der zentralen Ladung c auftreten (siehe Anhang B.1). Sodann haben wir die Nullmoden ϕ_0 und $(W_1\phi)_0$ berechnet und die Gleichungen (4.9) gelöst:

Für

$$\begin{aligned} c \;\in\; & \{c_{3,7} = -114/7, c_{3,8} = -23, c_{4,5} = 4/5, c_{3,10} = -186/5, c_{3,11} = -490/11, \\ & c_{4,7} = -40/7, c_{3,13} = -774/13, c_{3,14} = -470/7, c_{5,6} = 6/5\} \end{aligned}$$

besitzt $\tilde{Z}$ nur endlich viele irreduzible Darstellungen (die in Anhang B.2 tabelliert sind). Für

$$c \in \{c_{2,3} = -2, c_{2,5} = -98/5\}$$

ist $\tilde{Z}$ unendlichdimensional und besitzt unendlich viele irreduzible Darstellungen.

Diese Untersuchungen wurden für Nullzustände mit Level $n \leq 6$ bereits in [26] durchgeführt. Unsere Ergebnisse stellen somit eine Erweiterung der dort angegebenen dar.

In [40] wurde bewiesen, daß für $c = -2$ gilt:

$$Z(\bar{W}_3) = \tilde{Z} = \mathbb{C}[L_0, W_0] / \left\langle 2L_0^2 + 16L_0^3 + 27W_0^2 \right\rangle$$

$\bar{W}_3$ besitzt also für $c = -2$ tatsächlich unendlich viele irreduzible Darstellungen und ist insbesondere nicht rational. Die Vermutung liegt nahe, daß dies auch für $c = -98/5$ gilt:

$$Z(\bar{W}_3) = \tilde{Z} = \mathbb{C}[L_0, W_0] / \langle p(L_0, W_0) \rangle$$

mit

$$p(L_0, W_0) = (54L_0^2 + 80L_0^3 + 855W_0^2)(224 + 816L_0 + 990L_0^2 + 400L_0^3 + 4275W_0^2)$$

(vergleiche Anhang B.2)

Kapitel 5

Kommutative Zhu-Algebra

5.1 Definition

In der gleichen Weise, wie wir in Abschnitt 3.1 aus der Algebra $(V, *)$ die assoziative Zhu-Algebra $A(V) = (V, *)/\mathrm{d}V * V$ konstruiert haben, erhalten wir aus der Algebra $(V, \circ)$ eine assoziative (siehe (2.28)) und kommutative (siehe (2.27)) Algebra

$$C(V) = (V, \circ)/\partial V \circ V = (V, \circ)/\left\langle \partial V \right\rangle$$

mit Einselement $[\Omega]$. Im Gegensatz zur filtrierten Algebra $A(V)$ ist die Algebra $C(V)$ sogar graduiert

$$C(V) = \bigoplus_{h \in \mathbb{N}} C_h(V) = \bigoplus_{h \in \mathbb{N}} V_h/(\partial V \circ V) \cap V_h.$$

Die Relevanz dieser Algebra für die konforme Feldtheorie wurde von Zhu in [45] aufgezeigt. Wir bezeichnen sie deshalb als **kommutative Zhu-Algebra**. Von besonderer Bedeutung ist die Dimension der Algebra $C(V)$, und zwar vor allem die Unterscheidung zwischen dem endlichdimensionalen und dem unendlichdimensionalen Fall:

Unter der Voraussetzung, daß V rational und direkte Summe von Virasoro-Tiefstgewichtsdarstellungen sowie $C(V)$ endlichdimensional ist, konnte Zhu in [45] die modulare Invarianz der Darstellungscharaktere beweisen. Die dort aufgestellte Vermutung, $C(V)$ habe für alle rationalen Vertexoperatoralgebren V endliche Dimension, ist bisher unbewiesen, wurde jedoch für wichtige Spezialfälle überprüft (unter anderem für Stromalgebren bei positivem ganzzahligen Level k) [32].

Eine weitere Möglichkeit, die kommutative Zhu-Algebra als Hilfsmittel in der konformen Feldtheorie einzusetzen, ergibt sich daraus, daß ihre Dimension eine obere Schranke für die Dimension der Nullmodenalgebra ist [32]:

$$\dim Z(V) \leq \dim C(V) \tag{5.1}$$

Sobald $C(V)$ endlichdimensional ist, gilt dies auch für $Z(V)$ — mit allen sich daraus ergebenden Konsequenzen (siehe Abschnitt 4.3).

An den Einsatz der kommutativen Zhu-Algebra ist vor allem in der folgenden Situation zu denken: Angenommen es sind irreduzible Darstellungen $M^{(1)}, \ldots, M^{(r)}$ von V bekannt. Stimmt nun die Dimension von $C(V)$ mit $\sum_{i=1}^{r}(\dim M^{(i)})^2$ überein, so folgt aus (4.6) und (5.1), daß diese Liste vollständig ist.

Der folgende Beweis der Abschätzung (5.1) nutzt die Isomorphie zwischen Nullmodenalgebra $Z(V)$ und assoziativer Zhu-Algebra $A(V)$ aus:

Der Vektorraum $A(V) = V/\mathrm{d}V * V$ wird durch die Unterräume $A_h = [V_{\leq h}] = [\bigoplus_{h' \leq h} V'_h]$ filtriert. Der dazugehörige graduierte Vektorraum

$$\bar{A}(V) = \bigoplus_{h \in \mathbb{N}} \bar{A}_d(V) = \bigoplus_{h \in \mathbb{N}} A_h/A_{h-1}$$

besitzt die gleiche Dimension wie $A(V)$.

Wir vergleichen nun die Dimensionen der graduierten Vektorräume $\bar{A}(V)$ und $C(V)$, indem wir die Teilräume

$$\bar{A}_h(V) = A_h/A_{h-1} = V_h/(\mathrm{d}V * V + V_{<h}) \cap V_h$$

und

$$C_h(V) = V_h/(\partial V \circ V) \cap V_h$$

betrachten. Ein Zustand $\partial\phi \circ \psi \in (\partial V \circ V) \cap V_h$ mit konformer Dimension h unterscheidet sich vom Zustand $\mathrm{d}\phi * \psi \in \mathrm{d}V * V$ nur durch Terme kleinerer konformer Dimension. Folglich ist

$$(\partial V \circ V) \cap V_h \subset (\mathrm{d}V * V + V_{<h}) \cap V_h$$

und $\dim \bar{A}_h(V) \leq \dim C_h(V)$.

5.2 Struktur

Sei B eine Basis eines (minimalen) erzeugenden Unterraumes U von V. Wir ordnen die Zustände $\{\partial^i\phi | \phi \in B, i \in \mathbb{N}\}$ wie in Abschnitt 3.2, so daß aus $i > j$ stets $\partial^i\phi > \partial^j\psi$ folgt. Dann ist

$$\{\partial^{i_1}\phi^{(1)} \circ \ldots \circ \partial^{i_r}\phi^{(r)} | r \in \mathbb{N}, i_l \in \mathbb{N}, \phi^{(l)} \in B, \partial^{i_1}\phi^{(1)} \geq \ldots \geq \partial^{i_r}\phi^{(r)}\} \tag{5.2}$$

ein Erzeugendensystem von V [1]. Ein Zustand $\partial^{i_1}\phi^{(1)} \circ \ldots \circ \partial^{i_r}\phi^{(r)}$ mit $i_1 \geq \ldots \geq i_r \geq 0$ liegt genau dann im Ideal $\langle \partial V \rangle = \partial V \circ V$, wenn $i_1 > 0$ ist. Folglich ist

$$\{\partial^{i_1}\phi^{(1)} \circ \ldots \circ \partial^{i_r}\phi^{(r)} | r \in \mathbb{N}, i_l \in \mathbb{N}, i_1 > 0, \phi^{(l)} \in B, \partial^{i_1}\phi^{(1)} \geq \ldots \geq \partial^{i_r}\phi^{(r)}\} \tag{5.3}$$

[1] Es sei nochmals daran erinnert, daß wir nicht assoziative Produkte stets als von rechts nach links geklammert ansehen.

ein Erzeugendensystem von $\langle \partial V \rangle$ und

$$\{[\phi^{(1)} \circ \ldots \circ \phi^{(r)}] | r \in \mathbb{N}, \phi^{(l)} \in B, \phi^{(1)} \geq \ldots \geq \phi^{(r)}\} \tag{5.4}$$

ein Erzeugendensystem von $C(V) = V / \langle \partial V \rangle$.

Dies zeigt, daß die kommutative Zhu-Algebra ein Quotient der polynomialen Algebra mit Erzeugern $\{[\phi] | \phi \in B\}$ ist.

Man beachte, daß (5.3) und (5.4) Basen von $\langle \partial V \rangle$ und $C(V)$ sind, falls (5.2) eine Basis von V ist.

5.3 Beispiel: Stromalgebren

Die Nützlichkeit der Abschätzung (5.1) hängt entscheidend davon ab, wie groß die tatsächliche Differenz der beiden Dimensionen im Einzelfall ist. Im vorliegenden Abschnitt betrachten wir als Beispiel die kommutative Zhu-Algebra $C(\bar{\mathbf{g}}_k)$ der Stromalgebren $\bar{\mathbf{g}}_k$ (siehe Abschnitt 2.7) bei positivem ganzzahligen Level k. Die Eigenschaften dieser Algebra sind bisher nur unvollständig untersucht: Zwar wurde in [32] nachgewiesen, daß die Algebra $C(\bar{\mathbf{g}}_k)$ endliche Dimension hat, ihre explizite Berechnung und die Angabe ihrer genauen Dimension stehen jedoch noch aus.

5.3.1 Berechnung der kommutativen Zhu-Algebra

Wir berechnen zunächst die kommutative Zhu-Algebra $C(\mathbf{g}_k)$ der W-Algebra $\mathbf{g}_k$. Vorab sei daran erinnert, daß $\mathbf{g}_k$ nicht nur eine Algebra bezüglich des normalgeordneten Produktes N ist, sondern auch ein $\mathbf{g}$-Modul. Die Wirkung eines Elementes $a \in \mathbf{g}$ auf $\mathbf{g}_k$ ist dabei durch $a_0 \in \mathrm{End}(\mathbf{g}_k)$ gegeben. Anhand des Erzeugendensystems (5.3) überzeugt man sich leicht, daß $\langle \partial \mathbf{g}_k \rangle$ ein Untermodul des $\mathbf{g}$-Moduls $\mathbf{g}_k$ ist.

Wir zeigen nun, daß $C(\mathbf{g}_k) = \mathbf{g}_k / \langle \partial \mathbf{g}_k \rangle$ als Algebra *und* als $\mathbf{g}$-Modul isomorph zur symmetrischen Algebra

$$S(\mathbf{g}) = \bigoplus_{l \in \mathbb{N}} S^l(\mathbf{g})$$

ist. Dabei ist $S^l(\mathbf{g})$ das l-fache symmetrische Tensorprodukt der adjungierten Darstellung von $\mathbf{g}$.

Um einzusehen, daß der Algebrenhomomorphismus $f\colon S(\mathbf{g}) \to C(\mathbf{g}_k), a^{(1)} \ldots a^{(r)} \mapsto \left[a^{(1)} \circ \ldots \circ a^{(r)}\right]$ ein Isomorphismus ist, wählen wir eine Basis $u^{(1)}, \ldots, u^{(\dim \mathbf{g})}$ von $\mathbf{g}$. Setzt man in (5.2) $B = \{u_1^{(i)}\Omega | i = 1, \ldots, \dim \mathbf{g}\}$, so erhält man nach dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt eine Basis von V. Aus der Bemerkung am Ende des Abschnitts 5.2 folgt, daß

$$\{\left[u^{(j_1)} \circ \cdots \circ u^{(j_r)}\right] | r \in \mathbb{N}, j_1 \geq \ldots \geq j_r\}$$

eine Basis von $C(\mathbf{g}_k)$ ist. f bildet die Basis

$$\{u^{(j_1)} \dots u^{(j_r)} | r \in \mathbb{N}, j_1 \geq \dots \geq j_r\}$$

von $S(\mathbf{g})$ auf diese Basis von $C(\mathbf{g}_k)$ ab, ist also bijektiv. Eine kurze Rechnung zeigt, daß f ein $\mathbf{g}$-Modulhomomorphismus ist:

$$\begin{aligned} a_0 f(a^{(1)} \dots a^{(r)}) &= a_0 a_1^{(1)} \dots a_1^{(r)} \Omega \\ &= [a, a^{(1)}]_1 a_1^{(2)} \dots a_1^{(r)} \Omega + \dots + a_1^{(1)} \dots a_1^{(r-1)} [a, a^{(r)}]_1 \Omega \\ &\quad + a_1^{(1)} \dots a_1^{(r)} a_0 \Omega \\ &= f((\operatorname{ad} a) a^{(1)} \dots a^{(r)}) \end{aligned}$$

Damit ist die Isomorphie $C(\mathbf{g}_k) = S(\mathbf{g})$ bewiesen.

Wir erhalten nun die kommutative Zhu-Algebra $C(\bar{\mathbf{g}}_k)$, indem wir aus $C(\mathbf{g}_k)$ das Radikal $J_k = \operatorname{Rad}(\mathbf{g}_k)$ herausteilen — genauer gesagt dessen Bild $[J_k]$ in $C(\mathbf{g}_k)$:

J_k wird vom Tiefstgewichtszustand $T_1^{k+1}\Omega$ erzeugt (siehe (2.40)), nach dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt ist folglich

$$\begin{aligned} [J_k] &= [U(\hat{\mathbf{g}}) T_1^{k+1} \Omega] \\ &= [U(\hat{\mathbf{g}}_+) U(\hat{\mathbf{g}}_0) T_1^{k+1} \Omega] \\ &= \mathbb{C}\{[a_1^{(1)} \dots a_1^{(r)} a_0^{(r+1)} \dots a_0^{(s)} T_1^{k+1} \Omega] | a^{(i)} \in \mathbf{g}\}. \end{aligned}$$

Dieser $\mathbf{g}$-Untermodul von $C(\mathbf{g}_k)$ wird durch den Isomorphismus f^{-1} auf den $\mathbf{g}$-Untermodul

$$I_k = \mathbb{C}\{a^{(1)} \dots a^{(r)} (\operatorname{ad} a^{(r+1)}) \dots (\operatorname{ad} a^{(s)}) T^{k+1}] | a^{(i)} \in \mathbf{g}\} = S(\mathbf{g})(T^{k+1})$$

von $S(\mathbf{g})$ abgebildet. Wir bezeichnen dabei mit (T^{k+1}) den $\mathbf{g}$-Untermodul von $S^{k+1}(\mathbf{g})$, der vom Höchstgewichtsvektor T^{k+1} unter der adjungierten Darstellung erzeugt wird. Insgesamt haben wir die Isomorphie

$$C(\bar{\mathbf{g}}_k) \cong S(\mathbf{g})/I_k$$

bewiesen.

5.3.2 Bestimmung der Dimension für $su(2)$

Da die kommutative Zhu-Algebra $C(\bar{\mathbf{g}}_k)$ eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathbf{g}$ ist, bietet sich das folgende Verfahren zur Berechnung ihrer Dimension an: Wir zerlegen zunächst $C(\bar{\mathbf{g}}_k)$ in irreduzible Höchstgewichtsdarstellungen, deren Dimension wir anschließend mit Hilfe der Formel

$$\dim(\lambda) = \prod_{\alpha > 0} \frac{(\lambda + \rho, \alpha)}{(\rho, \alpha)}$$

[20] berechnen.

Im Spezialfall $\mathbf{g} = su(2)$ kann dieses Verfahren für beliebige Level $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ explizit durchgeführt werden:

Wir verwenden die Spinbasis $\{J_+, J_-, J_3\}$ von $su(2)$ mit $[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm$, $[J_+, J_-] = 2J_3$ und bezeichnen mit (j) die $(2j+1)$-dimensionale irreduzible Spin-j-Darstellung. Die adjungierte Darstellung $su(2) = (1)$ wird vom Höchstgewichtsvektor $T = J_+$ erzeugt. Die symmetrische Algebra $S(su(2))$ besitzt den Casimir-Operator

$$C = J_+ J_- + J_3^2$$

mit $(\mathrm{ad}\, a)C = [a, C] = 0$ für alle $a \in su(2)$.

Die l-fachen symmetrischen Tensorprodukte S^l der adjungierten Darstellung zerfallen in die irreduziblen Komponenten

$$S^l = (l) \oplus (l-2) \oplus \cdots \oplus (\bar{l}), \tag{5.5}$$

wobei $\bar{l}$ der Rest von l bei Division durch 2 ist. Die dazugehörigen Höchstgewichtsvektoren sind

$$C^i J_+^{l-2i} \text{ mit } i \in \{0, \ldots, (l-\bar{l})/2\}. \tag{5.6}$$

Zur Berechnung von $C(\overline{su}(2)_{k-1})$ müssen wir für jeden dieser Höchstgewichtsvektoren entscheiden, ob er in $I_{k-1} = S(su(2))(J_+^k)$ liegt oder nicht. Dazu betrachten wir den Anteil von I_{k-1} mit Grad l: Für $l < k$ ist $I_{k-1} \cap S^l = 0$, und für $l \geq k$ wird $I_{k-1} \cap S^l$ von Produkten $a\,b$ mit

$$a \in (J_+^k) = (k)$$

und

$$b \in S^{l-k} \cong (l-k) \oplus (l-k-2) \oplus \cdots \oplus (\overline{l-k})$$

erzeugt. Folglich unterscheidet sich der Spin j der irreduziblen Komponenten von $I_{k-1} \cap S^l$ um höchstens $l-k$ von k. Nur die Höchstgewichtsvektoren $C^i J_+^{l-2i}$ mit

$$2k - l \leq j = l - 2i \leq l \Leftrightarrow 0 \leq i \leq l - k$$

können also Elemente von $I_{k-1} \cap S^l$ sein. Wir zeigen nun, daß tatsächlich

$$C^i J_+^{l-2i} \in I_{k-1} \cap S^l \text{ für } 0 \leq i \leq l-k. \tag{5.7}$$

Zu diesem Zweck definieren wir einen Differentialoperator D: $S^l \to S^{l+1}$ durch

$$D = J_-(\mathrm{ad}\, J_3) - \frac{1}{2} J_3(\mathrm{ad}\, J_-).$$

Dieser Operator hat die Eigenschaften

- $DJ_+ = (J_-(\mathrm{ad}\, J_3) - \frac{1}{2}J_3(\mathrm{ad}\, J_-))J_+ = J_- J_+ - \frac{1}{2}J_3(-2J_3) = C$,
- $DC = 0$ und
- $DI_{k-1} \subset I_{k-1}$.

Er bildet deshalb die Höchstgewichtsvektoren von $S(su(2))$ ineinander ab und respektiert dabei die Zugehörigkeit zum Ideal I_{k-1}. Insbesondere ist

$$D^i J_+^{l-i} = (l-i)_i C^i J_+^{l-2i}.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung für $l-i \geq k \Leftrightarrow i \leq l-k$ in I_{k-1} liegt, gilt dies auch für die rechte Seite. Damit ist unsere Behauptung (5.7) bewiesen.

Wir betrachten nun den Ausdruck

$$S^l = \{(l) \oplus (l-2) \oplus \cdots \oplus (2k-l)\} \oplus \left\{(2k-l-2) \oplus \cdots \oplus (\bar{l})\right\},$$

dessen erstes Paar geschweifter Klammern die irreduziblen Komponenten von I_{k-1} umschließt. (Solche sind im Fall $l < k$ nicht vorhanden.) Das zweite Klammerpaar enthält die irreduziblen Komponenten, die nach der Quotientenbildung $S(su(2))/I_{k-1}$ übrigbleiben. (Solche gibt es für $l > 2k-2$ nicht.) Folglich ist

$$C(\overline{su}(2)_{k-1}) = S(su(2))/I_{k-1} = \bigoplus_{l=0}^{k-1} S^l \ \oplus \ \bigoplus_{l=k}^{2k-2} S^{2k-l-2}$$

und

$$C(\overline{su}(2)_k) = \bigoplus_{l=0}^{k} S^l \ \oplus \ \bigoplus_{l=k+1}^{2k} S^{2k-l} = \bigoplus_{l=0}^{k} S^l \ \oplus \ \bigoplus_{l=0}^{k-1} S^l = S^k \ \oplus \ 2\bigoplus_{l=0}^{k-1} S^l.$$

Das l-fache symmetrische Tensorprodukt S^l von $su(2)$ hat die Dimension $(l+1)(l+2)/2$. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\dim C(\overline{su}(2)_k) &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 2\sum_{l=0}^{k-1} \frac{(l+1)(l+2)}{2} \\
&= -\frac{(k+1)(k+2)}{2} + 2\sum_{l=0}^{k} \frac{(l+1)(l+2)}{2} \\
&= -\sum_{l=0}^{k}(l+1) + \sum_{l=0}^{k}(l+1)(l+2) \\
&= \sum_{l=0}^{k}(l+1)^2
\end{aligned}$$

Dies stimmt mit

$$\dim Z(\overline{su}(2)_k) = \sum_{(\lambda,\theta)\leq k} (\dim(\lambda))^2 = \sum_{2j\leq k}(2j+1)^2$$

überein (siehe (4.7)). Für $V = \overline{su}(2)_k$ tritt also in der Abschätzung (5.1) Gleichheit ein.

5.3.3 Bestimmung der Dimension im allgemeinen Fall

Der Fall $\mathbf{g} = su(2)$ konnte vollständig behandelt werden, da sowohl die Zerlegung der Tensorprodukte $S^l(su(2))$ in irreduzible Komponenten als auch die dazugehörigen Höchstgewichtsvektoren bekannt sind. Demgegenüber stellt sich der allgemeine Fall komplizierter dar: Zwar kann die Zerlegung eines symmetrischen Tensorproduktes im Einzelfall berechnet werden — etwa mit dem Algorithmus, den das Computeralgebrasystem LiE [38] zur Verfügung stellt —, Formeln, die (5.5) vergleichbar wären, gibt es jedoch nicht. Außerdem liefert der Algorithmus nur die Multiplizitäten der in $S^l(\mathbf{g})$ auftretenden Höchstgewichte und nicht die dazugehörigen Höchstgewichtsvektoren.

Wir müssen also einen Weg finden, die Höchstgewichtsvektoren von $S^l(\mathbf{g})$ zu berechnen. Dabei hilft uns die Beobachtung, daß das Produkt von r Höchstgewichtsvektoren $a^{(i)} \in S^{l_i}(\mathbf{g})$ mit Gewichten λ_i ein Höchstgewichtsvektor von $S^l(\mathbf{g})$ $(l = l_1 + \cdots + l_r)$ mit Gewicht $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_r$ ist. Umgekehrt dürfen wir erwarten, daß sich die Höchstgewichtsvektoren von $S^l(\mathbf{g})$ als Produkte schreiben lassen, deren Faktoren einer relativ kleinen Menge von Erzeugern entstammen.

Wir beschreiben nun den auf Grundlage dieser Beobachtung entwickelten Algorithmus:

Sei dazu $u^{(1)}, \ldots, u^{(\dim \mathbf{g})}$ eine Basis der Lie-Algebra $\mathbf{g}$. Die Vektoren $a \in S^l(\mathbf{g})$ sind Polynome in $u^{(1)}, \ldots, u^{(\dim \mathbf{g})}$ vom Grade $\deg a = l$. Wir wollen eine Menge $\tilde{\Omega}$ von Höchstgewichtsvektoren finden, aus der durch Produktbildung (und Linearkombination) alle Höchstgewichtsvektoren a mit $\deg a \leq l$ gewonnen werden können. Wenn $\tilde{\Omega}_{l'}$ die Menge aller Höchstgewichtsvektoren a mit $\deg a = l'$ bezeichnet, die sich als Produkte $a = a^{(1)} \ldots a^{(r)}$ mit $a^{(i)} \in \tilde{\Omega}$ schreiben lassen, und $\Omega(S^{l'}(\mathbf{g}))$ den Raum der Höchstgewichtsvektoren von $S^{l'}(\mathbf{g})$, so soll also

$$\mathbb{C}\tilde{\Omega}_{l'} = \Omega(S^{l'}(\mathbf{g})) \text{ für } l' \leq l$$

sein.

Für $l = 1$ leistet $\tilde{\Omega} = \{T\}$ das Gewünschte, und für größere l können wir $\tilde{\Omega}$ schrittweise konstruieren:

Sei eine Menge $\tilde{\Omega}$ mit

$$\mathbb{C}\tilde{\Omega}_{l'} = \Omega(S^{l'}(\mathbf{g})) \text{ für } l' \leq l-1$$

bereits konstruiert. Wir berechnen dann

$$\tilde{\Omega}_l = \bigcup_{l'=1}^{l-1} \bigcup_{\substack{a \in \tilde{\Omega} \\ \deg a = l'}} a\tilde{\Omega}_{l-l'},$$

und ordnen diese von $\tilde{\Omega}$ erzeugten Höchstgewichtsvektoren a nach ihrem Gewicht $\lambda(a)$:

$$\tilde{\Omega}_{l,\lambda} = \{a \in \tilde{\Omega}_l | \lambda(a) = \lambda\}.$$

Nun sind für jedes in $S^l(\mathbf{g})$ auftretende Höchstgewicht zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $\dim \mathbb{C}\tilde{\Omega}_{l,\lambda} = \mathrm{mult}(\lambda, S^l(\mathbf{g}))$: Dies ist der vorteilhafte Fall, in dem nichts weiter zu tun ist. (Die Multiplizitäten $\mathrm{mult}(\lambda, S^l(\mathbf{g}))$ der Höchstgewichte λ in $S^l(\mathbf{g})$ können mit LiE berechnet werden. Bei der Bestimmung der Dimension $\dim \mathbb{C}\tilde{\Omega}_{l,\lambda}$ ist zu berücksichtigen, daß die Höchstgewichtsvektoren $\tilde{\Omega}_{l,\lambda}$ linear abhängig sein können.)

2. $\dim \mathbb{C}\tilde{\Omega}_{l,\lambda} < \mathrm{mult}(\lambda, S^l(\mathbf{g}))$: In diesem Fall müssen die fehlenden Höchstgewichtsvektoren mit einem Ansatz
$$a = \sum \alpha_i a^{(i)} \tag{5.8}$$
($\alpha_i \in \mathbb{C}$) berechnet werden, wobei über alle Monome $a^{(i)} \in S^l(\mathbf{g})$ mit $\lambda(a^{(i)}) = \lambda$ summiert wird. Die neu gefundenen Höchstgewichtsvektoren sind zur Menge $\tilde{\Omega}$ hinzuzunehmen.

Auf diese Weise gewinnt man eine Menge $\tilde{\Omega}$ mit
$$\mathbb{C}\tilde{\Omega}_{l'} = \Omega(S^{l'}(\mathbf{g})) \text{ für } l' \leq l.$$

Es stellt sich die Frage, ob man ausgehend von $\tilde{\Omega} = \{T\}$ nach endlich vielen Schritten ein $\tilde{\Omega}$ erhält, welches *alle* Höchstgewichtsvektoren von $S(\mathbf{g})$ erzeugt. Dies ist auch von praktischer Relevanz, da andernfalls der Ansatz (5.8) für immer größere l gemacht werden muß, was mit einem exponentiellen Anwachsen des Speicherbedarfs und der Rechenzeit verbunden ist. Da alle Casimir-Elemente von $\mathbf{g}$ Höchstgewichtsvektoren von $S(\mathbf{g})$ sind, ist die Menge $\tilde{\Omega}$ frühestens dann gesättigt, wenn $l-1$ gleich dem maximalen Exponenten von $\mathbf{g}$ wird. Dies schränkt die Anwendbarkeit unseres Algorithmus auf Lie-Algebren mit nicht zu hohem Rang ein.

Zur Berechnung von $C(\bar{\mathbf{g}}_k) = S(\mathbf{g})/I_k$ ist nun zu ermitteln, welche der Höchstgewichtsvektoren von $S(\mathbf{g})$ im Ideal $I_k = S(\mathbf{g})(T^{k+1})$ liegen. Da $S(\mathbf{g})$ ein Polynomring (in den Unbestimmten $u^{(1)}, \ldots, u^{(\dim \mathbf{g})}$) ist, steht hierfür die Methode der Gröbner-Basen zur Verfügung. Eine **Gröbner-Basis** eines Ideals I besteht aus Polynomen $p_1, \ldots, p_m$, die I als Ideal erzeugen und die folgende Eigenschaft besitzen: Jedes Polynom p läßt sich in der Form
$$p = \sum_{i=1}^{m} q_i\, p_i + r \tag{5.9}$$
mit Polynomen q_i und einem *eindeutigen* Restpolynom r schreiben. (Die Polynome q_i sind im allgemeinen *nicht* eindeutig.) Ein Polynom p liegt also genau dann in I, wenn $r = 0$ ist.

Einen konstruktiven Beweis für die Existenz von Gröbner-Basen findet man in [14]. Dort wird auch beschrieben, wie die Polynome $q_1, \ldots, q_m$ und r in (5.9) berechnet werden können.

Mit dieser Methode werden nun die Höchstgewichtsvektoren von $S^l(\mathbf{g})$ nacheinander für $l = k+2, k+3, \ldots$ auf ihre Zugehörigkeit zum Ideal I_k getestet. (Für $l = 0, \ldots, k+1$ fällt dieser Test — T^{k+1} ausgenommen — immer negativ aus.) Falls es zu einem Gewicht mehrere Höchstgewichtsvektoren $a^{(i)}$ gibt, berechnet man zunächst die Reste $r^{(i)}$ aus (5.9) und muß dann überprüfen, ob diese durch Linearkombination zum Verschwinden gebracht werden können. Sobald für einen Grad l alle Höchstgewichtsvektoren von $S^l(\mathbf{g})$ in I_k liegen, gilt dies auch für alle höheren Grade, und der Algorithmus ist beendet.

Die Ergebnisse, die unser Mathematica-Programm für $\mathbf{g}_k = \overline{su}(3)_1$ liefert, beschreiben wir hier ausführlich, während diese für $\overline{su}(3)_{2,3}$, $\overline{su}(4)_1$, $\overline{su}(5)_1$, $\overline{so}(5)_{1,2}$, $\overline{so}(7)_1$, $\overline{sp}(6)_1$, $\overline{so}(8)_1$ und $\overline{g}(2)_{1,2}$ in Anhang C dokumentiert sind.

Für $\mathbf{g} = su(3)$ können alle Höchstgewichtsvektoren von $S(\mathbf{g})$ (zumindest bis zum Grad $l = 10$) durch die folgenden Erzeuger ausgedrückt werden: die (bis auf einen Faktor) eindeutig bestimmten Höchstgewichtsvektoren $T \in S^1(su(3))$, $C_2, A \in S^2(su(3))$ und $C_3, B, B' \in S^3(su(3))$ zu den Gewichten $\theta = (11), (00), (11), (00), (03)$ und (30). Es ist also $\tilde{\Omega} = \{T, C_2, A, C_3, B, B'\}$.

Ausgedrückt in diesen Erzeugern lauten die Höchstgewichtsvektoren von $S(su(3))$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega}_0 &= \{1\} \\
\tilde{\Omega}_1 &= \{T\} \\
\tilde{\Omega}_2 &= \{C_2, A, T^2\} \\
\tilde{\Omega}_3 &= \{C_3, B, C_2T, AT, B', T^3\} \\
\tilde{\Omega}_4 &= \{C_2^2, C_3T, AC_2, BT, C_2T^2, A^2, AT^2, B'T, T^4\}
\end{aligned}$$

Nur die Höchstgewichtsvektoren 1, T, C_2, A und C_3 zu den Gewichten (00), (11), (00), (11) und (00) liegen *nicht* im Ideal I_1. Insbesondere liegen alle Höchstgewichtsvektoren mit Grad $l = 4$ in I_1, so daß sich die Betrachtung höherer Grade erübrigt.

Die Dimension der kommutativen Zhu-Algebra $C(\overline{su}(3)_1)$ ist folglich

$$\dim C(\overline{su}(3)_1) = \dim 3(00) \oplus 2(11) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 8 = 19.$$

Dies stimmt mit der Dimension der Nullmodenalgebra

$$\begin{aligned}
\dim Z(\overline{su}(3)_1) &= \sum_{(\lambda,\theta)\leq 1} (\dim(\lambda))^2 = (\dim(00))^2 + (\dim(01))^2 + (\dim(10))^2 \\
&= 1 + 9 + 9 = 19
\end{aligned}$$

(siehe (4.7)) überein. Auch im Fall $\bar{\mathbf{g}}_k = \overline{su}(3)_1$ tritt also in der Abschätzung (5.1) Gleichheit ein. Dies gilt jedoch nicht für alle Stromalgebren, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt [35]:

Die exzeptionelle Lie-Algebra $\mathbf{g} = e(8)$ besitzt die symmetrischen Potenzen

$$\begin{aligned}
S^0(e(8)) &= (00000000), \\
S^1(e(8)) &= (00000001) = (T), \\
S^2(e(8)) &= (00000002) \oplus (10000000) \oplus (00000000) = (T^2) \oplus \ldots
\end{aligned}$$

Für $k=1$ beträgt die Dimension der kommutativen Zhu-Algebra $C(\overline{e}(8)_1)$ also mindestens

$$\begin{aligned}\dim C(\overline{e}(8)_1) &\geq \dim 2(00000000) \oplus (00000001) \oplus (10000000)\\ &= 2\cdot 1 + 248 + 3875 = 4125,\end{aligned}$$

während die Dimension der Nullmodenalgebra

$$\dim Z(\overline{e}(8)_1) = \sum_{(\lambda,\theta)\leq 1} (\dim(\lambda))^2 = (\dim(00000000))^2 = 1$$

ist. Im Fall $\bar{\mathbf{g}}_k = \overline{e}(8)_1$ tritt also in (5.1) Ungleichheit ein.

Die vorgestellten Ergebnisse zu $\overline{su}(2)_k$, $\overline{su}(3)_1$ und $\overline{e}(8)_1$ ließen uns anfänglich vermuten, daß die Abschätzung (5.1) für klassische Lie-Algebren optimal und für exzeptionelle Lie-Algebren schlecht ist. Der erste Teil dieser Vermutung hat sich hervorragend bestätigt: Die Dimension der kommutativen Zhu-Algebra $C(\bar{\mathbf{g}}_k)$ stimmt auch für $\bar{\mathbf{g}}_k = \overline{su}(3)_{2,3}$, $\overline{su}(4)_1$, $\overline{su}(5)_1$, $\overline{so}(5)_{1,2}$, $\overline{so}(7)_1$, $\overline{sp}(6)_1$ und $\overline{so}(8)_1$ mit derjenigen der Nullmodenalgebra $Z(\bar{\mathbf{g}}_k)$ überein (siehe Anhang C). Diese Liste enthält Lie-Algebren mit unterschiedlichen Rängen aus allen vier klassischen Serien. Die Beispiele $\overline{su}(2)_{k\geq 2}$, $\overline{su}(3)_{2,3}$ und $\overline{so}(5)_2$ zeigen zudem, daß das Auftreten von Gleichheit in (5.1) nicht auf den Level $k=1$ beschränkt ist.

Der zweite Teil unserer Vermutung erwies sich hingegen als falsch: Unsere Rechnung ergibt auch für $\overline{g}(2)_{1,2}$ übereinstimmende Dimensionen. Die anderen exzeptionellen Lie-Algebren sind leider mit unserem Mathematica-Programm nicht zugänglich ($f(4)$ hat bereits Dimension 52), so daß wir hier höchstens versuchen können, ähnlich wie im Fall $\overline{e}(8)_1$ zu argumentieren. Unsere Versuche, in dieser Weise für $\overline{f}(4)_1$, $\overline{e}(6)_1$ oder $\overline{e}(7)_1$ eine Ungleichheit in (5.1) nachzuweisen, sind allerdings gescheitert [2]. Wir demonstrieren dies am Beispiel $\mathbf{g} = e(7)$:

$$\begin{aligned}S^0(e(7)) &= (0000000),\\ S^1(e(7)) &= (1000000) = (T),\\ S^2(e(7)) &= (2000000) \oplus (0000010) \oplus (0000000) = (T^2) \oplus \ldots\end{aligned}$$

Die Dimension der Nullmodenalgebra ist

$$\dim Z(\overline{e}(7)_1) = (\dim(0000000))^2 + (\dim(0000001))^2 = 1 + 56^2 = 3137,$$

während die untere Schranke für die Dimension der kommutativen Zhu-Algebra

$$\begin{aligned}\dim C(\overline{e}(7)_1) &\geq \dim 2(0000000) \oplus (1000000) \oplus (0000010)\\ &= 2\cdot 1 + 133 + 1539 = 1674\end{aligned}$$

[2] Es gibt Hinweise darauf, daß tatsächlich $\dim C(\overline{e}(6)_1) = \dim Z(\overline{e}(6)_1)$ [21].

noch nicht einmal die Dimension der Nullmodenalgebra erreicht.

Die für $\overline{e}(8)_1$ erfolgreiche Argumentation ist auch nicht auf $\overline{e}(8)_2$ übertragbar [3]. Wir vermuten deshalb, daß $\overline{e}(8)_1$ der einzige Fall ist, in dem sich die Dimensionen der kommutativen Zhu-Algebra und der Nullmodenalgebra unterscheiden. Die Sonderstellung von $\overline{e}(8)_1$ hängt möglicherweise damit zusammen, daß $e(8)$ keine Darstellungen besitzt, die (der Dimension nach) zwischen der trivialen und der adjungierten Darstellung liegen. Die genauen Gründe für das Auftreten der Ungleichheit bei $\overline{e}(8)_1$ entziehen sich jedoch unserer Kenntnis.

[3] Dies paßt zu der Vermutung von [21], daß die Dimensionen von $C(\bar{\mathbf{g}}_k)$ und $Z(\bar{\mathbf{g}}_k)$ immer übereinstimmen, wenn man nur k genügend groß wählt.

Kapitel 6

Verallgemeinerungen der Zhu-Algebren

6.1 Deformierte Zhu-Algebra

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir beschrieben, wie die assoziative Zhu-Algebra $A(V)$ und die kommutative (und assoziative) Zhu-Algebra $C(V)$ als Hilfsmittel in der konformen Feldtheorie eingesetzt werden können. Bisher stehen diese Algebren unverbunden nebeneinander — abgesehen von der Abschätzung (5.1), die ihre Dimensionen miteinander verknüpft. Wir zeigen nun, daß die beiden Zhu-Algebren Spezialisierungen einer allgemeineren Konstruktion sind.

Unser Ausgangspunkt ist die Beobachtung, daß die normalgeordneten Produkte $\phi \circ \psi$ und $\phi * \psi$ Spezialfälle des Produktes

$$\phi *_\lambda \psi = \oint \mathrm{d}z \, \frac{(1+\lambda z)^{h_\phi}}{z} \, \phi(z)\psi = \sum_{i=0}^{h_\phi} \binom{h_\phi}{i} \lambda^{h_\phi - i} \, \phi_i \psi,$$

sind, in dem die Anteile mit Dimension $h_\psi + i$ mit $\lambda^{h_\phi - i}$ skaliert sind. In der Tat ist $\phi *_1 \psi = \phi * \psi$ und $\phi *_0 \psi = \phi \circ \psi$.

Durch die Wahl eines beliebigen Wertes $\lambda \in \mathbb{C}$ wird der Zustandsraum V zu einer Algebra $(V, *_\lambda)$. Für $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ besitzt diese Algebra die Derivationen ∂ und d, und es liegt nahe zu vermuten, daß eine solche Derivation auch im allgemeinen Fall existiert. Tatsächlich findet man, daß

$$\mathrm{d}_\lambda = L_1 + \lambda L_0$$

die Produktregel

$$\mathrm{d}_\lambda(\phi *_\lambda \psi) = \mathrm{d}_\lambda \phi *_\lambda \psi + \phi *_\lambda \mathrm{d}_\lambda \psi$$

erfüllt.

Dies führt uns unmittelbar zur Konstruktion der **deformierten Zhu-Algebra** $A_\lambda(V)$:

$$A_\lambda(V) = (V, *_\lambda)/\mathrm{d}_\lambda V *_\lambda V = (V, *_\lambda)/\left\langle \mathrm{d}_\lambda V \right\rangle$$

ist eine assoziative Algebra mit Einselement $[\Omega]$ und zentralem Element $[L]$, die durch die Unteralgebren $\left[\bigoplus_{h' \leq h} V_{h'}\right]$ filtriert ist.

Der Beweis verläuft völlig parallel zum Fall $\lambda = 1$, der in Abschnitt 3.1 behandelt wurde (siehe auch Abschnitt 2.3). Man hat nur an den geeigneten Stellen $1 + z$ durch $1 + \lambda z$ zu ersetzen. Der Kern des Beweises besteht darin nachzuweisen, daß

$$\phi \diamond_k \psi = \oint \mathrm{d}z \frac{(1+\lambda z)^{h_\phi}}{z^{k+1}} \phi(z)\psi \in \mathrm{d}_\lambda V *_\lambda V$$

für alle $k \geq 1$ und alle $\phi, \psi \in V$ (vergleiche (2.33)). Dies gelingt mit Hilfe der Rekursionsformel

$$k\phi \diamond_k \psi = \mathrm{d}_\lambda \phi \diamond_{k-1} \psi - \lambda(k-1)\phi \diamond_{k-1} \psi$$

(vergleiche (2.34)).

Für den Assoziator erhält man

$$\begin{aligned} A(\phi, \psi, \chi) &= (\phi *_\lambda \psi) *_\lambda \chi - \phi *_\lambda (\psi *_\lambda \chi) \\ &= \sum_{k \geq 1} \phi \diamond_k (\psi \diamond_{-k} \chi) + \psi \diamond_k (\phi \diamond_{-k} \chi) \\ &\equiv 0 \bmod \mathrm{d}_\lambda V *_\lambda V \end{aligned}$$

(vergleiche (2.32)). Für den Kommutator gilt

$$h_\phi [\![\phi, \psi]\!]_\lambda = h_\phi(\phi *_\lambda \psi - \psi *_\lambda \phi) \equiv \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \phi *_\lambda \psi \bmod \mathrm{d}_\lambda V *_\lambda V$$

(vergleiche (2.30)).

Die Tatsache, daß wir nun über eine ganzen Schar von assoziativen Algebren $A_\lambda(V)$ verfügen, wirft einige interessante Fragen auf:

- Gibt es neben $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ andere Werte $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $A_\lambda(V)$ als Hilfsmittel zur Untersuchung der Vertexoperatoralgebra V eingesetzt werden kann?

- Wie verändert sich die Algebra $A_\lambda(V)$, wenn man den Parameter λ (kontinuierlich) variiert?

- Für welche $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$ gibt es Algebrenhomomorphismen $A_\lambda(V) \to A_{\lambda'}(V)$, oder sogar Isomorphismen?

6.2 Assoziative Zhu-Algebra n-ter Ordnung

6.2.1 Definition

In Kapitel 3 und 4 haben wir beschrieben, wie die assoziative Zhu-Algebra $A(V)$ (beziehungsweise die zu ihr isomorphe Nullmodenalgebra $Z(V)$) die rekonstruierbaren Darstellungen von V klassifiziert. Eine Darstellung M ist rekonstruierbar, wenn sie von M_0 erzeugt wird und wenn ihre Unterdarstellungen M_0 nichttrivial schneiden. Die Forderung, daß M von M_0 erzeugt wird, stellt mitunter eine unerwünschte Einschränkung dar [1]. Eine mögliche Abschwächung besteht darin, zu fordern, daß M für einen beliebigen (aber festen) Level $n \in \mathbb{N}$ von M_n erzeugt wird. In [11] haben Dong, Li und Mason assoziative Algebren $A^{(n)}(V)$ konstruiert, die zur Untersuchung dieses Falles geeignet sind:

Dazu wird V mit dem Produkt

$$\phi *_n \psi = \oint \mathrm{d}z\, f_n\left(\frac{1}{z}\right) \frac{(1+z)^{h_\phi + n}}{z^{n+1}}\, \phi(z)\psi$$

ausgestattet, wobei

$$f_n(\zeta) = \sum_{i=0}^{n} \binom{-n-1}{i} \zeta^i.$$

Ein zweites Produkt auf V ist durch

$$\phi \diamond_n \psi = \oint \mathrm{d}z\, \frac{1}{z^{n+1}} \frac{(1+z)^{h_\phi + n}}{z^{n+1}}\, \phi(z)\psi$$

gegeben [2]. Die assoziative Algebra $A^{(n)}(V)$ ist

$$A^{(n)}(V) = V/(V \diamond_n V + \mathrm{d}V),$$

sie besitzt das Einselement $[\Omega]$ und das zentrale Element $[L]$. Wir nennen sie die **assoziative Zhu-Algebra n-ter Ordnung**. Offensichtlich ist $A_0(V) = A(V)$ die (gewöhnliche) assoziative Zhu-Algebra.

Es gilt das folgende

Theorem von Dong, Li und Mason: Sei M eine Darstellung von V. Dann wird M_n durch

$$\pi\colon A^{(n)}(V) \to \mathrm{End}(M_n), [\phi] \mapsto \phi_0$$

zu einer Darstellung von $A^{(n)}(V)$. Sei umgekehrt W eine Darstellung von $A^{(n)}(V)$. Dann gibt es eine Darstellung M von V mit $M_n \cong W$. Für irreduzible Darstellungen ist die Beziehung zwischen M und W eineindeutig.

---

[1] Zum Beispiel werden die in [37] diskutierten (echt) gestuften Darstellungen M nicht von M_0 erzeugt.

[2] Die Produkte $\phi *_n \psi$ und $\phi \diamond_n \psi$ dürfen nicht mit den Produkten $\phi *_k \psi$ und $\phi \diamond_k \psi$ aus Abschnitt 2.3 und 6.1 verwechselt werden.

(Der Beweis in [11] enthält zudem eine Vorschrift, wie man zu einer gegebenen Darstellung W die Darstellung M konstruiert.)

Im Mittelpunkt unserer Untersuchung der assoziativen Zhu-Algebra n-ter Ordnung steht zunächst das Produkt $\phi *_n \psi$:

Im ersten Schritt zeigen wir mit Hilfe einer partiellen Integration die Beziehung [11]

$$\mathrm{d}\phi *_n \psi = (2n+1)\binom{-n-1}{n}\phi \diamond_n \psi. \tag{6.1}$$

Im zweiten Schritt berechnen wir $(\mathrm{d}^2\phi) *_n \psi$ und erhalten

$$\mathrm{d}^2\phi *_n \psi = (n+1)^2 \oint \mathrm{d}z\, g_n\left(\frac{1}{z}\right)\frac{(1+z)^{h_\phi+n}}{z^{n+1}} \tag{6.2}$$

mit

$$g_{n-1}(\zeta) = -\binom{-n-1}{n}(\frac{1}{2}\zeta^n + \zeta^{n+1}).$$

Entscheidend ist nun die Beobachtung, daß $g_{n-1}(\zeta) = f_{n-1}(\zeta) - (1+\zeta)f_n(\zeta)$ und somit

$$\frac{1}{n^2}\,\mathrm{d}^2\phi *_{n-1} \psi = \phi *_{n-1} \psi - \phi *_n \psi. \tag{6.3}$$

Diese Beziehung erlaubt uns, eine aussagekräftige Form des Produktes $\phi *_n \psi$ zu finden, und zwar gilt

$$\phi *_n \psi = p_n(\mathrm{d})\phi * \psi, \tag{6.4}$$

wobei

$$p_n(i) = \binom{n+i}{n}\binom{n-i}{n} = \frac{1}{n!}\prod_{j=1}^{n}(j+i)(j-i)$$

das (eindeutig bestimmte) Polynom $2n$-ten Grades mit Nullstellen $-n, \ldots, -1, 1, \ldots, n$ und $p_n(0) = 1$ ist.

Wegen $p_0(i) = 1$ gilt (6.4) für $n = 0$. Für $n > 0$ folgt (6.4) mit vollständiger Induktion:

$$\begin{aligned}
\phi *_n \psi &= \left(1 - \frac{\mathrm{d}^2}{n^2}\right)\phi *_{n-1} \psi \text{ wegen (6.3)} \\
&= \frac{1}{n^2}(n+\mathrm{d})(n-\mathrm{d})p_{n-1}(\mathrm{d})\phi * \psi \\
&= p_n(\mathrm{d})\phi * \psi
\end{aligned}$$

Aus (6.1) und (6.4) folgt

$$\phi \diamond_n \psi = q_n(\mathrm{d})\phi * \psi \tag{6.5}$$

mit dem Polynom

$$q_n(i) = \binom{i+n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}\prod_{j=-n}^{n}(i+j).$$

Als unmittelbare Konsequenz von (6.4) ergibt sich, daß d eine Derivation der Algebra $(V, *_n)$ ist:

$$\mathrm{d}(\phi *_n \psi) = \mathrm{d}(p_n(\mathrm{d})\phi * \psi) = \mathrm{d}p_n(\mathrm{d})\phi * \psi + p_n(\mathrm{d})\phi * \mathrm{d}\psi = \mathrm{d}\phi *_n \psi + \phi *_n \mathrm{d}\psi$$

Aufgrund von (6.1) ist $V \diamond_n V = \mathrm{d}V *_n V$, wir können also die assoziative Zhu-Algebra n-ter Ordnung als

$$A^{(n)}(V) = (V, *_n) / \langle \mathrm{d}V \rangle$$

schreiben. Die Inklusion

$$\mathrm{d}V *_n V = \left(1 - \frac{\mathrm{d}^2}{n^2}\right) \mathrm{d}V *_{n-1} V \subset \mathrm{d}V *_{n-1} V$$

zeigt, daß $A_{n-1}(V)$ ein Quotient von $A^{(n)}(V)$ ist (vergleiche [11]).

6.2.2 Isomorphie zur Nullmodenalgebra n-ter Ordnung

Mit Hilfe von (6.4) und (6.5) können die Feldmoden $(\phi *_n \psi)(m), (\phi \diamond_n \psi)(m) \in U(V)$ einfach berechnet werden, wenn man beachtet, daß $(p(\mathrm{d})\phi)(i) = p(i)\phi(i)$ für alle Polynome p:

$$\begin{aligned} (\phi *_n \psi)(m) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_n(i) :\phi(i)\psi(m-i): \\ (\phi \diamond_n \psi)(m) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} q_n(i) :\phi(i)\psi(m-i): \end{aligned}$$

Die Nullstellen der Polynome p_n und q_n liegen so, daß

$$(\phi *_n \psi)(0) \equiv \phi(0)\psi(0) \bmod U(V)_0^{n+1}$$

und

$$(\phi \diamond_n \psi)(0) \equiv 0 \bmod U(V)_0^{n+1}.$$

Außerdem gilt $(\mathrm{d}\phi)(0) = 0 \equiv 0 \bmod U(V)_0^{n+1}$, so daß $f\colon [\phi] \mapsto [\phi(0)]$ ein Homomorphismus von der assoziativen Zhu-Algebra n-ter Ordnung $A^{(n)}(V)$ in die **Nullmodenalgebra n-ter Ordnung**

$$Z^{(n)}(V) = U(V)_0 / U(V)_0^{n+1}$$

ist. In Abschnitt 3.3 haben wir gezeigt, daß f im Spezialfall $n = 0$ ein Isomorphismus ist. Wie zu erwarten gilt dies auch im allgemeinen Fall $n \in \mathbb{N}$:

Nach dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt ist

$$\{[\phi^{(1)}(n_1) \ldots \phi^{(r)}(n_r)] | r \in \mathbb{N}, \phi^{(i)} \in V, n_i \in \mathbb{Z}, n_1 + \cdots + n_r = 0, n_1 \geq \ldots \geq n_r\}$$

ein Erzeugendensystem von $Z^{(n)}(V)$. Wir weisen nach, daß dieses Erzeugendensystem im Bild von f liegt. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned}&\left\{(\dots(p_1(\mathrm{d})\phi^{(1)} * p_2(\mathrm{d})\phi^{(2)}) * \dots) * p_r(\mathrm{d})\phi^{(r)}\right\}(0)\\ &= \sum_{\substack{i_1,\dots,i_r\in\mathbb{Z}\\ i_1+\dots+i_r=0}} p_1(i_1)\dots p_r(i_r){:}(\dots(\phi^{(1)}(i_1)\phi^{(2)}(i_2))\dots)\phi^{(r)}(i_r){:}\end{aligned} \tag{6.6}$$

(vergleiche (2.25)), worin $p_1,\dots,p_r$ zunächst beliebige Polynome sind.

Man überzeugt sich leicht, daß absteigend geordnete Feldmodenprodukte bereits normalgeordnet sind:

$${:}(\dots(\phi^{(1)}(i_1)\phi^{(2)}(i_2))\dots)\phi^{(r)}(i_r){:} = \phi^{(1)}(i_1)\phi^{(2)}(i_2)\dots\phi^{(r)}(i_r) \text{ für } i_1 \geq \dots \geq i_r.$$

Zudem reduziert sich die unendliche Summe auf der rechten Seite von (6.6) modulo $U(V)_0^{n+1}$ auf endlich viele Terme. Durch geeignete Wahl der Polynome $p_1,\dots,p_r$ können wir also erreichen, daß

$$\begin{aligned}&\left\{(\dots(p_1(\mathrm{d})\phi^{(1)} * p_2(\mathrm{d})\phi^{(2)}) * \dots) * p_r(\mathrm{d})\phi^{(r)}\right\}(0)\\ &\equiv \phi^{(1)}(n_1)\phi^{(2)}(n_2)\dots\phi^{(r)}(n_r) \bmod U(V)_0^{n+1}.\end{aligned}$$

Damit ist die Surjektivität des Homomorphismus $f\colon [\phi] \mapsto [\phi(0)]$ bewiesen [3].

Seine Injektivität folgt, indem man das Theorem von Dong, Li und Mason auf die adjungierte Darstellung von $A^{(n)}(V)$ anwendet. (Die Argumentation verläuft völlig analog zum Fall $n = 0$, den wir in Abschnitt 3.3 behandelt haben.)

Insgesamt haben wir die Isomorphie

$$A^{(n)}(V) \cong Z^{(n)}(V)$$

bewiesen.

6.2.3 Klassifikationssatz

Wie bereits erwähnt, ist die assoziative Zhu-Algebra n-ter Ordnung besonders geeignet, um Darstellungen M zu untersuchen, die von M_n erzeugt werden. Die Isomorphie zur Nullmodenalgebra n-ter Ordnung ist in diesem Zusammenhang sehr erhellend. Bevor wir dies näher ausführen, sind jedoch einige Definitionen nötig:

Wir bezeichnen mit $\mathrm{Rad}^{(n)}(M)$ die größte Unterdarstellung von M, die M_n trivial schneidet. Eine Darstellung M heißt n-**minimal**, falls $\mathrm{Rad}^{(n)}(M) = 0$, und n-**rekonstruierbar**, falls sie außerdem von M_n erzeugt wird.

[3] Dies rechtfertigt im übrigen, $Z^{(n)}(V)$ als Nullmodenalgebra zu bezeichnen.

Offensichtlich kann jeder Darstellung M von V die Darstellung $O^{(n)}(M) = M_n$ von $Z^{(n)}(V)$ zugeordnet werden. Umgekehrt gewinnt man aus einer Darstellung W von $Z^{(n)}(V)$ zunächst eine Darstellung von

$$P_n = U(V)_0 \oplus \bigoplus_{i>n} U(V)_{-i},$$

indem man $\bigoplus_{i>n} U(V)_{-i}$ trivial wirken läßt. Daraus erhält man dann die Darstellung

$$M^{(n)}(W) = U(V) \otimes_{P_n} W$$

von V. ($M^{(n)}(W)$ trägt die von $U(V)$ induzierte Graduierung mit $M^{(n)}(W)_m = U(V)_{m-n} \otimes W$.) Die zugehörige n-rekonstruierbare Darstellung bezeichnen wir mit

$$L^{(n)}(W) = M^{(n)}(W)/\mathrm{Rad}^{(n)}(M^{(n)}(W)).$$

Der Beweis des folgenden Klassifikationssatzes verläuft vollkommen analog zum Fall $n = 0$ (siehe Anschnitt 4.2).

Klassifikationssatz: Die n-rekonstruierbaren Darstellungen von V werden vollständig und eindeutig durch die Darstellungen von $Z^{(n)}(V)$ klassifiziert. Zu jeder n-rekonstruierbaren Darstellung M von V gehört die Darstellung $O^{(n)}(M)$ von $Z^{(n)}(V)$ und umgekehrt zu jeder Darstellung W von $Z^{(n)}(V)$ die rekonstruierbare Darstellung $L^{(n)}(W)$ von V. Es gilt

$$(O^{(n)} \circ L^{(n)})(W) \cong W \tag{6.7}$$

für alle Darstellungen W von $Z^{(n)}(V)$ und

$$(L^{(n)} \circ O^{(n)})(M) \cong M \tag{6.8}$$

für alle n-rekonstruierbaren Darstellungen M von V.

Dieser Klassifikationssatz präzisiert das Theorem, das Dong, Li und Mason mit Hilfe der assoziativen Zhu-Algebra n-ter Ordnung formulieren.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Wir haben eine ganze Reihe von assoziativen Algebren behandelt, die einer Vertexoperatoralgebra V zugeordnet sind, und ihre Bedeutung für die konforme Feldtheorie aufgezeigt. Im einzelnen waren dies:

- die universelle einhüllende Algebra $U(V)$, charakterisiert durch die Eigenschaft, daß jede Darstellung von V ein $\mathbb{N}$-graduierter $U(V)$-Modul ist
- die assoziative Zhu-Algebra $A(V) = (V, *)/\langle \mathrm{d}V \rangle$ und die zu ihr isomorphe Nullmodenalgebra $Z(V) = U(V)_0/U(V)_0^1$, die die rekonstruierbaren Darstellungen von V klassifizieren
- die kommutative Zhu-Algebra $C(V) = (V, \circ)/\langle \partial V \rangle$, deren Dimension eine obere Schranke für die Anzahl der irreduziblen Darstellungen liefert
- die deformierte Zhu-Algebra $A_\lambda(V) = (V, *_\lambda)/\langle \mathrm{d}_\lambda V \rangle$ ($\lambda \in \mathbb{C}$), die die Zhu-Algebren $A(V)$ und $C(V)$ vereinheitlicht (und verallgemeinert)
- die assoziative Zhu-Algebra n-ter Ordnung $A^{(n)}(V) = (V, *_n)/\langle \mathrm{d}V \rangle$ ($n \in \mathbb{N}$) und die zu ihr isomorphe Nullmodenalgebra n-ter Ordnung $Z^{(n)}(V) = U(V)_0/U(V)_0^{n+1}$, die die n-rekonstruierbaren Darstellungen von V klassifizieren

Neben diesen assoziativen Algebren spielten auch die folgenden Lie-Algebren eine Rolle:

- die Lie-Algebra der Feldmoden $\hat{V} = L(V)/\partial L(V)$, die Ausgangspunkt der Konstruktion der universellen einhüllenden Algebra war
- die Lie-Algebra der Nullmoden $\hat{V}_0 \cong (V, *)/\mathrm{d}V$
- die Lie-Algebren $(V, [.,.])$ und $(V, [\![.,.]\!])$, deren Lie-Produkt der Kommutator der normalgeordneten Produkte N und N_0 ist

Nur am Rande diskutiert haben wir die

- (nicht assoziative) quasiprimäre Algebra $Q(V) = (V, \circ)/\partial V$, die in der Theorie der W-Algebren eine herausragende Stellung einnimmt (siehe [15]).

Auffällig ist, daß die assoziativen Algebren $A(V), C(V)$ und ihre Verallgemeinerungen $A^{(n)}(V)$ und $A_\lambda(V)$ alle auf dem gleichen Konstruktionsprinzip beruhen: Sie sind Quotienten der Algebra V durch das von den derivativen Zuständen erzeugte Ideal. (Dabei sind natürlich das Produkt auf V und die dazugehörige Derivation von Fall zu Fall verschieden.)

Nach einem analogen Prinzip sind die Lie-Algebren $\hat{V}$ und $\hat{V}_0 \cong (V, *)/\mathrm{d}V$ und die Algebra $Q(V)$ Quotienten eines Vektorraumes durch den derivativen Unterraum.

Aus den beiden Algebren $(V, \circ)$ und $(V, *)$ können insgesamt vier Objekte abgeleitet werden, je nachdem, ob man durch den Unterraum der derivativen Zustände oder das von ihm erzeugte Ideal teilt:

$$\begin{aligned} (V, \circ)/\partial V &= Q(V) \\ (V, *)/\mathrm{d}V &= \hat{V}_0 \\ (V, \circ)/\langle \partial V \rangle &= C(V) \\ (V, *)/\langle \mathrm{d}V \rangle &= A(V) \end{aligned}$$

Die Dimensionen dieser (Lie-)Algebren ordnen sich wie folgt

$$\dim \hat{V}_0 = \dim Q(V) \geq \dim C(V) \geq \dim A(V)$$

In beiden Abschätzungen kann Ungleichheit eintreten, für die zweite Abschätzung haben wir mit der W-Algebra $\overline{e}(8)_1$ ein konkretes Beispiel angegeben.

Die Hauptergebnisse der Arbeit liegen in unterschiedlichen Bereichen: Zunächst konnten wir das von Zhu verwendete Produkt $\phi * \psi$ als normalgeordnetes Produkt N_0 identifizieren. Wir haben außerdem gezeigt, wie sich die assoziative Zhu-Algebra $A(V)$ in natürlicher Weise als Quotient von $(V, *)$ durch das derivative Ideal $\langle \mathrm{d}V \rangle$ ergibt. Durch den Nachweis der Isomorphie zwischen assoziativer Zhu-Algebra $A(V)$ und Nullmodenalgebra $Z(V)$ haben wir die Verbindung zwischen der Theorie von Zhu und den in der konformen Feldtheorie bereits bekannten Methoden hergestellt. (Dabei haben wir darauf hinzuweisen, daß unser Beweis auf das Theorem von Zhu zurückgreift.) Die meisten unserer Ergebnisse konnten wir zudem auf die assoziativen Zhu-Algebren höherer Ordnung übertragen.

Wir haben die kommutative Zhu-Algebra der Stromalgebren berechnet und ihre Dimension für $\overline{su}(2)_k$ und einige weitere Spezialfälle angegeben. Unsere Ergebnisse haben uns zu der Vermutung geführt, daß die Dimension der kommutativen Zhu-Algebra für alle Stromalgebren, ausgenommen $\overline{e}(8)_1$, mit derjenigen der Nullmodenalgebra übereinstimmt. Die Gründe für das Auftreten des Ausnahmefalles konnten wir nicht klären.

Schließlich haben wir die beiden Zhu-Algebren $A(V)$ und $C(V)$ zur deformierten Zhu-Algebra $A_\lambda(V)$ verallgemeinert.

Danksagung

An erster Stelle möchte ich meinem Betreuer Prof. W. Nahm danken, der in stets anregenden Gesprächen immer Zeit für meine Fragen und Probleme hatte. Seine Vermutung, daß zwischen Zhus assoziativer Algebra und der Nullmodenalgebra ein enger Zusammenhang besteht, war der Ausgangspunkt dieser Arbeit. Ich danke außerdem M. Gaberdiel und P. Goddard für die fruchtbaren Diskussionen über Zhus kommutative Algebra. Mein Dank gilt auch der gesamten Arbeitsgruppe, namentlich S. Dulat, M. Rösgen, D. Roggenkamp, F. Rohsiepe, M. Soika, K. Wendland und A. Wißkirchen.

Anhang A

Rechnen mit formalen Potenzreihen

Im Haupttext diese Arbeit verwenden wir durchgängig die Sprache der Cauchy-Integrale, meinen jedoch eigentlich die Residuenbildung bei formalen Potenzreihen: Das Residuum $\mathrm{Res}_z f(z)$ einer formalen Potenzreihe $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ ist definiert als der Koeffizient a_{-1}. Die Definition des Residuums kann auf rationale Funktionen $f(z,w)$ mit Polstellen bei $z = 0, w = 0$ oder $z = w$ ausgedehnt werden, indem wir $f(z,w)$ vor der Residuenbildung in eine Potenzreihe entwickeln. Dabei müssen wir angeben, ob diese Entwicklung für $|z| > |w|$ oder für $|z| < |w|$ zu erfolgen hat. Im erstgenannten Fall schreiben wir $\iota_{z,w} f(z,w)$, im letztgenannten $\iota_{w,z} f(z,w)$.

Wir demonstrieren am Beispiel der Dualitätsrelation (2.5), wie Ausdrücke von der Integralsprache in die Sprache der formalen Residuenbildung zu übersetzen sind. Die Dualitätsrelation lautet

$$\oint_{C(w)} \mathrm{d}z\, f(z,w) :\!\phi(z)\psi(w)\!: = \oint_{C(w)} \mathrm{d}z\, f(z,w)\, Y(\phi(z-w)\psi, w).$$

Wir ersetzen auf der linken Seite den Kreis $C(w)$ mit Mittelpunkt w (und infinitesimalem Radius) durch die Differenz zweier Kreise um den Ursprung, davon einer mit Radius größer $|w|$ und einer mit Radius kleiner $|w|$:

$$\begin{aligned}
&\oint_{C(w)} \mathrm{d}z\, f(z,w) :\!\phi(z)\psi(w)\!: \\
&\qquad = \oint_{|z|>|w|} \mathrm{d}z\, f(z,w)\, \phi(z)\psi(w) - \oint_{|z|<|w|} \mathrm{d}z\, f(z,w)\, \psi(w)\phi(z) \\
&\qquad = \mathrm{Res}_z \iota_{z,w} f(z,w)\, \phi(z)\psi(w) - \mathrm{Res}_z \iota_{w,z} f(z,w)\, \psi(w)\phi(z)
\end{aligned}$$

Die rechte Seite liefert

$$\begin{aligned}
&\oint_{C(w)} \mathrm{d}z\, f(z,w)\, Y(\phi(z-w)\psi, w) \\
&\qquad = \oint_{C(w)} \mathrm{d}(z-w)\, f(z,w)\, Y(\phi(z-w)\psi, w) \\
&\qquad = \mathrm{Res}_{z-w} \iota_{w,z-w} f(z,w)\, Y(\phi(z-w)\psi, w)
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir die Dualitätsrelation, wie sie in der mathematischen Literatur (unter der Bezeichnung Jacobi-Identität) üblicherweise formuliert wird (vergleiche zum Beispiel [45]).

Anhang B

Tiefstgewichtsdarstellungen der W_3-Algebra

B.1 Nullzustände

Im folgenden sind alle Nullzustände der W_3-Algebra mit Level $n \leq 12$ aufgeführt, die für spezielle zentrale Ladungen existieren.

Neben dem Nullzustand ϕ und der zentrale Ladung c in der Parametrisierung $c_{p,q}$ gemäß (4.8) sind jeweils auch $\phi(0)$ und $(W_1\phi)(0) \in Z(W_3)$ angegeben (unter Vernachlässigung konstanter Faktoren). Dabei schreiben wir der Übersichtlichkeit halber h und w anstelle von $L(0)$ und $W(0)$.

Level $n = 2$

$$
\begin{array}{lcl}
c_{3,4} & = & 0 \\
\phi & = & L_2\Omega \\
\phi(0) & \propto & h \\
(W_1\phi)(0) & \propto & w
\end{array}
$$

Level $n = 3$

$$
\begin{array}{lcl}
c_{3,5} & = & -22/5 \\
\phi & = & W_3'\Omega \\
\phi(0) & \propto & w' \\
(W_1'\phi)(0) & \propto & 2h + 10h^2
\end{array}
$$

Wegen der Singularität in der Kommutatorrelation (2.41) ist für $c = -22/5$ der Zustand W gemäß $W' = \sqrt{\frac{22+5c}{48}}\,W$ umzunormieren.

Level $n = 5$

$$\begin{array}{lcl}
c_{3,7} & = & -114/7 \\
\phi & = & (7L_2W_3 - 3W_5)\Omega \\
\phi(0) & \propto & 3w + 7hw \\
(W_1\phi)(0) & \propto & 20h + 63h^2 + 49h^3 - 273w^2
\end{array}$$

Level $n = 6$

$$\begin{array}{lcl}
c_{2,3} & = & -2 \\
\phi & = & (6L_3W_3 - 4L_2W_4 + 3W_6)\Omega \\
\phi(0) & \propto & 0 \\
(W_1\phi)(0) & \propto & 2h^2 + 16h^3 - 27w^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
c_{2,3} & = & -2 \\
\phi & = & (32{L_2}^3 + 19{L_3}^2 + 56L_2L_4 - 64L_6 - 54{W_3}^2)\Omega \\
\phi(0) & \propto & 2h^2 + 16h^3 - 27w^2 \\
(W_1\phi)(0) & \propto & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
c_{3,8} & = & -23 \\
\phi & = & (32{L_2}^3 - 51{L_3}^2 - 168L_2L_4 + 216L_6 - 558{W_3}^2)\Omega \\
\phi(0) & \propto & 14h + 30h^2 + 16h^3 - 279w^2 \\
(W_1\phi)(0) & \propto & 3w + 10hw + 8h^2w
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
c_{4,5} & = & 4/5 \\
\phi & = & (190{L_2}^3 + 255{L_3}^2 - 462L_2L_4 - 324L_6 - 234{W_3}^2)\Omega \\
\phi(0) & \propto & 14h - 225h^2 + 475h^3 - 585w^2 \\
(W_1\phi)(0) & \propto & 2w - 33hw + 45h^2w
\end{array}$$

Level $n = 8$

$$\begin{array}{lcl}
c_{3,10} & = & -186/5 \\
\phi & = & (200{L_2}^4 - 750L_2{L_3}^2 - 1920{L_2}^2L_4 + 378{L_4}^2 - 510L_3L_5 + \\
 & & 1800L_2L_6 + 12420L_8 - 12300L_2{W_3}^2 + 1845{W_4}^2 + 7380W_3W_5)\Omega \\
\phi(0) & \propto & 528h + 1162h^2 + 840h^3 + 200h^4 - 12915w^2 - 12300hw^2 \\
(W_1\phi)(0) & \propto & -176w - 616hw - 630h^2w - 200h^3w + 1025w^3
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
c_{2,3} & = & -2 \\
\phi & = & (192{L_2}^4 + 358L_2{L_3}^2 - 400{L_2}^2L_4 + 582{L_4}^2 + 518L_3L_5 + 408L_2L_6 - \\
 & & 1796L_8 - 324L_2{W_3}^2 - 321{W_4}^2 + 828W_3W_5)\Omega \\
\phi(0) & \propto & -10h^2 - 56h^3 + 192h^4 + 135w^2 - 324hw^2 \\
(W_1\phi)(0) & \propto & 2h^2w + 16h^3w - 27w^3
\end{array}$$

Level $n = 9$

$$
\begin{array}{lcl}
c_{3,11} & = & -490/11 \\
\phi & = & (1331{L_2}^3W_3 - 1815{L_3}^2W_3 - 6171L_2L_4W_3 + 10428L_6W_3 - \\
 & & 16698{W_3}^3 - 1089L_2L_3W_4 + 418L_5W_4 - 1089{L_2}^2W_5 + 385L_4W_5 - \\
 & & 2343L_3W_6 - 5654L_2W_7 + 71510W_9)\Omega \\
\phi(0) & \propto & -1820w - 5863hw - 5082h^2w - 1331h^3w + 16698w^3 \\
(W_1\phi)(0) & \propto & 87360h + 227788h^2 + 219857h^3 + 93170h^4 + 14641h^5 - \\
 & & 2206413w^2 - 3506580hw^2 - 1377585h^2w^2
\end{array}
$$

Level $n = 10$

$$
\begin{array}{lcl}
c_{4,7} & = & -40/7 \\
\phi & = & (208887{L_2}^5 + 492205{L_2}^2{L_3}^2 - 559090{L_2}^3L_4 - 295323{L_3}^2L_4 + \\
 & & 111867L_2{L_4}^2 + 2417954L_2L_3L_5 + 2167074{L_5}^2 + 1093092{L_2}^2L_6 + \\
 & & 5765508L_4L_6 + 5543412L_3L_7 + 2454326L_2L_8 - 24883740L_{10} + \\
 & & 304290{L_2}^2{W_3}^2 - 507150L_4{W_3}^2 + 270480L_3W_3W_4 + 400085L_2{W_4}^2 - \\
 & & 1362060L_2W_3W_5 + 692484{W_5}^2 - 1301202W_4W_6 + 2229528W_3W_7)\Omega \\
\phi(0) & \propto & -1560h - 16394h^2 - 48461h^3 + 24010h^4 + 208887h^5 + 6624w^2 - \\
 & & 210105hw^2 + 304290h^2w^2 \\
(W_1\phi)(0) & \propto & -1560w - 18122hw - 17073h^2w + 136318h^3w + 11319h^4w - \\
 & & 62307w^3 + 121716hw^3
\end{array}
$$

Level $n = 11$

$$
\begin{array}{lcl}
c_{3,13} & = & -774/13 \\
\phi & = & (28561{L_2}^4W_3 - 92274L_2{L_3}^2W_3 - 250458{L_2}^2L_4W_3 + 31941{L_4}^2W_3 - \\
 & & 96330L_3L_5W_3 + 320424L_2L_6W_3 + 2278068L_8W_3 - 984256L_2{W_3}^3 - \\
 & & 39546{L_2}^2L_3W_4 + 36504L_3L_4W_4 + 33124L_2L_5W_4 - 90168L_7W_4 + \\
 & & 340704W_3{W_4}^2 - 26364{L_2}^3W_5 + 30420{L_3}^2W_5 + 83824L_2L_4W_5 - \\
 & & 261508L_6W_5 + 681408{W_3}^2W_5 - 87204L_2L_3W_6 - 167232L_5W_6 - \\
 & & 262964{L_2}^2W_7 - 86580L_4W_7 + 15912L_3W_8 + 3948568L_2W_9 - \\
 & & 3426624W_{11})\Omega \\
\phi(0) & \propto & -137088w - 468520hw - 481481h^2w - 197730h^3w - 28561h^4w + \\
 & & 1703520w^3 + 984256hw^3 \\
(W_1\phi)(0) & \propto & 12566400h + 32034028h^2 + 32090565h^3 + 15833779h^4 + \\
 & & 3855735h^5 + 371293h^6 - 351755040w^2 - 666303456hw^2 - \\
 & & 398623680h^2w^2 - 76771968h^3w^2 + 330710016w^4
\end{array}
$$

Level $n = 12$

$$
\begin{array}{lcl}
c_{2,5} & = & -98/5 \\
\phi & = & (-14400L_2{}^3L_3W_3 - 25050L_3{}^3W_3 - 98640L_2L_3L_4W_3 + \\
 & & 51840L_2{}^2L_5W_3 + 8064L_4L_5W_3 + 70560L_3L_6W_3 + 17280L_2L_7W_3 + \\
 & & 152136L_9W_3 - 153900L_3W_3{}^3 + 9600L_2{}^4W_4 - 8100L_2L_3{}^2W_4 + \\
 & & 13920L_2{}^2L_4W_4 - 8064L_4{}^2W_4 + 6240L_3L_5W_4 - 70080L_2L_6W_4 - \\
 & & 117520L_8W_4 + 102600L_2W_3{}^2W_4 - 28880W_4{}^3 + 24000L_2{}^2L_3W_5 - \\
 & & 16560L_3L_4W_5 - 29760L_2L_5W_5 - 57480L_7W_5 - 13680W_3W_4W_5 - \\
 & & 40800L_2{}^3W_6 - 73575L_3{}^2W_6 + 9720L_2L_4W_6 + 91800L_6W_6 - \\
 & & 66690W_3{}^2W_6 - 178800L_2L_3W_7 + 39320L_5W_7 + 261600L_2{}^2W_8 - \\
 & & 38520L_4W_8 + 1119720L_3W_9 - 1420000L_2W_{10} + 2572080W_{12})\Omega \\
\phi(0) & \propto & 0 \\
(W_1\phi)(0) & \propto & 12096h^2 + 61984h^3 + 118740h^4 + 100800h^5 + 32000h^6 + \\
 & & 191520w^2 + 697680hw^2 + 1077300h^2w^2 + 684000h^3w^2 + 3655125w^4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
c_{2,5} & = & -98/5 \\
\phi & = & (128000L_2{}^6 - 24000L_2{}^3L_3{}^2 - 1290875L_3{}^4 + 38400L_2{}^4L_4 - \\
 & & 815600L_2L_3{}^2L_4 + 2357440L_2{}^2L_4{}^2 - 698112L_4{}^3 + 3254400L_2{}^2L_3L_5 - \\
 & & 8314720L_3L_4L_5 - 18888480L_2L_5{}^2 - 4147200L_2{}^3L_6 + \\
 & & 2693600L_3{}^2L_6 - 25713920L_2L_4L_6 + 52661760L_6{}^2 - \\
 & & 46096000L_2L_3L_7 + 122319680L_5L_7 - 45081600L_2{}^2L_8 + \\
 & & 104966880L_4L_8 + 160857120L_3L_9 + 296551040L_2L_{10} - \\
 & & 1400985280L_{12} + 2736000L_2{}^3W_3{}^2 - 11850300L_3{}^2W_3{}^2 + \\
 & & 22572000L_2L_4W_3{}^2 + 29056320L_6W_3{}^2 + 14620500W_3{}^4 + \\
 & & 23666400L_2L_3W_3W_4 - 8727840L_5W_3W_4 - 8162400L_2{}^2W_4{}^2 - \\
 & & 1599040L_4W_4{}^2 - 6566400L_2{}^2W_3W_5 + 8463360L_4W_3W_5 - \\
 & & 5502400L_3W_4W_5 + 152000L_2W_5{}^2 + 14329800L_3W_3W_6 + \\
 & & 31897200L_2W_4W_6 + 6694650W_6{}^2 + 67579200L_2W_3W_7 + \\
 & & 28089600W_5W_7 - 47433120W_4W_8 - 294612480W_3W_9)\Omega \\
\phi(0) & \propto & 12096h^2 + 61984h^3 + 118740h^4 + 100800h^5 + 32000h^6 + \\
 & & 191520w^2 + 697680hw^2 + 1077300h^2w^2 + 684000h^3w^2 + 3655125w^4 \\
(W_1\phi)(0) & \propto & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
c_{3,14} & = & -470/7 \\
\phi & = & (307328{L_2}^6 - 3375120{L_2}^3{L_3}^2 + 1417815{L_3}^4 - 6585600{L_2}^4L_4 + \\
& & 12898368L_2{L_3}^2L_4 + 17943408{L_2}^2{L_4}^2 - 3586800{L_4}^3 - \\
& & 5284944{L_2}^2L_3L_5 - 29310624L_3L_4L_5 - 60632208L_2{L_5}^2 - \\
& & 931392{L_2}^3L_6 - 53346384{L_3}^2L_6 - 160324416L_2L_4L_6 + 853651584{L_6}^2 - \\
& & 152249664L_2L_3L_7 + 1504713504L_5L_7 + 57101856{L_2}^2L_8 + \\
& & 1312353504L_4L_8 + 1964498256L_3L_9 + 5628845376L_2L_{10} - \\
& & 69394822560L_{12} - 90387360{L_2}^3{W_3}^2 + 111370140{L_3}^2{W_3}^2 + \\
& & 387374400L_2L_4{W_3}^2 - 857757600L_6{W_3}^2 + 886118940{W_3}^4 + \\
& & 116212320L_2L_3W_3W_4 - 32281200L_5W_3W_4 + 29053080{L_2}^2{W_4}^2 - \\
& & 29053080L_4{W_4}^2 + 116212320{L_2}^2W_3W_5 + 3689280L_4W_3W_5 - \\
& & 41504400L_3W_4W_5 - 56445984L_2{W_5}^2 + 350020440L_3W_3W_6 - \\
& & 54785808L_2W_4W_6 + 358568370{W_6}^2 + 853699392L_2W_3W_7 + \\
& & 415834560W_5W_7 - 29514240W_4W_8 - 11337157440W_3W_9)\Omega \\
\phi(0) & \propto & 4742400h + 10828400h^2 + 9645636h^3 + 4212824h^4 + 905520h^5 + \\
& & 76832h^6 - 139863240w^2 - 247804326hw^2 - 133159950h^2w^2 - \\
& & 22596840h^3w^2 + 221529735w^4 \\
(W_1\phi)(0) & \propto & -547200w - 2039840hw - 2525138h^2w - 1421882h^3w - \\
& & 377300h^4w - 38416h^5w + 7228683w^3 + 7397775hw^3 + 1883070h^2w^3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
c_{5,6} & = & 6/5 \\
\phi & = & (2387200{L_2}^6 + 16754000{L_2}^3{L_3}^2 - 20465125{L_3}^4 - 42980480{L_2}^4L_4 - \\
& & 3319840L_2{L_3}^2L_4 + 81454928{L_2}^2{L_4}^2 + 2073648{L_4}^3 - \\
& & 93883760{L_2}^2L_3L_5 - 35930976L_3L_4L_5 + 121870736L_2{L_5}^2 + \\
& & 5459520{L_2}^3L_6 + 157656720{L_3}^2L_6 + 2477888L_2L_4L_6 - \\
& & 149085312{L_6}^2 + 3698880L_2L_3L_7 + 2849376L_5L_7 - 33958560{L_2}^2L_8 + \\
& & 10655072L_4L_8 + 106159600L_3L_9 - 136162880L_2L_{10} + \\
& & 235090592L_{12} - 4646880{L_2}^3{W_3}^2 + 33819660{L_3}^2{W_3}^2 + \\
& & 85188096L_2L_4{W_3}^2 - 38193120L_6{W_3}^2 - 6175764{W_3}^4 - \\
& & 73822560L_2L_3W_3W_4 + 95474736L_5W_3W_4 + 16037000{L_2}^2{W_4}^2 - \\
& & 16037000L_4{W_4}^2 + 26641440{L_2}^2W_3W_5 - 107196096L_4W_3W_5 + \\
& & 36220240L_3W_4W_5 - 8768480L_2{W_5}^2 + 120498840L_3W_3W_6 - \\
& & 70857360L_2W_4W_6 + 61295850{W_6}^2 + 34507200L_2W_3W_7 + \\
& & 26384960W_5W_7 + 91497280W_4W_8 - 125194944W_3W_9)\Omega \\
\phi(0) & \propto & -23296h + 788992h^2 - 8082100h^3 + 28969600h^4 - 39010000h^5 + \\
& & 14920000h^6 + 3978240w^2 - 41491170hw^2 + 84498750h^2w^2 - \\
& & 29043000h^3w^2 - 38598525w^4 \\
(W_1\phi)(0) & \propto & 2688w - 93952hw + 833514h^2w - 2671190h^3w + 3302100h^4w - \\
& & 1296000h^5w + 2024505w^3 - 4958415hw^3 + 2806650h^2w^3
\end{array}
$$

B.2 Tiefstgewichte

In den folgenden Tabellen sind für diejenigen zentralen Ladungen $c = c_{p,q}$, bei denen ein Nullzustand mit Level $n \leq 12$ existiert (siehe Anhang B.1), die $L(0)$- und $W(0)$-Eigenwerte h und w der irreduziblen Darstellungen von $\tilde{Z}$ angegeben (siehe Abschnitt 4.5). Man beachte, daß tatsächlich die Werte von w^2 und nicht diejenigen von w aufgeführt sind.

$c = c_{3,4}$

$c_{3,4} = 0$, $n = 2$	
h	w^2
0	0

$c = c_{3,5}$

$c_{3,5} = -22/5$, $n = 3$	
h	w'^2
$-1/5$	0
0	0

Zur Normierung $W' = \sqrt{\frac{22+5c}{48}}\,W$ siehe Anhang B.1.

$c = c_{3,7}$

$c_{3,7} = -114/7$, $n = 5$	
h	w^2
$-5/7$	0
$-4/7$	0
$-3/7$	$-2/637$
0	0

$c = c_{2,3}$

$c_{2,3} = -2$, $n = 6$	
h	w^2
h	$2\left(h^2 + 8h^3\right)/27$

$c = c_{3,8}$

$c_{3,8} = -23$, $n = 6$	
h	w^2
-1	0
$-7/8$	0
$-3/4$	$-1/744$
$-1/2$	$-1/186$
0	0

$c = c_{4,5}$

$c_{4,5} = 4/5$, $n = 6$	
h	w^2
0	0
$1/15$	$2/15795$
$7/95$	0
$2/5$	0
$2/3$	$104/1215$

In [26] wurde gezeigt, daß die Darstellung von $\tilde{Z}$ mit $h = 7/95$ keine Darstellung von $Z(\bar{W}_3)$ ist.

$c = c_{3,10}$

$c_{3,10} = -186/5$, $n = 8$	
h	w^2
$-8/5$	0
$-3/2$	0
$-7/5$	$-2/5125$
$-6/5$	$-8/5125$
$-11/10$	0
-1	$-2/205$
$-3/5$	$-2/205$
0	0

$c = c_{3,11}$

$c_{3,11} = -490/11$ $n = 9$	
h	w^2
$-21/11$	0
$-20/11$	0
$-19/11$	$-2/8349$
$-17/11$	$-8/8349$
$-16/11$	0
$-15/11$	$-50/8349$
$-13/11$	0
$-12/11$	$-128/8349$
$-7/11$	$-98/8349$
0	0

$c = c_{4,7}$

$c_{4,7} = -40/7$ $n = 10$	
h	w^2
$-2/7$	0
$-5/21$	$-50/273861$
$-2/21$	$-8/5589$
0	0
$1/21$	$-242/5589$
$3/7$	$-150/1127$
$4/7$	0
$16/21$	$-349448/273861$
$4/3$	$-736/243$

Außerdem gibt es die nicht reelle Lösung $h = (-122 \pm i\sqrt{2081})/609$, $w^2 = 0$.

$c = c_{3,13}$

$c_{3,13} = -774/13$ $n = 11$	
h	w^2
$-33/13$	0
$-32/13$	0
$-31/13$	$-1/9464$
$-29/13$	$-1/2366$
$-28/13$	0
$-27/13$	$-25/9464$
$-25/13$	0
$-24/13$	$-8/1183$
$-23/13$	$-25/9464$
$-21/13$	$-7/338$
$-17/13$	0
$-16/13$	$-32/1183$
$-9/13$	$-18/1183$
0	0

$c = c_{2,5}$

$c_{2,5} = -98/5$ $n = 12$	
h	w^2
h	$-2\left(27h^2 + 40h^3\right)/855$
h	$-2\left(112 + 408h + 495h^2 + 200h^3\right)/4275$

$c = c_{3,14}$

$c_{3,14} = -470/7$, $n = 12$	
h	w^2
$-20/7$	0
$-39/14$	0
$-19/7$	$-2/26901$
$-18/7$	$-8/26901$
$-5/2$	0
$-17/7$	$-50/26901$
$-16/7$	0
$-31/14$	$-128/26901$
$-15/7$	$-50/26901$
-2	$-8/549$
$-13/7$	$-2/549$
$-12/7$	$-800/26901$
$-19/14$	0
$-9/7$	$-2/61$
$-5/7$	$-50/2989$
0	0

$c = c_{5,6}$

$c_{5,6} = 6/5$, $n = 12$	
h	w^2
0	0
$2/45$	$8/229635$
$1/10$	0
$1/9$	$14/32805$
$17/45$	$242/229635$
$1/2$	0
$3/5$	$2/35$
$32/45$	$15488/229635$
$7/9$	$4046/32805$
$13/9$	$69938/229635$
$8/5$	0
2	$72/35$

Außerdem gibt es die nicht rationalen Lösungen

$$\begin{aligned} h &= (7079 \pm i\sqrt{2411015})/15060, \\ w^2 &= (774340447145 \pm i2426270533\sqrt{2411015})/261586356023475 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h &= (3093 \pm \sqrt{5221945})/14920, \\ w^2 &= 0. \end{aligned}$$

Anhang C

Kommutative Zhu-Algebra der Stromalgebren

Die folgenden Tabellen enthalten die Zerlegung der kommutativen Zhu-Algebra $C(\bar{\mathbf{g}}_k)$ in irreduzible Höchstgewichtsdarstellungen von $\mathbf{g}$ für $\bar{\mathbf{g}}_k = \overline{su}(3)_{1,2,3}$, $\overline{su}(4)_1$, $\overline{su}(5)_1$, $\overline{so}(5)_{1,2}$, $\overline{so}(7)_1$, $\overline{sp}(6)_1$, $\overline{so}(8)_1$ und $\overline{g}(2)_{1,2}$. Die Resultate wurden mit dem in Abschnitt 5.3.3 beschriebenen Algorithmus gewonnen, den wir dazu in Mathematica [43] implementiert haben. Dabei konnten wir für die Berechnung der Gröbner-Basen und der Darstellungen (5.9) auf die Mathematica-Routinen `GroebnerBasis` und `PolynomialReduce` zurückgreifen.

In der Kopfzeile jeder Tabelle sind das zur affinen Lie-Algebra $\hat{\mathbf{g}}$ gehörige Dynkin-Diagramm, der Name $\bar{\mathbf{g}}_k$ der Stromalgebra und die betrachteten Level k angegeben. Die mit $l = 0, 1, 2, \ldots$ gekennzeichneten Blöcke der Tabelle enthalten die Beiträge von $S^l(\mathbf{g})$ zu $C(\bar{\mathbf{g}}_k) = S(\mathbf{g})/I_k$: Zu jedem in $S^l(\mathbf{g})$ auftretenden Höchstgewicht λ sind die Multiplizitäten $\mathrm{mult}(\lambda, S^l(\mathbf{g})/I_k \cap S^l(\mathbf{g}))$ angegeben. Die mit $k = \infty$ bezeichneten Zeilen enthalten die Multiplizitäten $\mathrm{mult}(\lambda, S^l(\mathbf{g}))$. Wenn einer (oder mehrere) der Höchstgewichtsvektoren zum Gewicht λ in die Menge $\tilde{\Omega}$ aufgenommen wurde (siehe Abschnitt 5.3.3), so ist dies in runden Klammern vermerkt [1]. Für $\bar{\mathbf{g}}_k = \overline{su}(3)_{1,2,3}$ sind außerdem die Höchstgewichtsvektoren $\tilde{\Omega}_{l,\lambda}$ aufgelistet, ausgedrückt in den Erzeugern $\tilde{\Omega} = \{T, C_2, A, C_3, B, B'\}$.

In der Tabelle nicht aufgeführte Multiplizitäten sind Null.

Die Gewichte $\lambda = (\lambda_1 \, \ldots \, \lambda_r)$ sind in der Basis der fundamentalen Gewichte angegeben. Wir folgen dabei den Konventionen von [5] und [38].

An jede Tabelle schließt sich die Berechnung der Dimension der kommutativen Zhu-Algebra $C(\bar{\mathbf{g}}_k)$ an. Außerdem wird zum Vergleich die Dimension der Nullmodenalgebra $Z(\bar{\mathbf{g}}_k)$ berechnet (siehe (4.7)).

[1] Wir verzichten auf die explizite Angabe der Höchstgewichtsvektoren $\tilde{\Omega}$, da diese zum Teil mehrere Dutzend Seiten umfassen würde.

$\overline{su}(3)_k$

$\hat{A}_2$			$\overline{su}(3)_k$			$k=1,2,3$		
$l=0$	$(0\,0)$							
	1							
$k=\infty$	1							
$k=3$	1							
$k=2$	1							
$k=1$	1							
$l=1$	$(1\,1)$							
	T							
$k=\infty$	1(1)							
$k=3$	1							
$k=2$	1							
$k=1$	1							
$l=2$	$(0\,0)$	$(1\,1)$	$(2\,2)$					
	C_2	A	T^2					
$k=\infty$	1(1)	1(1)	1					
$k=3$	1	1	1					
$k=2$	1	1	1					
$k=1$	1	1	0					
$l=3$	$(0\,0)$	$(0\,3)$	$(1\,1)$	$(2\,2)$	$(3\,0)$	$(3\,3)$		
	C_3	B	C_2T	AT	B'	T^3		
$k=\infty$	1(1)	1(1)	1	1	1(1)	1		
$k=3$	1	1	1	1	1	1		
$k=2$	1	1	1	1	1	0		
$k=1$	1	0	0	0	0	0		
$l=4$	$(0\,0)$	$(1\,1)$		$(1\,4)$	$(2\,2)$		$(3\,3)$	$(4\,1)$
	C_2^2	C_3T, AC_2		BT	C_2T^2, A^2		AT^2	$B'T$
$k=\infty$	1	2		1	2		1	1
$k=3$	1	2		1	2		1	1
$k=2$	1	2		0	1		0	0
$l=4$	$(4\,4)$							
	T^4							
$k=\infty$	1							
$l=5$	$(0\,0)$	$(0\,3)$	$(1\,1)$		$(1\,4)$	$(2\,2)$		$(2\,5)$
	C_3C_2	BC_2	C_2^2T, AC_3		AB	C_3T^2, AC_2T		BT^2
$k=\infty$	1	1	2		1	2		1
$k=3$	1	1	2		1	2		0
$k=2$	1	0	1		0	0		0
$l=5$	$(3\,0)$	$(3\,3)$		$(4\,1)$	$(4\,4)$	$(5\,2)$	$(5\,5)$	
	$B'C_2$	C_2T^3, A^2T		AB'	AT^3	$B'T^2$	T^5	
$k=\infty$	1	2		1	1	1	1	
$k=3$	1	1		1	0	0	0	

$l=6$	$(0\,0)$	$(0\,3)$	$(0\,6)$	$(1\,1)$	$(1\,4)$	
	C_3^2, C_2^3	BC_3	B^2	C_3C_2T, AC_2^2	BC_2T	
$k=\infty$	2	1	1	2	1	
$k=3$	2	1	0	2	0	
$k=2$	1	0	0	0	0	

$l=6$	$(2\,2)$	$(2\,5)$	$(3\,0)$	$(3\,3)$
	$C_2^2T^2, A^2C_2, AC_3T$	ABT	$B'C_3$	$AC_2T^2, C_3T^3, B'B, A^3$
$k=\infty$	3	1	1	3
$k=3$	2	0	1	1

$l=6$	$(3\,6)$	$(4\,1)$	$(4\,4)$	$(5\,2)$	$(5\,5)$	$(6\,0)$	$(6\,3)$
	BT^3	$B'C_2T$	A^2T^2, C_2T^4	$AB'T$	AT^4	B'^2	$B'T^3$
$k=\infty$	1	1	2	1	1	1	1

$l=6$	$(6\,6)$						
	T^6						
$k=\infty$	1						

$l=7$	$(0\,0)$	$(0\,3)$	$(1\,1)$	$(1\,4)$	$(1\,7)$	$(2\,2)$	$(2\,5)$	$(3\,0)$
$k=\infty$	1	1	3	2	1	3	2	1
$k=3$	1	0	2	0	0	1	0	0

$l=7$	$(3\,3)$	$(3\,6)$	$(4\,1)$	$(4\,4)$	$(4\,7)$	$(5\,2)$	$(5\,5)$	$(6\,3)$
$k=\infty$	3	1	2	3	1	2	2	1

$l=7$	$(6\,6)$	$(7\,1)$	$(7\,4)$	$(7\,7)$				
$k=\infty$	1	1	1	1				

$l=8$	$(0\,0)$	$(0\,3)$	$(0\,6)$	$(1\,1)$	$(1\,4)$	$(1\,7)$	$(2\,2)$	$(2\,5)$
$k=\infty$	2	1	1	3	2	1	4	2
$k=3$	1	0	0	1	0	0	0	0

$l=8$	$(2\,8)$	$(3\,0)$	$(3\,3)$	$(3\,6)$	$(4\,1)$	$(4\,4)$	$(4\,7)$	$(5\,2)$
$k=\infty$	1	1	4	2	2	4	1	2

$l=8$	$(5\,5)$	$(5\,8)$	$(6\,0)$	$(6\,3)$	$(6\,6)$	$(7\,1)$	$(7\,4)$	$(7\,7)$
$k=\infty$	3	1	1	2	2	1	1	1

$l=8$	$(8\,2)$	$(8\,5)$	$(8\,8)$					
$k=\infty$	1	1	1					

$l=9$	$(0\,0)$	$(0\,3)$	$(0\,6)$	$(0\,9)$	$(1\,1)$	$(1\,4)$	$(1\,7)$	$(2\,2)$
$k=\infty$	2	2	1	1	3	2	1	4
$k=3$	1	0	0	0	0	0	0	0

$l=9$	$(2\,5)$	$(2\,8)$	$(3\,0)$	$(3\,3)$	$(3\,6)$	$(3\,9)$	$(4\,1)$	$(4\,4)$
$k=\infty$	3	1	2	5	3	1	2	4

$l=9$	$(4\,7)$	$(5\,2)$	$(5\,5)$	$(5\,8)$	$(6\,0)$	$(6\,3)$	$(6\,6)$	$(6\,9)$
$k=\infty$	2	3	4	1	1	3	3	1

$l=9$	$(7\,1)$	$(7\,4)$	$(7\,7)$	$(8\,2)$	$(8\,5)$	$(8\,8)$	$(9\,0)$	$(9\,3)$
$k=\infty$	1	2	2	1	1	1	1	1

$l=9$	$(9\,6)$	$(9\,9)$						
$k=\infty$	1	1						

$l=10$	(0 0)	(0 3)	(0 6)	(1 1)	(1 4)	(1 7)	(1 10)	(2 2)
$k=\infty$	2	1	1	4	3	2	1	5
$l=10$	(2 5)	(2 8)	(3 0)	(3 3)	(3 6)	(3 9)	(4 1)	(4 4)
$k=\infty$	3	2	1	5	3	1	3	6
$l=10$	(4 7)	(4 10)	(5 2)	(5 5)	(5 8)	(6 0)	(6 3)	(6 6)
$k=\infty$	3	1	3	5	2	1	3	4
$l=10$	(6 9)	(7 1)	(7 4)	(7 7)	(7 10)	(8 2)	(8 5)	(8 8)
$k=\infty$	1	2	3	3	1	2	2	2
$l=10$	(9 3)	(9 6)	(9 9)	(10 1)	(10 4)	(10 7)	(10 10)	
$k=\infty$	1	1	1	1	1	1	1	

$$\dim(\lambda_1\,\lambda_2) = \tfrac{1}{2}(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(2+\lambda_1+\lambda_2)$$

$$\begin{aligned}
\dim C(\overline{su}(3)_1) &= \dim 3(00)\oplus 2(11)\\
&= 19\\
\dim Z(\overline{su}(3)_1) &= \dim (00)^2\oplus(10)^2\oplus(01)^2\\
&= 19
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dim C(\overline{su}(3)_2) &= \dim 6(00)\oplus 6(11)\oplus 3(22)\oplus(03)\oplus(30)\\
&= 155\\
\dim Z(\overline{su}(3)_2) &= \dim (00)^2\oplus(10)^2\oplus(01)^2\oplus(11)^2\oplus(02)^2\oplus(20)^2\\
&= 155
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dim C(\overline{su}(3)_3) &= \dim 10(00)\oplus 12(11)\oplus 9(22)\oplus 3(03)\oplus 3(30)\oplus 4(33)\\
&\quad \oplus 2(14)\oplus 2(41)\\
&= 805\\
\dim Z(\overline{su}(3)_3) &= \dim (00)^2\oplus(10)^2\oplus(01)^2\oplus(11)^2\oplus(02)^2\oplus(20)^2\\
&\quad \oplus(12)^2\oplus(21)^2\oplus(30)^2\oplus(03)^2\\
&= 805
\end{aligned}$$

$\overline{su}(4)_k \cong \overline{so}(6)_k$

$\hat{A}_3 \cong \hat{D}_3$			$\overline{su}(4)_k \cong \overline{so}(6)_k$				$k=1$	
$l=0$	$(0\,0\,0)$							
$k=\infty$	1							
$k=1$	1							
$l=1$	$(1\,0\,1)$							
$k=\infty$	1(1)							
$k=1$	1							
$l=2$	$(2\,0\,2)$	$(0\,2\,0)$	$(1\,0\,1)$	$(0\,0\,0)$				
$k=\infty$	1	1(1)	1(1)	1(1)				
$k=1$	0	1	1	1				
$l=3$	$(3\,0\,3)$	$(1\,2\,1)$	$(2\,0\,2)$	$(2\,1\,0)$	$(0\,1\,2)$	$(1\,0\,1)$	$(0\,0\,0)$	
$k=\infty$	1	1	1	1(1)	1(1)	2(1)	1(1)	
$k=1$	0	0	0	0	0	1	1	
$l=4$	$(4\,0\,4)$	$(2\,2\,2)$	$(3\,0\,3)$	$(3\,1\,1)$	$(1\,1\,3)$	$(0\,4\,0)$	$(1\,2\,1)$	$(2\,0\,2)$
$k=\infty$	1	1	1	1	1	1	1	3
$l=4$	$(2\,1\,0)$	$(0\,1\,2)$	$(0\,2\,0)$	$(1\,0\,1)$	$(0\,0\,0)$			
$k=\infty$	1(1)	1(1)	2(1)	2	2(1)			
$k=1$	0	0	0	0	1			
$l=5$	$(5\,0\,5)$	$(3\,2\,3)$	$(4\,0\,4)$	$(4\,1\,2)$	$(2\,1\,4)$	$(1\,4\,1)$	$(2\,2\,2)$	$(3\,0\,3)$
$k=\infty$	1	1	1	1	1	1	1	3
$l=5$	$(2\,3\,0)$	$(0\,3\,2)$	$(3\,1\,1)$	$(1\,1\,3)$	$(1\,2\,1)$	$(2\,0\,2)$	$(2\,1\,0)$	$(0\,1\,2)$
$k=\infty$	1	1	2	2	3	3	2(1)	2(1)
$l=5$	$(0\,2\,0)$	$(1\,0\,1)$	$(0\,0\,0)$					
$k=\infty$	1	4	1					

$$\begin{aligned}
\dim(\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3) &= \tfrac{1}{12}(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(2+\lambda_1+\lambda_2)(1+\lambda_3)(2+\lambda_2+\lambda_3) \\
&\quad (3+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dim C(\overline{su}(4)_1) &= \dim 4(000) \oplus 3(101) \oplus (020) \\
&= 69 \\
\dim Z(\overline{su}(4)_1) &= \dim (000)^2 \oplus (100)^2 \oplus (010)^2 \oplus (001)^2 \\
&= 69
\end{aligned}$$

$\overline{su}(5)_k$

$\hat{A}_4$			$\overline{su}(5)_k$			$k=1$	
$l=0$	(0 0 0 0)						
$k=\infty$	1						
$k=1$	1						
$l=1$	(1 0 0 1)						
$k=\infty$	1(1)						
$k=1$	1						
$l=2$	(0 0 0 0)	(0 1 1 0)	(1 0 0 1)	(2 0 0 2)			
$k=\infty$	1(1)	1(1)	1(1)	1			
$k=1$	1	1	1	0			
$l=3$	(0 0 0 0)	(0 1 0 2)	(0 1 1 0)	(1 0 0 1)	(1 1 1 1)	(2 0 0 2)	(2 0 1 0)	(3 0 0 3)
$k=\infty$	1(1)	1(1)	1(1)	2(1)	1	1	1(1)	1
$k=1$	1	0	1	1	0	0	0	0
$l=4$	(0 0 0 0)	(0 0 2 1)	(0 1 0 2)	(0 1 1 0)	(0 2 2 0)	(1 0 0 1)	(1 1 0 3)	(1 1 1 1)
$k=\infty$	2(1)	1(1)	1(1)	2(1)	1	3(1)	1	2
$k=1$	1	0	0	0	0	1	0	0
$l=4$	(1 2 0 0)	(2 0 0 2)	(2 0 1 0)	(2 1 1 2)	(3 0 0 3)	(3 0 1 1)	(4 0 0 4)	
$k=\infty$	1(1)	3	1(1)	1	1	1	1	
$l=5$	(0 0 0 0)	(0 0 2 1)	(0 1 0 2)	(0 1 1 0)	(0 2 1 2)	(0 2 2 0)	(0 3 0 1)	(1 0 0 1)
$k=\infty$	2(1)	1(1)	3(2)	3(1)	1	1	1(1)	4
$k=1$	1	0	0	0	0	0	0	0
$l=5$	(1 0 2 2)	(1 0 3 0)	(1 1 0 3)	(1 1 1 1)	(1 2 0 0)	(1 2 2 1)	(2 0 0 2)	(2 0 1 0)
$k=\infty$	1	1(1)	2	4	1(1)	1	4	3(2)
$l=5$	(2 1 0 4)	(2 1 1 2)	(2 1 2 0)	(2 2 0 1)	(3 0 0 3)	(3 0 1 1)	(3 1 1 3)	(4 0 0 4)
$k=\infty$	1	2	1	1	3	2	1	1
$l=5$	(4 0 1 2)	(5 0 0 5)						
$k=\infty$	1	1						

$$
\begin{aligned}
\dim\,(\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3\,\lambda_4) \quad &= \quad \tfrac{1}{288}(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(2+\lambda_1+\lambda_2)(1+\lambda_3) \\
&\quad\ (2+\lambda_2+\lambda_3)(3+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(1+\lambda_4) \\
&\quad\ (2+\lambda_3+\lambda_4)(3+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4) \\
&\quad\ (4+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dim C(\overline{su}(5)_1) \quad &= \quad \dim 5(0000)\oplus 4(1001)\oplus 2(0110) \\
&= \quad 251 \\
\dim Z(\overline{su}(5)_1) \quad &= \quad \dim\,(0000)^2\oplus(1000)^2\oplus(0100)^2\oplus(0010)^2\oplus(0001)^2 \\
&= \quad 251
\end{aligned}
$$

$\overline{so}(5)_k \cong \overline{sp}(4)_k$

$\hat{B}_2 \cong \hat{C}_2$			$\overline{so}(5)_k \cong \overline{sp}(4)_k$				$k=1,2$	
$l=0$	(0 0)							
$k=\infty$	1							
$k=2$	1							
$k=1$	1							
$l=1$	(0 2)							
$k=\infty$	1(1)							
$k=2$	1							
$k=1$	1							
$l=2$	(0 4)	(2 0)	(1 0)	(0 0)				
$k=\infty$	1	1(1)	1(1)	1(1)				
$k=2$	1	1	1	1				
$k=1$	0	1	1	1				
$l=3$	(0 6)	(2 2)	(1 2)	(0 2)				
$k=\infty$	1	1	1	2(1)				
$k=2$	0	1	1	2				
$k=1$	0	0	0	1				
$l=4$	(0 8)	(2 4)	(4 0)	(1 4)	(3 0)	(0 4)	(1 2)	(2 0)
$k=\infty$	1	1	1	1	1	2	1(1)	2
$k=2$	0	0	1	0	1	1	1	2
$l=4$	(1 0)	(0 0)						
$k=\infty$	1	2(1)						
$k=2$	1	2						
$k=1$	0	1						
$l=5$	(0 10)	(2 6)	(4 2)	(1 6)	(3 2)	(0 6)	(1 4)	(2 2)
$k=\infty$	1	1	1	1	1	2	1	3
$k=2$	0	0	0	0	0	0	0	1
$l=5$	(1 2)	(0 2)						
$k=\infty$	2	3						
$k=2$	1	2						
$l=6$	(0 12)	(2 8)	(4 4)	(1 8)	(6 0)	(3 4)	(0 8)	(1 6)
$k=\infty$	1	1	1	1	1	1	2	1
$l=6$	(5 0)	(2 4)	(3 2)	(4 0)	(1 4)	(2 2)	(3 0)	(0 4)
$k=\infty$	1	3	1	2	2	1	2	4
$k=2$	0	0	0	0	0	0	0	1
$l=6$	(1 2)	(2 0)	(1 0)	(0 0)				
$k=\infty$	1	3	2	2				
$k=2$	0	1	1	1				

$l=7$	(0 2)	(0 6)	(0 10)	(0 14)	(1 2)	(1 4)	(1 6)	(1 8)
$k=\infty$	4	4	2	1	3	2	2	1
$k=2$	1	0	0	0	0	0	0	0
$l=7$	(1 10)	(2 2)	(2 4)	(2 6)	(2 10)	(3 2)	(3 4)	(3 6)
$k=\infty$	1	5	1	3	1	3	1	1
$l=7$	(4 2)	(4 6)	(5 2)	(6 2)				
$k=\infty$	3	1	1	1				
$l=8$	(0 0)	(0 4)	(0 8)	(0 12)	(0 16)	(1 0)	(1 2)	(1 4)
$k=\infty$	3	5	4	2	1	2	2	4
$k=2$	1	0	0	0	0	0	0	0
$l=8$	(1 6)	(1 8)	(1 10)	(1 12)	(2 0)	(2 2)	(2 4)	(2 6)
$k=\infty$	2	2	1	1	4	1	6	1
$l=8$	(2 8)	(2 12)	(3 0)	(3 2)	(3 4)	(3 6)	(3 8)	(4 0)
$k=\infty$	3	1	3	2	3	1	1	4
$l=8$	(4 2)	(4 4)	(4 8)	(5 0)	(5 2)	(5 4)	(6 0)	(6 4)
$k=\infty$	1	3	1	2	1	1	2	1
$l=8$	(7 0)	(8 0)						
$k=\infty$	1	1						
$l=9$	(0 2)	(0 6)	(0 10)	(0 14)	(0 18)	(1 2)	(1 4)	(1 6)
$k=\infty$	5	6	4	2	1	4	3	4
$l=9$	(1 8)	(1 10)	(1 12)	(1 14)	(2 2)	(2 4)	(2 6)	(2 8)
$k=\infty$	2	2	1	1	7	2	6	1
$l=9$	(2 10)	(2 14)	(3 2)	(3 4)	(3 6)	(3 8)	(3 10)	(4 2)
$k=\infty$	3	1	5	3	3	1	1	6
$l=9$	(4 4)	(4 6)	(4 10)	(5 2)	(5 4)	(5 6)	(6 2)	(6 6)
$k=\infty$	1	3	1	3	1	1	3	1
$l=9$	(7 2)	(8 2)						
$k=\infty$	1	1						

$$\dim(\lambda_1\,\lambda_2) = \tfrac{1}{6}(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(2+\lambda_1+\lambda_2)(3+2\lambda_1+\lambda_2)$$

$$\begin{aligned}
\dim C(\overline{so}(5)_1) &= \dim 3(00)\oplus 2(02)\oplus(20)\oplus(10)\\
&= 42\\
\dim Z(\overline{so}(5)_1) &= \dim (00)^2\oplus(10)^2\oplus(01)^2\\
&= 42
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dim C(\overline{so}(5)_2) &= \dim 6(00)\oplus 6(02)\oplus 4(20)\oplus 3(10)\oplus 3(04)\oplus 2(22)\\
&\quad\ \oplus 3(12)\oplus(40)\oplus(30)\\
&= 594\\
\dim Z(\overline{so}(5)_2) &= \dim (00)^2\oplus(10)^2\oplus(01)^2\oplus(11)^2\oplus(02)^2\oplus(20)^2\\
&= 594
\end{aligned}$$

$\overline{so}(7)_k$

$\hat{B}_3$				$\overline{so}(7)_k$			$k=1$	
$l=0$	$(0\,0\,0)$							
$k=\infty$	1							
$k=1$	1							
$l=1$	$(0\,1\,0)$							
$k=\infty$	1(1)							
$k=1$	1							
$l=2$	$(0\,2\,0)$	$(2\,0\,0)$	$(0\,0\,2)$	$(0\,0\,0)$				
$k=\infty$	1	1(1)	1(1)	1(1)				
$k=1$	0	1	1	1				
$l=3$	$(0\,3\,0)$	$(2\,1\,0)$	$(0\,1\,2)$	$(1\,0\,2)$	$(0\,1\,0)$	$(1\,0\,0)$		
$k=\infty$	1	1	1	1(1)	2(1)	1(1)		
$k=1$	0	0	0	0	1	1		
$l=4$	$(0\,4\,0)$	$(2\,2\,0)$	$(0\,2\,2)$	$(1\,1\,2)$	$(4\,0\,0)$	$(2\,0\,2)$	$(0\,0\,4)$	$(0\,2\,0)$
$k=\infty$	1	1	1	1	1	1	1	3(1)
$l=4$	$(1\,0\,2)$	$(1\,1\,0)$	$(2\,0\,0)$	$(0\,0\,2)$	$(0\,0\,0)$			
$k=\infty$	1(1)	1	2(1)	2(1)	2(1)			
$k=1$	0	0	0	0	1			
$l=5$	$(0\,5\,0)$	$(2\,3\,0)$	$(0\,3\,2)$	$(1\,2\,2)$	$(4\,1\,0)$	$(2\,1\,2)$	$(0\,1\,4)$	$(3\,0\,2)$
$k=\infty$	1	1	1	1	1	1	1	1
$l=5$	$(1\,0\,4)$	$(0\,3\,0)$	$(1\,1\,2)$	$(1\,2\,0)$	$(2\,1\,0)$	$(0\,1\,2)$	$(3\,0\,0)$	$(1\,0\,2)$
$k=\infty$	1	3	2(1)	1	3	3	1	3(1)
$l=5$	$(1\,1\,0)$	$(0\,1\,0)$	$(1\,0\,0)$					
$k=\infty$	1(1)	4(1)	1					

$$\begin{aligned}
\dim(\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3) &= \tfrac{1}{720}(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(2+\lambda_1+\lambda_2)(1+\lambda_3)(2+\lambda_2+\lambda_3)\\
&\quad (3+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(3+2\lambda_2+\lambda_3)(4+\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)\\
&\quad (5+2\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dim C(\overline{so}(7)_1) &= \dim 3(000)\oplus 2(010)\oplus(200)\oplus(002)\oplus(100)\\
&= 114\\
\dim Z(\overline{so}(7)_1) &= \dim (000)^2\oplus(100)^2\oplus(001)^2\\
&= 114
\end{aligned}$$

$\overline{sp}(6)_k$

$\hat{C}_3$				$\overline{sp}(6)_k$			$k=1$	
$l=0$	(0 0 0)							
$k=\infty$	1							
$k=1$	1							
$l=1$	(2 0 0)							
$k=\infty$	1(1)							
$k=1$	1							
$l=2$	(0 0 0)	(0 1 0)	(0 2 0)	(4 0 0)				
$k=\infty$	1(1)	1(1)	1(1)	1				
$k=1$	1	1	1	0				
$l=3$	(0 0 2)	(1 0 1)	(2 0 0)	(2 1 0)	(2 2 0)	(6 0 0)		
$k=\infty$	1(1)	1(1)	2(1)	1	1	1		
$k=1$	1	1	1	0	0	0		
$l=4$	(0 0 0)	(0 1 0)	(0 2 0)	(0 3 0)	(0 4 0)	(1 1 1)	(2 0 2)	(2 1 0)
$k=\infty$	2(1)	2(1)	3(1)	1	1	1(1)	1	1(1)
$k=1$	1	1	1	0	0	0	0	0
$l=4$	(3 0 1)	(4 0 0)	(4 1 0)	(4 2 0)	(8 0 0)			
$k=\infty$	1	2	1	1	1			
$l=5$	(0 0 2)	(0 1 2)	(0 2 2)	(1 0 1)	(1 1 1)	(1 2 1)	(2 0 0)	(2 1 0)
$k=\infty$	2(1)	1	1	2(1)	2(1)	1	4(1)	3
$k=1$	0	0	0	0	0	0	1	0
$l=5$	(2 2 0)	(2 3 0)	(2 4 0)	(3 1 1)	(4 0 2)	(4 1 0)	(5 0 1)	(6 0 0)
$k=\infty$	4	1	1	1	1	1	1	2
$l=5$	(6 1 0)	(6 2 0)	(10 0 0)					
$k=\infty$	1	1	1					
$l=6$	(0 0 0)	(0 0 4)	(0 1 0)	(0 2 0)	(0 3 0)	(0 4 0)	(0 5 0)	(0 6 0)
$k=\infty$	3(1)	1	3	6(1)	4	3	1	1
$k=1$	1	0	0	0	0	0	0	0
$l=6$	(1 0 1)	(1 0 3)	(1 1 1)	(1 2 1)	(1 3 1)	(2 0 2)	(2 1 0)	(2 1 2)
$k=\infty$	1(1)	1	3(2)	2(1)	1	4	2(1)	1
$l=6$	(2 2 0)	(2 2 2)	(2 3 0)	(3 0 1)	(3 1 1)	(3 2 1)	(4 0 0)	(4 1 0)
$k=\infty$	1	1	1	3	2	1	5	3
$l=6$	(4 2 0)	(4 3 0)	(4 4 0)	(5 1 1)	(6 0 2)	(6 1 0)	(7 0 1)	(8 0 0)
$k=\infty$	4	1	1	1	1	1	1	2
$l=6$	(8 1 0)	(8 2 0)	(12 0 0)					
$k=\infty$	1	1	1					

$$
\begin{aligned}
\dim(\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3) \quad &= \quad \tfrac{1}{720}(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(2+\lambda_1+\lambda_2)(1+\lambda_3)(2+\lambda_2+\lambda_3) \\
&\quad\quad (3+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(3+\lambda_2+2\lambda_3)(4+\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3) \\
&\quad\quad (5+\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dim C(\overline{sp}(6)_1) \quad &= \quad \dim 4(000) \oplus 3(200) \oplus 2(010) \oplus 2(020) \oplus (002) \oplus (101) \\
&= \quad 429 \\
\dim Z(\overline{sp}(6)_1) \quad &= \quad \dim\,(000)^2 \oplus (100)^2 \oplus (010)^2 \oplus (001)^2 \\
&= \quad 429
\end{aligned}
$$

$\overline{so}(8)_k$

$\hat{D}_4$				$\overline{so}(8)_k$			$k=1$	
$l=0$	(0 0 0 0)							
$k=\infty$	1							
$k=1$	1							
$l=1$	(0 1 0 0)							
$k=\infty$	1(1)							
$k=1$	1							
$l=2$	(0 0 0 0)	(0 0 0 2)	(0 0 2 0)	(0 2 0 0)	(2 0 0 0)			
$k=\infty$	1(1)	1(1)	1(1)	1	1(1)			
$k=1$	1	1	1	0	1			
$l=3$	(0 1 0 0)	(0 1 0 2)	(0 1 2 0)	(0 3 0 0)	(1 0 1 1)	(2 1 0 0)		
$k=\infty$	3(2)	1	1	1	1(1)	1		
$k=1$	2	0	0	0	0	0		
$l=4$	(0 0 0 0)	(0 0 0 2)	(0 0 0 4)	(0 0 2 0)	(0 0 2 2)	(0 0 4 0)	(0 2 0 0)	(0 2 0 2)
$k=\infty$	3(2)	2(1)	1	2	1	1	4(1)	1
$k=1$	2	0	0	0	0	0	0	0
$l=4$	(0 2 2 0)	(0 4 0 0)	(1 0 1 1)	(1 1 1 1)	(2 0 0 0)	(2 0 0 2)	(2 0 2 0)	(2 2 0 0)
$k=\infty$	1	1	2(2)	1	2(1)	1	1	1
$l=4$	(4 0 0 0)							
$k=\infty$	1							
$l=5$	(0 1 0 0)	(0 1 0 2)	(0 1 0 4)	(0 1 2 0)	(0 1 2 2)	(0 1 4 0)	(0 3 0 0)	(0 3 0 2)
$k=\infty$	6(1)	4	1	4	1	1	4	1
$l=5$	(0 3 2 0)	(0 5 0 0)	(1 0 1 1)	(1 0 1 3)	(1 0 3 1)	(1 1 1 1)	(1 2 1 1)	(2 1 0 0)
$k=\infty$	1	1	4(3)	1	1	3(1)	1	4
$l=5$	(2 1 0 2)	(2 1 2 0)	(2 3 0 0)	(3 0 1 1)	(4 1 0 0)			
$k=\infty$	1	1	1	1	1			

$$\begin{aligned}
\dim(\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3\,\lambda_4) &= \tfrac{1}{4320}(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(2+\lambda_1+\lambda_2)(1+\lambda_3)(2+\lambda_2+\lambda_3)\\
&\quad (3+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(1+\lambda_4)(2+\lambda_2+\lambda_4)\\
&\quad (3+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4)(3+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)\\
&\quad (4+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)(5+\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dim C(\overline{so}(8)_1) &= \dim 4(0000)\oplus 3(0100)\oplus(0002)\oplus(0020)\oplus(2000)\\
&= 193\\
\dim Z(\overline{so}(8)_1) &= \dim\,(0000)^2\oplus(1000)^2\oplus(0010)^2\oplus(0001)^2\\
&= 193
\end{aligned}$$

$\overline{g}(2)_k$

	$\hat{G}_2$			$\overline{g}(2)_k$			$k=1,2$	
$l=0$	$(0\,0)$							
$k=\infty$	1							
$k=2$	1							
$k=1$	1							
$l=1$	$(0\,1)$							
$k=\infty$	1(1)							
$k=2$	1							
$k=1$	1							
$l=2$	$(0\,0)$	$(0\,2)$	$(2\,0)$					
$k=\infty$	1(1)	1	1(1)					
$k=2$	1	1	1					
$k=1$	1	0	1					
$l=3$	$(0\,1)$	$(0\,3)$	$(1\,0)$	$(2\,1)$	$(3\,0)$			
$k=\infty$	1	1	1(1)	1	1(1)			
$k=2$	1	0	1	1	1			
$k=1$	0	0	1	0	0			
$l=4$	$(0\,0)$	$(0\,2)$	$(0\,4)$	$(1\,1)$	$(2\,0)$	$(2\,2)$	$(3\,1)$	$(4\,0)$
$k=\infty$	1	2(1)	1	1	2(1)	1	1	1
$k=2$	1	1	0	1	2	0	0	1
$l=5$	$(0\,1)$	$(0\,3)$	$(0\,5)$	$(1\,0)$	$(1\,1)$	$(1\,2)$	$(2\,1)$	$(2\,3)$
$k=\infty$	2(1)	2	1	1	1(1)	1	2	1
$k=2$	1	0	0	1	1	0	0	0
$l=5$	$(3\,0)$	$(3\,1)$	$(3\,2)$	$(4\,1)$	$(5\,0)$			
$k=\infty$	2	1(1)	1	1	1			
$k=2$	1	0	0	0	0			
$l=6$	$(0\,0)$	$(0\,2)$	$(0\,4)$	$(0\,6)$	$(1\,1)$	$(1\,2)$	$(1\,3)$	$(2\,0)$
$k=\infty$	2(1)	3	2	1	1	1	1	3
$k=2$	1	0	0	0	0	0	0	1
$l=6$	$(2\,1)$	$(2\,2)$	$(2\,4)$	$(3\,0)$	$(3\,1)$	$(3\,2)$	$(3\,3)$	$(4\,0)$
$k=\infty$	1(1)	3	1	1(1)	2	1	1	3
$l=6$	$(4\,2)$	$(5\,1)$	$(6\,0)$					
$k=\infty$	1	1	2					
$l=7$	$(0\,1)$	$(0\,3)$	$(0\,5)$	$(0\,7)$	$(1\,0)$	$(1\,1)$	$(1\,2)$	$(1\,3)$
$k=\infty$	3	3	2	1	1	2(1)	2	1
$l=7$	$(1\,4)$	$(2\,1)$	$(2\,2)$	$(2\,3)$	$(2\,5)$	$(3\,0)$	$(3\,1)$	$(3\,2)$
$k=\infty$	1	4	1	3	1	3	3	3
$l=7$	$(3\,3)$	$(3\,4)$	$(4\,1)$	$(4\,3)$	$(5\,0)$	$(5\,1)$	$(5\,2)$	$(6\,1)$
$k=\infty$	1	1	3	1	3	1	1	2
$l=7$	$(7\,0)$							
$k=\infty$	1							

$$
\begin{aligned}
\dim(\lambda_1\,\lambda_2) &= \tfrac{1}{120}(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(2+\lambda_1+\lambda_2)(3+\lambda_1+2\lambda_2) \\
&\quad (4+\lambda_1+3\lambda_2)(5+2\lambda_1+3\lambda_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dim C(\overline{g}(2)_1) &= \dim 2(00)\oplus(01)\oplus(20)\oplus(10) \\
&= 50 \\
\dim Z(\overline{g}(2)_1) &= \dim\,(00)^2\oplus(10)^2 \\
&= 50
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dim C(\overline{g}(2)_2) &= \dim 4(00)\oplus 3(01)\oplus 2(02)\oplus 4(20)\oplus 2(10)\oplus(21) \\
&\quad \oplus 2(30)\oplus 2(11)\oplus(40) \\
&= 975 \\
\dim Z(\overline{g}(2)_2) &= \dim\,(00)^2\oplus(10)^2\oplus(01)^2\oplus(20)^2 \\
&= 975
\end{aligned}
$$

$\overline{e}(8)_k$

$\hat{E}_8$		$\overline{e}(8)_k$	$k=1$
$l=0$	$(0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0)$		
$k=\infty$	1		
$k=1$	1		
$l=1$	$(0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1)$		
$k=\infty$	1		
$k=1$	1		
$l=2$	$(0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0)$	$(0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,2)$	$(1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0)$
$k=\infty$	1	1	1
$k=1$	1	0	1

$$
\begin{aligned}
\dim C(\overline{e}(8)_1) &\geq \dim 2(00000000)\oplus(00000001)\oplus(10000000) \\
&= 4125 \\
\dim Z(\overline{e}(8)_1) &= \dim\,(00000000)^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Literaturverzeichnis

[1] V. I. Arnautov, S. T. Glavatsky und A. V. Mikhalev, *Introduction to the theory of topological rings and modules*, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1995.

[2] A. A. Belavin, A. M. Polyakov und A. B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. B **241** (1984), 333–380.

[3] A. Bilal und J.-L. Gervais, *Systematic approach to conformal systems with extended Virasoro symmetries*, Phys. Lett. B **206** (1988), 412.

[4] R. E. Borcherds, *Vertex algebras, Kac-Moody algebras and the monster*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **83** (1986), 3068.

[5] N. Bourbaki, *Groupes et algèbre de Lie*, Bd. Kapitel 7 und 8, Hermann, Paris, 1975.

[6] D. Brungs und W. Nahm, *The associative algebras of conformal field theory*, Lett. Math. Phys. **47** (1999), 379–383.

[7] H. Cartan und S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton University Press, 1956.

[8] C. W. Curtis und I. Reiner, *Methods of representation theory*, Bd. 1, Wiley-Interscience, 1981.

[9] P. DiFrancesco, P. Mathieu und D. Senechal, *Conformal field theory*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1996.

[10] C. Dong, H. Li und G. Mason, *Regularity of rational vertex operator algebras*, q-alg/9508018, 1995.

[11] ———, *Vertex operator algebras and associative algebras*, q-alg/9612010, 1996.

[12] ———, *Twisted representations of vertex operator algebras*, Math. Annalen **310** (1998), 571–600, q-alg/9509005.

[13] W. Eholzer und M. R. Gaberdiel, *Unitarity of rational $N = 2$ superconformal theories*, Comm. Math. Phys. **186** (1997), 61–86, hep-th/9601163.

[14] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate texts in mathematics, Bd. 150, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1994.

[15] M. Flohr, *W-Algebren, quasiprimäre Felder und nicht-minimale Modelle*, Diplomarbeit, Universität Bonn, 1991.

[16] I. Frenkel, Y.-Z. Huang und J. Lepowsky, *On axiomatic approaches to vertex operator algebras and modules*, Mem. Amer. Math. Soc. **104** (1993), 1.

[17] I. Frenkel, J. Lepowsky und A. Meurman, *A natural representation of the Fischer-Griess monster with the modular function J as a character*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **81** (1984), 3256–3260.

[18] ______, *Vertex operator algebras and the monster*, Pure and Appl. Math., Bd. 134, Academic Press, Boston, 1988.

[19] I. B. Frenkel und Y. Zhu, *Vertex operator algebras associated to representations of affine and Virasoro algebras*, Duke Math. J. **66** (1992), 123–168.

[20] W. Fulton und J. Harris, *Representation theory*, Graduate texts in mathematics, Bd. 129, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1991.

[21] M. Gaberdiel und P. Goddard, private Mitteilung.

[22] M. R. Gaberdiel und H. G. Kausch, *A rational logarithmic conformal field theory*, Phys. Lett. B **386** (1996), 131–137.

[23] Matthias R. Gaberdiel und Peter Goddard, *Axiomatic conformal field theory*, hep-th/9810019, 1998.

[24] P. Goddard, *Meromorphic conformal field theory*, Infinite dimensional Lie algebras and Lie groups (V. G. Kac, Hrsg.), Adv. Ser. Math. Phys., Bd. 7, World Scientific, 1989, S. 556–587.

[25] M. Hazewinkel (Hrsg.), *Encyclopaedia of mathematics*, Bd. 8, S. 90–93, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1987.

[26] A. Honecker, *Automorphisms of W-algebras and extended rational conformal field theory*, Nucl. Phys. B **400** (1993), 574–596.

[27] V. G. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras and Dedekind's η-functions*, Funct. Anal. Appl. **8** (1974), 68–70.

[28] V. G. Kac und W. Wang, *Vertex operator superalgebras and their representations*, Contemp. Math **175** (1994), 161–191, hep-th/9312065.

[29] M. Karel und H. Li, *Certain generating subspaces for vertex operator algebras*, math.QA/9807111, 1998.

[30] V. G. Knizhnik und A. B. Zamolodchikov, *Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions*, Nucl. Phys. **B247** (1984), 83–103.

[31] H. Li, *Local systems of vertex operators, vertex superalgebras and modules*, J. Pure Appl. Alg. **109** (1996), 143–195.

[32] Haisheng Li, *Some finiteness properties of regular vertex operator algebras*, math.QA/9807077, 1998.

[33] K. Lucke, *On Zhu's associative algebra as a tool in the representation theory of vertex operator algebras*, hep-th/9605020, 1996.

[34] G. Moore und N. Seiberg, *Classical and quantum conformal field theory*, Comm. Math. Phys. **123** (1989), 177–254.

[35] W. Nahm, private Mitteilung.

[36] ———, *Conformal quantum field theory in two dimensions*, in Vorbereitung.

[37] F. Rohsiepe, *Nicht-unitäre Darstellungen der Virasoro-Algebra mit nichttrivialen Jordan-Blöcken*, Diplomarbeit, Universität Bonn, 1996.

[38] M. A. A. van Leeuwen, A. M. Cohen und B. Lisser, *LiE manual*, Computer-Algebra-Gruppe des CWI, Kruislaan 413, 1098 SJ Amsterdam, Niederlande, `http://wallis.univ-poitiers.fr/~maavl/euromath.dvi`.

[39] W. Wang, *Rationality of Virasoro vertex operator algebras*, Duke Math. J. **71** (1993), 197–211.

[40] ———, *Classification of irreducible modules of W_3 algebra with $c = -2$*, q-alg/9708016, 1997.

[41] G. M. T. Watts, *Determinant formulae for extended algebras in two-dimensional conformal field theory*, Nucl. Phys. B **326** (1989), 648.

[42] ———, *W-algebras and coset models*, Phys. Lett. B **245** (1990), 65–71.

[43] Stephen Wolfram, *The Mathematica book*, 3. Aufl., Wolfram Media/Cambridge University Press, 1996.

[44] A. B. Zamolodchikov, *Infinite additional symmetries in two-dimensional conformal quantum field theory*, Theor. Math. Phys. **65** (1985), 1205–1213.

[45] Y. Zhu, *Modular invariance of characters of vertex operator algebras*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 237–302.