UNIVERSITÄT BONN
Physikalisches Institut

Störungen von Orbifolds konformer Feldtheorien

von
Holger Eberle

The conformal field theory of orbifold theories is introduced in order to calculate various correlators of twistfields and a four–point–correlator of $\mathbb{Z}_2$ twistfields with vertex operators.
Furthermore, Kadanoff's theory of marginal deformations of conformal field theories is introduced and applied to twistfield deformations of $\mathbb{Z}_2$ orbifold models of $c = 6$ torus theories. These orbifold models are situated in the K3 moduli space as a subvariety. The deformations lead away from this known $\mathbb{Z}_2$ orbifold sub-moduli-space and hence help to explore conformal field theories which have not yet been understood.
In particular, we calculate the deformation of the conformal dimensions of vertex operators for $h, \bar{h} < 1/2$ in second order perturbation theory.

Post address:
Nussallee 12
53115 Bonn
Germany

BONN-IB-2002-03
Bonn University
March 2002

UNIVERSITÄT BONN
Physikalisches Institut

Störungen von Orbifolds konformer Feldtheorien

von
Holger Eberle

Dieser Forschungsbericht wurde als Diplomarbeit von der Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn angenommen.

Angenommen am:	22. Januar 2001
Referent:	Prof. Dr. W. Nahm
Korreferent:	Prof. Dr. R Flume

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Konforme Feldtheorien haben seit ihrer allgemeinen Formulierung in den siebziger und achziger Jahren sowohl in der theoretischen Festkörperphysik als auch in der String Theorie wichtige Anwendungen gefunden. Ihre Vorzüge liegen darin, daß die nur in zwei Dimensionen mögliche lokale konforme Invarianz eine weit größere Symmetriealgebra generiert als die üblicherweise vorhandenen Symmetrien. Somit steigen die Chancen immens, konform invariante zweidimensionale Quanten-Feldtheorien mit Hilfe dieser Symmetriealgebra lösen zu können. Doch trotz dieser Hilfsmittel sind bisher relativ wenige konforme Feldtheorien vollständig verstanden, darunter die freien Theorien, die sogenannten *Minimalen Modelle* mit zentraler Ladung $c < 1$ und die davon abgeleiteten Gepner-Modelle sowie die Torus-Modelle. Dies sind allesamt unitäre Theorien, und wir werden uns auch im folgenden auf die Betrachtung unitärer Theorien beschränken.

In der Festkörperphysik tritt an Phasenübergängen zweiter Ordnung das Phänomen der Skaleninvarianz auf, da diese gerade den Fixpunkt-Flächen des Renormierungsgruppenflusses entsprechen. Für zweidimensionale Systeme beobachtet man sogar lokale konforme Invarianz. Folglich läßt sich mit konformer Feldtheorie das kritische Verhalten von zweidimensionalen Systemen bestimmen.

In der String Theorie kann man einen einzelnen String als Abbildung einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit in die n-dimensionale Raumzeit ($n = 10$ für fermionische String Theorien) betrachten. Die Koordinatenfelder dieser Abbildung bilden dabei eine Feldtheorie auf dieser *Weltfläche* genannten Mannigfaltigkeit. Essentiell für die Konsistenz dieser Konstruktion ist die Invarianz der Felder unter kausalitätserhaltenden Reparametrisierungen der Weltfläche. Dies ist jedoch gleichbedeutend mit lokaler konformer Invarianz — die Feldtheorie auf der Weltfläche ist eine konforme Feldtheorie.

Eines der entscheidenden Probleme in der String Theorie ist die Reduzierung der für die mathematische Konsistenz notwendigen zehn Raum-Zeit-Dimensionen einer Superstring-Theorie auf die vier sichtbaren. Der Mechanismus, der dies bewerkstelligen soll, ist die sogenannte *Kompaktifizierung*, in der die überzähligen Dimensionen so klein „kompakt“ zusammengerollt werden, daß sie auf den für uns derzeit beobachtbaren Längenskalen nicht mehr sichtbar sind. Die typische Längenskala einer

String Theorie ist die *Planck Länge* 1.6×10^{-33} cm. Die Raum-Zeit faktorisiert folglich in einen vier-dimensionalen nicht-kompakten Anteil und eine sechs-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit, die jedoch wesentlich für die Ausprägung der Theorie in den sichtbaren Dimensionen verantwortlich ist. Einschränkungen an die Gestalt dieser kompakten Mannigfaltigkeit liefern sowohl die konforme Invarianz der Theorie auf der Weltfläche als auch die Forderung nach Weltflächen-Supersymmetrie und Raum-Zeit-Supersymmetrie. Dadurch wird die Zahl der möglichen Mannigfaltigkeiten auf kompakte komplexe Kähler Mannigfaltigkeiten mit Holonomie $\mathrm{SU}(d)$ beschränkt, für d komplexe Dimensionen. In $d = 3$ komplexen Dimensionen ist dies die Definition der *Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten*, die sich nach einem Theorem von Yau dadurch auszeichnen, daß sie immer eine Ricci-flache Metrik zulassen.

Besonders interessant sind z.B. die $d = 2$ Mannigfaltigkeiten, die die Calabi-Yau Bedingungen erfüllen, da sie als Produkt mit einem $d = 1$ Torus-Modell Kandidaten für die Kompaktifizierung bilden, die einige durchaus realistische Eigenschaften aufweisen, und zudem ein gutes „Toy Model“ für die wesentlich komplexeren $d = 3$ Calabi-Yau Mannigfaltigkeiten bieten. Es gibt lediglich zwei qualitativ unterschiedliche Arten dieser $d = 2$ Mannigfaltigkeiten: Auf der einen Seite komplex zwei-dimensionale supersymmetrische Torus-Modelle, die sich direkt aus der freien Theorie ableiten lassen und vollständig verstanden sind. Diese Torus-Theorien können durch Größe und Form des Torusgitters sowie verschiedene Werte des antisymmetrischen Hintergrundfeldes kontinuierlich parametrisiert werden; dies spannt den 16-dimensionalen sogenannten *Modulraum* der Torustheorien auf. Auf der anderen Seite haben wir den 80-dimensionalen Modulraum der als *K3* bekannten Flächen, für den die entsprechenden Feldtheorien im wesentlichen unbekannt sind. Dieser Modulraum enthält jedoch einige Punkte, die als Gepner-Modelle identifiziert werden konnten, sowie Untervarietäten, die verschiedenen abelschen Orbifold-Modellen entsprechen [NW99] [Wen00]. Diese Orbifold-Modelle entstehen aus einer freien bzw. Torustheorie durch Identifizierungen bzgl. einer endlichen Symmetriegruppe dieser Ursprungstheorie [DHVW85] [DHVW86]. Orbifold-Theorien verhalten sich folglich erstaunlich ähnlich zu freien Theorien, mit dem einzigen Unterschied, daß zusätzlich auftretende *Twistfelder* berücksichtigt werden müssen.

In Problemen der theoretischen Festkörperphysik entsprechen die Fixpunkt-Flächen gerade Modulräumen mit fester zentraler Erweiterung c. Dabei sind durchaus Systeme bekannt, die nicht nur diskontinuierliche Punkte, sondern kontinuierliche Fixpunktlinien und -flächen mit kritischem Verhalten aufweisen. Verschiedene kritische Punkte des Systems sind also kontinuierlich ineinander überführbar. Ein Beispiel, in dem sogar eine Fixpunktlinie von $\mathbb{Z}_2$-Orbifold-Modellen auftritt, ist das *Ashkin-Teller Modell.* Nur lassen sich leider bisher noch keine Systeme mit derart vielen Freiheitsgraden präzise präparieren, so daß man zur Größe des K3-Modulraums äquivalente Fixpunkt-Flächen beobachten könnte.

Nun bietet die konforme Störungstheorie, zuerst entwickelt in [Kad78] [KB79], einen guten Ansatz, von bekannten Punkten im Modulraum aus das Verhalten der Theorien in unmittelbarer Nähe zu erforschen.

Ziel dieser Arbeit ist es, die relevanten konformen Eigenschaften von Orbifold-

Modellen zu klären, um damit dann konforme Störungstheorie durchzuführen.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt. Das zweite Kapitel stellt die relevanten Fakten von Orbifolds konformer Feldtheorien dar. Zunächst erfolgt eine kurze allgemeine Darstellung der konformen Feldtheorie mit den Torustheorien als Beispiel. Danach führen wir in die Konstruktion der Orbifold-Modelle ein, mit Schwerpunkt auf der Berechnung der für die Störungstheorie relevanten Korrelatoren, die Twistfelder enthalten.

Das dritte Kapitel widmet sich dann der konformen Störungstheorie. Wiederum folgt auf eine allgemeine Einführung zunächst das Beispiel der Torustheorien, bevor wir uns der Störung von Orbifold-Modellen zuwenden. Wir werden dabei den Zwei-Twistfeld-Korrelator bis zur zweiten Ordnung sowie den Drei-Twistfeld-Korrelator in erster Ordnung mit U(1) Strömen stören. Diese Rechnungen gelten für alle d und allgemeinen abelschen Twist. Der Drei-Twistfeld-Korrelator tritt insbesondere in $d = 3$ als Yukawa-Kopplung sowie in $d = 1$ auf. Abschließend berechnen wir speziell für die $\mathbb{Z}_2$-Orbifolds der $d = 2$ Torustheorien, d.h. im K3-Modulraum, die Störung eines Korrelators zweier Vertexoperatoren mit Twistfeldern in zweiter Ordnung und für kleine U(1)-Ladungen p der Vertexoperatoren. Diese Störung führt uns explizit weg von der Orbifold-Untervarietät des Modulraums.

Im vierten Kapitel werden wir unsere Ergebnisse nochmals zusammenfassen sowie einen Ausblick auf offene Fragen und weitere Entwicklungen geben.

Kapitel 2

Konforme Feldtheorie im Überblick

2.1 Einführung in die konforme Feldtheorie

Zunächst wollen wir einen kurzen Einblick in Definition und Struktur konformer Feldtheorien geben. Da wir uns aufgrund der Komplexität dieses Feldes auf die für diese Arbeit wesentlichen Fakten beschränken müssen, sei für weitergehende Ausführungen auf die Standardwerke [BPZ84], [Gin88b] und [FMS97] sowie die etwas axiomatischeren Darstellungen in [GG00], [Gab00] und [Wen00] verwiesen. Diese liegen auch unserer folgenden Darstellung zugrunde.

Eine unitäre konforme Feldtheorie besteht im wesentlichen aus [Wen00]

- einem Raum von Zuständen $\mathcal{H}$ über $\mathbb{C}$, der bigradiert ist und sich deshalb folgendermaßen zerlegen läßt

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{h,\tilde{h}} V(h;\tilde{h}) \ ,$$

  der das eindeutige Vakuum $V(0;0) = \mathbb{C} \mid 0 \rangle$ enthält und der für beschränkte Gradierung (i.e. endliche Energie) endlich dimensional ist,

$$\dim \mathcal{H} \mid_{h+\tilde{h}< \text{const.}} < \infty \ ,$$

- Feldern $\Phi(z,\bar{z})$ auf einer Riemannschen Fläche $\mathcal{R}$, die in der sogenannten *Zustand-Feld-Korrespondenz* eineindeutig einem Zustand aus $\mathcal{H}$ zugeordnet sind, den sie angewandt auf das Vakuum erzeugen

$$\Phi(0,0) \mid 0 \rangle = \mid \Phi \rangle \ ,$$

- Abbildungen von n Zuständen in den Raum $\mathcal{F}_n(z_1,\ldots,z_n)$ der bis auf Pole der Form $(z_i - z_j)^{-m+r}$ $(\bar{z}_k - \bar{z}_l)^{-n+r}$ $(i \neq j,\ k \neq l,\ r \in R \subset \mathbb{R}$ abzählbar und

$m, n \in \mathbb{N}$) reell analytischen Funktionen über $\mathcal{R}^n$

$$\mathrm{F}_n : \quad \mathcal{H}^{\otimes n} \to \mathcal{F}_n(z_1, \ldots, z_n) \ ,$$

- einer *Operator-Produkt-Entwicklung* (kurz OPE) genannten Abbildung

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}\{z, \bar{z}\}$$

wobei $\mathcal{H}\{z, \bar{z}\}$ den Raum der reell analytischen Funktionen $f(z, \bar{z})$ von $\mathcal{R}^*$ nach $\mathcal{H}$ bezeichnet, die um $z = 0$ die folgende Polstruktur aufweisen

$$f(z, \bar{z}) = \sum_{r \in R, n \in \mathbb{Z}} a_{rn} z^{r+n} \bar{z}^r \qquad R \subset \mathbb{R} \text{ abzählbar} \ .$$

Um eine wohldefinierte konforme Feldtheorie zu erhalten, darf man in $f(z, \bar{z})$ nur endlich viele Terme mit $r < 0$ oder $r + n < 0$ zulassen, für die $a_{rn} \neq 0$ ist.

Wichtig für die Konsistenz dieser grundlegenden Eigenschaften ist die Forderung, daß die OPE mit der Abbildung $\mathcal{F}_n$ verträglich ist. Betrachtet man die zu den Zuständen $|\,\Phi^{(i)}\,\rangle$ assoziierten Felder $\Phi^{(i)}(z_i, \bar{z}_i)$, so liefern die Abbildungen F_n in der Feldsprache gerade die *n-Punkt-Funktionen* oder *Korrelatoren*

$$|\,\Phi^{(1)}\,\rangle \otimes \ldots \otimes |\,\Phi^{(n)}\,\rangle \xmapsto{\mathrm{F}_n} \langle\,0|\; \Phi^{(1)}(z_1, \bar{z}_1) \ldots \Phi^{(n)}(z_n, \bar{z}_n)\; |\,0\,\rangle \ .$$

Entsprechend läßt sich die oben definierte OPE zweier Zustände in die OPE zweier Felder übersetzen (hier in einer Gestalt, die sich unter Zurhilfenahme der Bigradierung von $\mathcal{H}$ und der Wirkung des weiter unten definierten Virasoro-Feldes bestimmen läßt [FMS97])

$$\Phi^{(1)}(z_1, \bar{z}_1) \Phi^{(2)}(z_2, \bar{z}_2) = \sum_{|\Phi^{(i)}\rangle \in \mathcal{H}} (z_1 - z_2)^{h_i - h_1 - h_2} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{\tilde{h}_i - \tilde{h}_1 - \tilde{h}_2} \Phi^{(i)}(z_i, \bar{z}_i) \ .$$

Dieser Ausdruck ist ausschließlich innerhalb von n-Punkt-Funktionen definiert. Die oben angeführte Verträglichkeit von F_n und OPE in allen n-Punkt-Funktionen bedeutet jedoch, daß die OPE zweier Felder in allen n-Punkt-Funktionen gleichermaßen gilt. Im folgenden werden wir zumeist die Feldsprache verwenden. Wir wollen uns nun zunächst auf die Betrachtung der einfachsten Riemannschen Fläche, der Sphäre, beschränken; diese entsteht aus der komplexen Ebene durch Hinzunahme des Punkts im Unendlichen.

Der wichtigste Unterraum von $\mathcal{H}$ ist die sogenannte holomorphe W-Algebra $\mathcal{W} = V(h, 0)$ bzw. ihre antiholomorphe Entsprechung $\bar{\mathcal{W}} = V(0, \tilde{h})$. Diese enthalten nämlich die Zustände, die den Feldern der Symmetrietransformationen der konformen Feldtheorie entsprechen. Insbesondere enthält jede W-Algebra das holomorphe und das antiholomorphe Virasoro-Feld $\mathcal{T}(z)$ bzw. $\tilde{\mathcal{T}}(\bar{z})$. Die OPE des Virasoro-Feldes mit sich selber lautet

$$\mathcal{T}(z)\mathcal{T}(w) \sim \frac{c/2}{(z - w)^4} + \frac{2\mathcal{T}(w)}{(z - w)^2} + \frac{\partial \mathcal{T}(w)}{(z - w)} + \text{ nicht singuläre Terme} \ .$$

Die Felder der holomorphen W-Algebra lassen sich nun als holomorphe Funktionen auf der Riemann-Sphäre mittels Laurent-Entwicklung in ihre Modenstruktur zerlegen

$$\Phi(z,\bar z) = \sum_n \Phi_n z^{n-h} \bar z^{n-\tilde h} ,$$

wobei die Koeffizienten bzw. Moden Φ_n durch das Kontour-Integral

$$\Phi_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|<\epsilon} \mathrm{d}z \; z^{h-n-1} \Phi(z,\bar z)$$

gegeben sind. Aus der jeweiligen OPE zweier Felder lassen sich somit durch einfache Kontour-Verschiebung die Kommutatoren ihrer Moden berechnen, und zwar gemäß

$$\begin{aligned}
[\Phi_m, \Psi_n] &= \oint_0 \mathrm{d}z \oint_{0,\,|z|>|w|} \mathrm{d}w \; z^{h_\Phi - m-1} w^{h_\Psi - n-1} \Phi(z)\Psi(w) \\
&\quad - \oint_0 \mathrm{d}w \oint_{0,\,|w|>|z|} \mathrm{d}z \; z^{h_\Phi - m-1} w^{h_\Psi - n-1} \Phi(z)\Psi(w) \\
&= \oint_0 \mathrm{d}w \oint_w \mathrm{d}z \; z^{h_\Phi - m-1} w^{h_\Psi - n-1} \Phi(z)\Psi(w) \; .
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Die Moden-Entwicklung des Virasoro-Feldes gehorcht der *Virasoro Algebra*

$$[L_m, L_n] = (n-m) L_{n+m} + \frac{c}{12} n(n^2-1)\delta_{m+n,0} \; .$$

Dabei generieren die Moden L_1, L_0 und L_{-1} Translationen, Skalierungen und spezielle konforme Transformationen der Felder, folglich sämtliche Transformationen der globalen konformen Gruppe, der Möbiusgruppe Sl(2,$\mathbb{C}$). Da diese drei Moden innerhalb der Virasoro-Algebra schließen, bilden sie eine Unteralgebra. Die gesamte Virasoro-Algebra generiert sämtliche lokale konforme Transformationen, d.h. holomorphe Koordinatentransformationen $z \mapsto w(z)$. Die Bigradierung von $\mathcal{H}$ gibt gerade die Eigenwerte h_i bzw. $\tilde h_i$ von $|\,\Phi_i\,\rangle \in V(h_i, \tilde h_i)$ bzgl. L_0 und $\tilde L_0$ an, die sogenannten *konformen Gewichte.*

Die Konstruktion eines *normal-geordneten Produkts* zweier freier Felder, d.h. daß in der Modenentwicklung der Felder am selben Ort z alle Moden, die das Vakuum vernichten, rechts von den Erzeugern stehen, läßt sich auch direkt aus der OPE der beiden Felder ableiten. Dazu zieht man die Singularität in der OPE ab und führt den folgenden Grenzübergang durch

$$:\Phi_i \Phi_j:(z) = \lim_{w\to z} \left(\Phi_i(z)\Phi_j(w) - \langle\, \Phi_i(z)\Phi_j(w)\,\rangle \right) \; .$$

Handelt es sich dagegen nicht mehr um freie Felder, so enthält die OPE in der Regel mehrere Singularitäten, die zur Regularisierung des Produkts alle abgezogen werden müssen. Dies führt sowohl zu einer Modifizierung der Normalordnungsbedingung für die Moden sowie zu einem modifizierten Wick-Theorem [FMS97].

Für unitäre Theorien, wie wir sie in dieser Arbeit betrachten wollen, gilt, daß $\mathcal{H}$ vollständig in irreduzible Darstellungen der holomorphen und der antiholomorphen

Virasoro-Algebra, sogenannte *Verma Module*, zerlegt werden kann. Für die Höchstgewichtszustände dieser Darstellungen, die sogenannten *primären Felder*, gilt dann

$$\begin{aligned} L_0\psi_{h,\tilde{h}} &= h\psi_{h,\tilde{h}} & \qquad L_n\psi_{h,\tilde{h}} &= 0 \quad \forall n<0 \\ \tilde{L}_0\psi_{h,\tilde{h}} &= \tilde{h}\psi_{h,\tilde{h}} & \qquad \tilde{L}_n\psi_{h,\tilde{h}} &= 0 \quad \forall n<0\,. \end{aligned}$$

Alle anderen Felder der Theorie lassen sich aus den $\psi_{h,\tilde{h}}$ durch Anwendung von L_n und $\tilde{L}_n$, $n>0$, erzeugen. Diese Bedingungen legen die Transformationseigenschaften eines primären Feldes Φ unter lokalen konformen Transformationen fest zu

$$\Phi'(w,\bar{w}) = \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^h \left(\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}\bar{z}}\right)^{\tilde{h}} \Phi(z,\bar{z})\ ,$$

wobei der Strich die interne Symmetrietransformation des Feldes kennzeichnet. Eine n-Punkt-Funktion primärer Felder transformiert folglich unter einer lokalen konformen Transformation gemäß [FMS97]

$$\begin{aligned} &\langle\, \Phi_1(w_1,\bar{w}_1)\ldots\Phi_n(w_n,\bar{w}_n)\,\rangle = \\ &\quad = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}w_i}{\mathrm{d}z_i}\right)_i^h \left(\frac{\mathrm{d}\bar{w}_i}{\mathrm{d}\bar{z}_i}\right)^{\tilde{h}_i} \langle\, \Phi_1(z_1,\bar{z}_1)\ldots\Phi_n(z_n,\bar{z}_n)\,\rangle\ . \end{aligned}$$

Die Form der 1-, 2- und 3-Punkt-Funktionen primärer Felder ist durch diese Transformationseigenschaften bereits eindeutig festgelegt zu (z.B. [Gab00])

$$\begin{aligned} \langle\, \Phi(z,\bar{z})\,\rangle &= 0 \\ \langle\, \Phi_1(z,\bar{z})\Phi_2(w,\bar{w})\,\rangle &= \frac{C_{II}\,\delta_{h_1,h_2}\,\delta_{\tilde{h}_1,\tilde{h}_2}}{(z-w)^{h_1}(\bar{z}-\bar{w})^{\tilde{h}_1}} \\ \langle\, \Phi_1(z_1,\bar{z}_1)\Phi_2(z_2,\bar{z}_2)\Phi_3(z_3,\bar{z}_3)\,\rangle &= C_{III}\prod_{i<j}\frac{1}{(z_i-z_j)^{h_{ij}}}\prod_{i<j}\frac{1}{(\bar{z}_i-\bar{z}_j)^{\tilde{h}_{ij}}} \end{aligned} \qquad (2.2)$$

mit $h_{12} = h_1 + h_2 - h_3$ etc.

Bisher haben wir konforme Feldtheorie ausschließlich in der Ebene $\mathbb{C}^\infty$ bzw. dazu konform äquivalent auf der Sphäre oder dem Zylinder betrachtet. Nun ist es aber entscheidend, daß die CFT mit ihrem ganzen Feldinhalt auch auf Riemannschen Flächen höheren Geschlechts definiert ist, so daß man sie in physikalischen Zusammenhängen wie z.B. der Störungstheorie in der String Theorie sinnvoll verwenden kann. Hierbei liefert schon der Torus (Geschlecht $g=1$) wesentliche Einschränkungen an den Feldinhalt. Eine CFT auf dem Torus erhält man aus einer CFT auf dem Zylinder, indem man die Zeitrichtung ξ_0 periodisch macht. Der Torus ist dann bestimmt durch ein Gitter in der komplexen Ebene mit Gitterperioden ω_1 und ω_2 sowie den entsprechenden periodischen Identifizierungen.

Nun gibt uns der 0-Punkt-Korrelator der Theorie auf dem Torus, *Zustandssumme* oder auch *partition function* genannt, bereits die vollständige Information über den Feldinhalt der Theorie. Diese Zustandssumme hat folgende Gestalt [FMS97]:

$$Z(\tau) = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}} \left(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\tilde{L}_0 - \frac{c}{24}} \right) \qquad q = \exp(2\pi i \tau),$$

wobei sich der modulare Parameter $\tau = \omega_0/\omega_1$ als Quotient der beiden Gitterperioden ergibt und sich die Spur über den gesamten Hilbertraum $\mathcal{H}$ der Zustände in der Theorie erstreckt. Betrachtet man $Z(\tau)$ als formales Polynom in q und $\bar{q}$, so geben die Koeffizienten der einzelnen Monome genau die Anzahl der Felder mit den den jeweiligen Exponenten von q und $\bar{q}$ entsprechenden konformen Gewichten h und $\tilde{h}$ an.

Die den Torus beschreibenden Gitterperioden sind aber nur eindeutig bis auf eine $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$-Transformation. Folglich muß jede Zustandssumme modular invariant sein, d.h. invariant unter den $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$-Transformationen

$$\tau \longmapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ und } ad - bc = 1.$$

Diese *modulare Gruppe* wird generiert durch die beiden speziellen Transformationen

$$\begin{array}{rcl} T: & \tau & \longmapsto \tau + 1 \\ S: & \tau & \longmapsto \dfrac{-1}{\tau}\,. \end{array}$$

Um die modulare Invarianz einer speziellen Zustandssumme zu beweisen, reicht es folglich aus, die Invarianz unter S und T zu zeigen.

2.2 Erweiterung zur superkonformen Feldtheorie

Ein wichtiger Spezialfall der oben beschriebenen konformen Feldtheorien ist die superkonforme Feldtheorie. Diese zeichnet sich dadurch aus, daß ihre W-Algebra neben dem Virasoro-Feld zumindestens noch einen Superstrom $G(z)$ enthält der folgende OPE's erfüllt

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(z)G(w) &= \frac{3/2}{(z-w)^2}\, G(w) + \frac{\partial_w\, G(w)}{z-w} + \ldots \\ G(z)G(w) &= \frac{2/3\, c}{(z-w)^3} + \frac{2\mathcal{T}(w)}{z-w} + \ldots \end{aligned}$$

In der Sprache der Supersymmetrie ist dann $G(z)$ der Weltflächen-Superpartner von $\mathcal{T}(z)$. Die Modelle, die wir in dieser Arbeit betrachten möchten, enthalten sogar eine erweiterte $N = 2$ Supersymmetrie, sowohl für den holomorphen als auch für den antiholomorphen Anteil. In diesem Fall enthält die W-Algebra noch mindestens zwei weitere Felder, einen zweiten Superstrom $G^2(z)$ sowie einen $U(1)$-Strom $J(z)$. Verwendet man die Kombinationen

$$G^{\pm}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(G^1(z) \pm i G^2(z) \right) \;,$$

so erhält man die vollständige $N=2$-Algebra [Gre96]

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(z)\mathcal{T}(w) &= \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2\mathcal{T}(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\mathcal{T}(w)}{(z-w)} + \ldots \\
\mathcal{T}(z)G^{\pm}(w) &= \frac{3/2}{(z-w)^2}\, G^{\pm}(w) + \frac{\partial_w\, G^{\pm}(w)}{z-w} + \ldots \\
\mathcal{T}(z)J(w) &= \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w J(w)}{z-w} + \ldots \\
G^{+}(z)G^{-}(w) &= \frac{2/3\; c}{(z-w)^3} + \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{2\mathcal{T}(w) + \partial_w J(w)}{z-w} + \ldots \\
J(z)G^{\pm}(w) &= \pm\frac{G^{\pm}(w)}{z-w} + \ldots \\
J(z)J(w) &= \frac{c/3}{(z-w)^2} + \ldots
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Nun ordnet die durch die Superströme generierte Supersymmetrie jedem bosonischen Feld einen fermionischen Superpartner zu. Diese Fermionen können jedoch zwei unterschiedliche Sorten von Randbedingungen erfüllen, antisymmetrische und symmetrische, was zu zwei verschiedenen fermionischen Sektoren in der Theorie führt, dem *Ramond* und dem *Neveu-Schwarz* Sektor. Durch die unterschiedlichen Randbedingungen ergeben sich damit in den beiden Sektoren unterschiedliche Moden-Entwicklungen des fermionischen Superstroms und entsprechend die $N=2$ Algebren der Moden ($a=0$ für Ramond, $a=1/2$ für Neveu-Schwarz Sektor) [Gre96], [Wen00]

$$\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (n-m)L_{m+n} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{m+n,0} \\
[J_m, J_n] &= -\frac{c}{3}m\delta_{m+n,0} \\
[L_m, J_n] &= mJ_{m+n} \\
\left[L_m, G^{\pm}_{n\pm a}\right] &= \left((n \pm a - \frac{m}{2})\right) G^{\pm}_{m+n\pm a} \\
\left[J_m, G^{\pm}_{n\pm a}\right] &= \pm G^{\pm}_{m+n\pm a} \\
\left\{G^{+}_{m+a}, G^{-}_{n-a}\right\} &= 2L_{m+n} + (n-m-2a)J_{n+m} + \frac{c}{3}\left((m+a)^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{m+n,0}\ .
\end{aligned}$$

In der superkonformen Theorie erfüllt ein primäres Feld Φ die erweiterten Bedingungen

$$L_n \,|\,\Phi\,\rangle = 0 \qquad G^{\pm}_r \,|\,\Phi\,\rangle = 0 \qquad J_m \,|\,\Phi\,\rangle = 0 \qquad n, r, m < 0\ .$$

Die OPE's eines primären Feldes mit $\mathcal{T}$, $G^{\pm}$ und J ergeben sich folglich zu

$$\mathcal{T}(z)\Phi(w) = \frac{h}{(z-w)^2}\,\Phi(w) + \frac{1}{z-w}\,\partial_w\Phi(w) + \ldots \tag{2.4}$$

$$J(z)\Phi(w) = \frac{q}{z-w}\Phi(w) + \ldots \tag{2.5}$$

$$G^{\pm}(z)\Phi(w) = \frac{\tilde{\Phi}^{\pm}(w)}{z-w} + \ldots\ , \tag{2.6}$$

wobei q die U(1)-Ladung und $\tilde{\Phi}^{\pm}(z)$ die Superpartner von $\Phi(z)$ sind.

Eine bestimmte Sorte primärer Felder ist von zentraler Bedeutung für superkonforme Feldtheorien, die *chiral primären Felder*. Diese erfüllen die zusätzliche Bedingung

$$G^{+}_{1/2}\,|\,\Phi\,\rangle = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad G^{+}(z)\Phi(w) = \text{ regulär }.$$

Man kann zeigen, daß [Gre96]

- ein Feld genau dann chiral primär ist, wenn $h = Q/2$
- die konforme Dimension chiral primärer Felder von oben durch $c/6$ beschränkt ist
- die OPE zweier chiral primärer Felder keine singulären Terme enthält und als konstante Terme wieder nur chiral primäre Felder auftreten. Die chiral primären Felder bilden folglich einen Ring, den *chiralen Ring* (kurz c-Ring).

Analog definiert man *antichiral primäre Felder* durch

$$G^{-}_{1/2}\,|\,\Phi\,\rangle = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad G^{-}(z)\Phi(w) = \text{ regulär}$$

und erhält entsprechend einen *antichiralen Ring* (kurz a-Ring). In diesem Fall gilt $h = -Q/2$. Kombiniert man den holomorphen und den antiholomorphen Sektor, so findet man sogar vier Ringe, (c,c), (c,a), (a,c) und (a,a).

Die Zustandssumme der superkonformen Feldtheorie kann in vier Summen aufgespalten werden, zum einen, indem man über den Ramond und den Neveu-Schwarz Sektor einzeln summiert, zum anderen durch Einsetzen des Fermionzahl-Operators $(-1)^F$ in die Zustandssumme. Man kann zeigen, daß bereits eine dieser Summen die vollständige Information über den Feldinhalt der Theorie liefert. Zudem ermöglicht der U(1)-Strom $J(z)$ eine zusätzliche Unterscheidung der Felder, so daß man z.B. für den Neveu-Schwarz (NS) Sektor ohne Fermionzahl-Operator die folgende Zustandssumme erhält

$$Z_{NS}(\tau, z) = \text{tr}_{\,NS}\left(q^{L_0-\frac{c}{24}}\bar{q}^{\tilde{L}_0-\frac{c}{24}}y^{J_0}\bar{y}^{\tilde{J}_0}\right) \qquad y = \exp(2\pi i z)\ .$$

Die Koeffizienten der einzelnen Monome in q und y ergeben die Anzahl der Felder mit den den jeweiligen Exponenten entsprechenden konformen Gewichten bzw. Ladungen.

2.3 Superkonforme Feldtheorie auf dem Torus

Eines der einfachsten Beispiele einer konformen Feldtheorie ist die auf dem Torus. Der bosonische Anteil dieser Theorie läßt sich aus den Koordinatenfeldern $X_i(z, \bar{z})$, $i = 1 \ldots n$, ableiten, die die als komplexe Ebene parametrisierte Weltfläche in den n-dimensionalen Torus, den sogenannten *Target-Raum*, abbilden. Die Dynamik der Koordinatenfelder wird durch die folgende Wirkung eines *nicht-linearen Sigma-Modells* bestimmt

$$S_{tor} = \int \mathrm{d}^2 z \, (G_{ij} + B_{ij}) \, \partial X_i \bar{\partial} X_j \ ,$$

wobei G_{ij} das symmetrische, B_{ij} das antisymmetrische Hintergrundfeld bezeichnen und die Koordinatenfelder $X_i(z)$ den durch die Torusgeometrie bedingten periodischen Randbedingungen

$$X_i(z+1) = X_i(z) + 2\pi m_i R_i$$

gehorchen. Die *Windungszahl* m schließt die Möglichkeit mit ein, daß das bosonische Feld sich mehrfach um die kompakte Dimension windet. Dafür lassen die periodischen Randbedingungen nur noch quantisierte Impulse zu.

Die dazugehörige konforme Feldtheorie wird durch die U(1)-Ströme $j_i(z) = i\partial X_i$ und deren OPE

$$j_i(z) \; j_j(w) \sim \frac{\delta_{ij}}{(z-w)^2}$$

sowie deren antiholomorphe Entsprechungen bestimmt. Die weiteren primären Felder sind durch die Vertex-Operatoren $V_p(z) =: e^{ip_i X_i(z)} : z^{p^2/2}$ gegeben, die bzgl. der U(1)-Ströme jeweils die Ladung p_i haben. Die zugehörige superkonforme Feldtheorie erhält man nun durch Einführung der fermionischen Superpartner der U(1)-Ströme, der Fermionen $\psi_i(z)$ mit OPE

$$\psi_i(z) \; \psi_j(w) \sim \frac{\delta_{ij}}{z-w} \ .$$

In den Fällen gerader Dimension $n = 2d$ läßt sich die Theorie am besten durch die Linearkombinationen $(i = 1 \ldots d)$

$$\begin{aligned} X_{\pm}^{(i)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X_i \pm iX_{i+d}) \\ j_{\pm}^{(i)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(j_i \pm ij_{i+d}) \\ \psi_{\pm}^{(i)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_i \pm i\psi_{i+d}) \end{aligned}$$

beschreiben. Die nicht-verschwindenden OPE's der Ströme und Fermionen ergeben sich dann zu

$$\begin{aligned} j_{+}^{(i)}(z) \; j_{-}^{(j)}(w) &\sim \frac{\delta^{ij}}{(z-w)^2} \\ \psi_{+}^{(i)}(z) \; \psi_{-}^{(j)}(w) &\sim \frac{\delta^{ij}}{z-w} \ . \end{aligned}$$

Unter Verwendung dieser Felder lautet die superkonforme Algebra der Torustheorie [Wen00]

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(z) &= \sum_{i=1}^{d/2}\left[: j_+^{(i)}\, j_-^{(i)} : (z) + \frac{1}{2} : \psi_+^{(i)} \partial \psi_-^{(i)} : (z) + \frac{1}{2} : \psi_-^{(i)} \partial \psi_+^{(i)} : (z)\right] \\
G^{\pm}(z) &= \sqrt{2} \sum_{i=1}^{d/2} : \psi_\pm^{(i)} j_\mp^{(i)} : (z) \\
J(z) &= \sum_{i=1}^{d/2} : \psi_+^{(i)} \psi_-^{(i)} : (z)\ , \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

entsprechend für die antiholomorphen Felder. (Das Virasoro-Feld $T(z)$ erhält man z.B. aus der Sugawara-Konstruktion.)

Somit findet man die konforme Dimension der Vertex-Operatoren

$$V_p(z,\bar{z}) =: e^{ip_i X_i(z,\bar{z})} :\ z^{p_l^2/2} \bar{z}^{p_r^2/2} \qquad (2.8)$$

zu $(h,\tilde{h}) = (\frac{p_l^2}{2}, \frac{p_r^2}{2})$ sowie die OPE

$$V_p(z,\bar{z})\ V_q(w,\bar{w}) = (z-w)^{p_l q_l} (\bar{z}-\bar{w})^{p_r q_r} V_{p+q}(w,\bar{w}) + \dots$$

Dabei spannen die möglichen Ladungen (p_l, p_r) das Ladungsgitter $\Gamma \subset \mathbb{R}^{2n}$ des Torus auf. Die Forderung nach Lokalität der Theorie sowie, daß alle Felder ganzzahligen Spin $h - \tilde{h}$ haben, schränkt das Ladungsgitter auf ein gerades ganzzahliges Gitter ein; man kann sogar zeigen, daß das Ladungsgitter zusätzlich noch selbstdual ist [Wen00]. Die Zustandssumme für die bosonischen Felder der Torustheorie ergibt sich nun zu [FMS97]

$$\mathcal{Z}_{tor}(\tau) = \frac{1}{|\,\eta(\tau)\,|^2} \sum_{(p_l,p_r)\in\Gamma} q^{\frac{p_l^2}{2}} q^{\frac{p_r^2}{2}}\ ; \qquad (2.9)$$

dabei bezeichnet $\eta(\tau)$ die Dedekindsche η-Funktion. Der erste Faktor ist der Beitrag der Ströme und der davon abgeleiteten Felder, folglich bereits in der freien bosonischen Theorie enthalten. Die Summe ist der Beitrag der Vertex-Operatoren, deren Gewichte [FMS97]

$$(h_l, h_r) = \left(\frac{p_l^2}{2}, \frac{p_r^2}{2}\right) = \left(\frac{(\frac{e}{R} + \frac{mR}{2})^2}{2}, \frac{(\frac{e}{R} - \frac{mR}{2})^2}{2}\right)$$

durch den quantisierten Impuls e und die Windungszahl m parametrisiert werden; somit beschränkt die Kompaktifizierung auf den Torus die möglichen Impulszustände, generiert auf der anderen Seite jedoch neue Windungs- bzw. getwistete Zustände.

2.4 Orbifolds konformer Feldtheorien

Um nun weitere konforme Feldtheorien zu konstruieren, kann man z.B. die Isometriegruppe des Target-Raums einer schon bekannten konformen Feldtheorie verwenden. Der Raum der Restklassen bzgl. einer diskreten Untergruppe dieser Isometriegruppe stellt zwar keine Mannigfaltigkeit mehr da, sobald die Symmetriegruppe mit Fixpunkten auf der ursprünglichen Target-Mannigfaltigkeit operiert, bildet aber trotzdem den Target-Raum einer (in der Regel) von der Ursprungstheorie verschiedenen konformen Feldtheorie, einer sogenannten *Orbifoldtheorie*. Da uns in dieser Arbeit insbesondere die Orbifolds von Torustheorien interessieren, werden wir diese im folgenden etwas genauer beleuchten.

Die hier gewählte Darstellung der konformen Feldtheorie in Orbifoldmodellen beruht auf den Arbeiten [DFMS87], [Dix87] und [ADGN88]. Unabhängig davon wurden diese Resultate als konforme Feldtheorie auf Riemannschen Flächen in [Zam87], [BR87a] sowie [BR87b] hergeleitet. Korrelatoren von Twistfeldern mit Vertexoperatoren werden in [HV87], [EJLM92] und [Jun92] diskutiert.

2.4.1 Endliche Symmetriegruppen

Bevor wir uns jedoch der konkreten Konstruktion einer Orbifold Theorie zuwenden können, müssen wir zunächst die für uns relevanten Symmetriegruppen und ihre Aktion auf den Feldern der ursprünglichen konformen Feldtheorie analysieren. Wir beschränken uns hierbei auf *Raumgruppen* S, die ein semi-direktes Produkt einer Rotations- und einer Translationsgruppe bilden

$$S = R \rtimes T$$

und gemäß

$$X \longrightarrow gX = \theta X + v \qquad g = (\theta, v) \in R \rtimes T$$

auf dem n-dimensionalen Euklidischen Raum E^n ($X \in E^n$) operieren. Die Gruppenmultiplikation dieses semi-direkten Produkts lautet entsprechend

$$(\theta_1, v_1)(\theta_2, v_2) = (\theta_1\theta_2, \theta_1 v_2 + v_1) \ .$$

Die Untergruppe, die nur aus dem Rotationsanteil der Raumgruppe besteht, nennt man die *Punktgruppe*. Anstelle von Orbifolds des Euklidischen Raumes können wir auch die des Torus betrachten, der selber als Orbifold bzgl. des von der Translationsuntergruppe $\{(1, v), v \in T\}$ der Raumgruppe aufgespannten Gitters Λ aus dem E^n hervorgeht. Die Symmetrietransformationen agieren auf dem Torus nur noch modulo Gitter-Verschiebungen, d.h. die neue Raumgruppe lautet

$$\tilde{S} = S/\Lambda \ .$$

Die Punktgruppe bleibt jedoch als Einschränkung der Raumgruppe auf den Rotationsanteil dieselbe. Die Verträglichkeit mit der Isometriegruppe des Torus erfordert zusätzlich, daß die Punktgruppe Gittervektoren wieder in Gittervektoren überführt. Dies schränkt die möglichen Punktgruppen auf die zumindestens in zwei und drei Dimensionen bereits klassifizierten kristallographischen Gruppen ein.

Für Tori gerader Dimension $n = 2d$ läßt sich die Rotationsmatrix der Gruppenaktion $\theta \in O(2d)$ derart transformieren, daß sie auf den komplexifizierten Koordinaten $X^i_\pm(z)$ diagonal wirkt, und zwar gemäß

$$(g\, X^i_\pm)(z) = e^{\pm 2\pi i \frac{k_i}{N}} X^i_\pm(z) \quad \mathrm{mod}\ \Lambda\ .$$

Daraus lassen sich nun leicht die Transformationseigenschaften für die Felder der Torus-Theorien ableiten. Für die bosonischen $U(1)$-Ströme $j^i_\pm(z) = i\partial X^i_\pm(z)$ erhält man

$$(g\, j^i_\pm)(z) = e^{\pm 2\pi i \frac{k_i}{N}} j^i_\pm(z)\ .$$

Die erforderliche Invarianz der Superladung $G(z)$ fixiert die Transformationseigenschaften der Superpartner von $j^i_\pm(z)$ zu

$$(g\, \psi^i_\pm)(z) = e^{\pm 2\pi i \frac{k_i}{N}} \psi^i_\pm(z)\ .$$

Verwendet man die Darstellung der Vertexoperatoren mit Koordinatenfeldern (2.8), so ergeben sich die Transformationseigenschaften der Vertexoperatoren zu

$$(g\, V_p)(z) = V_{\tilde{\theta}^{-1} p}(z)\, e^{ip.v} \qquad v \in \Lambda\ .$$

$\tilde{\theta}$ bezeichnet dabei die diagonalisierte Rotationsmatrix θ und wirkt auf den ganzen Landungsvektor. Die Gitterverschiebung bei der Symmetrietransformation produziert einen Phasenfaktor, der bei den in dieser Arbeit betrachteten Theorien mit p aus dem dualen Gitter lediglich ein Vorzeichen bedeutet und keinen weiteren Einfluß auf die Rechnungen hat.

Die Gruppenaktion auf den jeweiligen antiholomorphen Feldern erhält man sofort durch komplexe Konjugation.

2.4.2 Konstruktion einer Orbifoldtheorie

Die Bestimmung der Felder bzw. Zustände einer Orbifoldtheorie erfolgt wie üblich durch die Konstruktion ihrer modular invarianten Zustandssumme. Diese setzt sich, analog zur Konstruktion der Zustandssumme einer Torustheorie in (2.9), aus zwei Anteilen zusammen: zum einen aus den invarianten Feldern der Ursprungstheorie, zum anderen aus sogenannten getwisteten Sektoren, die daraus resultieren, daß die Randbedingungen jetzt nur noch modulo der Gruppenoperation erfüllt werden müssen. Wir betrachten zunächst nur die bosonische Theorie, die wir später supersymmetrisieren werden.

Der Anteil der unter der Gruppenoperation invarianten Felder ergibt sich aus der Zustandssumme der Torustheorie durch Anwendung des Projektors

$$P = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h \ ,$$

so daß wir als Anteil der invarianten Felder an der Orbifold-Zustandssumme folgenden Ausdruck erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^G &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \operatorname{tr}_{\mathcal{H}} \left(h \, q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}} \right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} {}_{h}\underset{\mathbb{1}}{\square} \ . \end{aligned}$$

Die zweite Zeile stellt eine hilfreiche Abkürzung dar, deren Bedeutung im folgenden deutlich werden wird. Berücksichtigt man nun, daß $q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}}$ eine Translation in Zeitrichtung darstellt, so kann man jeden einzelnen Summanden in der obigen Summe als Spur über die Felder interpretieren, die in zeitlicher Richtung um h getwistet werden, i.e.

$$X(\xi_0 + 1, \xi_1) = hX(\xi_0, \xi_1) \qquad X(\xi_0, \xi_1 + 1) = X(\xi_0, \xi_1) \ .$$

$\mathcal{Z}^G$ alleine ist aber noch nicht modular invariant, wie wir unten sehen werden, wenn wir die modularen Eigenschaften der vollständigen Zustandssumme betrachten. Man muß folglich auch die Spur über neue Sektoren in die Zustandssumme aufnehmen, die die Randbedingungen nur modulo der Gruppenaktion erfüllen. Den Hilbertraum solcher getwisteter Zustände, die die Randbedingung z.B. modulo g erfüllen

$$X(\xi_0, \xi_1 + 1) = gX(\xi_0, \xi_1) \ ,$$

wollen wir mit $\mathcal{H}_g$ bezeichnen. Auch in diesen getwisteten Sektoren muß man auf gruppeninvariante Zustände projezieren. Dabei ist zu beachten, daß man für einen mit h transformierten Zustand

$$hX(\xi_0, \xi_1 + 1) = (hgh^{-1}) \ hX(\xi_0, \xi_1) \quad \forall h \in G \ ,$$

erhält. Folglich gilt

$$\mathcal{H}_g \cong \mathcal{H}_{hgh^{-1}} \ ;$$

man erhält also nur für verschiedene Nebenklassen $\{hgh^{-1}, h \in G\}$ von G wirklich verschiedene getwistete Sektoren. Dem muß man natürlich Rechnung tragen, will man nun den Anteil der getwisteten Sektoren an der Zustandssumme darstellen

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^G_{twist} &= \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{h,g \in G \\ hgh^{-1} = g, g \neq \mathbb{1}}} \operatorname{tr}_{\mathcal{H}_g} \left(h q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}} \right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{h,g \in G \\ hgh^{-1} = g, \, g \neq \mathbb{1}}} {}_{h}\underset{g}{\square} \ . \end{aligned}$$

Die Abkürzung, die wir wiederum in der zweiten Zeile verwenden, gibt folglich in kompakter Notation den Twist bzw. die Monodromie des jeweiligen Summanden in Raum- und in Zeitrichtung an. Die gesamte Zustandssumme ergibt sich folglich zu

$$\mathcal{Z}^G_{orb} = \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{h,g\in G\\ hgh^{-1}=g}} {}_h\underset{g}{\boxed{}}\ .$$

In dieser Notation lassen sich die Modultransformationen unter Brücksichtigung des Monodromieverhaltens in Zeit- und in Raumrichtung folgendermaßen schreiben [Wen00]

$$\begin{aligned} {}_h\underset{g}{\boxed{}}(\tau+1) &= {}_{(g\circ h)}\underset{g}{\boxed{}}(\tau) \\ {}_h\underset{g}{\boxed{}}(-\frac{1}{\tau}) &= {}_g\underset{h}{\boxed{}}(\tau)\ . \end{aligned}$$

Es folgt, daß die Zustandssumme $\mathcal{Z}^G_{orb}$ wirklich modular invariant ist; hingegen sind dies weder der ungetwistete noch der getwistete Anteil alleine.

Da jedem Zustand im Hilbertraum ein Feld in der konformen Feldtheorie entspricht, erhält man zu jedem getwisteten Zustand in den Twistsektoren auch ein sogenanntes *Twistfeld.* Im Gegensatz zu den Feldern, die den ungetwisteten Zuständen entsprechen und die Zustände jeweils nur innerhalb eines Sektors abbilden, transportieren die Twistfelder Zustände zwischen den einzelnen Sektoren. Normalerweise eindeutige Felder wie $j^{\pm}$, V_p etc. haben folglich in der Umgebung eines Twistfeldes eine nicht-triviale Monodromie, i.e. das Twistfeld erzeugt einen Verzweigungsschnitt in der Weltfläche dieser Felder

$$X_{\pm}(e^{2\pi i}z, e^{-2\pi i}\bar{z}) = e^{\pm 2\pi i \frac{k}{N}} X_{\pm}(z,\bar{z}) \tag{2.10}$$

(auf einem Pfad um z_0, der Position des Twistfeldes).

Zu jedem getwisteten Sektor und Fixpunkt gibt es folglich auch ein Twistfeld, das angewandt auf das Vakuum den Grundzustand dieses Sektors erzeugt; wir bezeichnen dieses Twistfeld mit $\sigma^{(i)}_{\frac{k}{N}}$, wobei i den Fixpunkt angibt und $\frac{k}{N}$ den entsprechenden Twist.

Diese Verzweigungsstruktur erfordert eine angepaßte Modenentwicklung. Funktionen und Operatoren auf einer komplexen Ebene mit Verzweigungsschnitten sind nämlich nur auf ihrer universellen Überlagerung, einer Riemannschen Fläche, wohldefiniert. Die verallgemeinerte Laurent-Entwicklung erfolgt somit in gebrochenen Potenzen entsprechend der Ordnung der Schnitte. Die Monodromie eines Feldes wie in (2.10) legt dann die Modenentwicklung auf [Dix87] [Wen00]

$$X_{\pm}(z) = q_{\pm,0} + i \sum_{m\in\mathbb{Z}} \alpha_{\pm,m\pm\frac{k}{N}} \frac{z^{m\pm\frac{k}{N}}}{m\pm\frac{k}{N}} \tag{2.11}$$

fest. Dabei erfüllen die Oszillatormoden $\alpha_{\pm,m\pm\frac{k}{N}}$ die kanonischen Vertauschungsrelationen

$$\left[\alpha_{+,m+\frac{k}{N}}, \alpha_{-,n-\frac{k}{N}}\right] = (m+\frac{k}{N})\ \delta_{m+n,0} \tag{2.12}$$

und der Grundzustand des Twistsektors $|\,\sigma^{(i)}_{\frac{k}{N}}\,\rangle = \sigma^{(i)}_{\frac{k}{N}}\ |\,0\,\rangle$ wird wie üblich von allen Moden negativer Frequenz annihiliert

$$\begin{aligned} \alpha_{+,m+\frac{k}{N}}\ |\,\sigma^{(i)}_{\frac{k}{N}}\,\rangle &= 0 \quad \forall m < 0 \\ \alpha_{-,m-\frac{k}{N}}\ |\,\sigma^{(i)}_{\frac{k}{N}}\,\rangle &= 0 \quad \forall m \leq 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Bemerkenswert an dieser Modenentwicklung ist das Fehlen eines Nullmodenanteils $\alpha_{\pm,0}$, d.h. Zustände in getwisteten Sektoren haben verschwindenden Gesamtimpuls und folglich auch keine Windungsmoden. Zusätzlich dazu muß $q_{\pm,0}$ unter der Gruppenoperation invariant sein, ist also auf die Fixpunkte der Orbifoldgruppe eingeschränkt. Folglich befinden sich alle Twistzustände an ihren jeweiligen Fixpunkten bzw. sind Überlagerungen derartiger Zustände. Die Modenstruktur für die Ströme $j_\pm(z) = i\partial X_\pm(z)$ im getwisteten Sektor folgt daraus zu

$$j_\pm(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \alpha_{\pm,m\pm\frac{k}{N}}\ z^{m-1\pm\frac{k}{N}}\ , \tag{2.14}$$

entsprechend für die antiholomorphen Felder.

2.4.3 Twistfelder

Da nun die Hilbertraumstruktur und isomorph dazu der Feldinhalt der Theorie geklärt sind, müssen wir als nächstes die Struktur der OPE's bzw. der Korrelationsfunktionen untersuchen.

Die OPE's der Ströme und Vertexoperatoren untereinander sind schon aus der Torustheorie bekannt — der einzige Unterschied zur Torustheorie diesbezüglich besteht darin, daß nur die unter der Gruppenoperation invarianten Felder auch in der Orbifoldtheorie vorkommen können und dort sinnvolle OPE's definieren. Folglich sind uns auch alle Korrelatoren, die ausschließlich Ströme und Vertexoperatoren enthalten, bereits bekannt. Die Modenentwicklung der Ströme (2.14) legt nun in den getwisteten Sektoren die Gestalt der OPE der Ströme mit den Grundzustands-Twistfeldern fest [DFMS87]

$$\begin{aligned} j_+(z)\sigma(w,\bar w) &\sim (z-w)^{-(1-\frac{k}{N})}\tau(w,\bar w) + \ldots \\ j_-(z)\sigma(w,\bar w) &\sim (z-w)^{-\frac{k}{N}}\tau'(w,\bar w) + \ldots \\ \tilde\jmath_-(\bar z)\sigma(w,\bar w) &\sim (\bar z-\bar w)^{-\frac{k}{N}}\tilde\tau'(w,\bar w) + \ldots \\ \tilde\jmath_+(\bar z)\sigma(w,\bar w) &\sim (\bar z-\bar w)^{-(1-\frac{k}{N})}\tilde\tau(w,\bar w) + \ldots \end{aligned} \tag{2.15}$$

Die Spektrumsbedingung (2.13) beschränkt nämlich die maximale Ordnung der Pole bzw. Verzweigungsschnitte auf die durch die OPE's (2.15) festgelegten. Die Felder τ etc. sind angeregte Twistfelder, wobei eine Tilde anzeigt, daß die Felder durch komplexe Konjugation auf der Weltfläche auseinander hervorgehen.

Um nun konkrete Korrelationsfunktionen von Twistfeldern untereinander bzw. mit Strömen oder Vertexoperatoren ausrechnen zu können, müssen wir uns die Weltfläche bei Anwesenheit von Twistfeldern genauer anschauen. Auf der durch die Anwesenheit von Twistfeldern verzweigten komplexen Ebene bzw. auf der sie überlagernden Riemannschen Fläche existieren in der Regel nicht-triviale geschlossene Kurven, d.h. die Riemannsche Fläche hat eine nicht-triviale Homologie. Mögliche klassische Lösungen der Bewegungsgleichungen liefern auf diesen nicht-trivialen Zykeln nicht-verschwindende Beiträge zu den Korrelationsfunktionen, sogenannte *Instantonbeiträge*. In der Praxis muß man zunächst eine bestimmte Zerschneidung der komplexen Ebene festlegen, bevor man eine entsprechende Basis der nicht-trivialen Zykel aufstellen und die Instantonbeiträge ausrechnen kann. Das Ergebnis ist jedoch explizit *crossing-symmetrisch* und hängt folglich nicht von der speziellen Wahl der Schnitte in der Ebene ab. Für unsere Berechnungen bedeutet dies konkret, daß wir die Ströme in einen klassischen und einen Quantenanteil aufspalten müssen

$$j_\pm(z) = j_{\pm,cl}(z) + j_{\pm,qu}(z)\ . \tag{2.16}$$

Diese Verzweigungsstruktur der Weltfläche hat jedoch noch eine weitere wichtige Konsequenz, und zwar relativ strikte Auswahlregeln für jegliche Korrelationsfunktionen, die Twistfelder enthalten. Betrachtet man nämlich einen Zykel, der sämtliche Twistfelder einer Korrelationsfunktion umschließt (die o.B.d.A. alle nicht ins Unendliche verschoben sind), so läßt sich dieser Zykel im Unendlichen zusammenziehen, ist also trivial. Folglich muß das Produkt der Raumgruppenelemente aller Twistfelder in der Nebenklasse der Identität $(1-\theta)\Lambda = \{(1-\theta)u, u \in \Lambda\}$ enthalten sein. Ansonsten verschwindet die betrachtete Korrelationsfunktion. Dies nennt man die *Raumgruppen–Auswahlregel*. Sie enthält die *Punktgruppen–Auswahlregel*, daß die Summe aller Twists eine ganze Zahl ist.

Unter Berücksichtigung der OPE's mit Twistfeldern (2.15) und des Fakts aus der konformen Feldtheorie, daß ein Strom für $z \to \infty$ wie $1/z^2$ abfallen muß, erhält man als Basis der Lösungen der klassischen Bewegungsgleichung $\bar\partial j_+(z) = 0$ für einen Strom vor einem Hintergrund aus L Twistfeldern [Dix87]

$$\omega^i_{\underline{k}}(z; z_i) = z^{i-1} \prod_{j=1}^{L} (z - z_j)^{-(1-\frac{k_j}{N})} \qquad i = 1, \ldots, L - M - 1\ . \tag{2.17}$$

Dabei bezeichnet $M = \sum_{i=1}^{L} \frac{k_i}{N}$ die Summe der Twists. Diese muß gemäß der oben beschriebenen Punktgruppen–Auswahlregel eine ganze Zahl sein. Entsprechend erhält man auch eine Basis der Lösungen für $j_-(z)$ aus den $M-1$ Elementen $\omega^i_{\underline{N-k}}(z; z_i)$.

Um den Quantenanteil zu Twist-Korrelatoren zu berechnen, wenden wir die sogenannte *Energie-Impuls-Tensor-Methode* [DFMS87] an. Dazu definieren wir die Funktion

$$g(z,w,z_i,\bar{z}_i) = \frac{\langle\, j_{+,qu}(z) j_{-,qu}(w)\, \sigma_1(z_1,\bar{z}_1)\ldots\sigma_L(z_L,\bar{z}_L)\,\rangle}{\langle\, \sigma_1(z_1,\bar{z}_1)\ldots\sigma_L(z_L,\bar{z}_L)\,\rangle}.$$

Nun sind die OPE's zweier Ströme bereits aus der Torustheorie bekannt

$$\begin{aligned} j_+(z) j_-(w) &\sim \frac{1}{(z-w)^2} + \mathcal{T}(w) + \ldots \\ \tilde{j}_-(\bar{z}) j_-(w) &\sim \text{endlich}\,. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Somit erhält man im folgenden Limes $w \to z$ den Erwartungswert des Energie-Impuls-Tensors vor dem Hintergrund der Twistfelder

$$\langle\langle\, \mathcal{T}\,\rangle\rangle = \lim_{w\to z}\left[g(z,w;z_i,\bar{z}_i) - \frac{1}{(z-w)^2}\right]. \tag{2.19}$$

Auf der anderen Seite ist der singuläre Teil der OPE des Virasoro-Feldes $\mathcal{T}$ mit primären Feldern der Theorie vollständig bestimmt durch deren konforme Dimension gemäß (2.4). Da die Twistfelder σ den Grundzuständen in den getwisteten Sektoren entsprechen, sind sie auch primäre Felder. Folglich liefert die Anwendung von (2.4) auf $\langle\langle\, \mathcal{T}\,\rangle\rangle$ die folgenden M Differentialgleichungen für den Twistfeld-Korrelator

$$\frac{\partial_{z_i}\langle\, \sigma_1(z_1,\bar{z}_1)\ldots\sigma_L(z_L,\bar{z}_L)\,\rangle}{\langle\, \sigma_1(z_1,\bar{z}_1)\ldots\sigma_L(z_L,\bar{z}_L)\,\rangle} = \lim_{z\to z_i}\left((z-z_i)\,\langle\langle\, \mathcal{T}\,\rangle\rangle - \frac{h_i}{z-z_i}\right). \tag{2.20}$$

Die Berechnung des Quantenanteils des Twistfeld-Korrelators reduziert sich folglich auf die Lösung der Differentialgleichungen (2.20), sofern die Funktion $g(z,w;z_i,\bar{z}_i)$ bekannt ist und sich somit mittels (2.19) $\langle\langle\, \mathcal{T}\,\rangle\rangle$ ermitteln läßt.

Die Funktion $g(z,w;z_i,\bar{z}_i)$ ist eindeutig bestimmt durch die folgenden Einschränkungen

- für $z \to z_i$ und $w \to z_i$ ist das singuläre bzw. das Verzweigungsverhalten von $g(z,w;z_i,\bar{z}_i)$ durch die OPE's (2.15) festgelegt
- für $w \to z$ ergibt sich gemäß (2.18) ein Pol zweiter Ordnung, ein ansonsten aber endliches Verhalten
- für $w \to \infty$ und $z \to \infty$ dominiert das Verhalten der Ströme, die im Unendlichen wie $1/w^2$ bzw. $1/z^2$ abfallen
- für Korrelatoren mit mehr als drei Twistfeldern muß die nicht-triviale Monodromie berücksichtigt werden.

Somit kann man in Verallgemeinerung von [BKM91] für $g(z,w;z_i,\bar{z}_i)$ den folgenden Ansatz aufstellen

$$g(z,w;z_i,\bar{z}_i) = \\ = \omega^1_{\underline{k}}(z;z_i)\ \omega^1_{\underline{N-k}}(w;z_i)\ \frac{P(z,w;z_i,\bar{z}_i)}{(z-w)^2} + \sum_{i=1}^{L-M-1}\sum_{j=1}^{M-1} A_{ij}\ \omega^i_{\underline{k}}(z;z_i)\ \omega^j_{\underline{N-k}}(w;z_i) \quad (2.21)$$

wobei $P(z,w;z_i,\bar{z}_i)$ ein Polynom in z und w der Gestalt

$$P(z,w;z_i,\bar{z}_i) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{L-M} a_{ij} w^i z^j$$

ist. Dabei wären die Exponenten von z und w gemäß (2.15) nur durch die Anzahl der Twistfelder L beschränkt. Das oben beschriebene Verhalten der Ströme im Unendlichen erfordert jedoch die Einschränkung auf M ($< L$ wegen $\frac{k}{N} < 1$) bzw. $L-M$ ($< L$). Der allgemeine Ansatz von [Dix87] stimmt damit nur im Falle des Zwei- und des Drei-Twistfeld-Korrelators überein, da er ansonsten das Verhalten der Ströme im Unendlichen nicht berücksichtigt. Die aus (2.18) abgeleitete Bedingung

$$\lim_{z\to w}\left[g(z,w;z_i,\bar{z}_i) - \frac{1}{(z-w)^2}\right] = \text{ endlich} \quad (2.22)$$

legt nun die Koeffizienten a_{ij} und damit das Polynom fest, eindeutig bis auf einen zu

$$(z-w)^2\ \left(\omega^1_{\underline{k}}(z;z_i)\ \omega^1_{\underline{N-k}}(w;z_i)\right)^{-1}\ \sum_{i=1}^{L-M-1}\sum_{j=1}^{M-1} A_{ij}\ \omega^i_{\underline{k}}(z;z_i)\ \omega^j_{\underline{N-k}}(w;z_i)$$

proportionalen Anteil. Der limes in (2.22) läßt sich z.B. durch Anwendung der L'Hospitalschen Regel leicht ausrechnen; man erhält genau zwei Gleichungen, die dem Verschwinden von $\left[(z-w)^2 g(z,w;z_i,\bar{z}_i) - 1\right]$ und dessen Ableitung bzgl. z an der Stelle $z = w$ entsprechen.[1] Das Resultat der Bestimmung des Limes von (2.22) liefert gleich auch den Erwartungswert des Virasoro-Feldes vor dem Hintergrund der Twistfelder.

Sowohl die noch bestehende Freiheit A_{ij} in der Lösung für den Quantenanteil wie auch die klassischen Lösungen lassen sich durch Betrachtung der Monodromie der Weltfläche festlegen. Dazu definiert man die Funktion

$$h(\bar{z},w;z_i,\bar{z}_i) = \frac{\langle\, \tilde{\jmath}_{+,qu}(\bar{z}) j_{-,qu}(w)\, \sigma_1(z_1,\bar{z}_1)\ldots\sigma_L(z_L,\bar{z}_L)\,\rangle}{\langle\, \sigma_1(z_1,\bar{z}_1)\ldots\sigma_L(z_L,\bar{z}_L)\,\rangle}\ .$$

Für $h(\bar{z},w;z_i,\bar{z}_i)$ gelten dieselben Einschränkungen wie für $g(z,w;z_i,\bar{z}_i)$ oben, mit dem einzigen Unterschied, daß gemäß (2.18) die Funktion für $w \to z$ keinerlei Pol aufweist.

[1] Auf der Grundlage dieser Überlegungen kann man unter Ausnutzung von Kombinatorik einen allgemeinen Ausdruck für $P(z,w;z_i,\bar{z}_i)$ hinschreiben [Nah]. Wir benötigen in dieser Arbeit jedoch lediglich zwei einfache Spezialfälle.

Folglich erhält man den Ansatz [Dix87]

$$h(\bar{z},w;z_i,\bar{z}_i) = \sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=1}^{M-1} B_{ij}\ \bar{\omega}^i_{\underline{N-k}}(\bar{z};\bar{z}_i)\ \omega^j_{\underline{k}}(w;z_i)\ .$$

Die Matrix B_{ij} wird wiederum durch die Monodromie bestimmt — ist die Monodromie trivial, verschwindet $h(\bar{z},w;z_i,\bar{z}_i)$ natürlich.

Die globalen Monodromiebedingungen lauten nun [DFMS87]

$$\Delta_{\gamma_a} = \oint_{\gamma_a} \mathrm{d}z\ \partial_z X + \oint_{\gamma_a} \mathrm{d}\bar{z}\ \partial_{\bar{z}} X = v_a \qquad a = 1\ldots L-2\ . \tag{2.23}$$

Dabei betrachtet man nur Zykel, die auf der geblätterten Ebene wieder auf ihrem Ausgangsblatt schließen und folglich keinen Netto-Twist, nur Translation um v_a aufweisen. Es läßt sich zeigen, daß wenn man die Äquivalenz von Zykeln berücksichtigt, die sich nur um eine Transformation von Blatt-Indizes unterscheiden, genau $L-2$ der oben beschriebenen Zykel eine Basis der Homologie bilden [ADGN88] [BR87a]. Teilt man nun die Ströme $j_+(z) = i\partial_z X(z)$ etc. wie in (2.16) in einen klassischen und einen Quantenanteil auf, so gilt für den klassischen Anteil die volle Monodromie v_a, der Quantenanteil hat folglich Monodromie 0. Man kann also die Monodromiebedingung (2.23) separieren, so daß man $L-2$ klassische Monodromiegleichungen

$$\Delta_{\gamma_a,cl} = \oint_{\gamma_a} \mathrm{d}z\ j_{+,cl}(z) + \oint_{\gamma_a} \mathrm{d}\bar{z}\ \tilde{\jmath}_{-,cl}(\bar{z}) = v_a \qquad a = 1\ldots L-2 \tag{2.24}$$

sowie unter Verwendung der Funktionen $g(z,w;z_i,\bar{z}_i)$ und $h(\bar{z},w;z_i,\bar{z}_i)$ die $L-2$ Quanten-Monodromiegleichungen

$$\Delta_{\gamma_a,qu} = \oint_{\gamma_a} \mathrm{d}z\ g(z,w;z_i,\bar{z}_i) + \oint_{\gamma_a} \mathrm{d}\bar{z}\ h(\bar{z},w;z_i,\bar{z}_i) = 0 \qquad a = 1\ldots L-2 \tag{2.25}$$

erhält. Die Gleichungen (2.25) bestimmen nun die beiden Matrizen A_{ij} und B_{ij}; damit ist die Lösung des Quantenanteils vollständig. Zur Bestimmung der klassischen Lösung verwenden wir die Basis der klassischen Lösungen (2.17) für $j_+(z)$ bzw. die entsprechenden Lösungen für die anderen Ströme; die Gleichungen (2.24) bestimmen dann die Koeffizienten dieser Lösungen.

Nun ist scheinbar für die Berechnung eines reinen Twistfeld-Korrelators die Berücksichtigung des Quantenanteils der Ströme völlig ausreichend, der Beitrag der klassischen Lösungen zumindestens nicht ersichtlich. Dieses Bild trügt jedoch, wie man leicht an der Pfadintegraldarstellung der Korrelatoren

$$\begin{aligned} Z(z_i,\bar{z}_i) &= \langle\, \sigma_1(z_1,\bar{z}_1)\ldots\sigma_L(z_L,\bar{z}_L)\,\rangle \\ &= \int \mathcal{D}X\ \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int \partial X\ \bar{\partial} X\right) \prod_{i=1}^{L} \sigma_i(z_i,\bar{z}_i) \end{aligned}$$

sehen kann. Da dies ein Funktional mit Gaußscher Wirkung ist, lassen sich klassischer und Quantenanteil wie folgt separieren [Dix87]

$$\begin{aligned} Z(z_i,\bar{z}_i) &= \int \mathcal{D}X_{qu}\ \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int \partial X_{qu}\ \bar{\partial}X_{qu}\right)\ \prod_{i=1}^{L}\ \sigma_i(z_i,\bar{z}_i) \\ &\quad \times \sum_{\{v_a\}} \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int \partial X_{cl}^{v_a}\ \bar{\partial}X_{cl}^{v_a}\right) \\ &=: Z_{qu}(z_i,\bar{z}_i) \times \sum_{\{v_a\}} \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int \partial X_{cl}^{v_a}\ \bar{\partial}X_{cl}^{v_a}\right)\ , \end{aligned}$$

wobei man über alle möglichen klassischen Konfigurationen summieren muß, die gerade von den Nebenklassen der Monodromievektoren $\{v_a\}$ generiert werden. Dieser Quantenanteil $Z_{qu}(z_i,\bar{z}_i)$ entspricht genau der oben bestimmten Lösung für den reinen Twistfeld-Korrelator — um jedoch den vollständigen Twistfeld-Korrelator zu erhalten, muß man noch den klassischen Faktor hinzumultiplizieren.

Die bisherige Rechnung liefert uns nicht nur die vollständigen reinen Twistfeld-Korrelatoren, sie liefert direkt auch die Korrelatoren von Twistfeldern mit Strömen. Zunächst beobachtet man, daß die Funktionen $g(z,w;z_i,\bar{z}_i)$ und $h(\bar{z},w;z_i,\bar{z}_i)$ eigentlich Propagatoren sind; denn multipliziert man sie mit dem jetzt bekannten Twistfeld-Korrelator $\langle\, \sigma_1(z_1,\bar{z}_1)\ldots\sigma_L(z_L,\bar{z}_L)\,\rangle$ und wendet gegebenenfalls noch komlexe Konjugation an, so erhält man alle Korrelatoren von Twistfeldern mit zwei holomorphen bzw. antiholomorphen Strömen. Als zweites kann man beobachten [DFMS87] [Dix87], daß man auf den Quantenanteil der Ströme ein dem Wick-Theorem analoges Verfahren anwenden kann, mit dem Unterschied, daß man im Gegensatz zum Wick-Theorem für die Kontraktionen die Propagatoren $g(z,w;z_i,\bar{z}_i)$ und $h(\bar{z},w;z_i,\bar{z}_i)$ einsetzen und insgesamt einmal den reinen Twistfeld-Korrelator als Faktor hinzufügen muß. Dies kann man sich wie folgt veranschaulichen: Da wir nur den Quantenanteil betrachten, kann der Korrelator nach genau denselben Einschränkungen wie im Falle des Propagators $g(z,w;z_i,\bar{z}_i)$ bestimmt werden, mit dem einzigen Unterschied, daß sich die Polstruktur der Ströme untereinander ändert. Diese Polstruktur besteht aber gerade aus Produkten von Polen zweiter Ordnung, was bei Korrelatoren von freien Feldern gerade das Wick-Theorem induziert. Die Beiträge der Ströme faktorisieren also in Zweier-Pärchen, denn das Verhalten gegenüber den Twistfeldern und im Unendlichen bleibt durch die Verwendung der Propagatoren $g(z,w;z_i,\bar{z}_i)$ und $h(\bar{z},w;z_i,\bar{z}_i)$ als Kontraktionen auch in den einzelnen Faktoren erhalten. Darüberhinaus ist es wichtig festzustellen, daß der Quantenanteil eines Korrelators eines einzigen Stromes mit Twistfeldern natürlich verschwindet.

Dies ergibt folgendes Rezept zur Berechnung eines Strom-Twistfeld-Korrelators:

- Spalte die Ströme zunächst in einen klassischen und einen Quantenanteil auf $j_\pm = j_{\pm,cl} + j_{\pm,qu}$ und ziehe den Korrelator entsprechend auseinander.

- Ziehe nun die klassischen Faktoren aus den Korrelatoren heraus und berechne die übrigbleibenden reinen Quantenkorrelatoren gemäß des obigen Wick-Theorems.

Um auch Korrelatoren anderer Felder der Theorie, z.B. Korrelatoren von oder mit Vertexoperatoren, berechnen zu können, kann man zunächst aus den Propagatoren $g(z,w;z_i,\bar{z}_i)$ und $h(\bar{z},w;z_i,\bar{z}_i)$ per Integration die Korrelatoren der Koordinatenfelder mit den Twistfeldern bestimmen, und zwar [DFMS87]

$$\begin{aligned} G(z,w;z_i,\bar{z}_i) &= \langle\, X_{qu}(z,\bar{z})X_{qu}(w,\bar{w})\,\rangle \\ &= \int_{z_0}^{z}\mathrm{d}z'\int_{w_0}^{w}\mathrm{d}w'\; g(z',w';z_i,\bar{z}_i)+\int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}'\int_{w_0}^{w}\mathrm{d}w'\; h(\bar{z}',w';z_i,\bar{z}_i) \\ &\quad +\int_{z_0}^{z}\mathrm{d}z'\int_{\bar{w}_0}^{\bar{w}}\mathrm{d}\bar{w}'\;\bar{h}(z',\bar{w}';z_i,\bar{z}_i)+\int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}'\int_{\bar{w}_0}^{\bar{w}}\mathrm{d}\bar{w}'\;\bar{g}(\bar{z}',\bar{w}';z_i,\bar{z}_i)\ . \end{aligned}$$

Durch die verschwindende Monodromie des Quantenanteils ist diese Definition unabhängig vom Weg um die Twistfelder. Die Abhängigkeit von den Anfangspunkten z_0 etc. verschwindet in den Korrelatoren der physikalischen Operatoren [DFMS87]. Der Quantenanteil dieser Operatoren kann genauso wie in der freien Feldtheorie berechnet werden, nur daß man anstelle des freien Korrelators zweier Bosonen $-\log\mid z-w\mid^2$ nun den Propagator $G(z,w;z_i,\bar{z}_i)$ einsetzt. Wie oben muß man natürlich auch den klassischen Anteil mitberücksichtigen, um eine vollständige Korrelationsfunktion zu erhalten. Dieses Vorgehen beruht jedoch auf der Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei Variabeln, so daß die verbleibende Freiheit in der Lösung zumeist weitere nicht-triviale Einschränkungen oder ein spezielleres, auf den jeweiligen Korrelator abgestimmtes Vorgehen verlangt; ein Beispiel für eine solche speziellere Methode werden wir in 2.4.6 anhand des Korrelators zweier Vertexoperatoren mit zwei Twistfeldern sehen.

2.4.4 Supersymmetrische Twistfeld-Korrelatoren

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir ausschließlich den bosonischen Fall einer Orbifoldtheorie betrachtet. Wie wir aber bei der Behandlung der Symmetriegruppen gesehen haben, läßt sich die Gruppenoperation ohne Probleme auf die fermionischen Felder einer superkonformen Torustheorie ausdehnen. Somit kann man auf genau die gleiche Weise wie bei einer bosonischen Theorie aus einer superkonformen Torustheorie eine Orbifoldtheorie konstruieren. Wir müssen dabei nur fordern, daß die jeweilige superkonforme Algebra invariant unter der Gruppenoperation ist. Dies gilt insbesondere für den $N=1$ Weltflächen Superstrom

$$G(z)=\sum_{i=1}^{d/2}\left(:j_+^{(i)}\psi_-^{(i)}:(z)+:j_-^{(i)}\psi_+^{(i)}:(z)\right)\ .$$

Damit $G(z)$ keine Monodromie auf der Weltfläche hat, muß man ein weiteres, fermionisches Twistfeld $s^{(i)}_{\frac{k}{N}}$ einführen, das zu den Fermionen $\psi_\pm$ assoziiert ist und für den

Superstrom die Monodromie des bosonischen Twistfelds kompensiert. Analog zur OPE der Ströme mit den bosonischen Twistfeldern (2.15) erhält man für die Fermionen [Dix87]

$$\begin{aligned}
\psi_+(z)\ s(w) &\sim (z-w)^{+\frac{k}{N}}\ t'(w)\\
\psi_-(z)\ s(w) &\sim (z-w)^{-\frac{k}{N}}\ t(w)\\
\tilde{\psi}_+(\bar{z})\ \tilde{s}(\bar{w}) &\sim (\bar{z}-\bar{w})^{+\frac{k}{N}}\ \tilde{t}'(\bar{w})\\
\tilde{\psi}_-(\bar{z})\ \tilde{s}(\bar{w}) &\sim (\bar{z}-\bar{w})^{-\frac{k}{N}}\ \tilde{t}(\bar{w})\ .
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Dabei bezeichnet eine Tilde, daß das jeweilige Feld durch komplexe Konjugation auf der Weltfläche entstanden ist und somit das antiholomorphe Pendant zu dem ursprünglich holomorphen Feld darstellt. Die neuen Felder $t(z)$ etc. sind angeregte fermionische Twistfelder. Führt man nun das Twistsuperfeld

$$T(z,\bar{z}) = s(z)\tilde{s}(\bar{z})\sigma(z,\bar{z})$$

ein, so hat $G(z)$ verschwindende Monodromie bzgl. aller Twistsuperfelder. Die superkonforme Orbifoldtheorie ist also wohldefiniert.

Nun lassen sich die fermionischen Korrelatoren erheblich einfacher ausrechnen als die bosonischen, da man die Fermionen und die fermionischen Twistfelder bosonisieren kann. Führen wir die beiden freien bosonischen Felder $H(z)$ und $\tilde{H}(\bar{z})$ ein, so beschreiben die Felder gemäß der folgenden Entsprechungen [Pol98]

$$\begin{array}{lll}
\psi_+\psi_- \equiv i\partial H & \psi_+ \equiv e^{+iH} & \psi_- \equiv e^{-iH}\\
\tilde{\psi}_+\tilde{\psi}_- \equiv i\partial \tilde{H} & \tilde{\psi}_+ \equiv e^{+i\tilde{H}} & \tilde{\psi}_- \equiv e^{-i\tilde{H}}
\end{array}$$

isomorphe konforme Feldtheorien (modulo für uns nicht relevanter Kozykelfaktoren). Die OPE exponentierter freier bosonischer Felder ist jedoch bekannt

$$e^{i\alpha_1 H(z_1)}\ e^{i\alpha_2 H(z_2)} \sim (z_1-z_2)^{\alpha_1\alpha_2}\ e^{i(\alpha_1+\alpha_2)H(z_2)} + \dots$$

Korrelatoren mehrerer exponentierter freier bosonischer Felder ergeben demnach

$$\prod_i^N \langle\, e^{i\alpha_i H(z_i)}\,\rangle = \prod_{i<j} (z_i-z_j)^{\alpha_i\alpha_j} \qquad \text{falls} \ \sum_i^N \alpha_i = 0\ .$$

Um nun die OPE's (2.26) zu realisieren, bosonisiert man die fermionischen Twistfelder folgendermaßen [Dix87]

$$\begin{array}{ll}
s_k(z) \equiv e^{+i\frac{k}{N}H(z)} & \tilde{s}_k(\bar{z}) \equiv e^{+i\frac{k}{N}\tilde{H}(\bar{z})}\\
s_{-k}(z) \equiv e^{-i\frac{k}{N}H(z)} & \tilde{s}_{-k}(\bar{z}) \equiv e^{-i\frac{k}{N}\tilde{H}(\bar{z})}\ .
\end{array}$$

Damit lassen sich nun alle fermionischen Twistfeld-Korrelatoren berechnen. In den Korrelatoren der Supertwistfelder mit anderen Superfeldern faktorisieren die bosonischen und die fermionischen Anteile.

2.4.5 Beispiele spezieller Twistfeld-Korrelatoren

Die einfachsten Beispiele von Twistfeld-Korrelatoren sind der **Zwei-Twistfeld-Korrelator** und die davon abgeleiteten Strom-Twistfeld-Korrelatoren. Als erstes beobachtet man, daß die Punktgruppen-Auswahlregel nur Zwei-Twistfeld-Korrelatoren zuläßt, deren Twists sich gerade kompensieren. Hat also das erste Twistfeld T_+ einen Twist von $\frac{k}{N}$, so hat das zweite T_- gerade den „Antitwist“ $-\frac{k}{N}$. Die Raumgruppen-Auswahlregel legt zudem fest, daß der Korrelator nur dann nicht verschwindet, wenn beide Twistfelder am selben Fixpunkt sind. Da nun $L = 2$ und $M = 1$, ist klar, daß es keine nichttrivialen klassischen Lösungen für Ströme vor dem Hintergrund zweier Twistfelder geben kann. Die Matrizen A_{ij} und B_{ij} treten ebenfalls nicht auf, der Propagator $h^{II}(\bar{z}, w; z_i, \bar{z}_i)$ verschwindet. Folglich genügt es, allein den Quantenanteil auszurechnen.

Berechnet man mit dem allgemeinen Ansatz (2.21) den Erwartungswert des Energie-Impuls-Tensors aus (2.19)

$$\langle\langle\, \mathcal{T}(w)\, \rangle\rangle = \lim_{w\to z}\left[g^{II}(z,w;z_i,\bar{z}_i) - \frac{1}{(z-w)^2}\right] ,$$

so erhält man mittels L'Hospital

$$\langle\langle\, \mathcal{T}(w)\, \rangle\rangle_{z_i} = \frac{1}{2}\frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)\frac{(z_1-z_2)^2}{(w-z_1)^2\,(w-z_2)^2} .$$

Die beiden Konsistenzgleichungen, die beim Anwenden der L'Hospitalschen Regel auftreten, bestimmen die Koeffizienten des Polynoms eindeutig, so daß $g^{II}(z,w;z_i,\bar{z}_i)$ die folgende Gestalt erhält

$$\begin{aligned} g^{II}(z,w;z_i,\bar{z}_i) &= (z-z_1)^{-(1-\frac{k}{N})}(z-z_2)^{-\frac{k}{N}}(w-z_1)^{-\frac{k}{N}}(w-z_2)^{-(1-\frac{k}{N})} \\ &\times\frac{1}{(z-w)^2}\left[\left(1-\frac{k}{N}\right)(z-z_1)(w-z_2)+\frac{k}{N}(z-z_2)(w-z_1)\right]. \end{aligned}$$

Unter Anwendung der OPE (2.4) liefert nun $(w-z_j)^2\langle\langle\, \mathcal{T}(w)\, \rangle\rangle_{z_i}$ im Grenzwert $w \to z_j$ die konforme Dimension h_j des bosonischen Twistfeldes $\sigma_{\frac{k_j}{N}}(z_j, \bar{z}_j)$. Diese ist nur abhängig vom Twist des Feldes und beträgt

$$h_j = \frac{1}{2}\frac{k_j}{N}\left(1-\frac{k_j}{N}\right) .$$

Nun können wir mit dem oben berechneten Erwartungswert des Virasoro-Feldes und der konformen Dimension der Twistfelder die beiden Differentialgleichungen (2.20) lösen. Bzgl. der Koordinate z_1 erhält man z.B. die Differentialgleichung

$$\partial_{z_1}\log\langle\, \sigma_+(z_1,\bar{z}_1)\sigma_-(z_2,\bar{z}_2)\,\rangle \;=\lim_{z\to z_1}\left(\frac{1}{2}\frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)\frac{(z_1-z_2)^2}{(z-z_1)\,(z-z_2)^2} - \frac{h_1}{z-z_1}\right)$$

und als Lösung

$$\langle\, \sigma_+(z_1,\bar{z}_1)\sigma_-(z_2,\bar{z}_2)\,\rangle = C_{II}(z_2;\bar{z}_i)\,(z_1-z_2)^{-2h_1} .$$

Da die konformen Dimensionen von Twistfeldern gleich derer ihrer entsprechenden „Antitwistfelder“ sind, liefert die zweite Differentialgleichung bzgl. z_2 genau dasselbe Ergebnis, nur daß die Integrationskonstante C dieses Mal anstelle von z_2 von z_1 abhängt; folglich ist C_{II} unabhängig von beiden holomorphen Twistfeldkoordinaten. Die Betrachtung des antiholomorphen Virasoro-Feldes liefert genau das komplex konjugierte Resultat, so daß der vollständige bosonische Zwei-Twistfeld-Korrelator

$$\langle\, \sigma_+(z_1,\bar z_1)\sigma_-(z_2,\bar z_2)\,\rangle = C_{II}\ \mid z_1 - z_2 \mid^{-4h}$$

lautet. Wir erhalten also genau das gemäß der allgemeinen konformen Feldtheorie erwartete Ergebnis. Da wir die Normierung der Twistfelder noch nicht festgelegt haben, können wir diese dazu verwenden, die Zwei-Twistfeld-Korrelatoren auf 1 zu normieren.

Nun steht noch der vollständige Zwei-Supertwistfeld-Korrelator aus, der sich unter Berücksichtigung der fermionischen Beiträge

$$\begin{aligned}\langle\, s_+(z_1)\ s_-(z_2)\,\rangle &= (z_1 - z_2)^{-\frac{k^2}{N^2}}\\ \langle\, \tilde s_+(\bar z_1)\ \tilde s_-(\bar z_2)\,\rangle &= (\bar z_1 - \bar z_2)^{-\frac{k^2}{N^2}}\end{aligned}$$

zu

$$\langle\, T_+(z_1,\bar z_1)T_-(z_2,\bar z_2)\,\rangle = \ \mid z_1 - z_2 \mid^{-2\frac{k}{N}}$$

ergibt. Folglich haben die Twistsuperfelder konforme Dimension

$$h_T = \frac{1}{2}\frac{k}{N}\ .$$

Als nächstes betrachten wir die **Drei-Twistfeld-Korrelatoren**. Die Punktgruppen-Auswahlregel läßt nur Korrelatoren zu, in denen die Twists der ersten beiden Felder $\frac{k}{N}$ und $\frac{l}{N}$ durch einen entsprechenden Antitwist $\frac{-k-l}{N}$ des dritten Feldes kompensiert werden, wobei wir o.B.d.A. $k + l < N$ annehmen. Die Raumgruppen-Auswahlregel beschränkt zusätzlich noch die Fixpunkte, an denen sich die Twistfelder im Targetraum befinden können. Dabei ist der Fall, daß alle am selben Fixpunkt sind, immer erlaubt, der Fall, daß alle an verschiedenen Fixpunkten sind, nur in einigen Modellen. Daraus folgt wegen $L = 3$ und $M = 1$, daß es genau eine nicht-triviale klassische Lösung für einen Strom $j_+(z)$ vor dem Hintergrund dreier Twistfelder gibt. Die Matrizen A_{ij} und B_{ij} verschwinden jedoch wiederum, damit auch $h^{III}(\bar z, w; z_i, \bar z_i)$.

Der übliche Ansatz (2.21) führt auf einen Erwartungswert des Virasoro-Feldes von (2.19)

$$\begin{aligned}\langle\langle\ \mathcal{T}(w;z_i)\ \rangle\rangle &= \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{k}{N}(1-\frac{k}{N})}{(w-z_1)^2} + \frac{\frac{l}{N}(1-\frac{l}{N})}{(w-z_2)^2} + \frac{\frac{k+l}{N}(1-\frac{k+l}{N})}{(w-z_3)^2}\right)\\ &\quad - \frac{\frac{k}{N}\frac{l}{N}}{(w-z_1)(w-z_2)} - \frac{\frac{k}{N}(1-\frac{k+l}{N})}{(w-z_1)(w-z_3)} - \frac{\frac{l}{N}(1-\frac{k+l}{N})}{(w-z_2)(w-z_3)}\ .\end{aligned}$$

Die Gestalt des Propagators $g^{III}(z,w;z_i,\bar{z}_i)$ ergibt sich dabei nach Lösung der Konsistenzgleichungen zu

$$\begin{aligned} g^{III}(z,w;z_i,\bar{z}_i) &= \\ &= (z-z_1)^{-(1-\frac{k}{N})}(z-z_2)^{-(1-\frac{l}{N})}(z-z_3)^{-\frac{k+l}{N}}(w-z_1)^{-\frac{k}{N}}(w-z_2)^{-\frac{l}{N}} \\ &\quad \times (w-z_3)^{-(1-\frac{k+l}{N})}\,\frac{1}{(z-w)^2}\left[\left(1-\frac{k+l}{N}\right)(z-z_1)(z-z_2)(w-z_3)\right. \\ &\quad \left. + \frac{k}{N}(z-z_2)(z-z_3)(w-z_1) + \frac{l}{N}(z-z_1)(z-z_3)(w-z_2)\right]. \end{aligned}$$

Nach Integration der Differentialgleichungen (2.20) führt dies zu der ebenfalls gemäß der allgemeinen konformen Feldtheorie bereits erwarteten Lösung

$$\begin{aligned} &\langle\, \sigma_k(z_1,\bar{z}_1)\sigma_l(z_2,\bar{z}_2)\sigma_{-k-l}(z_3,\bar{z}_3)\,\rangle = \\ &= \; C_{III}\; \mid z_1-z_2\mid^{-2\frac{k}{N}\frac{l}{N}} \mid z_2-z_3\mid^{-2\frac{l}{N}(1-\frac{k+l}{N})} \mid z_1-z_3\mid^{-2\frac{k}{N}(1-\frac{k+l}{N})} \;. \end{aligned}$$

Bisher haben wir die klassische Lösung noch nicht berücksichtigt. Diese tritt jedoch nur in der Integrationskonstante C_{III} und in den Strom-Twistfeld-Korrelatoren als abgespalteter klassischer Anteil in Erscheinung. Im letzteren Fall muß die klassische Lösung für jedes Modell gesondert bestimmt werden. Was die Festlegung der Integrationskonstante C_{III} angeht, haben wir leider die Freiheit der Twistfeld-Normierungen bereits zur Festlegung des Zwei-Twistfeld-Korrelators aufgebraucht. C_{III} muß nun auf diese Normierung zurückgeführt werden. Dazu kann man den Trick verwenden [DFMS87] [BKM91], den Vier-Twistfeld-Korrelator

$$\langle\, \sigma_{-k}(z_1,\bar{z}_1)\sigma_k(z_2,\bar{z}_2)\sigma_{-l}(z_3,\bar{z}_3)\sigma_l(z_4,\bar{z}_4)\,\rangle$$

in seine Kanäle zu zerlegen. Im Falle $x = \frac{z_2-z_1}{z_2-z_4}\frac{z_3-z_4}{z_3-z_1} \to 0$ dominiert die Identität als Zwischenzustand die Summe über die konformen Blöcke. Folglich läßt sich die Normierung des Vier-Twistfeld-Korrelators in diesem Grenzwert auf die festgelegte des Zwei-Twistfeld-Korrelators zurückführen. Auf der anderen Seite dominiert für $x \to \infty$ der Kanal der primären Twistfelder. Da für zwei gegebene Twistfelder das dritte in einem zulässigen Drei-Twistfeld-Korrelator durch die Raumgruppen-Auswahlregel eindeutig festgelegt ist, trägt in diesem Limes nur der eine Summand

$$\langle\, \sigma_{-k}\sigma_k\sigma_{-l}\sigma_l\,\rangle = \langle\, \sigma_k\sigma_l\sigma_{-k-l}\,\rangle\langle\, \sigma_{k+l}\sigma_{-l}\sigma_{-k}\,\rangle \qquad \text{für } x \longrightarrow \infty$$

bei. Aus der gerade berechneten Normierung des Vier-Twistfeld-Korrelators kann man auf diesem Weg auch die Normierung des Drei-Twistfeld-Korrelators bestimmen. Diese wurde von [BKM91] berechnet zu

$$\begin{aligned} C^{kl}_{f_af_bf_c} &= \sqrt{\frac{2V_\Lambda}{\mathrm{ctg}\,(\pi\frac{k}{N}) + \mathrm{ctg}\,(\pi\frac{l}{N})}}\;\frac{\Gamma(1-\frac{k}{N})\Gamma(1-\frac{l}{N})}{\Gamma(1-\frac{k+l}{N})} \\ &\quad \times \sum_v \exp\left(-\frac{\pi\mid v\mid^2}{4\sin^2(\pi p\frac{k}{N})[\,\mathrm{ctg}\,(\pi\frac{k}{N}) + \mathrm{ctg}\,(\pi\frac{l}{N})]}\right)\,, \end{aligned} \tag{2.27}$$

wobei $pk = ql \neq 0 \pmod N$ und die Summe sich über

$$v \in (1-\theta^{pk})[f_b - f_a + \Lambda]$$

erstreckt. Dabei bezeichnen f_i die Fixpunkte der drei Felder und V_Λ das Volumen einer Einheitszelle des Gitters Λ. Die natürlichen Zahlen p und q parametrisieren den Weg des Basis-Zykels um die Verzweigungspunkte. Diese Normierungskonstante enthält bereits den klassischen Anteil, da sie aus dem vollständigen Vier-Twistfeld-Korrelator gewonnen wurde.

Unter Berücksichtigung der fermionischen Beiträge

$$\begin{aligned}
\langle\, s_k(z_1)\; s_l(z_2)\; s_{-k-l}(z_3)\,\rangle &= (z_1-z_2)^{-\frac{lk}{N^2}}\,(z_1-z_3)^{-\frac{-kl-k^2}{N^2}}\,(z_2-z_3)^{-\frac{-kl-l^2}{N^2}}\\
\langle\, \tilde{s}_k(\bar{z}_1)\; \tilde{s}_l(\bar{z}_2)\; \tilde{s}_{-k-l}(\bar{z}_2)\,\rangle &= (\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{-\frac{lk}{N^2}}\,(\bar{z}_1-\bar{z}_3)^{-\frac{-kl-k^2}{N^2}}\,(\bar{z}_2-\bar{z}_3)^{-\frac{-kl-l^2}{N^2}}
\end{aligned}$$

erhält man nun den Drei-Twistfeld-Korrelator der Supertwistfelder zu

$$\begin{aligned}
K^{kl}_{III,f_a f_b f_c}(z_i,\bar{z}_i) &= \langle\, T^{f_a}_k(z_1,\bar{z}_1)\; T^{f_b}_l(z_2,\bar{z}_2)\; T^{f_c}_{-k-l}(z_3,\bar{z}_3)\,\rangle\\
&= C^{kl}_{f_a f_b f_c}\;\mid z_1-z_3\mid^{-2\frac{k}{N}}\mid z_2-z_3\mid^{-2\frac{l}{N}}\;.
\end{aligned}$$

2.4.6 Eine Vier-Punkt-Funktion von Twistfeldern und Vertexoperatoren

Zur Berechnung des Korrelators

$$\langle\, V_{p_1}(w,\bar{w})\; V_{p_2}(v,\bar{v})\; T_k(x,\bar{x})\; T_l(y,\bar{y})\,\rangle \tag{2.28}$$

mit $k=\frac{1}{2}$ und $l=-\frac{1}{2}$ verwenden wir die OPE der Vertexoperatoren $V_p(z,\bar{z})$ mit den Strömen $j(z)$. Diese läßt sich aus der Modenentwicklung von $j(z)$

$$j(z)=\sum_{n=0}^{\infty} j_n z^{n-1} \qquad j_n\mid\phi\,\rangle = 0 \quad \forall\, n<0$$

und der Modenentwicklung des entsprechenden Stromanteils des Virasoro-Feldes (2.7), angewandt auf einen durch den Vertexoperator $V_p(0,0)$ erzeugten Zustand $\mid V_p\,\rangle$, herleiten:

$$\begin{aligned}
\mid\partial V_p\,\rangle &= L_1\mid V_p\,\rangle\\
&= \frac{1}{2}(j_0 j_1 + j_1 j_0)\mid V_p\,\rangle\\
&= p_a j^a_1\mid V_p\,\rangle\;.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die OPE zu

$$p_a j^a(z)\; V_p(w) = \frac{p^2}{z-w}\; V_p(w) + \partial_w V_p(w) + O(z-w)\;.$$

Wir wollen nun eine Differentialgleichung erster Ordnung für (2.28) finden. Dazu setzen wir die folgende Fünf-Punkt-Funktion an

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{(z-x)(z-y)}\,\langle\, p_{1a} j^a(z)\; V_{p_1}(w,\bar w)\; V_{p_2}(v,\bar v)\; T_{1/2}(x,\bar x)\; T_{-1/2}(y,\bar y)\,\rangle = \\
&\quad = \left(\sqrt{(w-x)(w-y)}\,\frac{p_1^2}{z-w} + \sqrt{(v-x)(v-y)}\,\frac{p_1.p_2}{z-v}\right) \\
&\quad\quad \times\langle\, V_{p_1}(w,\bar w)\; V_{p_2}(v,\bar v)\; T_{1/2}(x,\bar x)\; T_{-1/2}(y,\bar y)\,\rangle\;; \qquad (2.29)
\end{aligned}
$$

die Wurzel auf der linken Seite von (2.29) hebt gerade das Verzweigungsverhalten des Stromes $j(z)$ bzgl. der beiden Twistfelder auf, so daß auf der rechten Seite eine in z meromorphe Funktion stehen muß. Das z-Verhalten dieser meromorphen Funktion ist durch das singuläre Verhalten der OPE's zwischen dem Strom und den Vertexoperatoren sowie das $1/z^2$ Verhalten des Stroms im Unendlichen vollständig auf die Form (2.29) festgelegt. Das Verhalten bzgl. der übrigen Koordinaten alleine ist dann natürlich bereits in der Vier-Punkt-Funktion (2.28) enthalten.

Mit diesen Vorbereitungen kann man nun die Ableitung des Korrelators (2.28) bzgl. w und v ausrechnen

$$
\begin{aligned}
&\partial_w\langle\, V_{p_1}(w,\bar w)\; V_{p_2}(v,\bar v)\; T_{1/2}(x,\bar x)\; T_{-1/2}(y,\bar y)\,\rangle = \\
&= \lim_{z\to w}\Bigg[\langle\, p_{1a} j^a(z)\; V_{p_1}(w,\bar w)\; V_{p_2}(v,\bar v)\; T_{1/2}(x,\bar x)\; T_{-1/2}(y,\bar y)\,\rangle \\
&\quad -\frac{p_1^2}{z-w}\langle\, V_{p_1}(w,\bar w)\; V_{p_2}(v,\bar v)\; T_{1/2}(x,\bar x)\; T_{-1/2}(y,\bar y)\,\rangle\Bigg] \\
&= \lim_{z\to w}\left[\left(\frac{(w-x)^{1/2}(w-y)^{1/2}}{(z-x)^{1/2}(z-y)^{1/2}}\,\frac{p_1^2}{z-w} + \frac{(v-x)^{1/2}(v-y)^{1/2}}{(z-x)^{1/2}(z-y)^{1/2}}\,\frac{p_1 p_2}{z-v}\right) - \frac{p_1^2}{z-w}\right] \\
&\quad \times\langle\, V_{p_1}(w,\bar w)\; V_{p_2}(v,\bar v)\; T_{1/2}(x,\bar x)\; T_{-1/2}(y,\bar y)\,\rangle \\
&= \left[\frac{-p_1^2}{2}\left(\frac{1}{w-x}+\frac{1}{w-y}\right) + \frac{p_1 p_2}{w-v}\,\frac{(v-x)^{1/2}(v-y)^{1/2}}{(w-x)^{1/2}(w-y)^{1/2}}\right] \\
&\quad \times\langle\, V_{p_1}(w,\bar w)\; V_{p_2}(v,\bar v)\; T_{1/2}(x,\bar x)\; T_{-1/2}(y,\bar y)\,\rangle\;.
\end{aligned}
$$

Dies führt auf die logarithmische Ableitung

$$
\begin{aligned}
&\partial_w \log\langle\, V_{p_1}(w,\bar w)\; V_{p_2}(v,\bar v)\; T_{1/2}(x,\bar x)\; T_{-1/2}(y,\bar y)\,\rangle = \\
&\quad = \frac{-p_1^2}{2}\left(\frac{1}{w-x}+\frac{1}{w-y}\right) + \frac{p_1 p_2}{w-v}\,\frac{(v-x)^{1/2}(v-y)^{1/2}}{(w-x)^{1/2}(w-y)^{1/2}}\;.
\end{aligned}
$$

Zusammen mit den analogen Resultaten für die Ableitungen nach v, $\bar w$ und $\bar v$ erhält man durch Integration

$$
\frac{\langle\, V_{p_1}(w,\bar w)\; V_{p_2}(v,\bar v)\; T_{1/2}(x,\bar x)\; T_{-1/2}(y,\bar y)\,\rangle}{\langle\, T_{1/2}(x,\bar x)\; T_{-1/2}(y,\bar y)\,\rangle} =
$$

$$
\begin{aligned}
&= c((x-y),(\bar{x}-\bar{y}))\;((w-x)(w-y))^{-p_{1l}^2/2}((v-x)(v-y))^{-p_{2l}^2/2} \\
&\quad \times((\bar{w}-\bar{x})(\bar{w}-\bar{y}))^{-p_{1r}^2/2}((\bar{v}-\bar{x})(\bar{v}-\bar{y}))^{-p_{2r}^2/2} \\
&\quad \times\left((x-y)\frac{(w-x)^{1/2}(v-y)^{1/2}+(w-y)^{1/2}(v-x)^{1/2}}{(w-x)^{1/2}(v-y)^{1/2}-(w-y)^{1/2}(v-x)^{1/2}}\right)^{-p_{1l}\cdot p_{2l}} && (2.30) \\
&\quad \times\left((\bar{x}-\bar{y})\frac{(\bar{w}-\bar{x})^{1/2}(\bar{v}-\bar{y})^{1/2}+(\bar{w}-\bar{y})^{1/2}(\bar{v}-\bar{x})^{1/2}}{(\bar{w}-\bar{x})^{1/2}(\bar{v}-\bar{y})^{1/2}-(\bar{w}-\bar{y})^{1/2}(\bar{v}-\bar{x})^{1/2}}\right)^{-p_{1r}\cdot p_{2r}} && (2.31) \\
&= c((x-y),(\bar{x}-\bar{y}))\;((w-x)(w-y))^{-p_1^2/2}((v-x)(v-y))^{-p_2^2/2} \\
&\quad \times((\bar{w}-\bar{x})(\bar{w}-\bar{y}))^{-p_{1r}^2/2}((\bar{v}-\bar{x})(\bar{v}-\bar{y}))^{-p_{2r}^2/2} \\
&\quad \times\left(\frac{((w-x)^{1/2}(v-y)^{1/2}+(w-y)^{1/2}(v-x)^{1/2})^2}{(w-v)}\right)^{-p_{1l}\cdot p_{2l}} \\
&\quad \times\left(\frac{((\bar{w}-\bar{x})^{1/2}(\bar{v}-\bar{y})^{1/2}+(\bar{w}-\bar{y})^{1/2}(\bar{v}-\bar{x})^{1/2})^2}{(\bar{w}-\bar{v})}\right)^{-p_{1r}\cdot p_{2r}} . && (2.32)
\end{aligned}
$$

Für den Fall $p_1 = p = -p_2$ ergibt sich mit der zusätzlichen Einschränkung, daß sich der Korrelator für $w \to v$ gemäß der OPE zweier Vertexoperatoren wie $(w-v)^{-p^2}$ verhalten sollte, für den Koeffizienten ein Wert von

$$c_-((x-y),(\bar{x}-\bar{y})) = 4^{-p_r^2-p_l^2} .$$

Den zweiten für uns relevanten Fall $p_1 = p = p_2$ bestimmt man durch Fortsetzung der Korrelations-Funktion auf der zweiblättrigen Riemannschen Fläche zu

$$c_+((x-y),(\bar{x}-\bar{y})) = 4^{-p_r^2-p_l^2}\;(x-y)^{2p_l^2}\;(\bar{x}-\bar{y})^{2p_r^2} .$$

Betrachten wir nun das Monodromieverhalten dieser Korrelationsfunktionen nochmal genauer. So sollte, entsprechend der Monodromie des Koordinatenfeldes $X(z,\bar{z})$, für den Vertexoperator $V_i(z,\bar{z})$ bei einem Weg um eines der Twistfelder das Vorzeichen der Ladung vertauscht werden. Betrachtet man nun (2.31), so führt die Monodromie von w um x gerade zur Transformation $p_1 \to -p_1$, analog für die anderen Koordinaten. Dabei ist zu berücksichtigen, daß das Ladungsgitter gerade ist und damit

$$\frac{p_l^2-p_r^2}{2} \in \mathbb{Z} .$$

Mit ähnlichem Ansatz kommen [HV87] zu einem entsprechenden Ergebnis, basierend auf Rechnungen zu Off-Shell String-Amplituden in [SW74], [CF75] und [Gre76], jedoch ohne Berücksichtigung des korrekten Nullmodenanteils. Dieser wird ausführlich in [EJLM92] und [Jun92] mit Hilfe des Operatorformalismus diskutiert, zusammen mit den Kozykel-Operatoren im getwisteten Sektor. Der in 2.4.3 beschriebene allgemeinere Ansatz von [DFMS87] führt in diesem Fall nur auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in z und w, deren Lösung nicht die Abhängigkeit von ausschließlich von einer der beiden Variablen abhängigen Faktoren klären kann; gerade diese Faktoren bestimmen aber das richtige Verzweigungsverhalten dieses Korrelators.

Kapitel 3

Deformationen von Orbifolds

3.1 Deformationen konformer Feldtheorien

Betrachtet man den Raum der konformen Feldtheorien mit fester zentraler Erweiterung, so stellt man fest, daß man für $c \geq 1$ in diesem Raum zumeist ein oder mehrere Kontinua von konformen Theorien findet. Unter einem Kontinuum konformer Feldtheorien wollen wir dabei verstehen, daß die die Theorie bestimmenden Größen, die konformen Gewichte der Felder und die Koeffizienten der OPE's, sich in Abhängigkeit entsprechender Parameter kontinuierlich verändern [DVV87]. Somit sollte es möglich sein, innerhalb dieser Kontinua, ausgehend von einer bestimmten konformen Feldtheorie, das Verhalten der Theorien in unmittelbarer Nähe mittels Störungstheorie beschreiben zu können. In dieser kurzen Einführung folgen wir den grundlegenden Ideen von Kadanoff [Kad78] [KB79] sowie ihrer Weiterführung und Verfeinerung in [Car87], [DVV87] und [Wen00].

Obwohl bisher noch keine präzise mathematische Definition konformer Störungstheorie vorliegt, ergibt sich gemäß Kadanoff [Kad78] auf der Gundlage der Wirkungsfunktional-Beschreibung der konformen Feldtheorie ein äußerst praktikabler Mechanismus. In diesem Ansatz wird der Wirkung ein weiterer Term

$$\delta\,\mathrm{S} = \sum_i g_i \int \mathrm{d}^2 z\; O_i(z,\bar{z}) \tag{3.1}$$

als Störung hinzugefügt. Hierbei sind die $O_i(z,\bar{z})$ die Felder der Deformation, die g_i die Parameter der Störung. Der Punkt $g_i = 0\;\forall\; i$ im Parameterraum bezeichnet die ursprüngliche Theorie. Die k-ten Ableitungen der Zwei- und Drei-Punkt-Funktionen bzgl. eines Parameters g_j an der Stelle $g_i = 0\;\forall\; i$ liefern dann gerade das störungstheoretische Verhalten der konformen Dimensionen bzw. der OPE-Koeffizienten bei Deformation in Richtung $O_j(z,\bar{z})$.

Um die reelle Struktur der konformen Feldtheorie bei Deformationen zu erhalten, müssen die Deformationsoperatoren $O_i(z,\bar{z})$ hermitesch sein. Eine weitere Einschränkung liefert eine Dimensionsbetrachtung von (3.1). Da in natürlichen Koordinaten die Wirkung dimensionslos ist und ein dimensionsbehafteter Störparameter die konforme Invarianz zerstören würde, müssen die Deformationsfelder $O_i(z,\bar{z})$ konforme Dimension $(h,\tilde{h}) = (1,1)$ haben. Diese Operatoren sind ein Beispiel *marginaler* Operatoren mit $h+\tilde{h} = 1$, im Gegensatz zu relevanten und irrelevanten Operatoren mit konformer Dimension $h+\tilde{h} < 2$ bzw. $h+\tilde{h} > 2$, die gerade die konforme Invarianz brechen und somit massive Theorien generieren. Nun erhalten auch marginale Operatoren die konforme Invarianz nicht notwendigerweise, sondern nur, wenn sie selber bei der Deformation marginal bleiben und nicht mit anderen marginalen Operatoren mischen. Operatoren, die diese beiden letztgenannten Bedingungen erfüllen, nennt man *exakt marginal.*

Um diese Integrabilitätsbedingungen sowie das Verhalten der konformen Dimensionen genauer zu untersuchen, wollen wir nun die Deformation der Zwei-Punkt-Funktion betrachten. Hierzu wählen wir o.B.d.A. Linearkombinationen der marginalen Operatoren und normieren diese entsprechend, so daß die Zwei-Punkt-Funktionen in der Ausgangstheorie folgende Gestalt haben

$$\langle\, O_i(z,\bar{z})\; O_j(w,\bar{w})\,\rangle = \frac{\delta_{ij}}{(z-w)^2}\;. \tag{3.2}$$

Nun ergibt sich für die Ableitung einer Zwei-Punkt-Funktion zweier Felder mit gleicher konformer Dimension $(h,\tilde{h})$ bzgl. des Parameters g_i (in der Form (2.2))

$$\frac{\partial}{\partial g_i}\,\langle\, \Phi_\alpha(x,\bar{x})\; \Phi_\beta(0,0)\,\rangle = \left(-2\frac{\partial h}{\partial g_i}\log(x) - 2\frac{\partial \tilde{h}}{\partial g_i}\log(\bar{x})\right)\,\langle\, \Phi_\alpha(x,\bar{x})\; \Phi_\beta(0,0)\,\rangle\;, \tag{3.3}$$

wobei wir die Translationsinvarianz der n-Punkt-Funktionen dazu ausnutzen, $y=0$ zu setzen. Stört man auf der anderen Seite direkt die Zwei-Punkt-Funktion als Wirkungsfunktional mit entsprechend um $\delta\,\mathrm{S}$ erweiterter Wirkung, so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial g_i}\,\langle\, \Phi_\alpha(x,\bar{x})\; \Phi_\beta(0,0)\,\rangle &= \int \mathrm{d}^2 w\;\langle\, O_i(w,\bar{w})\Phi_\alpha(x,\bar{x})\; \Phi_\beta(0,0)\,\rangle \\ &= C^{i\alpha\beta}_{III}\, x^{-2h_\alpha}\bar{x}^{-2\tilde{h}_\alpha}\int \mathrm{d}^2 w\;\frac{|\,x\,|^2}{|\,w-x\,|^2|\,w\,|^2}\;. \end{aligned}\tag{3.4}$$

Das letzte Integral muß nun z.B. durch einen Abschneideparameter ϵ regularisiert werden, d.h. die Integration läuft über das Gebiet

$$\tilde{G}_\epsilon(x) = \{w\in\mathbb{C}\mid |\,w-x\,|>\epsilon,\; |\,w\,|>\epsilon\}\;.$$

Nun kann man sich die Arbeit wesentlich erleichtern, indem man die $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{C})$-Invarianz des letzten Integrals in (3.4) ausnutzt. Unter einer $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{C})$-Transformation

$$z(z') = \frac{az'+b}{cz'+d} \qquad ad-bc=1$$

transformieren die Koordinaten und Differentiale gemäß

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{1}{|\,cz'+d\,|^4}\,\mathrm{d}^2 z' \qquad (z-z_i) = \frac{1}{cz'+d}\,\frac{1}{cz'_i+d}\,(z'-z'_i)\;. \tag{3.5}$$

Die Invarianz des Integrals folgt damit sofort, und folglich kann man mit der Transformation

$$\gamma: \quad z(z') = \frac{xz'}{z'+x}$$

0 wieder auf 0 und x auf $x' \to \infty$ abbilden. Das Integrationsgebiet tranformiert sich für $\epsilon \to 0$ zu

$$G_\epsilon(x) = \{w \in \mathbb{C} \mid \epsilon < \mid w \mid < \frac{\mid x\mid^2}{\epsilon}\} .$$

Damit erhält man für (3.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial g_i} \langle\, \Phi_\alpha(x,\bar{x})\; \Phi_\beta(0,0)\,\rangle &= C_{III}^{i\alpha\beta} x^{-2h_\alpha} \bar{x}^{-2\tilde{h}_\alpha} \int_{G_\epsilon(x)} \mathrm{d}^2 w \, \frac{1}{\mid w\mid^2} \\ &= C_{III}^{i\alpha\beta} x^{-2h_\alpha} \bar{x}^{-2\tilde{h}_\alpha}\; 2\pi \log \frac{\mid x\mid^2}{\epsilon^2} . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Die Renormierung erfolgt nun wie üblich in der Feldtheorie durch Subtraktion des für $\epsilon \to 0$ singulären Anteils. Vergleicht man die nicht-singulären Anteile von (3.3) und (3.6), so erhält man in erster Ordnung die Variation der konformen Dimension von Φ_α entlang der Störung durch O_i zu

$$\frac{\partial h}{\partial g_i} = -\pi C_{III}^{i\alpha\alpha} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\partial \tilde{h}}{\partial g_i} = -\pi C_{III}^{i\alpha\alpha} . \tag{3.7}$$

Um die Integrabilitätsbedingungen zu klären, müssen wir die Renormierung der Deformationsfelder bei dem obigen Abschneideprozeß genauer betrachten. Auch wenn wir die Deformationsfelder in (3.2) für die Ausgangstheorie bzgl. der Zwei-Punkt-Funktion „orthonormalisiert“ haben, so gibt Gleichung (3.6) für beliebige (1,1)-Felder Beiträge und kann folglich dazu führen, daß in der deformierten Theorie der exakt marginale Operator mit anderen (1,1)-Feldern mischt. Um das Abschneiden der Singularität in Gleichung (3.6) für sämtliche (1,1)-Felder zu kompensieren, ist die folgende Renormierung der Deformationsfelder notwendig [DVV87] [Wen00]

$$O_i \longmapsto O_i + g_i \pi \log \epsilon^2 \left(C_{III}^{iii}\, O_i + \sum_j C_{III}^{iij}\, O_j \right) . \tag{3.8}$$

Ein marginaler Operator O_i ist nun genau dann exakt, wenn sich seine eigene konforme Dimension nicht ändert und er nicht mit anderen $(1,1)$-Feldern O_j mischt. Gemäß Gleichung (3.7) bedeutet die erste Bedingung in erster Ordnung Störungstheorie, daß $C_{III}^{iii} = 0$, gemäß (3.8) die zweite, daß $C_{III}^{iij} = 0$ für alle anderen (1,1)-Felder O_j der Theorie.

Weiß man nun, daß die Ableitungen der konformen Dimension $\frac{\partial^l h}{\partial g_i^l}$ bis zur n-ten Ordnung verschwinden, so erhält man analog zur Gleichung (3.3)

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial g_i^{n+1}} \langle\, \Phi_\alpha(x,\bar{x})\ \Phi_\alpha(0,0)\,\rangle = \\ = \left(-2\frac{\partial^{n+1}h}{\partial g_i^{n+1}}\log(x) - 2\frac{\partial^{n+1}\tilde{h}}{\partial g_i^{n+1}}\log(\bar{x})\right) \langle\, \Phi_\alpha(x,\bar{x})\ \Phi_\beta(0,0)\,\rangle\ . \tag{3.9}$$

Induktiv kann man also folgern, daß sich die konforme Dimension eines Feldes in allen Ordnungen Störungstheorie nicht ändert, wenn die entsprechenden Integrale der konformen Störungstheorie

$$\int \mathrm{d}^2 w_1 \ldots \int \mathrm{d}^2 w_{n+1} \,\langle\, \Phi_\alpha(x,\bar{x})\ \Phi_\alpha(0,0) O_i(w_1)\ldots O_i(w_{n+1})\,\rangle_c\ \ , \tag{3.10}$$

regularisiert durch einen Abschneideparameter ϵ, keine logarithmischen Divergenzen aufweisen. Hierbei betrachtet man nur den zusammenhängenden Anteil des Korrelators (gekennzeichnet durch den Index c), da die nicht-zusammenhängenden Anteile zu polynomialen Divergenzen der Form ϵ^{-n} führen, die sich durch additive Feld-Renormierung beheben lassen und nicht zur Änderung der konformen Dimensionen beitragen. Diese Überlegungen führen zu folgenden notwendigen Bedingungen dafür, daß marginale Operatoren auch exakt marginal sind [Wen00]:

- die Integrale über n-Punkt-Funktionen in (3.10) weisen keine logarithmischen Divergenzen auf, insbesondere gilt in erster Ordnung $C_{III}^{iii} = 0$
- $C_{III}^{iij} = 0$, d.h. der marginale Operator mischt in seiner eigenen Störung mit keinem anderen (1,1)-Feld.

Diese Bedingungen sind nicht linear. Dies hat zur Folge, daß nicht automatisch sämtliche Linearkombinationen exakt marginaler Operatoren selber wieder exakt marginal sind, auch wenn dies in den meisten bekannten Fällen der Fall ist.

3.2 Beispiel: Deformationen von Torustheorien

Als einfachstes Beispiel für derartige Deformationen betrachten wir nun zunächst konforme Feldtheorien auf dem Torus, zumal die Rechnungen in Orbifoldtheorien analog verlaufen, solange man ausschließlich ungetwistete Felder behandelt. Die marginalen Operatoren in Torustheorien sind (1,1) Kombinationen eines holomorphen und eines antiholomorphen Stromes

$$\Phi_{ij}(z,\bar{z}) = (j_i \tilde{\jmath}_j)(z,\bar{z})\ .$$

Die Aktion dieser Deformationen als Deformation des Radius bzw. des Volumens läßt sich z.B. anhand des bereits vollständig verstandenen bosonischen $c = 1$-Modells leicht zeigen [Gin88a]. Für ein generisches Modell des Torus-Zweiges mit Radius R lautet die σ-Modell Wirkung

$$S_R = \int \mathrm{d}^2z \; R \, \partial X \bar{\partial} X \; .$$

Erweitert man diese, wie im vorangegangenen Abschnitt beschrieben, um einen zum einzigen marginalen Operator $-\partial X \bar{\partial} X$ proportionalen Anteil

$$\begin{aligned} S_R \quad &\longrightarrow \quad S_R + (-\epsilon)\, R \int \mathrm{d}^2z \; (-\partial X \bar{\partial} X) \\ &= \quad \int \mathrm{d}^2z \; (1+\epsilon) \; R \, \partial X \bar{\partial} X \; , \end{aligned}$$

so erhält man gerade die Wirkung einer Theorie bei Radius $(1+\epsilon)R$.

Wir wollen nun zeigen, daß die marginalen Operatoren auch exakt marginal sind. Dazu beobachtet man, daß aufgrund des Wick-Theorems nur gerade Ordnungen Störungstheorie Beiträge zur Störung der Zwei-Punkt-Funktion zweier Ströme liefern können — die Korrelatoren für den holomorphen und den antiholomorphen Anteil faktorisieren und Korrelatoren einer ungeraden Anzahl von holomorphen oder antiholomorphen Felder verschwinden gemäß Wick-Theorem. Das Verschwinden der zweiten Ordnung Störungstheorie läßt sich auf ein allgemeineres Argument von Cardy zurückführen [Car87]. Danach verschwindet die Störung zweiter Ordnung der Zwei-Punkt-Funktion des Operators $\Phi_{ij} \equiv \Phi$, sobald die Bedingung

$$\int \mathrm{d}^2\zeta \left(F(\zeta,\bar{\zeta}) - 1 - \frac{1}{|\,\zeta\,|^4} - \frac{1}{|\,1-\zeta\,|^4} \right) = 0 \tag{3.11}$$

für die Sl(2,$\mathbb{C}$) transformierte Vier-Punkt-Funktion

$$F(\zeta,\bar{\zeta}) = \lim_{z\to\infty} |\,z\,|^4 \; \langle\, \Phi(\zeta,\bar{\zeta}) \; \Phi(0,0) \; \Phi(1,1) \; \Phi(z,\bar{z}) \,\rangle$$

erfüllt ist. Dabei stellt der Ausdruck in Klammern in (3.11) gerade den zusammenhängenden Anteil der Vier-Punkt-Funktion dar. Die Vier-Punkt-Funktion von vier identischen (1,1) Strömen im Torusmodell berechnet sich gemäß Wick-Theorem zu

$$F(\zeta,\bar{\zeta}) = \left| 1 + \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{1-\zeta} \right|^2 \; .$$

Cardy's Bedingung entspricht folglich dem Integral

$$\int \mathrm{d}^2\zeta \; 2 \,\mathrm{Re} \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{1-\zeta} + \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1-\bar{\zeta}} \right) \; .$$

Durch Anwendung des Gaußschen Satzes und Berechnung des Hauptwertes des entstehenden Kontour-Integrals läßt sich zeigen, daß dieses Integral verschwindet. Diese

Rechnung kann sogar auf den Fall verallgemeinert werden, daß $F(\zeta,\bar{\zeta})$ für $|\zeta|< 1$ ausschließlich eine Singularität der Form $1/\zeta^2$ besitzt [Car87].

Beachtet man außerdem, daß das $c = 1$ Modell bereits vollständig gelöst und damit die exakte Marginalität der Deformation im eindimensionalen Gauß-Modell bekannt ist, so kann man die exakte Marginalität der Deformationen höherdimensionaler Torus-Modelle auf diesen Fall zurückführen [Car87].

Die konformen Dimensionen der Vertexoperatoren sind i.a. nicht konstant unter Deformationen. Schon in erster Ordnung Störungstheorie berechnet man für einen generischen Vertexoperator $V[p](z,\bar{z})$ mit Hilfe der OPE

$$i\partial X_i(z)\ e^{ipX(w)} \sim \frac{p_i}{z-w}\ e^{ipX(w)}$$

eine Änderung der konformen Dimension von [DVV87]

$$\frac{\partial h}{\partial g_{ij}} = -\pi p_{l,i} p_{r,j} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\partial \tilde{h}}{\partial g_{ij}} = -\pi p_{l,i} p_{r,j}\ .$$

Diese verschwinden nur für holomorphe (bzw. antiholomorphe) Vertexoperatoren, da dann die Deformation auf der antiholomorphen Seite die Eins-Punkt-Funktion eines Stromes enthält. In diesem Falle führt aber die zweite Ordnung Störungstheorie zu nicht-verschwindenden Beiträgen. Dies kann man z.B. am $c = 1$ Modell sehen, in dem die Deformation den Radius des Torus parametrisiert. Die Ladungen der Vertexoperatoren von der Form $p_l^{em}, p_r^{em} = \frac{1}{\sqrt{2}}(mR \pm \frac{e}{R})$ ermöglichen die Existenz von holomorphen Vertexoperatoren für rationales R^2. Die zweite Ordnung Störungstheorie gibt dann eine Variation der konformen Dimension von [Wen00]

$$\frac{\partial^2 h}{\partial g^2} = \pi (p_l^{em})^2 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial g^2} = \pi (p_l^{em})^2\ .$$

Holomorphe Vertexoperatoren in der Ursprungstheorie sind folglich in generischen Theorien nicht mehr holomorph.

3.3 Störungen von Twistfeld-Korrelatoren

Wie bereits bemerkt, lassen sich die Rechnungen und Aussagen über Deformationen aus der Torustheorie in die Orbifoldtheorie übertragen, solange ausschließlich Felder des ungetwisteten Sektors betroffen sind. Von eigentlichem Interesse sind also die Deformationen der Twistfelder sowie Deformationen mit Twistfeldern als Deformationsoperatoren. In diesem Abschnitt werden wir zunächst zwei Beispiele betrachten, in denen Twistfeld-Korrelatoren mit Strömen gestört werden, einmal den Zwei-Twistfeld-Korrelator in zweiter Ordnung Störungstheorie sowie den Drei-Twistfeld-Korrelator in erster Ordnung. Im nächsten Abschnitt werden wir dann ein Beispiel untersuchen, in dem exakt marginale Twistfelder als Störoperatoren auftreten.

Für eine Diskussion des Twistfeld-Inhalts der in diesem Abschnitt relevanten Theorien verweisen wir auf den Anhang A.

3.3.1 Deformation des Zwei-Twistfeld-Korrelators

Zunächst wollen wir die Störung des Zwei-Twistfeld-Korrelators mit Deformationsoperatoren der Form $j_i(w)\,\tilde{\jmath}_j(\bar{w})$ betrachten. Wie in 2.4.5 gezeigt, existieren für n-Punkt-Funktionen, die zwei Twistfelder enthalten, keine nicht-trivialen klassischen Lösungen. Folglich trägt zu den Deformationen ausschließlich der Quantenanteil der entsprechenden Korrelationsfunktionen bei. Dieser gehorcht nun dem modifizierten Wick-Theorem aus 2.4.3.

In erster Ordnung verschwindet die Deformation, da sie proportional zu folgender n-Punkt-Funktion ist

$$\int \mathrm{d}^2 w \; \langle\, T_{+\frac{k}{N}}(z_1,\bar{z}_1) T_{-\frac{k}{N}}(z_2,\bar{z}_2) \; j_i(w) \tilde{\jmath}_j(\bar{w}) \,\rangle \;,$$

deren Quantenanteil sich in ihren holomorphen und antiholomorphen Anteil aufspalten läßt, die beide aufgrund des modifizierten Wick-Theorems verschwinden.

Die nicht-verschwindenden Deformationen in zweiter Ordnung sind proportional zu Termen der Form

$$\begin{aligned} D_{II}^{(1)} \;&=\; \int \mathrm{d}^2 w_1 \int \mathrm{d}^2 w_2 \; \Big[\langle\, T_{+\frac{k}{N}}(z_1,\bar{z}_1) T_{-\frac{k}{N}}(z_2,\bar{z}_2) \; j_+(w_1) \tilde{\jmath}_+(\bar{w}_1) \; j_-(w_2) \tilde{\jmath}_-(\bar{w}_2) \,\rangle \\ &\qquad - \langle\, T_{+\frac{k}{N}}(z_1,\bar{z}_1) T_{-\frac{k}{N}}(z_2,\bar{z}_2) \,\rangle \; \langle\, j_+(w_1) \tilde{\jmath}_+(\bar{w}_1) \; j_-(w_2) \tilde{\jmath}_-(\bar{w}_2) \,\rangle \Big] \;. \end{aligned}$$

Hierbei sind alle Ströme in derselben komplexen Dimension, da Terme, die im holomorphen oder im antiholomorphen Anteil Ströme verschiedener (komplexer) Dimensionen enthalten, aus denselben Gründen wie die Deformationen erster Ordnung verschwinden. Ströme verschiedener komplexer Dimensionen mischen nämlich nicht. Zudem treten auch Terme der Form

$$\begin{aligned} D_{II}^{(2)} \;&=\; \int \mathrm{d}^2 w_1 \int \mathrm{d}^2 w_2 \; \Big[\langle\, T_{+\frac{k}{N}}(z_1,\bar{z}_1) T_{-\frac{k}{N}}(z_2,\bar{z}_2) \; j_+(w_1) \tilde{\jmath}_-(\bar{w}_1) \; j_-(w_2) \tilde{\jmath}_+(\bar{w}_2) \,\rangle \\ &\qquad - \langle\, T_{+\frac{k}{N}}(z_1,\bar{z}_1) T_{-\frac{k}{N}}(z_2,\bar{z}_2) \,\rangle \; \langle\, j_+(w_1) \tilde{\jmath}_-(\bar{w}_1) \; j_-(w_2) \tilde{\jmath}_+(\bar{w}_2) \,\rangle \Big] \end{aligned}$$

auf. In diesem Fall beobachtet man aber ein unterschiedliches Verzweigungsverhalten im holomorphen und antiholomorphen Anteil, das sich nicht mit der konformen Invarianz verträgt. Betrachtet man jedoch die gruppeninvarianten Linearkombinationen der Ströme, die die eigentlichen Störoperatoren darstellen, so heben sich die Terme der Gestalt $D_{II}^{(2)}$ gerade auf.

Durch Faktorisierung in fermionischen und bosonischen Anteil sowie Einsetzen der Definition von $g_{II}(z,w;z_i,\bar{z}_i)$ erhält man für $D_{II}^{(1)}$

$$\begin{aligned} D_{II}^{(1)} \;&=\; \int \mathrm{d}^2 z \int \mathrm{d}^2 w \; \langle\, s_{+\frac{k}{N}}(z_1) \; s_{-\frac{k}{N}}(z_2) \,\rangle \; \langle\, \tilde{s}_{+\frac{k}{N}}(\bar{z}_1) \; \tilde{s}_{-\frac{k}{N}}(\bar{z}_2) \,\rangle \\ &\qquad \times \langle\, \sigma_{+\frac{k}{N}}(z_1,\bar{z}_1) \; \sigma_{-\frac{k}{N}}(z_2,\bar{z}_2) \,\rangle \; \left(g_{II}(z,w;z_i,\bar{z}_i) \; \tilde{g}_{II}(\bar{z},\bar{w};z_i,\bar{z}_i) - \frac{1}{|\, z-w\,|^4} \right) \end{aligned}$$

$$= |z_1 - z_2|^{-2\frac{k}{N}} \Bigg(|z - z_1|^{-2(1-\frac{k}{N})} |z - z_2|^{-2\frac{k}{N}} |w - z_1|^{-2\frac{k}{N}} |w - z_2|^{-2(1-\frac{k}{N})}$$
$$\times \frac{1}{|z-w|^4} \left| (1-\frac{k}{N})(z-z_1)(w-z_2) + \frac{k}{N}(z-z_2)(w-z_1) \right|^2 - \frac{1}{|z-w|^4} \Bigg) .$$

Jetzt kann man die Transformationseigenschaften der Koordinatendifferenzen und Differentiale unter einer Sl(2,$\mathbb{C}$)-Transformation (3.5) ausnutzen. Dazu verwenden wir für das innere Integral und den Integranden die Transformation

$$\zeta'(\zeta) = \frac{\zeta - z_1}{\zeta - z_2} \frac{z - z_2}{z - z_1} \qquad \text{bzw.} \qquad \zeta(\zeta') = \frac{\zeta' z_2 (z - z_1) + z_1(z_2 - z)}{\zeta'(z - z_1) + (z_2 - z)} ,$$

die $z_1 \mapsto z_1' = 0$, $z_2 \mapsto z_2' \to \infty$, $z \mapsto z' = 1$ und $w \mapsto w' \equiv \zeta$ abbildet. Damit erhält das Integral die erheblich einfachere Gestalt

$$\begin{aligned} D_{II}^{(1)} &= |z_1 - z_2|^{-2\frac{k}{N}} \int \mathrm{d}^2 z \frac{|z_1 - z_2|^2}{|z - z_1|^2 \, |z - z_2|^2} \\ & \int \mathrm{d}^2\zeta \frac{1}{|\zeta|^4} \left[|1 - \zeta|^{-2\frac{k}{N}} \left| 1 - \frac{k}{N} \zeta \right| - 1 \right] . \end{aligned} \tag{3.12}$$

Um nun das ζ-Integral in (3.12) auszurechnen, betrachten wir nur den Anteil

$$I = \int \mathrm{d}^2\zeta \, \frac{1}{|\zeta|^4} \, \frac{1}{|1-\zeta|^{2\frac{k}{N}}} \left| 1 - \frac{k}{N} \zeta \right| ,$$

entwickeln den Integranden als Potenzreihe in ζ und $\bar{\zeta}$ und separieren dann die dem nicht-zusammenhängenden Anteil entsprechende quadratische Singularität. I ist offensichtlich nur für $\zeta \to 0$ singulär, das singuläre Verhalten des Integranden an $\zeta = 1$ wird durch die Integration aufgehoben. Nichtsdestotrotz ist eine Potenzreihenentwicklung des Integranden nur in den beiden Bereichen $(0,\alpha)$ und $(1/\alpha,\infty)$, $\alpha < 1$ definiert. Folglich muß das Integral in die beiden Bereiche $\epsilon \leq |\zeta| \leq \alpha$ und $|\zeta| \geq 1/\alpha$ aufgespalten werden; für die integrierten Potenzreihen existiert dann der Grenzwert $\alpha \to 1$.

Für $\epsilon \leq |\zeta| \leq \alpha$ liefern die Entwicklungen

$$\begin{aligned} \left| 1 - \frac{k}{N}\zeta \right|^2 &= 1 - \frac{k}{N}(\zeta + \bar{\zeta}) + \left(\frac{k}{N}\right)^2 |\zeta|^2 \\ (1-\zeta)^{-\frac{k}{N}} &= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-\frac{k}{N}}{m} (-\zeta)^m \\ (1-\bar{\zeta})^{-\frac{k}{N}} &= \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-\frac{k}{N}}{m} (-\bar{\zeta})^m \end{aligned} \tag{3.13}$$

das folgende Integral

$$I_{<1} = \lim_{\substack{\alpha\to 1 \\ \epsilon \to 0}} \int_{\epsilon \leq |\zeta| \leq \alpha} \mathrm{d}^2\zeta \, \frac{1}{|\zeta|^4} \left[\left(1 + \left(\frac{k}{N}\right)^2 |\zeta|^2 \right) \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-\frac{k}{N}}{m}^2 |\zeta|^{2m} \right.$$

$$+\,2\,\frac{k}{N}\,\sum_{m=1}^{\infty}\binom{-\frac{k}{N}}{m-1}\binom{-\frac{k}{N}}{m}\,|\,\zeta\,|^{2m}\Bigg]\;.$$

Hierbei wurde bereits berücksichtigt, daß ausschließlich Summanden mit gleicher Anzahl von ζ und $\bar{\zeta}$ Faktoren bei Integration über ein radiales Gebiet der komplexen Ebene nicht verschwinden. Nun ergibt der Übergang zu Radialkoordinaten

$$\begin{aligned}
I_{<1} &= 2\pi\int_{\epsilon\to 0}^{\alpha\to 1}\mathrm{d}r\,\frac{1}{r^3}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\frac{k}{N}}{m}^2 r^{2m}+\left(\frac{k}{N}\right)^2\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\frac{k}{N}}{m}^2 r^{2m+2}\right.\\
&\quad\left.+\,2\,\frac{k}{N}\,\sum_{m=1}^{\infty}\binom{-\frac{k}{N}}{m-1}\binom{-\frac{k}{N}}{m}r^{2m}\right]\\
&= \frac{\pi}{\epsilon^2}-\pi+\frac{\pi}{m}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\binom{-\frac{k}{N}}{m+1}^2+\left(\frac{k}{N}\right)^2\binom{-\frac{k}{N}}{m}^2\right.\\
&\quad\left.+2\frac{k}{N}\binom{-\frac{k}{N}}{m}\binom{-\frac{k}{N}}{m+1}\right]\;.
\end{aligned}\tag{3.14}$$

Die quadratische Singularität π/ϵ^2 entspricht genau dem nicht-zusammenhängenden Anteil der Vier-Punkt-Funktion und verschwindet folglich durch Subtraktion jenes Anteils. Die bei der Integration auftretenden logarithmischen Divergenzen heben sich gerade auf.

Für $|\,\zeta\,|\geq 1/\alpha$ führt die Transformation $z=1/\zeta$ auf das Integral

$$I_{>1} = \lim_{\alpha\to 1}\int_{0\leq|z|\leq\alpha}\mathrm{d}^2z\,|\,z\,|^{-2(1-\frac{k}{N})}|\,1-z\,|^{-2\frac{k}{N}}|\,z-\frac{k}{N}\,|^2\;.$$

Zu (3.13) analoge Entwicklungen liefern das Integral

$$\begin{aligned}
I_{>1} &= \lim_{\alpha\to 1}\int_{0\leq|\zeta|\leq\alpha}\mathrm{d}^2\zeta\;\;|\,z\,|^{-2(1-\frac{k}{N})}\left[\left(\left(\frac{k}{N}\right)^2+|\,z\,|^2\right)\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\frac{k}{N}}{m}^2|\,z\,|^{2m}\right.\\
&\quad\left.+\,2\,\frac{k}{N}\,\sum_{m=1}^{\infty}\binom{-\frac{k}{N}}{m-1}\binom{-\frac{k}{N}}{m}\,|\,z\,|^{2m}\right]\\
&= 2\pi\int_{0}^{\alpha\to 1}\mathrm{d}r\,\frac{1}{r^{-1+2\frac{k}{N}}}\left[\left(\frac{k}{N}\right)^2\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\frac{k}{N}}{m}^2 r^{2m}+\sum_{m=0}^{\infty}\binom{-\frac{k}{N}}{m}^2 r^{2m+2}\right.\\
&\quad\left.+\,2\,\frac{k}{N}\,\sum_{m=1}^{\infty}\binom{-\frac{k}{N}}{m-1}\binom{-\frac{k}{N}}{m}r^{2m}\right]\\
&= \frac{k}{N}\pi+\frac{\pi}{m+\frac{k}{N}}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(\frac{k}{N}\right)^2\binom{-\frac{k}{N}}{m}^2+\binom{-\frac{k}{N}}{m-1}^2\right.\\
&\quad\left.+2\frac{k}{N}\binom{-\frac{k}{N}}{m-1}\binom{-\frac{k}{N}}{m}\right]\;.
\end{aligned}\tag{3.15}$$

Verwendet man nun mehrmals die Identität

$$\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \ ,$$

so zeigt man nach einiger Algebra, daß die beiden Summen in (3.14) und (3.15) zusammen $\pi(1-\frac{k}{N})$ ergeben. Somit erhält man

$$I = I_{<1} + I_{>1} = \frac{\pi}{\epsilon^2} \ .$$

Da dies jedoch als nicht-zusammenhängender Anteil ohnehin subtrahiert wird, verschwindet das ζ-Integral in (3.12), und somit gibt es für $D_{II}^{(1)}$ keine logarithmischen Divergenzen in zweiter Ordnung Störungstheorie. Das bedeutet, daß in zweiter Ordnung die konformen Dimensionen der Grundzustands-Twistfelder sich nicht verändern.

Für die $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ Twistfelder der $\mathbb{Z}_2$- und $\mathbb{Z}_4$-Orbifolds von $c=6$ Torustheorien ist dies zu erwarten, da diese Grundzustands-Twistfelder gerade die Superpartner von (1,1) Deformationsfeldern sind; mit Argumenten der Supersymmetrie, die denen Dixons in [Dix87] entsprechen, läßt sich unter Verwendung der konformen Algebra die exakte Marginalität dieser Felder in allen Ordnungen zeigen. Für andere Grundzustandstwistfelder wie z.B. die in der $\mathbb{Z}_3$-Orbifold der $c=3$ Torustheorie ist dieses Ergebnis aus der konformen Feldtheorie aber keineswegs offensichtlich. Man kann sich dieses Verhalten jedoch leicht geometrisch veranschaulichen. Die gruppeninvarianten Linearkombinationen von (1,1) Strömen haben als überlebende marginale Transformationen aus der Torustheorie den Effekt, daß sie das der Orbifold zugrundeliegende Torusgitter in Volumen und/oder Form deformieren. Dieser Vorgang ändert jedoch nichts an der Gruppenstruktur und kann deshalb auch nicht die Twistfelder beeinflussen.

3.3.2 Deformation des Drei-Twistfeld-Korrelators

Im Gegensatz zum Zwei-Twistfeld-Korrelator gibt es für einen Hintergrund aus drei Twistfeldern eine nicht-triviale klassische Lösung für $j^+(z)$ und das entsprechend komplex konjugierte $\tilde{\jmath}^+(\bar{z})$. Diese liefern folglich auch einen Beitrag zur Deformation in erster Ordnung. Der Quantenanteil verschwindet jedoch wiederum in erster Ordnung aus denselben Gründen wie im Falle des Zwei-Twistfeld-Korrelators.

Der hier gestörte Korrelator tritt z.B. in der $\mathbb{Z}_3$-Orbifold der $c=3$ Torustheorie (s. Anhang A), aber auch in entsprechender Verallgemeinerung in Orbifolds der $c=9$ Torustheorien als sogenannte *Yukawa-Kopplung* auf.

Der Term erster Ordnung Störungstheorie lautet für den Drei-Twistfeld-Korrelator

$$D_{III} = \int \mathrm{d}^2 w \ \langle \, T^{f_a}_{+\frac{k}{N}}(z_1,\bar{z}_1) T^{f_b}_{+\frac{l}{N}}(z_2,\bar{z}_2) T^{f_c}_{-\frac{k}{N}-\frac{l}{N}}(z_3,\bar{z}_3) \ j_i(w)\tilde{\jmath}_j(\bar{w}) \, \rangle \ .$$

Unter Verwendung der in diesem Falle einzigen klassischen Lösung $\omega^1_{k,l,-k-l}(z,z_i)$ aus (2.17) und des Drei-Twistfeld-Korrelators $K^{kl}_{III,f_af_bf_c}(z_i,\bar{z}_i)$ aus 2.4.5 erhält man

$$D_{III} \ = \ \frac{1}{2} K^{kl}_{III,f_af_bf_c}(z_i,\bar{z}_i) \ \ |b|^2$$

$$\int \mathrm{d}^2 w \;\; |w - z_1|^{-2(1-\frac{k}{N})}\, |w - z_2|^{-2(1-\frac{l}{N})}\, |w - z_3|^{-2(\frac{k}{N}+\frac{l}{N})} \;\; .$$

Hierbei bezeichnet b den Koeffizienten der klassischen Lösung, den wir weiter unten aus der klassischen Monodromiegleichung (2.24) herleiten werden. Wendet man die Sl(2,$\mathbb{C}$)-Transformation an, die $z_1 \mapsto z_1' = 0$, $z_2 \mapsto z_2' = 1$ und $z_3 \mapsto z_3' \to \infty$ abbildet, so ergibt sich

$$\begin{aligned} D_{III} &= \frac{1}{2} K^{kl}_{III, f_a f_b f_c}(z_i, \bar{z}_i) \;\; |b|^2 \, |z_1 - z_2|^{2(\frac{k}{N}+\frac{l}{N}-1)}\, |z_1 - z_3|^{-2\frac{l}{N}}\, |z_2 - z_3|^{-2\frac{k}{N}} \\ &\quad \int \mathrm{d}^2 w \;\; |w|^{-2(1-\frac{k}{N})}\, |w - 1|^{-2(1-\frac{l}{N})} \;\; . \end{aligned} \tag{3.16}$$

Um das Integral auszurechnen, schreibt man es in Euklidischen Koordinaten aus, wendet den verallgemeinerten Feynman-Trick (s. z.B. [PS95])

$$\frac{1}{a^{t+1}\, b^{s+1}} = \frac{\Gamma(t+s+2)}{\Gamma(t+1)\,\Gamma(s+1)} \int_0^1 \mathrm{d}v \; \frac{v^t \; (1-v)^s}{[av + b(1-v)]^{t+s+2}}$$

an und erhält

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}w_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}w_2 \; (w_1^2 + w_2^2)^{-(1-\frac{k}{N})} \; ((w_1 - 1)^2 + w_2^2)^{-(1-\frac{l}{N})} = \\ &\quad = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}w_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}w_2 \; \frac{\Gamma(-\frac{l}{N} - \frac{k}{N} + 2)}{\Gamma(-\frac{l}{N}+1)\,\Gamma(-\frac{k}{N}+1)} \\ &\quad\quad \times \int_0^1 \mathrm{d}v \; \frac{v^{-\frac{l}{N}} \; (1-v)^{-\frac{k}{N}}}{[((w_1-1)^2 + w_2^2)v + (w_1^2 + w_2^2)(1-v)]^{-\frac{l}{N}-\frac{k}{N}+2}} \; . \end{aligned}$$

Die Anwendung der folgenden Euler-Beta-Funktions-Identität (s. z.B. [Ryd85])

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}s \; \frac{s^{\beta}}{(s^2 + M^2)^{\alpha}} = \frac{\Gamma(\frac{1+\beta}{2})\;\Gamma(\alpha - \frac{1+\beta}{2})}{2(M^2)^{\alpha - \frac{1+\beta}{2}}\;\Gamma(\alpha)}$$

auf die Variable w_2 führt unter Berücksichtigung der Tatsache, daß das Integral eine symmetrische Funktion in w_2 ist, zu

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(-\frac{l}{N} - \frac{k}{N} + 2)}{\Gamma(-\frac{l}{N}+1)\,\Gamma(-\frac{k}{N}+1)} \int_0^1 \mathrm{d}v \; v^{-\frac{l}{N}} \; (1-v)^{-\frac{k}{N}} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}w_1 \; \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\;\Gamma(-\frac{l}{N} - \frac{k}{N} + 3/2)}{((w_1 - v)^2 + v - v^2)^{-\frac{l}{N}-\frac{k}{N}+3/2}\;\Gamma(-\frac{l}{N} - \frac{k}{N} + 2)} \; . \end{aligned}$$

Nach einer Koordinatentransformation $\xi = w_1 - v$ ergibt eine erneute Anwendung der Euler-Beta-Funktions-Identität, diesmal auf die Variable ξ,

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})^2\;\Gamma(-\frac{l}{N} - \frac{k}{N} + 1)}{\Gamma(-\frac{l}{N}+1)\,\Gamma(-\frac{k}{N}+1)} \int_0^1 \mathrm{d}v \; v^{-(1-\frac{k}{N})} \; (1-v)^{-(1-\frac{l}{N})} \; .$$

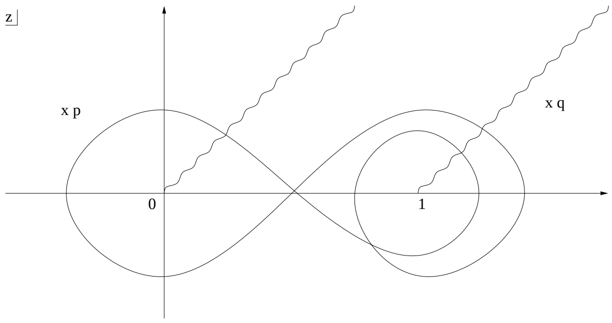

Abbildung 3.1: Basiszykel auf der Riemannschen Fläche mit Verzweigungspunkten an 0, 1 und ∞, für $p = 1$ und $q = 2$

Das Integral in diesem Ausdruck ist Eulers Beta Funktion (s. z.B. [AS65])

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 \mathrm{d}t \; t^{\alpha-1} \; (1-t)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \; .$$

Damit ergibt sich das Integral in (3.16) zu

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2})^2 \; \Gamma(-\frac{l}{N} - \frac{k}{N} + 1) \; \Gamma(\frac{k}{N}) \; \Gamma(\frac{l}{N})}{\Gamma(-\frac{l}{N} + 1) \, \Gamma(-\frac{k}{N} + 1) \; \Gamma(\frac{k}{N} + \frac{l}{N})} = \frac{\sin(\frac{k}{N}\pi) \; \sin(\frac{l}{N}\pi)}{\sin((\frac{k}{N} + \frac{l}{N})\pi)} \; \frac{\Gamma(\frac{k}{N})^2 \; \Gamma(\frac{l}{N})^2}{\Gamma(\frac{k}{N} + \frac{l}{N})^2} \; ,$$

wobei die letzte Umformung die Euler-Beta-Funktions-Identität [BS79]

$$B(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha) \; \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi \, \alpha)}$$

und $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \pi$ verwendet. Nun bleibt noch die Bestimmung des Koeffizienten b. Die klassische Monodromiegleichung lautet für diesen Fall

$$\begin{aligned} v_a &= b \oint_\gamma \mathrm{d}z \; \omega_{k,l,-k-l}(z_i, \bar{z}_i) \\ &= b \oint_\gamma \mathrm{d}z \; (z - z_1)^{-(1-\frac{k}{N})} \; (z - z_2)^{-(1-\frac{l}{N})} \; (z - z_3)^{-\frac{k}{N} - \frac{l}{N})} \\ &= (z_3 - z_2)^{-\frac{k}{N}} \; (z_3 - z_1)^{-\frac{l}{N}} \; (z_2 - z_1)^{\frac{k}{N} + \frac{l}{N} - 1} \; b \oint_\gamma \mathrm{d}\zeta \; \zeta^{-(1-\frac{k}{N})} \; (\zeta - 1)^{-(1-\frac{l}{N})} \; , \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt dieselbe Sl(2,$\mathbb{C}$)-Transformation wie in (3.16) verwendet. Den nicht-trivialen Zykel γ kann man nun wie in Abbildung 3.1 parametrisieren, wobei die ganzen Zahlen p und q die Windungszahlen angeben, die dafür sorgen, daß der Zykel wieder auf demselben Blatt zusammengeführt wird, und die damit gemäß $pk = ql \neq 0 \pmod N$ zu wählen sind. So läßt sich die Kontour-Integration in zwei um einen Phasenfaktor verschobene Integrationen zwischen den Koordinaten der Twistfelder umschreiben — die Kreise um die Twistfelder selber lassen sich zusammenziehen und liefern folglich keinen Beitrag. Man erhält unter Verwendung der Eulerschen Beta Funktion

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \mathrm{d}\zeta\, \zeta^{-(1-\frac{k}{N})}\,(\zeta-1)^{-(1-\frac{l}{N})} &= (1-e^{-2\pi i p\frac{k}{N}})\int_0^1 \mathrm{d}t\, t^{-(1-\frac{k}{N})}\,(1-t)^{-(1-\frac{l}{N})}\,e^{-2\pi i\frac{l}{N}} \\ &= 2\,i\,e^{-\pi i(p\frac{k}{N}+\frac{l}{N})}\sin\left(\pi p\frac{k}{N}\right)\frac{\Gamma(\frac{k}{N})\,\Gamma(\frac{l}{N})}{\Gamma(\frac{k}{N}+\frac{l}{N})}\,.\end{aligned}$$

Die vollständige Störung in erster Ordnung (3.16) lautet nun

$$D_{III} = \frac{1}{8}\,C^{kl}_{f_a f_b f_c}\,|v_a|^2\,\frac{\sin(\frac{k}{N}\pi)\,\sin(\frac{l}{N}\pi)}{\sin((\frac{k}{N}+\frac{l}{N})\pi)\sin(p\frac{k}{N}\pi)}\,|z_1-z_3|^{-2\frac{k}{N}}\,|z_2-z_3|^{-2\frac{l}{N}}\;.$$

Das w-Integral in (3.16) läßt sich alternativ auch mit den Kontour-Argumenten in [KLT86] lösen. Es ist als *Virasoro-Shapiro-Amplitude* bekannt (s. z.B. [Pol98]).

Yukawa-Kopplungen auf allgemeinen Orbifolds werden bereits in [EJSS93], [BLS94] und [CGM93] diskutiert, jedoch nicht im Rahmen der konformen Störungstheorie. So finden [CGM93] ähnliche Ergebnisse für Calabi-Yau Yukawa Kopplungen. Dort wird jedoch die Strategie verfolgt, die Abhängigkeit der bekannten Lösung für den Drei-Twistfeld-Korrelator (2.27) vom Torusgitter durch gut gewählte Moduli zu parametrisieren. Dies liefert eine Parametrisierung der Orbifold-Untervarietät des Modulraums, läßt sich jedoch nicht wie die konforme Störungstheorie auf den weiteren Modulraum verallgemeinern.

3.4 Twistfeld-Störungen von Vertexoperatoren

Wir wollen nun speziell im komplex zwei-dimensionalen $\mathbb{Z}_2$-Orbifoldmodell eine Störung der Zweipunktfunktion zweier Vertexoperatoren betrachten, und zwar nicht die bereits aus den Torusmodellen bekannte Störung mit den Strömen $j(z)\tilde{\jmath}(\bar{z})$ etc., sondern Störungen mit Twistfeldern. Für das betrachtete Modell liefern uns die Twistfelder chiral primäre $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$-Felder (s. z.B. den Anhang A für eine differenziertere Betrachtung). Um mit diesen Feldern stören zu können, werden zunächst die entsprechenden hermiteschen Linearkombinationen $\frac{1}{\sqrt{2}}(T^f_{+1/2}+T^f_{-1/2})$ etc. gebildet und dann mittels beidseitiger Supersymmetrie-Transformation die zugehörigen marginalen (1,1) Felder $\frac{1}{\sqrt{2}}(S^f_{+1/2}+S^f_{-1/2})$ erzeugt. Nun ist es jedoch einfacher, die Supersymmetrie-Transformation nicht direkt auf den Twistfeldern auszurechnen, sondern sie durch geschickte Kontourargumentation auf die jeweiligen anderen Felder wirken zu lassen. Zu berücksichtigen bleibt noch, daß nur die symmetrischen Linearkombinationen der Vertexoperatoren

$$V_p = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(V^t_p + V^t_{-p}\right)$$

die $\mathbb{Z}_2$ Orbifold-Konstruktion überleben. Hierbei bezeichnet V^t_p den entsprechenden Vertexoperator der ursprünglichen Torustheorie.

3.4.1 Der Korrelator

Wir berechnen zunächst den folgenden Korrelator

$$\begin{aligned}
&\langle\, V_p(z,\bar z)\; V_{-p}(w,\bar w)\; S_{+1/2}(x,\bar x)\; S_{-1/2}(y,\bar y)\,\rangle = \\
&\quad = \;\; \Big\langle\, V_p(z,\bar z)\; V_{-p}(w,\bar w)\; \Big(\oint_x \mathrm{d}\xi\; G^-(\xi) \oint_{\bar x} \mathrm{d}\bar\xi\; \tilde G^-(\bar\xi)\; T_{+1/2}(x,\bar x)\,\Big) \\
&\qquad \Big(\oint_y \mathrm{d}\eta\; G^+(\eta) \oint_{\bar y} \mathrm{d}\bar\eta\; \tilde G^+(\bar\eta)\; T_{-1/2}(y,\bar y)\Big)\,\Big\rangle\,. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Da für einen Korrelator mit zwei Twistfeldern der holomorphe und antiholomorphe Anteil des Korrelators faktorisieren und die Kontour-Argumentation für beide Anteile genauso und unabhängig voneinander abläuft, konzentrieren wir uns nun ausschließlich auf den holomorphen Anteil. Da die fermionischen Superströme G^- und G^+ im Unendlichen wie $1/z^3$ abfallen, kann man eine solche Kontour statt um eines der Twistfelder um sämtliche anderen Operatoren ziehen, ohne einen Beitrag im Unendlichen zu erhalten. Dieses „Umstülpen" der Kontour liefert jedoch ein negatives Vorzeichen. Berücksichtigt man noch die Tatsachen, daß eine Vertauschung zweier fermionischer Felder wie $G^\pm$ ein negatives Vorzeichen liefert und daß die OPE von $G^+(\eta)$ mit $T_{+1/2}(x)$ als chiral-chiral primärem Feld nur endliche Beiträge in $(\eta - x)$ produziert, analog für $G^-(\eta)$ und $T_{-1/2}(x)$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\Big\langle\, V_p(z)\; V_{-p}(w)\; \Big(\oint_x \mathrm{d}\xi\; G^-(\xi)\; T_{+1/2}(x)\Big)\; \Big(\oint_y \mathrm{d}\eta\; G^+(\eta)\; T_{-1/2}(y)\Big)\,\Big\rangle = \\
&= \;\; \frac{1}{2}\Big[\Big\langle\, \Big(\Big(\oint_z \mathrm{d}\xi\; G^-(\xi)\; \oint_z \mathrm{d}\eta\; G^+(\eta) - \oint_z \mathrm{d}\eta\; G^+(\eta)\; \oint_z \mathrm{d}\xi\; G^-(\xi)\Big)\, V_p(z)\Big) \\
&\qquad V_{-p}(w)\; T_{+1/2}(x)\; T_{-1/2}(y)\,\Big\rangle \\
&\qquad +\Big\langle\, \Big(V_p(z)\, \Big(\oint_w \mathrm{d}\xi\; G^-(\xi)\; \oint_w \mathrm{d}\eta\; G^+(\eta) - \oint_w \mathrm{d}\eta\; G^+(\eta)\; \oint_w \mathrm{d}\xi\; G^-(\xi)\Big)\, V_{-p}(w)\,\Big) \\
&\qquad T_{+1/2}(x)\; T_{-1/2}(y)\,\Big\rangle \\
&\qquad +\Big\langle\, V_p(z)\; V_{-p}(w)\; \Big(\oint_x \mathrm{d}\eta\; G^+(\eta)\; \oint_x \mathrm{d}\xi\; G^-(\xi) T_{+1/2}(x)\Big)\; T_{-1/2}(y)\,\Big\rangle \\
&\qquad -\Big\langle\, V_p(z)\; V_{-p}(w)\; T_{+1/2}(x)\, \Big(\oint_y \mathrm{d}\eta\; G^+(\eta)\; \oint_y \mathrm{d}\xi\; G^-(\xi)\; T_{-1/2}(y)\Big)\,\Big\rangle \\
&\qquad +2\,\Big\langle\, \Big(\oint_z \mathrm{d}\xi\; G^-(\xi) V_p(z)\Big)\, \Big(\oint_w \mathrm{d}\eta\; G^+(\eta)\; V_{-p}(w)\,\Big)\; T_{+1/2}(x)\; T_{-1/2}(y)\,\Big\rangle \\
&\qquad -2\,\Big\langle\, \Big(\oint_z \mathrm{d}\eta\; G^+(\eta) V_p(z)\Big)\, \Big(\oint_w \mathrm{d}\xi\; G^-(\xi)\; V_{-p}(w)\,\Big)\; T_{+1/2}(x)\; T_{-1/2}(y)\,\Big\rangle\Big]\,. \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Zur Berechnung des ersten und zweiten Summanden in (3.18) setzen wir die explizite

Form von $G^\pm$ (2.7) ein und erhalten (z.B. für den allerersten Beitrag)

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left(\oint_z \mathrm{d}\xi\; G^-(\xi)\; \oint_z \mathrm{d}\eta\; G^+(\eta) V_p(z)\right)\; V_{-p}(w)\; T_{+1/2}(x)\; T_{-1/2}(y)\right\rangle = \\
&= \left\langle \left(\oint_z \mathrm{d}\xi\; G^-(\xi)\; \sqrt{2}\sum_{i=1}^{2} p_-^{(i)}\; :\; \psi_+^{(i)} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(V_p^t - V_{-p}^t\right) : (z)\right)\right. \\
&\qquad \left. V_{-p}(w)\; T_{+1/2}(x)\; T_{-1/2}(y)\right\rangle \\
&= \left\langle \left(2\sum_{ij}^{2} p_-^{(i)}\; \frac{1}{\sqrt{2}} : (j_1^{(j)} + i j_2^{(j)}) \frac{1}{\sqrt{2}}\left(V_p^t - V_{-p}^t\right) : (z)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. +2\sum_{ij}^{2} p_+^{(j)} p_-^{(i)}\; : \psi_-^{(j)} \psi_+^{(i)} V_p : (z)\right)\; V_{-p}(w)\; T_{+1/2}(x)\; T_{-1/2}(y)\right\rangle \\
&= \left\langle \left(\partial_z V_p(z) + \sum_{i}^{2}\; : i\left(p_1^{(i)} j_2^{(i)} - p_2^{(i)} j_1^{(i)}\right) \frac{1}{\sqrt{2}}\left(V_p^t - V_{-p}^t\right) : (z)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. +p^2\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{z-x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{z-y}\right)\; V_p(z)\right)\; V_{-p}(w)\; T_{+1/2}(x)\; T_{-1/2}(y)\right\rangle . \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Der Ableitungsterm hebt sich gegen den analogen Term des Ausdrucks mit vertauschten Strömen auf; der zweite Term verschwindet sofort, wenn man das normalgeordnete Produkt der Ströme mit dem Vertexoperator ausführt, da die Ströme j_a dabei gerade die entsprechenden Ladungen p_a produzieren. Der dritte Term ist der entscheidende, da er sich aufgrund seines fermionischen Charakters gerade nicht gegen den entsprechenden des Ausdrucks mit vertauschten Strömen aufhebt. Aufgrund von U(1)-Ladungserhaltung tragen nur die Summanden mit $i = j$ bei. Den Ausdruck in (3.19) findet man dann durch Betrachtung des fermionischen Anteils im Korrelator für die relevante Dimension i

$$\begin{aligned}
&\langle : \psi_-^{(i)}(z)\; \psi_+^{(i)}(z) :\; s_{+1/2}^{(i)}(x)\; s_{-1/2}^{(i)}(y)\rangle = \\
&= \lim_{w\to z}\left[\langle : \psi_-^{(i)}(z)\psi_+^{(i)}(z) :\; s_{+1/2}^{(i)}(x)\; s_{-1/2}^{(i)}(y)\rangle - \frac{(x-y)^{-1/4}}{w-z}\right] \\
&= \lim_{w\to z}\left[(w-z)^{-1}\frac{(w-y)^{1/2}(z-x)^{1/2}}{(w-x)^{1/2}(z-y)^{1/2}}(x-y)^{-1/4} - \frac{(x-y)^{-1/4}}{w-z}\right] \\
&= \left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{z-x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{z-y}\right)(x-y)^{-1/4}\; .
\end{aligned}$$

Analog berechnet man die anderen Beiträge und erhält insgesamt für den ersten und zweiten Summanden in (3.18)

$$2\;\left(-\frac{p^2}{2}\,\frac{1}{z-x} + \frac{p^2}{2}\,\frac{1}{z-y} - \frac{p^2}{2}\,\frac{1}{w-x} + \frac{p^2}{2}\,\frac{1}{w-y}\right)$$

$$\times \left\langle V_p(z)\, V_{-p}(w)\, T_{+1/2}(x)\, T_{-1/2}(y) \right\rangle . \tag{3.20}$$

Zur Berechnung des dritten und vierten Summanden von (3.18) nutzt man die chiral bzw. antichiral-primären Eigenschaften der Felder $T_{\pm,k}$ und ergänzt jeweils einen Term mit vertauschter Reihenfolge der Kontouren, aber gleichem Vorzeichen; die innere Kontour verschwindet nämlich aufgrund der chiralen Eigenschaften. Die übliche Kontourverschiebung (s. z.B. (2.1), [Pol98], [Gab00]) führt dann zusammen mit der OPE (2.3) der beiden Superströme auf die folgende Rechnung (als Beispiel für den ersten Beitrag)

$$\begin{aligned}
&\Bigg\langle V_p(z)\, V_{-p}(w) \Bigg(\Bigg(\oint_x \mathrm{d}\eta\, G^+(\eta) \oint_x \mathrm{d}\xi\, G^-(\xi) \\
&+ \oint_x \mathrm{d}\xi\, G^-(\xi) \oint_x \mathrm{d}\eta\, G^+(\eta)\Bigg)\, T_{+1/2}(x)\Bigg)\, T_{-1/2}(y) \Bigg\rangle \\
&\quad = \left\langle V_p(z)\, V_{-p}(w) \left(\oint_x \mathrm{d}\xi \oint_\xi \mathrm{d}\eta\, G^+(\eta) G^-(\xi) T_{+1/2}(x) \right) T_{-1/2}(y) \right\rangle \\
&\quad = \left\langle V_p(z)\, V_{-p}(w) \left(\oint_x \mathrm{d}\xi\, (2\, \mathcal{T}(\xi) + \partial_\xi J(\xi)) T_{+1/2}(x) \right) T_{-1/2}(y) \right\rangle \\
&\quad = 2\, \partial_x \left\langle V_p(z)\, V_{-p}(w)\, T_{+1/2}(x)\, T_{-1/2}(y) \right\rangle .
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die Wirkung der konformen Algebra auf primäre Felder (2.4) ausgenutzt. Berechnet man nun die x-Ableitung des Korrelators (2.32) für die beiden uns interessierenden Fälle $p \equiv p_1 = -p_2$ und $p \equiv p_1 = p_2$, so erhält man

$$\begin{aligned}
&\partial_x \Bigg[4^{\mp p^2} (x-y)^{-1+(p\mp p)^2/2} ((z-x)(z-y)(w-x)(w-y))^{-p^2/2} \\
&\qquad \times \left(\frac{((z-x)^{1/2}(w-y)^{1/2} + (z-y)^{1/2}(w-x)^{1/2})^2}{(w-z)} \right)^{\pm p^2} \Bigg] = \\
&= \Bigg(\frac{\frac{(p\mp p)^2}{2} - 1}{x-y} + \frac{p^2}{2} \frac{1}{z-x} + \frac{p^2}{2} \frac{1}{w-x} \\
&\qquad \mp p^2\, \frac{(z-x)^{-1/2}(w-y)^{1/2} + (z-y)^{1/2}(w-x)^{-1/2}}{(z-x)^{1/2}(w-y)^{1/2} + (z-y)^{1/2}(w-x)^{1/2}} \Bigg) \\
&\qquad \times \left\langle V^t_p(z)\, V^t_{\mp p}(w)\, T_{+1/2}(x)\, T_{-1/2}(y) \right\rangle .
\end{aligned}$$

Setzt man dies in (3.21) ein und subtrahiert den Beitrag des vierten Summanden von (3.18), der eine entsprechende Ableitung des Korrelators nach y ergibt, so erhält man nach einiger Algebra für den dritten und vierten Summanden von (3.18) zusammen

$$2\, (\partial_x - \partial_y) \left\langle V_p(z)\, V_{-p}(w)\, T_{+1/2}(x)\, T_{-1/2}(y) \right\rangle =$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left(2\,\frac{p^2-1}{x-y}+\frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{z-x}+\frac{1}{w-x}-\frac{1}{z-y}-\frac{1}{w-y}\right)\right)\\
&\quad\times\left\langle V_p(z)\,V_{-p}(w)\,T_{+1/2}(x)\,T_{-1/2}(y)\right\rangle\\
&+ 2\left(p^2(x-y)^{-1}(z-x)^{-1/2}(z-y)^{-1/2}(w-x)^{-1/2}(w-y)^{-1/2}\Big((z-x)(w-y)\right.\\
&\quad\left.+(z-y)(w-x)\Big)+p^2(z-x)^{-1/2}(z-y)^{-1/2}(w-x)^{-1/2}(w-y)^{-1/2}(x-y)\right)\\
&\quad\times\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(V_p^t-V_{-p}^t\Big)(z)\;\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(V_p^t-V_{-p}^t\Big)(w)\;T_{+1/2}(x)\,T_{-1/2}(y)\right\rangle\,.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Nun bleiben noch die letzten beiden Summanden von (3.18) zu berechnen. Die Anwendung der expliziten Darstellung der Superströme (2.7) in unserem Modell ergibt für den ersten Beitrag

$$
\begin{aligned}
&\left\langle\left(\oint_z \mathrm{d}\xi\;G^-(\xi)V_p(z)\right)\left(\oint_w \mathrm{d}\eta\;G^+(\eta)\;V_{-p}(w)\right)\;T_{+1/2}(x)\,T_{-1/2}(y)\right\rangle=\\
&= \left\langle\left(\sum_{i=1}^{2}\sqrt{2}\left(\psi_-^{(i)}(z)p_+^{(i)}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(V_p^t-V_{-p}^t\right)(z)\right)\right.\\
&\qquad\left.\left(\sum_{j=1}^{2}\sqrt{2}\left(\psi_+^{(j)}(w)p_-^{(j)}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(V_p^t-V_{-p}^t\right)(w)\right)T_{+1/2}(x)\,T_{-1/2}(y)\right\rangle\\
&= 2\left(\sum_{i,j=1}^{2}p_+^{(i)}p_-^{(j)}\langle\,\psi_-^{(i)}(z)\psi_+^{(j)}(w)\prod_{b=1}^{2}s_{+1/2}^{(b)}(x)s_{-1/2}^{(b)}(y)\,\rangle\right)\left(\langle\,\prod_{b=1}^{2}s_{+1/2}^{(b)}(x)s_{-1/2}^{(b)}(y)\,\rangle\right)^{-1}\\
&\quad\times\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(V_p^t-V_{-p}^t\Big)(z)\;\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(V_p^t-V_{-p}^t\Big)(w)\;T_{+1/2}(x)\,T_{-1/2}(y)\right\rangle\\
&= p^2(z-w)^{-1}(z-x)^{-1/2}(z-y)^{1/2}(w-x)^{1/2}(w-y)^{-1/2}\\
&\quad\times\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(V_p^t-V_{-p}^t\Big)(z)\;\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(V_p^t-V_{-p}^t\Big)(w)\;T_{+1/2}(x)\,T_{-1/2}(y)\right\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Fügt man nun den entsprechenden Beitrag des sechsten Summanden von (3.18) hinzu, so erhält man nach ein wenig Algebra

$$
\begin{aligned}
&\left\langle\left(\oint_z \mathrm{d}\xi\;G^-(\xi)V_p(z)\right)\left(\oint_w \mathrm{d}\eta\;G^+(\eta)\;V_{-p}(w)\right)\;T_{+1/2}(x)\,T_{-1/2}(y)\right\rangle\\
&\quad-\left\langle\left(\oint_z \mathrm{d}\eta\;G^+(\eta)V_p(z)\right)\left(\oint_w \mathrm{d}\xi\;G^-(\xi)\;V_{-p}(w)\right)\;T_{+1/2}(x)\,T_{-1/2}(y)\right\rangle\\
&= -2\,p^2(z-x)^{-1/2}(z-y)^{-1/2}(w-x)^{-1/2}(w-y)^{-1/2}(x-y)\\
&\quad\times\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(V_p^t-V_{-p}^t\Big)(z)\;\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(V_p^t-V_{-p}^t\Big)(w)\;T_{+1/2}(x)\,T_{-1/2}(y)\right\rangle\,.
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

Fügt man nun die Ergebnisse von (3.20), (3.22) und (3.23) zusammen, so ergibt sich für (3.18) das Gesamtergebnis

$$\begin{aligned}\tilde{Z} &\equiv 2\,\frac{p^2-1}{x-y}\left\langle V_p(z)\,V_{-p}(w)\,T_{+1/2}(x)\,T_{-1/2}(y)\right\rangle \\ &+ p^2(x-y)^{-1}(z-x)^{-1/2}(z-y)^{-1/2}(w-x)^{-1/2}(w-y)^{-1/2} \\ &\quad \times\Big((z-x)(w-y)+(z-y)(w-x)\Big) \\ &\quad \times\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(V^t_p - V^t_{-p}\Big)(z)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(V^t_p - V^t_{-p}\Big)(w)\,T_{+1/2}(x)\,T_{-1/2}(y)\right\rangle . \qquad (3.24)\end{aligned}$$

Bisher haben wir ausschließlich den holomorphen Anteil von (3.17) betrachtet. Wie aber bereits bemerkt, läuft die Rechnung für den antiholomorphen Anteil analog, so daß das Gesamtergebnis für (3.17)

$$\begin{aligned}Z \equiv\ & \Bigg[2\,\frac{p_l^2-1}{x-y} + p_l^2(x-y)^{-1}(z-x)^{-1/2}(z-y)^{-1/2}(w-x)^{-1/2}(w-y)^{-1/2} \\ & \Big((z-x)(w-y)+(z-y)(w-x)\Big)\Bigg] \\ & \times\Bigg[2\,\frac{p_r^2-1}{x-y} + p_r^2(x-y)^{-1}(z-x)^{-1/2}(z-y)^{-1/2}(w-x)^{-1/2}(w-y)^{-1/2} \\ & \Big((z-x)(w-y)+(z-y)(w-x)\Big)\Bigg] \\ & \times\left\langle V^t_p(z,\bar{z})\,V^t_p(w,\bar{w})\,T_{+1/2}(x,\bar{x})\,T_{-1/2}(y,\bar{y})\right\rangle \\ + & \Bigg[2\,\frac{p_l^2-1}{x-y} - p_l^2(x-y)^{-1}(z-x)^{-1/2}(z-y)^{-1/2}(w-x)^{-1/2}(w-y)^{-1/2} \\ & \Big((z-x)(w-y)+(z-y)(w-x)\Big)\Bigg] \\ & \times\Bigg[2\,\frac{p_r^2-1}{x-y} - p_r^2(x-y)^{-1}(z-x)^{-1/2}(z-y)^{-1/2}(w-x)^{-1/2}(w-y)^{-1/2} \\ & \Big((z-x)(w-y)+(z-y)(w-x)\Big)\Bigg] \\ & \times\left\langle V^t_p(z,\bar{z})\,V^t_{-p}(w,\bar{w})\,T_{+1/2}(x,\bar{x})\,T_{-1/2}(y,\bar{y})\right\rangle \qquad (3.25)\end{aligned}$$

lautet.

Betrachtet man nun die entsprechenden Korrelationsfunktionen mit den eigentlichen marginalen Operatoren, den hermiteschen Linearkombinationen der angeregten Twistfelder wie $\frac{1}{\sqrt{2}}(S^f_{+1/2} + S^f_{-1/2})$, so kann wegen der Punktgruppenauswahlregel neben dem oben berechneten Korrelator nur der analoge Korrelator mit vertauschten Twists beitragen. Für diesen erhält man jedoch genau das gleiche Ergebnis.

Zur Berechnung der Störung des Zwei-Vertex-Korrelators wollen wir uns nun auf den Fall kleiner $p_l^2, p_r^2 < 1$ beschränken. Daraus folgt direkt auch $p_l^2 = p_r^2$, da auf dem geraden ganzzahligen Ladungsgitter $p_l^2 - p_r^2 \in 2\,\mathbb{Z}$ gilt. Die Störung in zweiter Ordnung ergibt sich als doppeltes Integral von (3.17) bzw. (3.25)

$$\int \mathrm{d}^2x \int \mathrm{d}^2y\ Z = (z-w)^{-p_l^2}\ (\bar z - \bar w)^{-p_r^2} \int \mathrm{d}^2x\ \frac{|\,z-w\,|^2}{|\,x-z\,|^2\ |\,x-w\,|^2}\ (V_1 + V_2)\ , \quad (3.26)$$

wobei die Integrale V_i folgendermaßen definiert sind

$$\begin{aligned} V_1 \ \equiv\ & 4^{-p_l^2-p_r^2} \int d^2\zeta\ \frac{1}{|\,1-\zeta\,|^4} \left(2\ (p_l^2-1) - p_l^2\ \zeta^{-1/2}\ (1+\zeta)\right) \\ & \left(2\ (p_r^2-1) - p_r^2\ \bar\zeta^{-1/2}\ (1+\bar\zeta)\right) \zeta^{-p_l^2/2}\ \bar\zeta^{-p_r^2/2}\ (1-\zeta)^{p_l^2}\ (1-\bar\zeta)^{p_r^2} \\ & \left(\frac{1+\zeta^{1/2}}{1-\zeta^{1/2}}\right)^{p_l^2} \left(\frac{1+\bar\zeta^{1/2}}{1-\bar\zeta^{1/2}}\right)^{p_r^2} \\ V_2 \ \equiv\ & 4^{-p_l^2-p_r^2} \int d^2\zeta\ \frac{1}{|\,1-\zeta\,|^4} \left(2\ (p_l^2-1) + p_l^2\ \zeta^{-1/2}\ (1+\zeta)\right) \\ & \left(2\ (p_r^2-1) + p_r^2\ \bar\zeta^{-1/2}\ (1+\bar\zeta)\right) \zeta^{-p_l^2/2}\ \bar\zeta^{-p_r^2/2}\ (1-\zeta)^{p_l^2}\ (1-\bar\zeta)^{p_r^2} \\ & \left(\frac{1-\zeta^{1/2}}{1+\zeta^{1/2}}\right)^{p_l^2} \left(\frac{1-\bar\zeta^{1/2}}{1+\bar\zeta^{1/2}}\right)^{p_r^2} . \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung des Integrals haben wir in (3.26) die Sl(2,$\mathbb{C}$)-Transformation

$$\zeta(\eta) = \frac{\eta - z}{\eta - w}\ \frac{x-w}{x-z}$$

verwendet, die $z \mapsto 0$, $w \mapsto w' \to \infty$, $x \mapsto 1$ und $y \mapsto \zeta$ abbildet.

Die beiden Integrale V_i lassen sich als ein einziges Integral über der zweiblättrigen Riemannschen Fläche von $t \equiv \pm\sqrt{\zeta}$ zusammenfassen. Für die nun folgende Betrachtung der Singularitäten ist jedoch die oben gewählte Darstellungsweise günstiger.

3.4.2 Singularitäten

Für kleine p_l^2, p_r^2 gibt es zwei Quellen für Singularitäten in (3.26). Zum einen mischen sowohl die beiden Vertexoperatoren $V_p^t(z,\bar z)$ und $V_{-p}^t(w,\bar w)$ für $z \to w$ als auch die beiden Twistfelder $S_{+1/2}(x,\bar x)$ und $S_{-1/2}(y,\bar y)$ für $x \to y$ mit der Identität. Dieser nicht-zusammenhängende Anteil von (3.26) ist verantwortlich für die $|\,1-\zeta\,|^{-4}$ Singularität in V_1. Auf der anderen Seite mischen die beiden Vertexoperatoren $V_p^t(z,\bar z)$ und $V_p^t(w,\bar w)$ für $z \to w$ mit dem Vertexoperator $V_{-2p}^t(z,\bar z)$, die beiden Twistfelder $S_{+1/2}(x,\bar x)$ und $S_{-1/2}(y,\bar y)$ für $x \to y$ mit dem Vertexoperator $V_{2p}^t(z,\bar z)$; dies produziert gerade die $\zeta \to 1$ Singularität in V_2. Die Mischung der beiden Twistfelder mit $V_{2p}^t(z,\bar z)$ läßt sich aus der Orbifold-Konstruktion verstehen, die im getwisteten Sektor (d.h. in Gegenwart von Twistfeldern) die Impulse p und $-p$ identifiziert und damit für die nötige Impulserhaltung in der entsprechenden OPE sorgt. Beide Singularitäten werden durch eine geeignete Renormierungsvorschrift für die Twistfelder behoben. Bei der Berechnung der Integrale entspricht diese Renormierung der Einführung eines Abschneideparameters $\epsilon \to 0$ um die Singularität und Subtraktion der singulären Terme in ϵ. Dies ist jedoch äquivalent dazu, die diese Singularitäten verursachenden Terme von Hand vom Integranden abzuziehen und ausschließlich den nicht divergenten Anteil der Integrale über die gesamte komplexe Ebene zu berechnen. Die Integration über diese abzuziehenden Terme liefert nämlich mit derselben Abschneidevorschrift wie oben ausschließlich und gerade die in ϵ singulären Terme.

Aus dem Korrelator zweier Grundzustandstwistfelder

$$\langle\, T_{+1/2}(x,\bar{x})\; T_{-1/2}(y,\bar{y})\,\rangle = |\, x-y\,|^{-2}$$

läßt sich durch „Umwälzen“ der Kontouren der beiden Superströme wie bei der Berechnung der vollen Vier-Punkt-Funktion in 3.4.1 der Korrelator der Superpartner

$$\langle\, S_{+1/2}(x,\bar{x})\; S_{-1/2}(y,\bar{y})\,\rangle = 4\;\; |\, x-y\,|^{-4}$$

berechnen. Die Rechnung erfolgt dabei analog zu (3.21). Somit ergibt sich der Korrelator des nicht-zusammenhängenden Anteils zu

$$\langle\, V^t_p(z,\bar{z})\; V^t_{-p}(w,\bar{w})\,\rangle\; \langle\, S_{+1/2}(x,\bar{x})\; S_{-1/2}(y,\bar{y})\,\rangle = 4\; (z-w)^{-p_l^2}\; (\bar{z}-\bar{w})^{-p_r^2}\;\; |\, x-y\,|^{-4}\;\; .$$

Nach einer Sl(2,$\mathbb{C}$)-Transformation wie oben erhält man das Integral zu

$$(z-w)^{-p_l^2}\; (\bar{z}-\bar{w})^{-p_r^2}\; \int \mathrm{d}^2x\; \frac{|\, z-w\,|^2}{|\, x-z\,|^2\; |\, x-w\,|^2}\; V_1^S$$

mit

$$V_1^S \equiv 4\; \int \mathrm{d}^2\zeta \frac{1}{|\, 1-\zeta\,|^4}\;.$$

V_1^S ist aber gerade die Singularität von V_1 für $\zeta \to 1$. Die Mischung mit der Identität liefert also wirklich den singulären Anteil von V_1. Das regularisierte erste Integral ergibt sich zu $V_1^S - V_1$.

Der singuläre Anteil von V_2 lautet für $p^2 \le \frac{1}{2}$

$$V_2^S \equiv 16^{-p_l^2-p_r^2}\; 4\; (2p_l^2-1)\; (2p_r^2-1)\; \int \mathrm{d}^2\zeta\; (1-\zeta)^{2p_l^2-2}\; (1-\bar{\zeta})^{2p_r^2-2}\;. \qquad (3.27)$$

Für $\frac{1}{2} < p^2 < 1$ ist V_2 sogar endlich. Wir wollen nun zeigen, daß diese Singularität tatsächlich aus Mischungen mit Vertexoperatoren der Ladung $\pm 2p$ resultiert. Dazu beobachtet man, daß der Korrelator dreier Vertexoperatoren durch konforme Invarianz gegeben ist zu

$$\begin{aligned}&\langle\, V^t_p(z,\bar{z})\; V^t_p(w,\bar{w})\; V^t_{-2p}(\xi,\bar{\xi})\,\rangle = \\ &= \;\; (z-w)^{p_l^2}\; (\bar{z}-\bar{w})^{p_r^2}\; (z-\xi)^{-2p_l^2}\; (\bar{z}-\bar{\xi})^{-2p_r^2}\; (w-\xi)^{-2p_l^2}\; (\bar{w}-\bar{\xi})^{-2p_r^2}\;. \qquad (3.28)\end{aligned}$$

Ebenfalls durch konforme Invarianz läßt sich der Korrelator zweier Grundzustands-Twistfelder mit einem Vertexoperator bestimmen zu

$$\begin{aligned}
&\langle V^t_{2p}(\xi,\bar\xi)\; T_{+1/2}(x,\bar x)\; T_{-1/2}(y,\bar y)\,\rangle = \\
&= \; C\; (x-y)^{2\,p_l^2-1}\; (\bar x-\bar y)^{2\,p_r^2-1}\; (x-\xi)^{-2\,p_l^2}\; (\bar x-\bar\xi)^{-2\,p_r^2}\; (y-\xi)^{-2\,p_l^2}\; (\bar y-\bar\xi)^{-2\,p_r^2}\;.
\end{aligned}$$

Zur Berechnung des entsprechenden Korrelators mit den Superpartnern der Twistfelder wenden wir die gleiche Methode wie in 3.4.1 an und erhalten mit analoger Rechnung für den holomorphen Anteil

$$\begin{aligned}
&\langle V^t_{2p}(\xi)\; S_{+1/2}(x)\; S_{-1/2}(y)\,\rangle = \\
&= \; \Big\langle V^t_{2p}(\xi)\; \Big(\oint_x \mathrm{d}\zeta\; G^-(\zeta)\; T_{+1/2}(x)\Big)\; \Big(\oint_y \mathrm{d}\eta\; G^+(\eta)\; T_{-1/2}(y)\Big)\; \Big\rangle \\
&= \; \frac{1}{2}\Big[\Big\langle \Big(\Big(\oint_\xi \mathrm{d}\zeta\; G^-(\zeta)\; \oint_\xi \mathrm{d}\eta\; G^+(\eta) - \oint_\xi \mathrm{d}\eta\; G^+(\eta)\; \oint_\xi \mathrm{d}\zeta\; G^-(\zeta)\;\Big) V^t_{2p}(\xi,\bar\xi)\Big) \\
&\qquad T_{+1/2}(x,\bar x)\; T_{-1/2}(y,\bar y)\,\Big\rangle \\
&\qquad + \Big\langle V^t_{2p}(\xi,\bar\xi)\; \Big(\oint_x \mathrm{d}\eta\; G^+(\eta)\; \oint_x \mathrm{d}\zeta\; G^-(\zeta)\; T_{+1/2}(x,\bar x)\Big)\; T_{-1/2}(y,\bar y)\,\Big\rangle \\
&\qquad - \Big\langle V^t_{2p}(\xi,\bar\xi)\; T_{+1/2}(x,\bar x)\; \Big(\oint_y \mathrm{d}\zeta\; G^-(\zeta)\; \oint_y \mathrm{d}\eta\; T_{-1/2}(y,\bar y)\Big)\,\Big\rangle\Big] \\
&= \; \frac{1}{2}\Big[\,2\,\Big(-2\,p_l^2\;\frac{1}{w-x} + 2\,p_l^2\;\frac{1}{w-y}\Big)\;\Big\langle V^t_{2p}(\xi,\bar\xi)\; T_{+1/2}(x,\bar x)\; T_{-1/2}(y,\bar y)\,\Big\rangle \\
&\qquad 2\,(\partial_x - \partial_y)\;\Big\langle V^t_{2p}(\xi,\bar\xi)\; T_{+1/2}(x,\bar x)\; T_{-1/2}(y,\bar y)\,\Big\rangle\Big] \\
&= \; 2\;\frac{2\,p_l^2-1}{x-y}\;\langle V^t_{2p}(\xi,\bar\xi)\; T_{+1/2}(x,\bar x)\; T_{-1/2}(y,\bar y)\,\rangle\;.
\end{aligned}$$

Der antiholomorphe Anteil wird wiederum analog berechnet. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\langle V^t_{2p}(\xi)\; S_{+1/2}(x)\; S_{-1/2}(y)\,\rangle = \\
&= \; C\; 4\; (2p_l^2-1)\; (2p_r^2-1)\; (x-y)^{2\,p_l^2-2}\; (\bar x-\bar y)^{2\,p_r^2-2}\; (x-\xi)^{-2\,p_l^2} \\
&\qquad (\bar x-\bar\xi)^{-2\,p_r^2}\; (y-\xi)^{-2\,p_l^2}\; (\bar y-\bar\xi)^{-2\,p_r^2}\;.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Auch ohne die nötige Integration über ξ durchzuführen, kann man die führende Singularität im Produkt aus (3.28) und (3.29) (nach der entsprechenden Sl(2,$\mathbb{C}$)-Transformation) als identisch mit dem singulären Anteil von V_2 (3.27) identifizieren — bis auf einen Faktor $16^{-p_l^2-p_r^2}$. Dieser Faktor legt aber gerade die offene Normierung C von (3.29) fest. Die weiteren Terme im Produkt von (3.28) und (3.29), die durch die ξ Integration bestimmt werden, liefern für $x \to y$ höhere Ordnungen in $(x-y)$ und folglich keine singulären Anteile im Integral. Für $p^2 \leq \frac{1}{2}$ lautet die vollständige Regularisierung von V_2 deshalb $V_2 - V_2^S$. Für $\frac{1}{2} < p^2 < 1$ ist keine Regularisierung notwendig.

Wie bereits bemerkt, sind diese beiden Singularitäten die einzigen für kleine p_l^2, p_r^2. Damit liefert

$$\begin{aligned} V &\equiv (V_1 - V_1^S) + (V_2 - V_2^S) && \text{für } p^2 \leq \frac{1}{2} \\ V &\equiv (V_1 - V_1^S) + V_2 && \text{für } \frac{1}{2} < p^2 < 1 \end{aligned} \tag{3.30}$$

die vollständige Regularisierung des $V_1 + V_2$ Anteils von (3.26).

Für $p_l^2 \geq 1$ bzw. $p_r^2 \geq 1$ treten auch Singularitäten in $\zeta = 0$ bzw. $\zeta \to \infty$ auf. Diese resultieren aus der Mischung von $V_p(w.\bar{w})$ und $S_{\pm,\pm}(x,\bar{x})$ mit den Grundzustands-twistfeldern $T_{\pm,\mp}(\xi,\bar{\xi})$ sowie $S_{\pm,\pm}(\xi,\bar{\xi})$ selber (Hierbei bezeichnen $T_{\pm,\mp}(\xi,\bar{\xi})$ die chiral/antichiral primären Felder der um 90° gedrehten U(1)-Ladung; vergleiche Anhang A.2). Eine Möglichkeit, diese Mischung auf Ebene der String Theorie zu verstehen, besteht in dem von [HV87] beschriebenen Prozeß, in dem auf einer $\mathbb{Z}_2$-Orbifold ein Vertexoperator mit nicht verschwindender Windungszahl einen getwisteten String von einem Fixpunkt zu einem anderen transportiert.

3.4.3 Ergebnisse

Nun sind wir in der Lage, die Störung zweiter Ordnung (3.26) für kleine $p^2 \equiv p_l^2 = p_r^2$ auszurechnen. Das erste Integral in (3.26) ist von derselben Form wie das logarithmisch divergente in (3.4) und liefert folglich analog zu (3.6) nach Einführung des Abschneideparameters ϵ

$$\int_{\substack{|x-z|>\epsilon \\ |x-w|>\epsilon}} \mathrm{d}^2x \, \frac{|\,z-w\,|^2}{|\,x-z\,|^2 \, |\,x-w\,|^2} = 2\pi \log \frac{|\,z-w\,|^2}{\epsilon^2} \, .$$

Diese logarithmischen Divergenzen entsprechen, wie in 3.1 beschrieben, der Variation der konformen Dimension des Vertexoperators $V_p(w,\bar{w})$ bei Deformation mit den obigen Twistfeldern.

Die Integrale $V_1 + V_2$ in (3.26) lassen sich nach ihrer Regularisierung in (3.30) für generisches kleines p^2 numerisch lösen. Nun sind zwar die Integrale nach der Regularisierung nicht mehr divergent, die Integranden enthalten jedoch sowohl für das regularisierte V_1 wie auch V_2 noch Divergenzen. Folglich erfordert die numerische Rechnung eine geschickte Handhabung der Singularitäten. Im Falle des regularisierten Integrals V_1 zeigt eine Entwicklung um $\zeta = 1$, daß der Integrand noch Singularitäten der Form $(1-\zeta)^{-2}$ bzw. $(1-\bar{\zeta})^{-2}$ enthält. Wir haben folglich einen Kreis um $\zeta = 1$ mit Radius $\epsilon = 0.01$ ausgeschnitten und das Integral über das Komplement berechnet. Für die ausgeschnittene Kreisscheibe liefern die ersten Glieder der oben erwähnten Entwicklung bereits eine hinreichende Näherung. Die Integration über die verbliebenen Singularitäten verschwindet, die Integration über den endlichen Anteil liefert die Abschätzung, daß der Beitrag dieser ϵ-Umgebung in der Größenordnung der numerischen Fehler von circa 10^{-6} liegt und deshalb in der Rechnung keine Rolle spielt.

Tabelle 3.1: Ergebnisse

p^2	V	p^2	V
0.00000	0.00000	0.25000	-0.71775
0.01000	-0.06111	0.30864	-0.68141
0.01562	-0.09401	0.36000	-0.58841
0.02250	-0.13281	0.40111	-0.47008
0.04000	-0.22487	0.44444	-0.29899
0.06250	-0.32982	0.49000	-0.06109
0.09000	-0.43903	0.50000	0.00000
0.11111	-0.50954	0.56250	0.46758
0.16000	-0.63164	0.64000	1.31499
0.20250	-0.69395	0.69444	2.17848

Zusätzlich zu dem gerade beschriebenen Phänomen enthält der Integrand des regularisierten V_2 noch Singularitäten der Form $|\,1-\zeta\,|^{-r}$ mit $r < 2$, so daß das Integral über ζ trotzdem endlich bleibt. Da die Berechnung mit diesen Singularitäten im Integranden jedoch sehr schlecht konditioniert ist, haben wir anstelle von V_2^S den Ausdruck

$$\tilde{V}_2^S \equiv 16^{-2p_l^2}\; 4\,(2p^2-1)^2 \int \mathrm{d}^2\zeta \;\; |\,1-\zeta\,|^{4p_l^2-4}\,|\,\zeta\,|^{-2p^2}$$

von V_2 abgezogen. Dieser Ausdruck hebt im Gegensatz zu V_2^S sämtliche Singularitäten in $|\,1-\zeta\,|$ im Integranden von V_2 auf. Zudem ist die Differenz der beiden Regularisierungsterme $\tilde{V}_2^S - V_2^S$ als *Virasoro-Shapiro-Amplitude* aus der Literatur bekannt (s. z.B. [Pol98])

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_2^S - V_2^S &= 16^{-2p^2}\; 4\,(2p^2-1)^2 \int \mathrm{d}^2\zeta \;\; |\,1-\zeta\,|^{4p^2-4} \left(|\,\zeta\,|^{-2p^2} - 1\right) \\
&= \pi \frac{\Gamma(1-p^2)^2\;\Gamma(2p^2-1)}{\Gamma(p^2)^2\;\Gamma(2-2p^2)}\;. \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

Hierbei ist V_2^S als Regularisierung von $\tilde{V}_2^S$ zu betrachten, nach dem oben beschriebenen Regularisierungsvefahren mit Abschneideparameter ϵ. Für den Fall $\frac{1}{2} < p^2 < 1$ verschwindet der Regularisierungsterm V_2^S, $\tilde{V}_2^S$ hat keine Singularität und ist folglich gleich der in diesem Falle endlichen Virasoro-Shapiro-Amplitude (3.31). Für den Fall $0 < p^2 < \frac{1}{2}$ ist das Integral $\tilde{V}_2^S$ divergent und muß durch einen Abschneideparameter ϵ regularisiert werden. Durch analytische Fortsetzung kann man wiederum aus $\tilde{V}_2^S$ die Virasoro-Shapiro-Amplitude herleiten, wobei die analytische Fortsetzung jedoch die singulären Terme in ϵ unterdrückt und damit direkt das regularisierte Integral $\tilde{V}_2^S - V_2^S$ liefert (siehe z.B. [Col84]). Dies rechtfertigt (3.31). Es bleiben noch die Fälle $p^2 = 0$, wofür das Ergebnis sofort analytisch ersichtlich ist, sowie $p^2 = 1/2$, wofür die Regularisierungsterme für V_2 aufgrund des Faktors $(2p^2-1)$ ohnehin verschwinden.

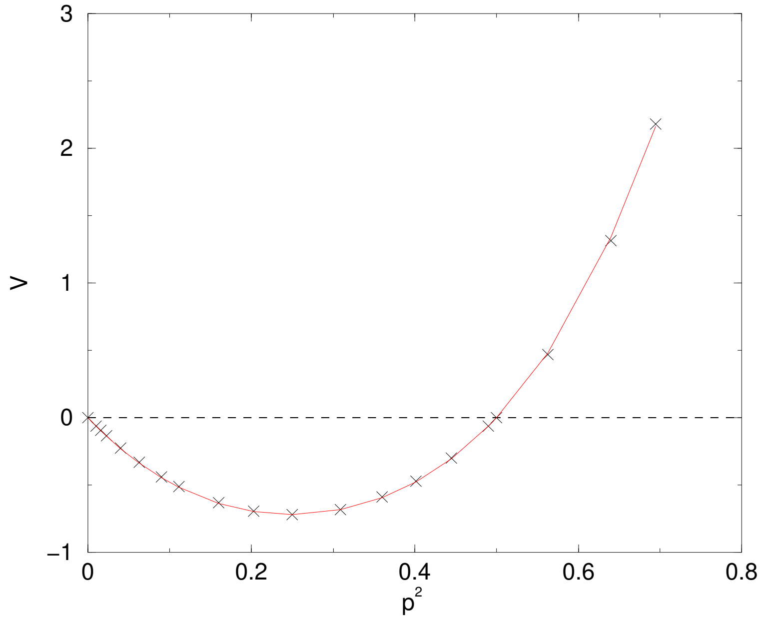

Abbildung 3.2: Graphische Darstellung der Ergebnisse

Mit dem gerade beschriebenen Verfahren haben wir nun die einzelnen Terme mit Hilfe des Programmpakets Mathematica berechnet und die in Tabelle 3.1 für verschiedene p^2 zusammengestellten Ergebnisse erhalten. In Abbildung 3.2 sind diese Ergebnisse nochmals graphisch dargestellt. Auffällig an diesem Graphen sind vor allem die Spiegelsymmetrie bzgl. der Achse $p^2 = 1/4$, wobei der Graph gerade an diesem Punkt sein Minimum erreicht, sowie der Wert $V = 0$ für $p^2 = 1/2$, der numerisch innerhalb der Rechengenauigkeit voll bestätigt wird. Die Spiegelsymmetrie wird durch den in der Abbildung gewählten Fit

$$V = a_0 + a_2 \left(p^2 - \frac{1}{4}\right)^2 + a_4 \left(p^2 - \frac{1}{4}\right)^4$$

ebenfalls voll bestätigt. Derartige Fits liefern Werte für a_0 im Bereich von -0.71 ± 0.01, also im Bereich des für $p^2 = 1/4$ berechneten Wertes, sowie für a_2 im Bereich von 10.0 ± 0.3. Besonders für $0 < p^2 < \frac{1}{2}$ scheint dieser dreiparametrige Fit das Verhalten der Funktion sehr präzise wiederzugeben. Erst für Werte mit $p^2 > 1/2$ treten kleinere Abweichungen auf und eine Beimischung höherer Ordnungen $\left(p^2 - \frac{1}{4}\right)^{2n}$ deutet sich an. Eine analytische Bestätigung dieser sehr markanten Resultate sollte sich nach dieser numerischen Analyse durchaus durchführen lassen.

Das Resultat, daß sich die konformen Dimensionen für $p^2 = 1/2$ nicht verändern, läßt sich im Rahmen der superkonformen Feldtheorie sehr gut verstehen. Die entsprechenden Vertexoperatoren haben konforme Dimension (1/4,1/4) und gehören folglich zu einem N=(4,4) supersymmetrischen Multiplet, das sich gegenüber den generischen dadurch auszeichnet, das die zugehörige Darstellung der W-Algbra nur die relative halbe Quantendimension hat. Ein kontinuierlicher Übergang zwischen Darstellungen der W-Algebra mit unterschiedlichen Quantendimensionen ist natürlich nicht möglich, und somit ist die Variation der konformen Dimension der (1/4,1/4) Felder nicht erlaubt.

3.4.4 Geometrische Interpretation

Die Rechnungen in diesem Abschnitt wurden explizit auf der $\mathbb{Z}_2$-Orbifold-Untervarietät des K3-Modulraums durchgeführt. Dabei entsprechen Deformationen mit Strömen (wie z.B. in 3.3) Deformationen innerhalb dieser Orbifold-Untervarietät. Deformationen mit Twistfeldern bedeuten jedoch, geometrisch gesehen, einen Übergang von den singulären Orbifolds zu glatten Mannigfaltigkeiten, und zwar indem die Fixpunktsingularitäten der Orbifold *aufgeblasen* werden [Asp94], [Asp96], [NW99]. In diesem Übergang haben wir die Veränderung der konformen Dimensionen von Vertexoperatoren mit $p^2 < 1$ numerisch in zweiter Ordnung Störungstheorie berechnet.

Aufgeblasene Orbifolds sind bereits vom Standpunkt der Landau-Ginzburg-Beschreibung betrachtet worden, indem den „Aufblase-Moden“ (i.e. den Twistfeldern) ein nichtverschwindender Vakuumerwartungswert zugeordnet wurde [Cve87]. Dieses Vorgehen liefert jedoch noch keine präzise Beschreibung im Rahmen der konformen Feldtheorie.

Kapitel 4

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit haben wir Störungen von Orbifolds Konformer Feldtheorien untersucht. Insbesondere haben wir zwei Beispiele von Störungen mit U(1) Strömen betrachtet, die des Zwei-Twistfeld-Korrelators bis zur zweiten Ordnung und die des Drei-Twistfeld-Korrelators in erster Ordnung. Das Verschwinden der Störung des Zwei-Twistfeld-Korrelators bestätigt die Marginalität der Twistfelder in der Orbifold-Untervarietät des K3 Modulraums in zweiter Ordnung. Zudem läßt sich das Verschwinden dieses Korrelators für allgemeinen Twist im geometrischen Bild der Deformationen gut einsehen. Die Störung des Drei-Twistfeld-Korrelators gibt die Veränderung der Yukawa-Kopplungen bei Deformationen entlang des Orbifold-Untermodulraums an.

Außerdem haben wir die Störung eines Korrelators zweier Vertexoperatoren mit marginalen $\mathbb{Z}_2$-Twistfeldern in zweiter Ordnung und für kleine $p^2 < 1$ im K3-Modulraum hergeleitet. Damit haben wir numerisch die Variation der konformen Dimensionen dieser Vertexoperatoren bei Deformation der Konformen Feldtheorie weg vom Orbifold-Untermodulraum berechnet. Diese Klasse der Deformationen ist bekannt als Aufblasen oder *Blowing-Up*.

Diese Arbeit gibt freilich nur einen kleinen Einblick in die Anwendungen der konformen Störungstheorie bei der Erforschung von Modulräumen. Viele interessante Fragen bleiben offen. So wäre die Berechnung von höheren Ordnungen in der Störungstheorie wichtig, um die Störungen integrieren zu können und damit weiter in unbekannte Bereiche von Modulräumen vorzudringen. Höhere Ordnungen lassen sich bei Störungen mit U(1)-Strömen noch relativ einfach hinschreiben, wie wir gesehen haben, wobei die Integration der Korrelatoren dann bei weitem nicht mehr so einfach ist. Bei Störungen mit Twistfeldern nimmt jedoch schon die Komplexität der Korrelatoren rapide mit wachsender Ordnung zu, alleine wegen der Instantonbeiträge.

Für unsere speziellen Rechnungen im K3-Modulraum wäre eine Betrachtung allgemeiner Twists von großem Interesse. Dazu ist die Berücksichtigung von Prim-Formen auf komplizierteren Riemannschen Flächen mit nicht-verschwindendem Geschlecht, wie sie z.B. von [HV87] eingeführt werden, notwendig.

Ein anderer Punkt ist der Grenzwert großen Volumens der K3. Da sich unsere

Rechnungen explizit im Rahmen kleiner $p^2 < 1$ bewegen, sollte sich dieser Grenzwert problemlos durchführen und mit geometrischen Rechnungen dort vergleichen lassen.

Zu guter letzt können diese Rechnungen zur Klärung der Frage beitragen, ob im K3-Modulraum so wie im Torus-Modulraum die rationalen Theorien dicht liegen. Denn die explizite Berechnung der Veränderung der konformen Dimensionen der Vertexoperatoren bei Störung mit Twistfeldern könnte darüber Aufschluß geben, wie schnell wieder — abseits der bekannten Orbifold-Theorien — zusätzliche holomorphe Felder auftreten und man so aufgrund einer erweiterten W-Algebra eine rationale Theorie vorfindet.

Anhang A

Spezielle Orbifoldtheorien

Im folgenden werden wir die wichtigsten Fakten über einige zyklische Orbifoldmodelle zusammenstellen, die in dieser Arbeit betrachtet werden. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Klärung der Gruppenaktion sowie der Zusammenstellung der jeweiligen marginalen Felder und getwisteten Grundzustände.

A.1 $\mathbb{Z}_3$-Orbifold der $c = 3$ Torustheorie

Eine $\mathbb{Z}_3$-Orbifold ist nur für einen Torus mit Parameter $\tau = e^{2\pi i/3}$ überhaupt möglich, da nur in diesem Falle die $\mathbb{Z}_3$ auf dem Torus als Symmetrietransformation operiert. Die Gruppenoperation hat dann drei Fixpunkte. Sie wirkt auf die Ströme und Fermionen gemäß

$$\begin{array}{ll} j_\pm(z) \longrightarrow e^{2\pi i/3} j_\pm(z) \qquad & \tilde{\jmath}_\pm(\bar{z}) \longrightarrow e^{-2\pi i/3} \tilde{\jmath}_\pm(\bar{z}) \\ \psi_\pm(z) \longrightarrow e^{2\pi i/3} \psi_\pm(z) \qquad & \tilde{\psi}_\pm(\bar{z}) \longrightarrow e^{-2\pi i/3} \tilde{\psi}_\pm(\bar{z}) \ . \end{array}$$

Folglich überleben von den (1,1)-Feldern lediglich $j_\pm(z)\tilde{\jmath}_\pm(\bar{z})$ die Orbifoldkonstruktion. Die Linearkombinationen, die den hermiteschen marginalen Operatoren entsprechen, lauten

$$\begin{aligned} j_+(z)\tilde{\jmath}_+(\bar{z}) + j_-(z)\tilde{\jmath}_-(\bar{z}) &= j_1(z)\tilde{\jmath}_1(\bar{z}) \\ j_+(z)\tilde{\jmath}_+(\bar{z}) - j_-(z)\tilde{\jmath}_-(\bar{z}) &= j_2(z)\tilde{\jmath}_2(\bar{z}) \ . \end{aligned}$$

Eine Betrachtung der Zustandssumme dieser $\mathbb{Z}_3$-Orbifoldtheorie liefert den vollständigen chiralen Ring [Dul00], ein $(0,0)$, ein (1/2,1/2), drei (1/6,1/6) und drei (1/3,1/3) Felder. Da die marginalen Operatoren gerade die Superpartner der (c,c) Felder mit konformer Dimension (1/2,1/2) bzw. ihrer Entsprechungen im (a,c), (c,a) und (a,a) Ring sind, liefern die getwisteten Sektoren keine neuen marginalen Operatoren.

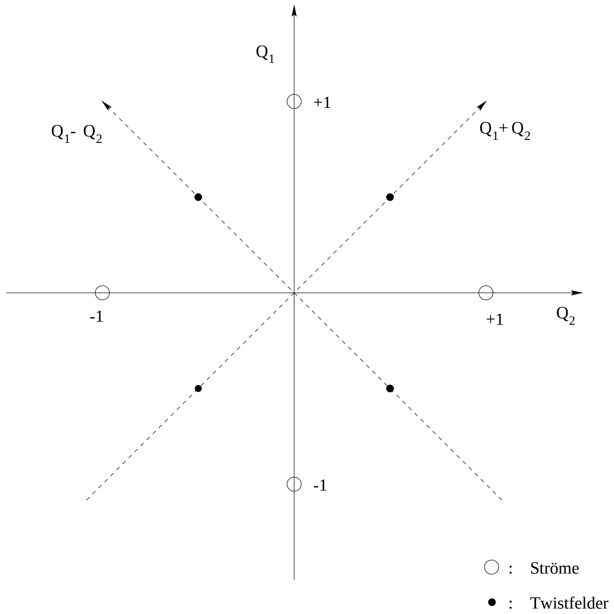

Abbildung A.1: Ebene der möglichen U(1)-Ladungen Q in der $c = 6$ Theorie

A.2 $\mathbb{Z}_2$-Orbifold der $c = 6$ Torustheorie

Eine $\mathbb{Z}_2$-Orbifold läßt sich von jeder Torustheorie jeder beliebigen Dimension bilden. Die Gruppe operiert auf allen Strömen und Fermionen einfach durch Multiplikation mit (-1). Folglich überleben zumindestens alle links-rechts-symmetrischen Kombinationen von Strömen und Fermionen, insbesondere alle (1,1) Ströme und ihre fermionischen Superpartner die Orbifoldkonstruktion. Zudem überlebt auch die Hälfte der Vertexoperatoren, und zwar alle symmetrischen Kombinationen von Vertexoperatoren entgegengesetzter Ladung. Die Gruppenaktion hat in zwei komplexen Dimensionen genau 16 verschiedene Fixpunkte.

Nun ist zu beachten, daß für superkonforme $c = 6$ Theorien die N=(2,2) Supersymmetrie zu einer N=(4,4) Supersymmetrie erweitert ist. Dies hat zur Folge, daß man den U(1)-Strom innerhalb einer SU(2) beliebig drehen und insbesondere kontinuierlich in sein Negatives überführen kann. Der U(1)-Strom ist nämlich eine beliebige (normierte) Linearkombination der U(1)-Ströme I_1, I_2 der beiden komplexen Dimensionen. Eine Unterscheidung von chiralen und antichiralen Feldern macht also nur für eine jeweils ausgewählte N=2 Unteralgebra Sinn. Zudem kann man den holomorphen U(1)-Strom beliebig gegen den antiholomorphen verdrehen. Da wir in dieser Arbeit lediglich N=(2,2) Unteralgebren ausnutzen, wählen wir ausschließlich die N=(2,2) Superalgebren, die für die chiralen Felder symmetrische Ladungen liefern. Man erhält also (c,c), (a,a), aber nicht (a,c) Felder. Nun gibt es insgesamt vier fermionische Twistfelder, so daß für genau vier ausgewählte N=(2,2) Unteralgebren je ein gegenüberliegendes Paar von Feldern ein (c,c) und ein (a,a) Feld ergeben (s. Abbildung A.1 mit den ausgewählten U(1)-Ladungen $Q_1 + Q_2$, $Q_1 - Q_2$ sowie deren Negativen). Diese vier fermionischen Twistfelder kann man mit den 16 verschiedenen bosonischen der 16 Fixpunkte zu insgesamt 64 chiral primären Feldern kombinieren. Diese ergeben 64 hermitesche Linearkombinationen, die die Superpartner von 64 exakt marginalen (1,1) Twistfeldern sind. Zusammen mit den 16 überlebenden (1,1) Strömen erhält man 80 verschiedene Moduli. Dies ist gerade die Dimension des K3-Modulraums.

A.3 $\mathbb{Z}_4$-Orbifold der $c = 6$ Torustheorie

Eine $\mathbb{Z}_4$-Orbifold läßt sich wie der $\mathbb{Z}_3$ Fall ebenfalls nur für einen speziellen Torusparameter $\tau = e^{\pi i/2}$ realisieren. Wir wollen hier die spezielle $\mathbb{Z}_4$-Orbifold betrachten, die auf beiden komplexen Dimensionen des Torus $T^2 = \mathbb{C}/\Lambda$ gegenläufig operiert

$$(z_1, z_2) \quad \longmapsto \quad (\zeta\, z_1, \zeta^{-1}\, z_2) \qquad\qquad (z_1, z_2) \in T^2 \times \tilde{T}^2 \ .$$

Für die Ströme bedeutet dies

$$\begin{array}{ll} j^I_\pm(z) \longrightarrow \pm i j^I_\pm(z) & \qquad \tilde{\jmath}^I_\pm(\bar z) \longrightarrow \mp i \tilde{\jmath}^I_\pm(\bar z) \\ j^{II}_\pm(z) \longrightarrow \mp i j^{II}_\pm(z) & \qquad \tilde{\jmath}^{II}_\pm(\bar z) \longrightarrow \pm i \tilde{\jmath}^{II}_\pm(\bar z) \end{array}$$

und analog für die Fermionen $\psi^{I/II}_\pm(z)$ etc. Damit folgt, daß lediglich die (1,1) Felder $j^I_\pm(z)\tilde{\jmath}^I_\pm(\bar z)$, $j^{II}_\pm(z)\tilde{\jmath}^{II}_\pm(\bar z)$, $j^I_\pm(z)\tilde{\jmath}^{II}_\mp(\bar z)$ sowie $j^{II}_\pm(z)\tilde{\jmath}^I_\mp(\bar z)$ die Orbifoldkonstruktion überleben. Daraus ergeben sich die hermiteschen marginalen Operatoren

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}^1_{\mathbb{Z}_4} &=& j_1(z)\tilde{\jmath}_1(\bar z) + j_2(z)\tilde{\jmath}_2(\bar z) \\ \mathcal{O}^2_{\mathbb{Z}_4} &=& i\,(j_2(z)\tilde{\jmath}_1(\bar z) - j_1(z)\tilde{\jmath}_2(\bar z)) \\ \mathcal{O}^3_{\mathbb{Z}_4} &=& j_1(z)\tilde{\jmath}_3(\bar z) - j_2(z)\tilde{\jmath}_4(\bar z) \\ \mathcal{O}^4_{\mathbb{Z}_4} &=& i\,(j_4(z)\tilde{\jmath}_1(\bar z) + j_2(z)\tilde{\jmath}_3(\bar z)) \ . \end{array}$$

Die Gruppenoperation hat auf dem Torus vier echte $\mathbb{Z}_4$ Fixpunkte, sowie sechs $\mathbb{Z}_2$ Fixpunkte, die durch Identifikation von 12 $\mathbb{Z}_2$ Fixpunkten unter einer $\mathbb{Z}_2$ Aktion entstanden sind. Dies ist ein Beispiel dafür, daß für zyklische Orbifolds Z_p bzgl. einer nicht primen Zahl p in der Regel Fixpunkte bzgl. aller Teiler $n \mid p$ auftreten. Für die Felder in den getwisteten Sektoren bedeutet dies, daß an einem $\mathbb{Z}_4$ Fixpunkt drei verschiedene bosonische Twistfelder bzgl. der Twists $\frac{k_i}{N} = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ auftreten, an einem $\mathbb{Z}_2$ Fixpunkt jedoch lediglich eines mit dem Twist $\frac{k_i}{N} = \frac{1}{2}$. Dieses entsteht durch Identifikation zweier bosonischer Twistfelder der $\mathbb{Z}_2$ Theorie. Wie bei der $\mathbb{Z}_2$-Orbifold gibt es zu jedem bosonischen Twistfeld wieder genau vier verschiedene fermionische Twistfelder. Durch die gegenläufige $\mathbb{Z}_4$ Aktion kombinieren sich die Twists für die beiden komplexen Dimensionen gerade so, daß alle diese 64 Twistfelder (1/2,1/2) Felder werden. Somit enthält auch die $\mathbb{Z}_4$-Orbifoldtheorie insgesamt 80 linear unabhängige hermitesche marginale Deformationsfelder.

Literaturverzeichnis

[ADGN88] Joseph J. Atick, Lance J. Dixon, Paul A. Griffin, and Dennis Nemeschansky. Multiloop twist field correlation functions for $Z(N)$ orbifolds. *Nucl. Phys.*, B298:1–35, 1988.

[AS65] Milton Abramowitz and Irene Stegun. *Handbook of mathematical functions.* Dover Publications, New-York, 1965.

[Asp94] Paul S. Aspinwall. Resolution of orbifold singularities in string theory. In S.T B. Greene, S.T. Yau, editor, *Mirror symmetry II*, pages 355–379, 1994. `hep-th/9403123`.

[Asp96] Paul S. Aspinwall. K3 surfaces and string duality. 1996. `hep-th/9611137`.

[BKM91] T. T. Burwick, R. K. Kaiser, and H. F. Müller. General Yukawa couplings of strings on $Z(N)$ orbifolds. *Nucl. Phys.*, B355:689–711, 1991.

[BLS94] D. Bailin, A. Love, and W. A. Sabra. Yukawa couplings involving excited twisted sector states for $Z(N)$ and $Z(M) \times Z(N)$ orbifolds. *Nucl. Phys.*, B416:539–562, 1994. `hep-th/9307172`.

[BPZ84] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nucl. Phys.*, B241:333–380, 1984.

[BR87a] M. Bershadsky and A. Radul. Conformal field theories with additional $Z(N)$ symmetry. *Int. J. Mod. Phys.*, A2:165–178, 1987.

[BR87b] M. Bershadsky and A. Radul. G loop amplitudes in bosonic string theory in terms of branch points. *Phys. Lett.*, B193:213–218, 1987.

[BS79] I.N. Bronstein and K.A. Semendjiajew. *Taschenbuch der Mathematik.* Harri Deutsch, Frankfurt a.M., 1979.

[Car87] J. L. Cardy. Continuously varying exponents and the value of the central charge. *J. Phys. A*, A20:L891, 1987.

[CF75] E. Corrigan and D. B. Fairlie. Off-shell states in dual resonance theory. *Nucl. Phys.*, B91:527, 1975.

[CGM93] J. A. Casas, F. Gomez, and C. Munoz. Complete structure of $Z(n)$ Yukawa couplings. *Int. J. Mod. Phys.*, A8:455–506, 1993. `hep-th/9110060`.

[Col84] J. C. Collins. *Renormalization. An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group, and the Operator Product Expansion.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1984.

[Cve87] M. Cvetic. Blown - up orbifolds. In S.J. Gates Jr. and R.N. Mohapatra, editors, *Superstrings, cosmology and composite structures: proceedings*, page 269, Singapore, 1987. World Scientific.

[DFMS87] Lance Dixon, Daniel Friedan, Emil Martinec, and Stephen Shenker. The conformal field theory of orbifolds. *Nucl. Phys.*, B282:13–73, 1987.

[DHVW85] L. Dixon, J. A. Harvey, C. Vafa, and E. Witten. Strings on orbifolds. *Nucl. Phys.*, B261:678–686, 1985.

[DHVW86] L. Dixon, J. A. Harvey, C. Vafa, and E. Witten. Strings on orbifolds. 2. *Nucl. Phys.*, B274:285–314, 1986.

[Dix87] Lance J. Dixon. Some world sheet properties of superstring compactifications, on orbifolds and otherwise. In *Lectures given at the 1987 ICTP Summer Workshop in High Energy Phsyics and Cosmology.* ICTP Trieste, 1987.

[Dul00] Sayipjamal Dulat. The orbifolds of n = 2 superconformal theories with c = 3. *J. Phys. A*, A33:5345, 2000. `hep-th/0002253`.

[DVV87] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, and H. Verlinde. On moduli spaces of conformal field theories $c \geq 1$. In *Copenhagen 1987, Proceedings, Perspectives in String Theory*, pages 117–137, 1987.

[EJLM92] J. Erler, D. Jungnickel, J. Lauer, and J. Mas. String emission from twisted sectors: cocycle operators and modular background symmetries. *Ann. Phys.*, 217:318–363, 1992.

[EJSS93] J. Erler, D. Jungnickel, M. Spalinski, and S. Stieberger. Higher twisted sector couplings of $Z(N)$ orbifolds. *Nucl. Phys.*, B397:379–416, 1993. `hep-th/9207049`.

[FMS97] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal. *Conformal field theory.* Springer, New York, 1997.

[Gab00] Matthias R. Gaberdiel. An introduction to conformal field theory. *Rept. Prog. Phys.*, 63:607, 2000. `hep-th/9910156`.

[GG00] Matthias R Gaberdiel and Peter Goddard. Axiomatic conformal field theory. *Commun. Math. Phys.*, 209:549, 2000. `hep-th/9810019`.

[Gin88a] P. Ginsparg. Curiosities at c = 1. *Nucl. Phys.*, B295:153–170, 1988.

[Gin88b] Paul Ginsparg. Applied conformal field theory. In *Lectures given at Les Houches Summer School in Theoretical Physics*. Les Houches, 1988.

[Gre76] M. B. Green. Locality and currents for the dual string. *Nucl. Phys.*, B103:333, 1976.

[Gre96] Brian R. Greene. String theory on Calabi-Yau manifolds. 1996. `hep-th/9702155`.

[HV87] Shahram Hamidi and Cumrun Vafa. Interactions on orbifolds. *Nucl. Phys.*, B279:465, 1987.

[Jun92] Dirk Jungnickel. *Correlation functions of two-dimensional twisted conformal field theories*. PhD thesis, Max-Planck-Institut für Physik, München, 1992.

[Kad78] Leo P. Kadanoff. Multicritical behavior at the Kosterlitz-Thouless critical point. *Ann. Physics*, 120:39–71, 1978.

[KB79] L. Kadanoff and A. Brown. Correlation functions on the critical lines of the Baxter and Ashkin-Teller models. *Ann.Physics*, 121:318–342, 1979.

[KLT86] H. Kawai, D. C. Lewellen, and S. H. H. Tye. A relation between tree amplitudes of closed and open strings. *Nucl. Phys.*, B269:1–28, 1986.

[Nah] Werner Nahm. Private communication.

[NW99] Werner Nahm and Katrin Wendland. A hiker's guide to K3: Aspects of N = (4,4) superconformal field theory with central charge $c = 6$. 1999. `hep-th/9912067`.

[Pol98] Joseph Polchinski. *String Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[PS95] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.

[Ryd85] L. H. Ryder. *Quantum field theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[SW74] John H. Schwarz and C. C. Wu. Off mass shell dual amplitudes. 2. *Nucl. Phys.*, B72:397, 1974.

[Wen00] K. Wendland. *Moduli Spaces of Unitary Conformal Field Theories.* PhD thesis, University of Bonn, Bonn, 2000.

[Zam87] A. B. Zamolodchikov. Conformal scalar field on the hyperelliptic curve and critical ashkin-teller multipoint correlation functions. *Nucl. Phys.*, B285:481–503, 1987.

Danksagung

An erster Stelle möchte ich Herrn Prof. Nahm für die äußerst interessante Themenstellung dieser Diplomarbeit, für seine umsichtige Betreuung und seine Geduld bei all meinen Problemen und Fragen sowie für ein erheblich tieferes Verständnis der Physik, das ich während dieser Arbeit gewonnen habe, danken. Herrn Prof. Flume danke ich für die Übernahme des Korreferats für diese Arbeit.

Meiner gesamten Arbeitsgruppe bei Prof. Nahm, namentlich Sayipjamal Dulat, Andreas Malmendier, Daniel Roggenkamp, Falk Rohsiepe, Michael Rösgen, Matthias Soika, Katrin Wendland und Andreas Wißkirchen, bin ich dankbar für ein sehr angenehmes Arbeits- und Gruppenklima, die anregende wissenschaftliche Diskussion und unendliche Hilfsbereitschaft. Insbesondere bin ich Katrin Wendland für die unzähligen Erklärungen und Tipps zu Dank verpflichtet. Andreas Wißkirchen war bei Problemen jeglicher Art, insbesondere was das Computersystem angeht, stets mit helfender Hand zur Stelle. David Heilmann danke ich für ein immer offenes Ohr und nicht zuletzt für seinen Crash-Kurs in xfig.

Danken möchte ich auch der Studienstiftung des deutschen Volkes, insbesondere meinem Vertrauensdozenten Herrn Prof. Seitz und seiner Frau, für die ideelle und finanzielle Unterstützung während meines Studiums. Von den fantastischen Sommerakademien, den vielen geselligen Abenden sowie der Begegnung mit zahlreichen äußerst interessanten Menschen habe ich sehr profitiert. Mein Dank gilt ebenfalls dem Deutschen Akademischen Austauschdienst, der mir ein wundervolles Studienjahr an der University of Cambridge ermöglicht hat.

Ganz besonders aber möchte ich meiner Freundin Katrin Amian danken, ohne deren Fürsorge und Liebe ich oft verzweifelt wäre und die sich nicht zuletzt durch diese 70 Seiten Physik gearbeitet hat, auf der Suche nach Tippfehlern und sonstigen Schandtaten an der deutschen Sprache, sowie meinen Eltern, die mich während meiner ganzen Schul- und Studienzeit unterstützt und begleitet haben und mir damit dieses Physikstudium erst ermöglicht haben.