UNIVERSITÄT BONN
Physikalisches Institut

Approximative Bestimmung der Instanton - Koeffizienten im Seiberg - Witten - Modell

von Thomas Fleck

The Instanton - coefficiants $\mathcal{F}_k$ in the Seiberg - Witten - prepotential are investigated. To this aim the Euler - Lagrange - equations are developed around the Instanton - solution. It is shown that for higher orders than g^0 the gauge field can no longer be uniquely determined. To derive higher coefficiants than $\mathcal{F}_1$ and $\mathcal{F}_2$ one has to solve the corresponding non - linear ADHM - constraints which is not possible until now. Therefore the approximation method of the dilute gas is introduced: all fermionic integrations can now be done and one is left with the bosonic integration over a non - trivial determinant. Finally, the correspondence with the recursion formula, found by Matone, is discussed.

Post address:
Nußallee 12
D-53115 Bonn
Germany

BONN-IB-98-05
Bonn University
february 1998

UNIVERSITÄT BONN
Physikalisches Institut

Approximative Bestimmung der Instanton - Koeffizienten im Seiberg - Witten - Modell

von

Thomas Fleck

aus

Neumagen - Dhron

Diese Arbeit wurde als Diplomarbeit von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn angenommen.

Angenommen am:	14.02.1998
Referent:	Prof. Dr. R. Flume
Korreferent:	Prof. Dr. W. Nahm

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In den vergangenen vier Jahren hat es einen großen Fortschritt im Verständnis der nicht - perturbativen Eigenschaften supersymmetrischer Feldtheorien gegeben. Diese Entwicklung basiert entscheidend auf den Arbeiten von Seiberg und Witten [1]. Ihnen ist es gelungen, die effektive Wirkung einer $N = 2$ - supersymmetrischen $SU(2)$ - Yang - Mills - Theorie exakt zu bestimmen. Eine solche effektive Wirkung ist durch ein einzelnes Objekt, das sog. Präpotential $\mathcal{F}$, bestimmt. Es lautet:

$$\mathcal{F}(\Phi) = \frac{i}{2\pi} \ln \frac{\Phi^2}{\Lambda^2} + \Phi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k (\frac{\Lambda}{\Phi})^{4k}$$

Hierin ist Φ ein $N = 2$ - Vektorsuperfeld und Λ ein dynamisch generierter Abschneideparameter (genaueres in Kapitel 3). Der große Erfolg von Seiberg und Witten liegt nun darin, daß sie die einzelnen sog. Instanton - Koeffizienten $\mathcal{F}_k$ mit Hilfe einer elektrisch - magnetischen Dualität exakt bestimmt haben. Damit ist es zum ersten Mal überhaupt gelungen, in einer Feldtheorie in vier Dimensionen Matrixelemente exakt auszurechnen. Das enorme Interesse auf Seiten der Mathematik an der Seiberg - Witten - Theorie liegt an deren Verbindung zur Donaldson - Theorie (siehe z.B. ([17]) für genauere Ausführungen). Auf physikalischer Seite besteht die Hoffnung, daß die Supersymmetrie, wenngleich entscheidend für die Konstruktion der Theorie, nur eine technische Rechenhilfe ist, und daß man letztendlich Aussagen über die gewöhnliche QCD machen kann [18].
Die unendliche Instanton - Summe steht auch im Mittelpunkt dieser Arbeit: Im Prinzip ist es möglich, die Koeffizienten $\mathcal{F}_k$ zu bestimmen, ohne explizit von der Dualität Gebrauch zu machen. Die so alternativ berechneten Koeffizienten dienen damit zur unabhängigen Überprüfung der Ergebnisse von Seiberg und Witten. In dieser Arbeit wird versucht, neben den aus der Literatur bekannten $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ [2] mit Näherungsmethoden auch höhere Koeffizienten zu bestimmen.
Meine Arbeit habe ich wie folgt gegliedert:
Nach einer kurzen Einführung in die $N = 2$ - Supersymmetrie folgt im dritten Kapitel ein knapper Überblick über die Seiberg - Witten - Theorie mit den für diese Arbeit relevanten Ergebnissen. Kapitel 4 führt die Instantonen und insbesondere die nichtlinearen ADHM - Zwangsbedingungen ein. In Kapitel 5 werden die Euler - Lagrange - Gleichungen des Modells aufgestellt und um eine supersymmetrische Instanton - Lösung herum entwickelt. Diese Weiterentwicklung ist insbesondere zur Beantwortung der Frage wichtig, wie die Fermion - Integration durch die betrachtete Greensfunktion saturiert wird. Schließlich wird in diesem Kapitel das Eichfeld in der nächsten Ordnung (g^0) bestimmt. Ich werde zeigen, daß es in der darauffolgenden Ordnung (g^1) nicht mehr eindeutig bestimmt werden kann. In Kapitel 6 wird die allgemeine k - Instanton - Wirkung angegeben und die alternative Berechnung der Koeffizienten $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ nach Dorey et. al. [2] knapp dargelegt. Es zeigt sich, daß höhere Koeffizienten nicht mehr exakt bestimmt werden können. Deshalb wird im letzten Kapitel die Näherungsmethode des verdünnten Gases eingeführt und auf das vorliegende Problem angewandt. Es gelingt mir, in dieser Näherung die fermionische Integration komplett auszuführen. Es bleibt eine rein bosonische Integration, die zu einer Divergenz führt, welche durch einen physikalisch motivierten Abschneideparameter eliminiert wird. Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick, in welchem ich insbesondere auf den Zusammenhang meiner Arbeit mit der von Matone [24] gefundenen Rekursionsformel eingehe. Es bleiben aber noch einige offene Fragen, die auch im Ausblick angesprochen werden. Es folgt noch ein Anhang, in welchem die benötigten Rechentechniken erläutert und der Superfeldformalismus anhand der $N = 1$ - Supersymmetrie eingeführt werden.

2 $N = 2$ - Supersymmetrie

Da die Supersymmetrie (im folgenden meist mit SUSY abgekürzt) die Grundlage dieser Arbeit ist, möchte ich davon zunächst eine kurze Einführung geben. Dabei beginne ich hier sofort mit der $N = 2$ - SUSY. Da diese jedoch auf dem $N = 1$ - Fall aufbaut, gebe ich im Anhang einen Einblick nicht nur in die $N = 1$ - Supersymmetrie, sondern auch in den Formalismus der Superfelder, von welchem hier schon Gebrauch gemacht wird. Demjenigen Leser, der im Umgang mit der Supersymmetrie nicht so vertraut ist, sei deshalb empfohlen, zunächst den Anhang zu lesen. Hier findet man auch die in dieser Arbeit benutzte Notation.
Das einfachste $N = 2$ - Supermultiplett mit möglicher Selbstwechselwirkung und CPT - Invarianz enthält je ein komplexes Eichfeld und einen komplexen Skalar sowie zwei komplexe Weyl - Spinoren [23]. Vergleicht man diesen Teilcheninhalt mit der $N = 1$ - SUSY (siehe Anhang), so stellt man fest, daß man ihn durch eine Überlagerung eines $N = 1$ - chiralen und eines Vektorsuperfeldes erhält. Als ersten Ansatz einer $N = 2$ - invarianten Lagrangefunktion versucht man deshalb, ein masseloses chirales $N = 1$ - Multiplett in der adjungierten Darstellung der $SU(2)$ minimal an ein $N = 1$ Vektormultiplett zu koppeln:

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{g^2}\int d^4x \quad Sp \quad & \{-\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - i\lambda\sigma^\mu D_\mu\overline{\lambda} - i\overline{\lambda}\overline{\sigma}^\mu D_\mu\lambda - i\psi\sigma^\mu D_\mu\overline{\psi} - i\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu D_\mu\psi - 2D^\mu\phi^\dagger D_\mu\phi - \\ - \quad & g^2[\phi^\dagger,\phi]^2 + 2\sqrt{2}gi([\phi^\dagger,\psi]\lambda + \overline{\lambda}[\phi,\overline{\psi}])\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Die Lagrangefunktion (2.1) ist invariant unter einer $SU(2)$ - Symmetrie, die das Spinorduplett (ψ, λ) rotiert. Desweiteren ist sie invariant unter folgenden $N = 2$ Supersymmetrietransformationen:

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= i\xi\sigma_\mu\overline{\lambda} + i\overline{\xi}\overline{\sigma}_\mu\lambda - i\xi'\sigma_\mu\overline{\psi} - i\overline{\xi}'\overline{\sigma}_\mu\psi \\ \delta\phi &= \sqrt{2}\xi\psi + \sqrt{2}\xi'\lambda \\ \delta\phi^\dagger &= \sqrt{2}\overline{\xi}\overline{\psi} + \sqrt{2}\overline{\xi}'\overline{\lambda} \\ \delta\lambda &= -\xi\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + ig\xi[\phi,\phi^\dagger] - i\sqrt{2}\overline{\xi}'\overline{\sigma}^\mu D_\mu\phi \\ \delta\overline{\lambda} &= -\overline{\xi}\overline{\sigma}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - ig\overline{\xi}[\phi,\phi^\dagger] - i\sqrt{2}\xi'\sigma^\mu D_\mu \\ \delta\psi &= -i\sqrt{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu D_\mu\phi + \xi'\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - ig\xi'[\phi,\phi^\dagger] \\ \delta\overline{\psi} &= -i\sqrt{2}\xi\sigma^\mu D_\mu\phi^\dagger + \overline{\xi}'\overline{\sigma}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + ig\overline{\xi}'[\phi,\phi^\dagger]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Der Kommutator zweier Transformationen (2.2) ergibt nun:

$$[\delta^{(1)},\delta^{(2)}]X = 2i\overline{\xi}_i^{(1)}\overline{\sigma}^\mu\xi_i^{(2)}\partial_\mu X + \delta_{Eich}X + \text{ Feldgleichungen} \tag{2.3}$$

mit $\xi_1 = \xi, \xi_2 = -\xi'$. Insbesondere wird $[\xi Q, \overline{\xi Q}] = 2\xi\sigma^\mu\overline{\xi}P_\mu$ durch den ersten Term dargestellt. Der zweite Term lautet ausgeschrieben:

$$\delta_{Eich}X = 2g\overline{\xi}_i^{(1)}\overline{\sigma}^\mu\xi_i^{(2)}[A_\mu,X] + 2ig\xi_i^{(1)}\epsilon_{ij}\xi_j^{(2)}[X,\phi^\dagger] - 2ig\overline{\xi}_i^{(1)}\epsilon_{ij}\overline{\xi}_j^{(2)}[X,\phi]. \tag{2.4}$$

Dieser Term tritt auf, da in der Wess - Zumino - Eichung gerechnet worden ist (siehe Fußnote zu $(A.19)$).
Der dritte Term, "+ Feldgleichungen", betrifft nur die Fermionen; er läßt sich eliminieren, indem man ein vektorielles $N = 2$ - Hilfsfeld $\vec{D}$ einführt [14]. Damit tritt in der Lagrangefunktion (2.1) ein weiterer Term auf: $\frac{1}{2}$ Sp $\vec{D}^2$, und die Transformationsgleichungen (2.2) der Fermionen sowie der

Hilfsfelder gehen über in:

$$\begin{aligned}
\delta\lambda^i &= -i\epsilon^{jk}\xi_k\vec{\sigma}^i_j\vec{D} \qquad \text{mit } \lambda^1=\lambda, \lambda^2=\psi \\
\delta\overline{\lambda}^i &= -i\overline{\xi}^j\vec{\sigma}^i_j\vec{D} \\
\delta\vec{D} &= \vec{\tau}^j_i(\xi_j\sigma^\mu D_m\overline{\lambda}^i + \epsilon_{jk}\epsilon^{il}\overline{\xi}^k\overline{\sigma}^\mu D_\mu\lambda_l) + \vec{\tau}^j_i(\xi_j\epsilon^{il}[\lambda_l,\phi^\dagger] - \epsilon_{jk}\overline{\xi}^k[\overline{\lambda}^i,\phi]).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Hierin sind wieder $\vec{\tau}^j_i$ die Pauli - Matrizen. Damit lautet die $N=2$ - Lagrangefunktion nun ausgeschrieben:

$$\begin{aligned}
L = \frac{1}{g^2} \quad Sp & \int d^4x\{-\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - i\lambda\sigma^\mu D_\mu - i\overline{\lambda}\overline{\sigma}^\mu D_\mu\lambda - i\psi\sigma^\mu D_\mu\overline{\psi} - i\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu D_\mu\psi - 2D^\mu\phi^\dagger D_\mu\phi \\
& - \quad g^2[\phi^\dagger,\phi]^2 + 2\sqrt{2}gi([\phi^\dagger,\psi]\lambda + \overline{\lambda}[\phi,\overline{\psi}]) + \frac{1}{2}\vec{D}^2\}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Die berechtigte Frage, ob sich (2.6) auch in einem $N=2$ - Superfeldformalismus darstellen läßt, wurde in [14] beantwortet. Dazu benötigt man zwei Grassmann - Parameter θ_1,θ_2 bzw. $\overline{\theta}_1,\overline{\theta}_2$ und betrachtet folgendes $N=2$ - Superfeld:

$$\begin{aligned}
W &= \phi^\dagger + \overline{\theta_1\lambda} + \overline{\theta_2\psi} - (\overline{\theta}_1^2 + \overline{\theta}_2^2)(\vec{\sigma}\cdot\vec{D}) + \overline{\theta}_1\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\theta}_2F_{\mu\nu} + 2\overline{\theta}_1^2\overline{\theta}_2(-4i\overline{\sigma}^\mu D_\mu\psi + 2\sqrt{2}ig[\overline{\lambda},\phi]) \\
&+ 2\overline{\theta}_2^2\overline{\theta}_1(+2i\sqrt{2}g[\overline{\psi},\phi] - 4\sigma^\mu D_\mu\lambda) + \overline{\theta}_1^2\overline{\theta}_2^2(-4D^2\phi + 2\sqrt{2}g[\psi,\lambda] - 2g^2[\phi,[\phi,\phi^\dagger]]).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Damit läßt sich (2.6) nun wie folgt schreiben:

$$L = \frac{1}{8g^2}\int d^4x\, d^2\overline{\theta}_1\, d^2\overline{\theta}_2\, Sp(WW) + \frac{1}{8g^2}\int d^4x\, d^2\theta_1\, d^2\theta_2\, Sp(\overline{WW}). \tag{2.8}$$

Man benutzt auch folgende Notation:

$$L = \int d^4x\, d^4\overline{\theta}\, \mathcal{F}(W) \quad + c.c., \tag{2.9}$$

wobei man $\mathcal{F}(W)$ das *Präpotential* nennt. Im vorliegenden Falle ist $\mathcal{F}(W) = \frac{1}{8g^2}W^2$.

3 Das Seiberg - Witten - Modell

In diesem Kapitel möchte ich kurz in die Arbeit von Seiberg und Witten [1] einführen und die für den weiteren Verlauf dieser Arbeit wichtigen Ergebnisse aufzeigen. Ich bin keinesfalls in der Lage, alle Aspekte dieser Theorie darzulegen; für ausführlichere Einführungen sei auf die Literatur verwiesen [20][21].

3.1 Dualität und der Raum der Moduli

Das Konzept der Dualität spielt in der modernen Physik eine große Rolle, wobei es verschiedene Varianten hiervon gibt. In dieser Arbeit wird eine Dualität betrachtet, die starke und schwache Kopplung miteinander vertauscht. Damit gelingt es Seiberg und Witten, die unten erläuterte Theorie zu determinieren. In [1] betrachten sie folgende $N=2$ - supersymmetrische Lagrangefunktion:

$$L = \int d^4x\, d^4\theta\, Im(\frac{1}{8\pi}\tau W^2) \tag{3.1}$$

oder ausgeschrieben in Komponenten:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{g^2}\int d^4x\, Sp\{-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\lambda\sigma^\mu D_\mu\overline{\lambda} - i\overline{\lambda}\overline{\sigma}^\mu D_\mu\lambda - i\psi\sigma^\mu D_\mu\overline{\psi} - i\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu D_\mu\psi - 2D^\mu\phi^\dagger D_\mu\phi \\ &- g^2[\phi^\dagger,\phi]^2 + 2\sqrt{2}gi([\phi^\dagger,\psi]\lambda + \overline{\lambda}[\phi,\overline{\psi}])\} + \frac{\hat{\theta}}{16\pi^2}\int d^4x\, Sp(F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Die komplexe Kopplungskonstante

$$\tau \equiv \frac{\hat{\theta}}{2\pi} + \frac{4\pi i}{g^2} \tag{3.3}$$

sorgt dafür, daß in (3.2) der Term $F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ den aus der Quantenfeldtheorie bekannten Instanton - Koeffizienten $\hat{\theta}$ erhält.[1] Aus (3.3) folgt, daß für die maßgebliche Kopplungskonstante gilt:

$$g^2 \propto \frac{1}{Im\tau}. \tag{3.4}$$

Die Lagrangefunktion (3.2) beschreibt eine $N = 2$ supersymmetrische, nicht - abelsche $SU(2)$ Yang - Mills - Theorie. Von ihr ist bekannt, daß sie asymptotisch frei ist und damit die Störungstheorie, basierend auf der Lagrangefunktion (3.2), bei hohen Energien sinnvoll ist. Gesucht ist nun eine Theorie, die für niedrige Energien gültig ist und aus (3.2) folgt; diese Theorie soll immer noch invariant unter $N = 2$ - SUSY sein. Das bedeutet, daß das in der Wirkung auftretende Potential, ausgewertet im Grundzustand, verschwinden muß [22][23]. Man kann nämlich zeigen, daß die Supersymmetrie genau dann gebrochen ist, wenn das Potential U hier größer als Null ist. U lautet im Grundzustand:

$$U = \frac{1}{2}\int d^4x\, Sp([\phi^\dagger,\phi]^2). \tag{3.5}$$

$U = 0$ bedeutet mithin *nicht* $\phi = \phi^\dagger = 0$, sondern lediglich $[\phi,\phi^\dagger] = 0$. Für eine $SU(2)$ - Eichgruppe bedeutet dies, daß man o.B.d.A.

$$\phi(x) = \frac{1}{2}a(x)\sigma_3 \tag{3.6}$$

ansetzen kann. Da man sich nur für physikalisch unterschiedliche Theorien interessiert, sucht man nun eine eichinvariante Größe, die inäquivalente Vakua beschreibt. Dies sind Vakua, die nicht durch eine Eichtransformation auseinander hervorgehen. Wenn Quantenfluktuationen eine Rolle spielen, zeigt es sich, daß

$$u \equiv < Sp\,\phi^2 > \qquad <\phi> \equiv \frac{1}{2}a\sigma_3 \tag{3.7}$$

die geeigneten Größen sind. Hierin ist $<\phi>$ der Vakuumerwartungswert des Feldes ϕ. Durch einen solchen von Null verschiedenen Vakuumerwartungswert wird die $SU(2)$ - Eichgruppe durch den Higgs - Mechanismus zu der abelschen Eichgruppe $U(1)$ gebrochen. Die zugrundeliegende $N = 2$ - Supersymmetrie jedoch bleibt erhalten! u ändert sich offensichtlich nicht unter der Wirkung der $SU(2)$ - Eichgruppe und parametrisiert die unterschiedlichen Vakua. Die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ eichinäquivalenter Vakua nennt man auch den *Raum der Moduli* der Theorie. $\mathcal{M}$ ist hier die komplexe u - Ebene, oder mit anderen Worten: u ist eine Koordinate von $\mathcal{M}$. Die rechte Gleichung in (3.7) definiert die Funktion a. Man beachte, daß nur im klassischen Fall $u = \frac{1}{2}a^2$ gilt! Quantenfluktuationen zerstören diese Gleichheit!

[1] Die Bedeutung von $\hat{\theta}$ spielt in dieser Arbeit keine Rolle. Mehr Informationen findet man in [19].

3.2 Die effektive Wirkung

Durch den oben erwähnten Higgs - Effekt erhalten die Komponenten der Felder senkrecht zu $< \phi >$, also A^1_μ, A^2_μ etc., eine Masse $m = \sqrt{2}ga$, während die zu $< \phi >$ parallelen Komponenten masselos bleiben. Diese letztgenannten Komponenten werden durch eine sogenannte *effektive Wirkung* beschrieben, deren Eichgruppe wie oben erwähnt die $U(1)$ ist, die aber weiterhin $N = 2$ - supersymmetrisch ist! Diese $N = 2$ - SUSY schränkt das mögliche Aussehen der effektiven Wirkung ein: Die Lagrangedichte, die das führende Verhalten bei kleinen Impulsen wiedergibt, muß wie folgt aussehen:

$$L = \int d^4x\, d^4\theta\, Im\mathcal{F}(W). \tag{3.8}$$

Da $\mathcal{F}$ hierin nur noch über den halben $N = 2$ - Superraum integriert wird, muß es sich um eine holomorphe Funktion handeln. Diese Holomorphie ist die einzige Zwangsbedingung an $\mathcal{F}$, und sie führt auf folgendes Aussehen der Lagrangefunktion in $N = 1$ - Notation:

$$L = \frac{1}{8\pi} Im\{\int d^4x\, [\int d^2\theta \mathcal{F}''(\Phi) W^\alpha W_\alpha + \int d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\, \Phi^\dagger \mathcal{F}'(\Phi)]\}. \tag{3.9}$$

Hierin ist Φ das chirale $N = 1$ - Superfeld aus dem Anhang, $\mathcal{F}'(\Phi) = \frac{\partial\mathcal{F}(\Phi)}{\partial\Phi}$, $\mathcal{F}''$ analog. Eine Feststellung läßt sich sofort machen: Kennt man das Präpotential $\mathcal{F}(\Phi)$, so ist die gesuchte niederenergetische Theorie bestimmt, die die Bewegung der masselosen Teilchen beschreibt.
Zunächst kann man versuchen, das Präpotential störungstheoretisch zu berechnen. Die $N = 2$ - Supersymmetrie sorgt dafür, daß man nicht über "Ein - Schleifen - Rechnungen" hinausgehen muß: Alle höheren Terme heben sich aufgrund der Boson/Fermion - Symmetrie gegenseitig auf. Folgende Form für $\mathcal{F}$ ergibt sich in der störungstheoretischen Rechnung [8]:

$$\mathcal{F}(\Phi) = \frac{i}{2\pi}\Phi^2 \ln\frac{\Phi^2}{\Lambda^2}. \tag{3.10}$$

Hierin ist Λ^2 ein dynamisch erzeugter Abschneideparameter. Man erweitert (3.10) auf den abelschen Fall, indem man für Φ das skalare Feld ϕ einsetzt:

$$\mathcal{F}(\phi) = \frac{i}{2\pi}\phi^2 \ln\frac{\phi^2}{\Lambda^2}$$

Ganz analog behandelt man auch die anderen Formeln.
Da (3.10) einen Logarithmus - Term enthält und somit nicht positiv definit ist, muß es weitere Terme geben. Solche nicht - perturbativen Beiträge existieren in der Tat [6]. Man setzt dazu eine Reihenentwicklung in Φ an, allerdings in inversen Potenzen, um weiter die asymptotische Freiheit zu garantieren. Die Potenzen wiederum sind aufgrund der R-Symmetrie festgelegt:[2]

$$\mathcal{F} = \Phi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k (\frac{\Lambda}{\Phi})^{4k}. \tag{3.11}$$

Damit lautet das ganze Potential nun:

$$\mathcal{F}(\Phi) = \frac{i}{2\pi}\Phi^2 \ln\frac{\Phi^2}{\Lambda^2} + \Phi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k (\frac{\Lambda}{\Phi})^{4k}. \tag{3.12}$$

[2]Unter der R - Symmetrie gilt: $\theta \longrightarrow e^{i\alpha}\theta, \overline{\theta} \longrightarrow e^{i\alpha}\overline{\theta}, W \longrightarrow e^{2i\alpha}W$. Die Funktion (3.1) ist damit invariant unter der R - Transformation.

Die Koeffizienten $\mathcal{F}_k$ sind die sogenannten Instanton - Koeffizienten. Ihnen und dem nicht - perturbativen Anteil von (3.11) ist ein großer Teil dieser Arbeit gewidmet. Ich richte nun meine Aufmerksamkeit wieder auf (3.9). Seiberg und Witten haben gezeigt, daß

$$\mathcal{F}''(a) \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{F}(a)}{\partial a^2} = \tau(a) \tag{3.13}$$

die Rolle der komplexen Kopplungskonstanten spielt. Weiter zeigen sie, daß die Koordinate a nicht auf dem gesamten Raum der Moduli eine sinnvolle Koordinate ist, sondern daß es vielmehr zwei singuläre Punkte (außer $a = \infty$) gibt. In deren Umgebung geht man zur sogenannten dualen Koordinate a_D über. Doch dazu später mehr.

3.3 BPS - Zustände

Im Falle $N > 1$ kann die Algebra $(A.4)$ noch um die *zentralen Ladungen* $Z^{ij} = -Z^{ji}$ erweitert werden:

$$\{Q^i_\alpha, Q^j_\beta\} = \epsilon_{\alpha\beta} Z^{ij}. \tag{3.14}$$

Zentrale Ladungen deshalb, weil sie aus dem Zentrum der Algebra sind, das heißt mit allen Elementen der Algebra vertauschen. Insbesondere auch mit P_μ, weshalb sie erhaltene Größen sind. Für $N = 2$ gibt es genau eine zentrale Ladung $\epsilon^{ij}\,|Z|$.
Diese zentralen Ladungen sind insofern interessant, als man zeigen kann, daß für massive Teilchen einer entsprechenden Theorie immer $m \geq \sqrt{2}|Z|$ gelten muß. Diese untere Schranke nennt man BPS - Schranke (nach Bogomol'nyi, Prasad, Sommerfield). Zustände, für welche das Gleichheitszeichen gilt, heißen *BPS - Zustände.*
Man unterscheidet kurze und lange Supermultipletts, je nachdem, ob $m = \sqrt{2}|Z|$ (kurz) oder $m \geq \sqrt{2}|Z|$ (lang) gilt. In $N = 2$ - SUSY hat ein langes Multiplett 16, ein kurzes hingegen nur 4 Zustände. Man kann nämlich allgemein zeigen, daß die Anzahl N der SUSY - Generatoren effektiv um die Zahl n_0 der Zentralladungen, für welche $m = \sqrt{2}|Z|$ gilt, reduziert wird [23]. Im konkreten $N = 2$ - Falle ist $n_0 = 1$ und man findet anstelle von Q^α_1, Q^α_2 effektiv nur noch ein Q^α, welches aber nur 4 Zustände erzeugen kann.
Da die Teilchen, die über den Higgs - Mechanismus ihre Masse erhalten, vorher in kurzen Multipletts waren ($m = 0$), müssen sie es auch nach dem Higgs - Effekt sein, denn dieser kann nicht 12 zusätzliche Freiheitsgrade liefern! Für diese Teilchen gilt also exakt:

$$m = \sqrt{2}|Z| \tag{3.15}$$

Die Autoren von [13] haben sogar gezeigt, daß Zustände genau dann in kurzen Multipletts sind, wenn für die Zustände (3.15) gilt. Dabei gehen sie von dem positiv-semidefiniten Operator $0 \leq <\eta|\{Q^i_\alpha, \overline{Q}^j_{\dot\beta}\}|\eta> = \delta^{ij} m + \epsilon^{ij}|Z|$ aus, den sie im Ruhesystem des Teilchens η der Masse m untersuchen. Sie zeigen, daß eine Gleichheit genau dann herrscht, wenn mindestens ein Eigenwert Null vorliegt. Über einen Basiswechsel kann man dann einen Operator Q zu Null setzen. Das bedeutet gerade, daß man nur noch vier Zustände erzeugen kann.
Z kann aus (3.9) berechnet werden [21][20]:

$$Z = a n_e + a_D n_m. \tag{3.16}$$

Die ganzen Zahlen n_e, n_m sind dabei die elektrische bzw. magnetische Ladung des Teilchens; a_D ist hier die magnetische, duale Koordinate zu a, die zu einem $N = 2$ - Vektormultiplett $(\Phi_D, W_{\alpha D})$ gehört. Insbesondere enthält dieses Multiplett das duale, magnetische Photon $A_{\mu D}$. Mit Hilfe einer elektrisch - magnetischen Dualitätstransformation, die A_μ und $A_{\mu D}$ ineinander überführt, zeigt man, daß

$$a_D = \frac{\partial}{\partial a}\mathcal{F}(a) \tag{3.17}$$

ist [21]. Unter einer solchen Dualitätstransformation geht

$$\begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \longrightarrow M \begin{pmatrix} a_D \\ a \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

über. Hierin ist $M \epsilon \mathbf{SL}(2,\mathbf{Z})$. Daß die Dualitätsgruppe die $\mathbf{SL}(2,\mathbf{Z})$, und nicht $\mathbf{SL}(2,\mathbf{R})$ ist, liegt einerseits an dem $\hat{\theta}$ - Winkel aus (3.2). Denn nur ein shift $\hat{\theta} \to \hat{\theta} + 2\pi z, \quad z\epsilon\mathbf{Z}$ hat keinen Einfluß auf die resultierende Theorie. Darüberhinaus will man aber das gesamte BPS - Spektrum erhalten, so daß die Einträge in M nur ganze Zahlen sein können.
Weiter folgt (siehe [1]) $\tau = \frac{\partial a_D}{\partial a}$ und damit auch $\tau(u) = \frac{\frac{\partial a_D}{\partial u}}{\frac{\partial a}{\partial u}}$. Dies zieht insbesondere

$$\tau(a) \longrightarrow \frac{\alpha\tau(a) + \beta}{\gamma\tau(a) + \delta} \tag{3.19}$$

nach sich. Es wird sich zeigen, daß a_D die gesuchte Koordinate ist, die in der Nähe der singulären Punkte eine angemessenere Beschreibung von $\mathcal{M}$ liefert. Da sich eine solche Koordinatentransformation durch

$$\begin{aligned} a &\longrightarrow -a_D \\ a_D &\longrightarrow a \end{aligned} \tag{3.20}$$

beschreiben läßt, was insbesondere

$$\tau(a) \longrightarrow -\frac{1}{\tau(a)} \equiv \tau_D(a_D) \tag{3.21}$$

nach sich zieht, sieht man, wie hier das eingangs besprochene Konzept der Dualität für die komplexe Kopplungskonstante τ zum Einsatz kommt: Starke und schwache Kopplung werden miteinander vertauscht. Deshalb auch der Name *duale Koordinate* für a_D.
Analog zu $a_D = \frac{\partial\mathcal{F}(a)}{\partial a}$ aus (3.17) kann man sich auch eine Funktion $\mathcal{F}_D(a_D)$, dual zu $\mathcal{F}(a)$, definieren:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{F}_D(a_D)}{\partial a_D} &\equiv -a \\ \text{bzw. } \mathcal{F}_D(a_D) &= \mathcal{F}(a) - a a_D \end{aligned} \tag{3.22}$$

Man kann sich (3.17) also als aus einer Legendre - Transformation hervorgegangen vorstellen. Analog zu $\tau(a) = \frac{\partial^2\mathcal{F}(a)}{\partial a^2}$ ist auch [20]

$$\tau_D(a_D) = \frac{\partial^2\mathcal{F}_D(a_D)}{\partial a_D^2} = -\frac{1}{\tau(a)}. \tag{3.23}$$

3.4 Die Singularitäten

Zunächst müssen noch die Singularitäten von $\mathcal{M}$ bestimmt werden. Singuläre Punkte sind Verzweigungspunkte auf dem Raum der Moduli $\mathcal{M}$. Das heißt in unserem Fall, wenn u in $e^{2\pi i}u$ übergeht, geht $a(u)$ in $f(a(u), a_D(u))$ und a_D in $g(a(u), a_D(u))$ über. f und g sind dabei linear in a und a_D; man nennt die Funktionen f und g auch Monodromie. Mit dieser anschaulichen Bedeutung findet man sofort eine Singularität. Für sehr große a wird die Kopplungskonstante g sehr klein (vergleiche (3.4)), das heißt es, dominiert in (3.12) der perturbative Anteil. Die Theorie wird damit annähernd klassisch ($u = \frac{1}{2}a^2$):

$$\begin{aligned} u \longrightarrow \infty : \quad \mathcal{F} &\approx \frac{i}{2\pi} a^2 \ln \frac{a^2}{\Lambda^2} \\ \tau(a) &\approx \frac{i}{\pi}(\ln \frac{a^2}{\Lambda^2} + 3). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Weiter findet man für $u \longrightarrow \infty$

$$\begin{aligned} a &\approx \sqrt{2u} \\ a_D &\approx \frac{i}{\pi}\sqrt{2u} \ln(\frac{2u}{\Lambda^2} + 2). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Damit findet man ($u \longrightarrow e^{2\pi i} u$)

$$\begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix} \longrightarrow M_\infty \begin{pmatrix} a_D(u) \\ a(u) \end{pmatrix} \qquad M_\infty = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

M_∞ beschreibt die Monodromie im Unendlichen.

Es stellt sich nun die Frage, ob es weitere singuläre Punkte auf $\mathcal{M}$ gibt. Eine einzelne Singularität genügt nicht, denn dann wäre die Positivität von (3.12) nicht gegeben. Die nächst einfache Möglichkeit wäre damit, zwei weitere singuläre Stellen zu betrachten. Dabei müssen diese dann von Null verschieden sein (obwohl $u = 0$ ja klassisch einer Singularität entspricht!). Die Singularität ist also gewandert. Hier muß aber noch die oben erwähnte R - Symmetrie berücksichtigt werden. Denn (3.12) ist nur dann invariant unter $\theta \to e^{i\alpha}\theta$, $\quad \overline{\theta} \to e^{i\alpha}\overline{\theta}$, $\quad \Phi \to e^{2i\alpha}\Phi$, wenn aus dem nicht - perturbativen Anteil aus (3.11), $\Phi^2 \sum_k \mathcal{F}(\frac{\Lambda}{\Phi})^{4k}$, folgt:

$$(e^{4i\alpha})^{2k} = 1, \quad \text{dh.} \quad \alpha = \frac{2\pi n}{8}, \quad n \epsilon \mathbf{Z}.$$

Die Instanton - Beiträge brechen die $U(1)$ - Symmetrie somit zu einer $\mathbf{Z}_8$ - Symmetrie. Das heißt, auf $\mathcal{M}$ gibt es eine $u \to -u$ - Symmetrie, womit folgt, daß mit u auch $-u$ eine Singularität sein muß. Zwei singuläre Stellen sind damit der einfachste, auch von Seiberg und Witten verfolgte Ansatz. In der Tat haben die Autoren von [15] gezeigt, daß es keine weiteren singulären Punkte geben kann.

Nach [1] wird an der Singularität $u = u_0$ ein *magnetischer Monopol* $n_e = 0, n_m \neq 0$ masselos und bei $u = -u_0$ ein *Dyon* ($n_e \neq 0, n_m \neq 0$). Genauer betrachtet man dazu einen magnetischen Monopol mit $n_m = 1, m = \sqrt{2}a_D$. Seine Masse verschwindet, wenn $a_D = 0$ wird. Man kann zeigen [20], daß in einer solchen Umgebung

$$\begin{aligned} a_D &\approx c(u - u_0) \\ a &\approx \frac{i}{\pi} c(u - u_0) \ln(u - u_0) \\ \tau_D(a_D) &= -\frac{i}{\pi} \ln(a_D) \end{aligned} \tag{3.27}$$

gilt. Die entsprechende Monodromiematrix lautet

$$M_{u_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.28}$$

Anhand von (3.27) sieht man noch einmal, was passiert. In der Nähe des Punktes, an dem ein magnetischer Monopol masselos wird, $u \approx u_0$, ist $\tau(a) = -\frac{1}{\tau_D(a_D)}$ sehr klein und damit nach (3.4) die Kopplungskonstante sehr groß. Wir befinden uns hier im Bereich starker Kopplung, wo eine Reihenentwicklung der eigentlichen Theorie in g nichts mehr bringt. Definiert man sich allerdings wie in (3.3) eine duale Kopplungskonstante g_D aus τ_D, so kann man die duale Theorie in dieser entwickeln, und somit wiederum Aussagen über die ursprüngliche Theorie machen. Ganz analog zur Singularität bei u_0 wird bei $-u_0$ ein Dyon masselos, und man erhält eine dritte Monodromiematrix.
Die gesuchten mehrwertigen Funktionen $a(u), a_D(u)$ anhand der drei vorgegebenen singulären Punkte samt Monodromiematrizen zu bestimmen, ist ein klassisches Riemann - Hilbert - Problem. Seiberg und Witten finden:

$$\begin{aligned} a_D(u) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{u_0}^{u} dx \frac{\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-u_0^2}} \\ a(u) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-u_0}^{u_0} dx \frac{\sqrt{x-u}}{\sqrt{x^2-u_0^2}}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Im Prinzip kann man nun $a = a(u)$ bestimmen, erhält $a_D = a_D(a)$ und berechnet aus $a_D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a}$ das Präpotential $\mathcal{F}(a)$. Damit erhält man dann auch die verschiedenen Koeffizienten F_k.

4 Instantonen

4.1 Motivation und Definition

Ein Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung der *Instanton - Koeffizienten* F_k aus dem nichtperturbativen Anteil des Präpotentials in (3.12). Wie der Name schon sagt, werden diese von Instanton - Konfigurationen hervorgerufen, ein Begriff, den ich im folgenden kurz erläutern möchte. Dazu muß man zunächst vom Minkowski- zum euklidischen Raum übergehen, was durch eine Wick - Rotation $\hat{t} \rightarrow it$ erreicht wird. Dies bedeutet:

$$e^{iS[x,t]} \longrightarrow e^{-S[x,\hat{t}]}. \tag{4.1}$$

Unter einem Instanton versteht man nun eine Feldkonfiguration, die zu einer selbstdualen Feldstärke führt, $F_{\mu\nu} = +\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$, die damit automatisch die Yang - Mills - Gleichungen löst: $D^\mu F_{\mu\nu} = \frac{i}{2}D^\mu \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} = 0$.[3] Man kann nun zeigen [19], daß die Instantonen bei endlicher Wirkung in disjunkte topologische Klassen zerfallen, die man mit der sogenannten *Windungszahl* k, auch topologische Ladung genannt, klassifiziert. Der Instanton - Beitrag zur Wirkung ergibt sich dann zu:

$$S = \frac{8\pi^2}{g^2}k \qquad k = 0, 1, 2, ... \tag{4.2}$$

Das Problem, Lösungen der Yang - Mills - Gleichungen zu finden, ist somit verlagert worden: Gesucht ist nun eine selbstduale Feldstärke mit topologischer Ladung k.
Desweiteren erkennt man an (4.2), warum Instantonen nicht - perturbativen Effekten entsprechen, denn der Faktor $e^{-\frac{8\pi^2}{g^2}}$ ist im Rahmen der Störungstheorie nie zu erreichen.

4.2 Die ADHM - Konstruktion

Atiyah, Drinfield, Hitchin und Manin (ADHM) [4] haben eine Methode entwickelt, mit der man *alle* selbstdualen Lösungen der Windungszahl k konstruieren kann. Diese Methode soll im folgenden

[3] Hier wurde die Bianchi - Identität $\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu}D_\sigma F_{\mu\nu} = 0$ benutzt.

erläutert werden.
Es sei $M^{\alpha\dot\alpha}_{\lambda l}$ eine $(k+1)*k$ - Matrix mit quaternionialen Einträgen,

$$\begin{aligned} M^{\alpha\dot\alpha}_{\lambda l} &= M^{\mu}_{\lambda l}\sigma^{\alpha\dot\alpha}_{\mu} \\ \lambda &= 0,1\ldots k \text{ wie alle griechischen Indizes} \\ l &= 1\ldots k \text{ wie alle lateinischen Buchstaben .} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dabei soll M linear in $x^{\alpha\dot\alpha} = x_\mu\sigma^{\mu\alpha\dot\alpha}$ sein:

$$M^{\alpha\dot\alpha}_{\lambda l} = B^{\alpha\dot\alpha}_{\lambda l} - C^{\alpha}_{\lambda l\gamma}x^{\gamma\dot\alpha}. \tag{4.4}$$

Damit die aus dem weiter unten definierten Eichfeld A_μ folgende Feldstärke selbstdual ist, muß M folgende Zwangsbedingung erfüllen:

$$\overline{M}^{\dot\alpha}_{l\lambda}M_{\alpha\dot\beta\lambda j} \stackrel{!}{=} (f^{-1})_{lj}\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}, \tag{4.5}$$

wobei $\overline{M}^{\dot\alpha\alpha}_{l\lambda} \equiv M^{\mu}_{l\lambda}\overline{\sigma}^{\dot\alpha\alpha}_{\mu}$ ist. Hierin ist f eine reelle, invertierbare $k*k$ - Matrix. Diese Zwangsbedingungen sind mit (4.4) äquivalent zu:

$$\begin{aligned} \overline{B}^{\dot\alpha\alpha}_{l\lambda}B_{\lambda l\alpha\dot\beta} \equiv (\overline{B}B) &\stackrel{!}{=} (\overline{B}B)^T \propto \delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta} \\ (\overline{B}C) &\stackrel{!}{=} (\overline{B}C)^T \\ (\overline{C}C) &\stackrel{!}{=} (\overline{C}C)^T \propto \delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Dabei bedeutet das große T, daß nur in den ADHM - Indizes transponiert wird: $(A_{\lambda l})^T \equiv A_{l\lambda}$. Weiter sei $U^{\alpha\dot\alpha}$ ein quaternionialer, $(k+1)$ - komponentiger Vektor mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \overline{U}^{\dot\alpha\alpha}_{\lambda}(x)U_{\lambda\alpha\dot\beta}(x) &= \delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta} \\ \overline{U}^{\dot\alpha\alpha}_{\lambda}(x)M_{\lambda l\alpha\dot\beta}(x) &= 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Dann liefert das Eichfeld

$$A^{\dot\alpha}_{\mu\dot\beta} \equiv \frac{1}{g}\overline{U}^{\dot\alpha\beta}\partial_\mu U_{\beta\dot\beta} \tag{4.8}$$

folgende Feldstärke:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \\ &= \frac{1}{g}\partial_\mu(\overline{U}\partial_\nu U) + (\overline{U}\partial_\mu U)(\overline{U}\partial_\nu U) - \mu \longleftrightarrow \nu \\ &= \frac{1}{g}\partial_\mu\overline{U}\partial_\nu U - (\partial_\mu\overline{U})U\overline{U}\partial_\nu U - \mu \longleftrightarrow \nu \\ &= \frac{1}{g}\partial_\mu\overline{U}(Id - gU\overline{U})\partial_\nu U - \mu \longleftrightarrow \nu. \end{aligned}$$

Mit $Id - gU\overline{U} = Mf\overline{M}$ und $(\partial_\mu\overline{U}) = -\overline{U}\partial_\mu U$ aus (4.7) folgt weiter:

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{g}\partial_\mu\overline{U}(Mf\overline{M})\partial_\nu U - \mu \longleftrightarrow \nu$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{g}\overline{U}\partial_\mu M f \partial_\nu \overline{M} U - \mu \longleftrightarrow \nu \\
&= \frac{1}{g}\overline{U}C(\overline{\sigma}_\mu f \sigma_\nu - \overline{\sigma}_\nu f \sigma_\mu)\overline{C}U \\
&= \frac{4}{g}\overline{U}C\overline{\sigma}_{\mu\nu} f \overline{C}U. \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Hier habe ich nur noch die Lorentz - Indizes explizit ausgeschrieben; wegen $(\sigma_{\mu\nu})^* = \sigma_{\mu\nu}$ ist die Selbstdualität der Feldstärke unmittelbar einsichtig. Einen Beweis, daß das Vektorfeld (4.9) wirklich die Windungszahl k hat, findet man z.B. in [2].
Um weiter fortfahren zu können, muß man die Zwangsbedingungen (4.6) lösen. Diese sind jedoch nichtlinear, und bis heute sind nur für den Fall $k \leq 3$ explizite Lösungen bekannt. Nach [10] kann man diese Zwangsbedingungen in eine Potenzreihe entwickeln. Schließlich bemerkt man noch, daß Transformationen der Art

$$
\begin{aligned}
M_{\lambda l \alpha\dot{\alpha}} &\longrightarrow M_{\lambda k \alpha\dot{\alpha}} D_{kl} \qquad f \longrightarrow D^{-1} f (D^{-1})^T \qquad U \longrightarrow U \\
M_{\lambda l \alpha\dot{\alpha}} &\longrightarrow \Lambda^{\beta}_{\lambda\kappa\alpha} M_{\kappa l \beta\dot{\alpha}} \qquad f \longrightarrow f \qquad U_{\lambda\alpha\dot{\alpha}} \longrightarrow \Lambda^{\beta}_{\lambda\kappa\alpha} U_{\kappa\beta\dot{\alpha}} \qquad \overline{\Lambda}\Lambda = 1 \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

die Zwangsbedingungen (4.6) nicht ändern und auch keinen Einfluß auf A_μ haben (D und Λ sind dabei unabhängig von x). Diese beiden Eichfreiheiten können nun dazu benutzt werden [10], um B und C auf folgende kanonische Form zu bringen:

$$
C^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \delta^{\alpha}_{\beta} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \delta^{\alpha}_{\beta} \end{pmatrix} \qquad B^{\alpha\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} w_1^{\alpha\dot{\beta}} & \dots & w_k^{\alpha\dot{\beta}} \\ & B'^{\alpha\dot{\beta}}_{lk} & \end{pmatrix}
$$

$$
M' \equiv B' - x \qquad \vec{w} = (w_1 \dots w_k) \qquad B'_{lk} = B'_{kl}. \qquad (4.11)
$$

Das entsprechende Vektorfeld A_μ wird dann mit den folgenden Vektoren $U^{\alpha\dot{\alpha}}_{\lambda}$ gebildet:

$$
U^{\alpha\dot{\alpha}}_{\lambda}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} u^{\alpha\dot{\alpha}} & l = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{\kappa}} [M'^{-1\alpha\dot{\beta}}_{li} \overline{w}_{i\dot{\beta}\beta}]_{\lambda-1} u^{\beta\dot{\alpha}} & 1 \leq \lambda \leq k \end{cases} \qquad (4.12)
$$

$$
\kappa = 1 + w_l^{\alpha\dot{\alpha}} \overline{M}'_{li\dot{\alpha}\beta} M'^{\beta\dot{\beta}}_{ij} \overline{w}_{j\dot{\beta}\alpha}. \qquad (4.13)
$$

Hierin ist $u^{\alpha\dot{\alpha}}$ ein beliebiger, quaternionialer Einheitsvektor: $\overline{u}^{\dot{\alpha}\alpha} u_{\alpha\dot{\alpha}} = 1$. Verschiedene u's geben eichäquivalente Eichfelder. Fixierung von u bedeutet damit eine feste Wahl der Eichung. Im folgenden soll immer $u^{\alpha\dot{\alpha}} = \sigma_0^{\alpha\dot{\alpha}}$ sein, was man auch als *singuläre Eichung* bezeichnet, denn in dieser Eichung wird das Eichfeld A_μ an der Stelle $x_\mu = x_{0\mu}$ singulär, wie man an der expliziten Darstellung weiter unten erkennt. Diese Singularität ist aber akzeptabel, da sie durch Umeichung in eine reguläre Lösung umgewandelt werden kann. In der vorliegenden Arbeit wird in der singulären Eichung gerechnet, da A_μ hier ein gutes Abfallverhalten im Unendlichen aufweist ($\propto \frac{1}{x^3}$, siehe (4.15)).
Um mit dieser Art Kalkül vertraut zu werden, betrachte ich als Beispiel den Fall $k = 1$. Hier ist:

$$
C^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta^{\alpha}_{\beta} \end{pmatrix} \qquad B^{\alpha\dot{\beta}} = \begin{pmatrix} w^{\alpha\dot{\beta}} \\ b^{\alpha\dot{\beta}} \end{pmatrix} \qquad \kappa = \frac{(x - x_0)^2 + \rho^2}{(x - x_0)^2}
$$

$$
\rho^2 = \overline{w}^{\dot{\alpha}\alpha} w_{\alpha\dot{\alpha}} \qquad U_0^{\alpha\dot{\alpha}} = \sqrt{\frac{(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2 + \rho^2}} \sigma_0^{\alpha\dot{\alpha}} \qquad (4.14)
$$

$$
U_1^{\alpha\dot{\alpha}} = -\frac{1}{(x - x_0)^2} \sqrt{\frac{(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2 + \rho^2}} (x - x_0)^{\alpha\dot{\beta}} \overline{w}_{\dot{\beta}\beta} \sigma_0^{\beta\dot{\alpha}}.
$$

Damit folgt für das Eichfeld:

$$A_{\mu\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = \frac{1}{g}\frac{2\,\rho^2\,\overline{\sigma}^{\dot{\alpha}}_{\mu\nu\dot{\beta}}(x-x_0)_\nu}{(x-x_0)^2[(x-x_0)^2+\rho^2]}. \tag{4.15}$$

Hierin ist ρ die *Größe* eines Instantons und x_0^μ der Mittelpunkt, um welchen das Instanton lokalisiert ist. Das $k = 1$ - Instanton hat somit 8 freie Parameter: 4 zur Bestimmung des Mittelpunktes x_0^μ, einer für die Größe ρ und drei, um die Orientierung im $SU(2)$ - Raum festzulegen (diese ist durch $w^{\alpha\dot{\alpha}}/\rho$ gegeben). Allgemein kann man nun zeigen, daß ein Instanton mit topologischer Ladung k $8k$ freie Parameter hat. Plausibel wird dies, wenn man bedenkt, daß auch k sehr weit voneinander entfernte, nicht wechselwirkende $k = 1$ - Instantonen die topologische Gesamtladung k haben. Diese $8k$ freien Parameter nennt man auch *kollektive Koordinaten.* Über all diese muß integriert werden (vergleiche [5]), wenn man entsprechende Greensfunktionen berechnen will. Darauf werde ich später noch genauer eingehen.

Noch sind nicht alle Redundanzen des Problems entfernt. Es besteht ja immer noch die Möglichkeit, daß (4.6) von verschiedenen Parametersätzen gelöst wird, die dennoch ein und dasselbe Eichfeld ergeben. Im Fall $k = 1$ sieht man z.B., daß mit

$$B^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} w^{\alpha\beta} \\ b^{\alpha\beta} \end{pmatrix} \qquad \text{auch} \qquad \hat{B}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -w^{\alpha\beta} \\ b^{\alpha\beta} \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

eine Lösung der Zwangsbedingung ist, die aber auch (4.15) als Eichfeld liefert. Um diese Entartung im Endergebnis aufheben zu können, muß man solche Symmetrien von (4.6) finden. Man kann zeigen [2], daß eine diskrete Symmetriegruppe vorliegt, so daß die Entartung durch Division durch einen Symmetriefaktor S_k aufgehoben wird. S_k zählt die Anzahl der Elemente dieser diskreten Symmetriegruppe, und man findet: $S_1 = 2$ und $S_2 = 8$.

4.3 Fermionen

Meist betrachtet man keine reinen Yang - Mills - Theorien, sondern es liegen auch noch Fermionen vor. So hat man es beispielsweise in der $N = 2$ - SUSY mit zwei Fermionmultipletts zu tun. Entscheidend für die Berechnung von Greensfunktionen sind dabei die sog. fermionischen Nullmoden, das heißt Fermionen, die die masselose Dirac - Gleichung lösen (vergleiche [5]):

$$\overline{\sigma}^\mu_{\dot{\alpha}\alpha} D_\mu(\lambda^\alpha)^{\dot{\beta}}_{\dot{\gamma}} = 0 \tag{4.17}$$

Das in der kovarianten Ableitung D_μ enthaltene Eichfeld ist dabei das in (4.8) definierte, also ein Instanton mit topologischer Ladung k. Der Operator $\overline{\sigma}^\mu D_\mu$ besitzt solche Nullmoden; er ist nicht auf dem gesamten Raum invertierbar, während das für $\sigma^\mu D_\mu$ immer noch der Fall ist. Nach Corrigan et. al [9] sind diese Nullmoden durch folgenden Ansatz gegeben:

$$(\lambda_\alpha)^{\dot{\beta}}_{\dot{\gamma}} = \overline{U}^{\dot{\beta}\gamma}\mathcal{M}_\gamma f \overline{C} U_{\alpha\dot{\gamma}} - \overline{U}^{\dot{\beta}}_{\gamma} C f \mathcal{M}^{\gamma T} U_{\gamma\dot{\gamma}}. \tag{4.18}$$

Hierin ist $\mathcal{M}_{\gamma\kappa k}$ eine $(k+1)*k$ - Matrix von konstanten Grassmann - Spinoren:

$$\mathcal{M}_\gamma = \begin{pmatrix} \mu_{1\gamma} & \cdots & \mu_{k\gamma} \\ & \mathcal{M}'_{ij\gamma} & \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

analog zu den Matrizen B und C im Falle des Eichfeldes. Außerdem habe ich in (4.18) nur noch $SU(2)$ - Indizes explizit ausgeschrieben.
Damit λ nun (4.17) löst, muß

$$\overline{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} D_\mu (\lambda_\alpha)_{\dot{\gamma}}^{\dot{\beta}} = 2\overline{U}^{\dot{\beta}\alpha} Cf(\overline{M}^{\dot{\alpha}} \mathcal{M}_\gamma + \mathcal{M}^{\gamma T} M_\gamma^{\dot{\alpha}}) f\overline{C} U_{\alpha\dot{\gamma}} = 0 \tag{4.20}$$

gelten, also

$$\begin{aligned} \overline{B}_{l\lambda}^{\dot{\alpha}\gamma} \mathcal{M}_{\gamma\lambda k} &= -\mathcal{M}_{l\lambda}^{\gamma} B_{\lambda k\gamma}^{\dot{\alpha}} \\ \overline{C}_{\alpha l\lambda}^{\gamma} \mathcal{M}_{\gamma\lambda k} &= \mathcal{M}_{l\lambda}^{\gamma} C_{\lambda k\gamma\alpha}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Das sind die zu (4.6) analogen fermionischen Zwangsbedingungen. Nach Abzählen der freien Parameter findet man, daß die Matrix $\mathcal{M}$ $4k$ freie Grassmann - Variablen enthält. Dies sind die fermionischen kollektiven Koordinaten, über welche ebenfalls integriert werden muß. Im Fall der $N = 2$ - SUSY liegt noch ein weiteres Fermion ψ vor, das auch (4.18) erfüllen muß. Dieses ψ ist durch eine Matrix $\mathcal{N}^\alpha$ mit ebenfalls $4k$ Freiheitsgraden parametrisiert. Insgesamt liegen also sowohl $8k$ bosonische als auch $8k$ fermionische kollektive Koordinaten vor, was die $N = 2$ - SUSY widerspiegelt.

5 Euler - Lagrange - Gleichungen und Supersymmetrie - Rechnungen

In diesem Kapitel sollen die Bewegungsgleichungen der Felder des Seiberg - Witten - Modells aufgestellt und deren Lösungen hergeleitet werden. Der Fall $k > 1$ basiert dabei entscheidend auf [2].

5.1 Die Gleichungen und ihre SUSY - Invarianz

Die nach (3.2) dieser Arbeit zugrundeliegende Wirkung,

$$\begin{aligned} S = \int d^4x \quad Sp \quad &\{-\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - i\overline{\lambda}\overline{\sigma}^\mu D_\mu\lambda - i\lambda\sigma^\mu D_\mu\overline{\lambda} - i\psi\sigma^\mu D_\mu\overline{\psi} - i\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu D_\mu\psi \\ - \quad &2D^\mu\phi^\dagger D_\mu\phi - g^2[\phi,\phi^\dagger]^2 + 2\sqrt{2}gi([\phi^\dagger,\psi]\lambda + \overline{\lambda}[\phi,\overline{\psi}])\} \end{aligned} \tag{5.1}$$

liefert folgende Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} D^\mu F_{\mu\nu} &= -ig([\phi, D_\nu\phi^\dagger] + [\phi^\dagger, D_\nu\phi]) - \\ &- g(\lambda\sigma_\nu\overline{\lambda} + \overline{\lambda}\overline{\sigma}_\nu\lambda + \psi\sigma_\nu\overline{\psi} + \overline{\psi}\overline{\sigma}_\nu\psi) \\ \overline{\not{D}}\lambda &= \sqrt{2}g[\phi,\overline{\psi}] \\ \not{D}\overline{\lambda} &= \sqrt{2}g[\phi^\dagger,\psi] \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} D^2\phi &= \sqrt{2}ig[\lambda,\psi] + g^2[[\phi,\phi^\dagger],\phi] \\ \overline{\not{D}}\psi &= \sqrt{2}g[\overline{\lambda},\phi] \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} D^2\phi^\dagger &= \sqrt{2}ig[\overline{\lambda},\overline{\psi}] - g^2[[\phi,\phi^\dagger],\phi^\dagger] \\ \not{D}\overline{\psi} &= \sqrt{2}g[\lambda,\phi^\dagger]. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Hierin habe ich noch $\not{D} = \sigma^\mu D_\mu$ und $\overline{\not{D}} = \overline{\sigma}^\mu D_\mu$ eingeführt.
Gesucht ist nun eine Lösung dieses Satzes gekoppelter, nichtlinearer Differentialgleichungen zusammen mit der Randbedingung für das skalare Feld:

$$\phi \stackrel{|x|\to\infty}{\longrightarrow} < \phi > \equiv v, \tag{5.5}$$

damit der in Kapitel 3.2 beschriebene Higgs - Mechanismus stattfindet. Dabei hat man den Wert v genauer als $v^3 \frac{\tau^3}{2}$ zu verstehen: Der Vakuumerwartungswert von ϕ zeigt o.B.d.A. in die 3 - Richtung. Die gesuchte Lösung soll nun um ein Instanton der Windungszahl k entwickelt werden, da letztendlich die Instanton - Koeffizienten aus (3.12) auf andere Art und Weise als bei Seiberg und Witten - nämlich ohne explizites Ausnutzen der Dualität - bestimmt werden sollen.
Sowohl die Gleichungen (5.2) - (5.4) als auch die Wirkung (5.1) sind invariant unter den in (2.2) angegebenen $N = 2$ - SUSY - Transformationen. Sie sind aber auch noch invariant unter der Wirkung der superkonformen Gruppe. Diese besitzt die Generatoren $S^\alpha, \overline{S}_{\dot{\alpha}}$, die die fermionischen Superpartner der speziellen konformen Generatoren K_n sind (vgl. [23], Kap.16). Mit diesen $S^\alpha, \overline{S}_{\dot{\alpha}}$ assoziiert sind die Grassmann - Parameter $\overline{\eta}_{\dot{\alpha}}, \eta^\alpha$, die mit den $\xi, \overline{\xi}$ aus (2.2) zu ortsabhängigen Grassmann - Parametern kombiniert werden können:

$$\begin{aligned} \xi^\alpha(x) &\equiv \xi^\alpha - \overline{\eta}_{\dot{\alpha}} \overline{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\alpha} x^\mu \qquad \overline{\xi}_{\dot{\alpha}}(x) \equiv \overline{\xi}_{\dot{\alpha}} + \eta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} x_\mu \\ \xi'^\alpha(x) &\equiv \xi'^\alpha - \overline{\eta}'_{\dot{\alpha}} \overline{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\alpha} x^\mu \qquad \overline{\xi}'_{\dot{\alpha}}(x) \equiv \overline{\xi}'_{\dot{\alpha}} + \eta'^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} x_\mu . \end{aligned} \tag{5.6}$$

Man kann nun zeigen, daß (5.1) - (5.4) invariant unter folgenden ortsabhängigen Supersymmetrietransformationen sind [2]:

$$\begin{aligned} \delta A^\mu &= -i\overline{\lambda}\overline{\sigma}^\mu \xi(x) + i\overline{\xi}(x)\overline{\sigma}^\mu \lambda + i\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu \xi'(x) - i\overline{\xi}'(x)\overline{\sigma}^\mu \psi \\ \delta\lambda &= -\xi(x)\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + ig\xi(x)[\phi,\phi^\dagger] - i\sqrt{2}\xi'(x)\,\overline{\not{D}}\phi + 2\sqrt{2}i\eta'\phi \\ \delta\overline{\lambda} &= -\overline{\xi}(x)\overline{\sigma}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - ig\overline{\xi}(x)[\phi,\phi^\dagger] - i\sqrt{2}\xi'(x)\,\not{D}\phi^\dagger - 2\sqrt{2}i\overline{\eta}'\phi^\dagger \\ \delta\phi &= \sqrt{2}\xi(x)\psi + \sqrt{2}\xi'(x)\lambda \\ \delta\psi &= -i\sqrt{2}\overline{\xi}(x)\,\overline{\not{D}}\phi + 2\sqrt{2}i\eta\phi + \xi'(x)\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - ig\xi'(x)[\phi,\phi^\dagger] \\ \delta\phi^\dagger &= \sqrt{2}\overline{\xi}(x)\overline{\psi} + \sqrt{2}\overline{\xi}'(x)\overline{\lambda} \\ \delta\overline{\psi} &= -i\sqrt{2}\xi(x)\,\not{D}\phi^\dagger - 2\sqrt{2}i\overline{\eta}\phi^\dagger + \overline{\xi}'(x)\overline{\sigma}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - ig\overline{\xi}'(x)[\phi,\phi^\dagger]. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Diese Transformationsgleichungen gehen also aus (2.2) hervor, indem man letztere um die superkonformen Parameter η, η' erweitert.

5.2 Lösungsansatz und Konstruktion des skalaren Feldes

Wenn die Gleichungen (5.2) - (5.4) um ein Instanton, $F^{\mu\nu} = (F^{\mu\nu})^*$, entwickelt werden sollen, so muß man folgenden Satz von Gleichungen zugrundelegen:

$$\begin{gathered} F_{\mu\nu} = (F_{\mu\nu})^* \\ \\ \overline{\not{D}}\lambda = 0 \qquad \overline{\not{D}}\psi = 0 \\ D^2\phi = \sqrt{2}g[\lambda,\psi] \\ \overline{\lambda} = \overline{\psi} = 0 \qquad \phi^\dagger = 0 \end{gathered} \tag{5.8}$$

Da das Instanton $F^{\mu\nu}$ nämlich von der Ordnung $1/g$ ist, muß dies aufgrund der $N = 2$ - SUSY auch für λ, ψ und ϕ gelten. Da für das Instanton $D^\mu F_{\mu\nu} = 0$ gilt, ist somit (5.8) der einzig konsistente

Satz von Lösungen.
Diese Gleichungen (5.8) sind invariant unter den Transformationen (5.7). Da $F^{\mu\nu}$ selbstdual ist, ist $\overline{\sigma}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}=0$, womit die Invarianz von $\overline{\lambda}=\overline{\psi}=\phi^\dagger=0$ unmittelbar einsichtig ist. Der Nachweis für die Gleichungen der chiralen Felder $F^{\mu\nu},\lambda,\psi$ und ϕ ist aufwendiger. Als Beispiel betrachte ich die Variation von $\overline{\not{D}}\lambda=0$:

$$\begin{aligned}\delta(\overline{\not{D}}\lambda) &= (\delta\,\overline{\not{D}})\lambda+\overline{\not{D}}(\delta\lambda)=g\overline{\sigma}^{\mu}_{\dot{\alpha}\alpha}[\overline{\xi}_{\dot{\beta}}(x)\overline{\sigma}^{\dot{\beta}\beta}_{\mu}\lambda_\beta-\overline{\xi}'_{\dot{\beta}}(x)\overline{\sigma}^{\dot{\beta}\beta}_{\mu}\psi_\beta,\lambda]+\overline{\not{D}}_{\dot{\alpha}\alpha}(-\xi(x)\sigma^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}-\\ &- i\sqrt{2}\overline{\xi}'_{\dot{\beta}}(x)\overline{\sigma}^{\mu\dot{\beta}\alpha}D_\mu\phi+2\sqrt{2}i\eta'^{\alpha}\phi)\\ &= 2g\overline{\xi}'_{\dot{\alpha}}(x)[\psi,\lambda]-i\sqrt{2}\,\overline{\not{D}}_{\dot{\alpha}\alpha}(\overline{\xi}'(x)\,\overline{\not{D}}\phi-2\eta'\phi)\\ &= 2g\overline{\xi}'_{\dot{\alpha}}(x)[\psi,\lambda]+\sqrt{2}i\overline{\xi}'(x)D^2\phi.\end{aligned}$$

Hierbei wurde neben (5.6) auch immer wieder $(A.3)$ benutzt. Für die anderen Gleichungen lassen sich analoge Rechnungen durchführen. Die Selbstdualität der Feldstärke ist also unbedingt notwendig, um die Invarianz der Gleichungen (5.8), das heißt eine Entkopplung der chiralen und antichiralen Felder, zu zeigen.
Mit Kapitel 4 hat man schon drei der vier Felder aus (5.8) bestimmt. Es bleibt noch das Higgs - Feld ϕ zu bestimmen, was in [2] erstmals getan wurde. Man setzt dazu an: $\phi=\phi^{cl}+\phi^{(0)}$, mit

$$\begin{aligned}D^2\phi^{(0)} &= 0\\ D^2\phi^{cl} &= \sqrt{2}g[\lambda,\psi].\end{aligned}\tag{5.9}$$

Hierbei soll $\phi^{cl}\overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow}0$ streben, während für $\phi^{(0)}$ $\phi^{(0)}\overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow}v$ gelten soll.
Zunächst wird $\phi^{(0)}$ berechnet, und zwar mit einem A_μ beliebiger topologischer Ladung aus (4.8) in der kovarianten Ableitung.
Der Ansatz

$$\begin{aligned}\phi^{(0)\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} &= -i\overline{U}^{\dot{\alpha}\alpha}_{\lambda}\mathcal{A}^{\beta}_{\lambda\kappa\alpha}U_{\kappa\beta\dot{\beta}}\\ \partial_\mu\mathcal{A}^{\beta}_{\lambda\kappa\alpha} &= 0\end{aligned}\tag{5.10}$$

zusammen mit dem asymptotischen Verhalten von U aus (4.12):

$$\begin{aligned}U^{\alpha\dot{\alpha}}_0 &\longrightarrow \sigma^{\alpha\dot{\alpha}}_0\\ U^{\alpha\dot{\alpha}}_i &\longrightarrow -\frac{1}{|x|^2}x^{\alpha\dot{\beta}}\overline{w}_{\dot{\beta}\beta}\sigma^{\beta\dot{\alpha}}_0\end{aligned}\tag{5.11}$$

führt damit auf

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \begin{pmatrix}\mathcal{A}^{\beta}_{00\alpha} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathcal{A}'^{\beta}_{\kappa l\alpha} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}\\ \mathcal{A}^{\beta}_{00\alpha} &= -v^a\frac{\tau^{a\beta}_{\alpha}}{2}.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Die $k*k$ - Matrix $\mathcal{A}'^{\beta}_{kl\alpha}$ parametrisiert das homogene Higgs - Feld, wie B und C das Eichfeld A_μ parametrisieren.

Setzt man das Zwischenergebnis in (5.9) ein, so findet man:

$$\begin{aligned} D^2\phi^{(0)\dot\alpha}_{\dot\beta} &= iD^\mu(\overline{U}^{\dot\alpha\alpha}\sigma_{\mu\alpha\dot\gamma}Cf\overline{M}^{\dot\gamma\gamma}\mathcal{A}^\delta_\gamma U_{\delta\dot\beta}+\overline{U}^{\dot\alpha\alpha}\mathcal{A}^\beta_\alpha M_{\beta\dot\gamma}f\overline{\sigma}^{\dot\gamma\delta}_\mu\overline{C}U_{\delta\dot\beta}) \\ &= -i(4\overline{U}^{\dot\alpha}\{Cf\overline{C},\mathcal{A}^\gamma_\alpha\}U_{\gamma\dot\beta}-4\overline{U}^{\dot\alpha\alpha}Cf\overline{M}^{\dot\gamma\gamma}\mathcal{A}^\delta_\gamma M_{\delta\dot\gamma}f\overline{C}U_{\alpha\dot\beta}) \\ &= -i(4\overline{U}'\{f,\mathcal{A}'\}U'-4\overline{U}'fSp(\overline{M}\mathcal{A}M)fU'). \end{aligned}$$

Dabei habe ich nur $SU(2)$ - Indizes ausgeschrieben, Gleichung (4.8) benutzt und $\partial_\mu f=-f(\overline{\sigma}_\mu\overline{C}M+\overline{M}C\sigma_\mu)f$ eingesetzt. Mit Sp ist hier die Spur über $SU(2)$ - Indizes gemeint. Im letzten Schritt habe ich dann noch (5.12) explizit eingesetzt, wobei U' ein aus U hervorgeganger k - komponentiger Vektor ist, bei welchem die Komponente U_0 abgeschnitten wurde.
Mit

$$\begin{aligned} \Lambda_{kl} &\equiv \overline{w}_k\mathcal{A}_{00}w_l-\overline{w}_l\mathcal{A}_{00}w_k \\ W_{kl} &\equiv \overline{w}_kw_l+\overline{w}_lw_k \end{aligned} \tag{5.13}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} Sp(\overline{M}\mathcal{A}M) &= \Lambda+\overline{M}'^{\dot\alpha\alpha}\mathcal{A}'^\beta_\alpha M_{\beta\dot\alpha} \\ &= \Lambda+\frac{1}{2}([\overline{M}'^{\dot\alpha\alpha},\mathcal{A}'^\beta_\alpha]-\overline{M}'^{\dot\alpha\gamma}[M_{\beta\dot\alpha},\mathcal{A}'^\beta_\gamma]-\{\mathcal{A}'^\alpha_\beta,W^\beta_\alpha\}+\{\mathcal{A}'^\alpha_\alpha,f^{-1}\}), \end{aligned}$$

wobei ich die zyklische Vertauschbarkeit der Spur und $\overline{M}M=f^{-1}$ benutzt habe.
Mit dem weiteren Ansatz $\mathcal{A}'^\beta_{kl\alpha}\equiv\mathcal{A}'_{kl}\delta^\beta_\alpha$ bleibt schließlich:

$$\begin{aligned} D^2\phi^{(0)\dot\alpha}_{\dot\beta} &= 4iU'f(\Lambda-\frac{1}{2}\{\mathcal{A}',W\}+\frac{1}{2}Sp([\overline{B}',\mathcal{A}']B'-\overline{B}'[B',\mathcal{A}'])fU' \\ &\overset{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Damit löst das homogene Higgs - Feld genau dann Gleichung (5.9), wenn (mit $B'^{\alpha\dot\alpha}=B'^\mu\sigma^{\alpha\dot\alpha}_\mu$)

$$\frac{1}{2}\{\mathcal{A}',W\}-[B'^\mu,[B'_\mu,\mathcal{A}']]=\Lambda \tag{5.14}$$

ist. Dies ist die Bestimmungsgleichung für die $k*k$ - Matrix $\mathcal{A}'$; da Λ schiefsymmetrisch, W jedoch symmetrisch ist, muß $\mathcal{A}'$ ebenfalls schiefsymmetrisch sein:

$$\mathcal{A}'_{kl}=-\mathcal{A}'_{lk}. \tag{5.15}$$

Ähnlich verläuft die Bestimmung des fermionischen Anteils des Higgs - Feldes, $D^2\phi^{cl}=\sqrt{2}g[\lambda,\psi]$. Für λ,ψ setzt man (4.18) ein, was dann folgenden Ansatz für ϕ^{cl} nahelegt:

$$(\phi^{cl})^{\dot\alpha}_{\dot\beta}=\phi^{cl\dot\alpha}_{(1)\dot\beta}+\phi^{cl\dot\alpha}_{(2)\dot\beta}=-\frac{1}{g}\frac{i}{2\sqrt{2}}\overline{U}^{\dot\alpha\alpha}(\mathcal{N}_\alpha f\mathcal{M}^{T\beta}-\mathcal{M}_\alpha f\mathcal{N}^{T\beta})U_{\beta\dot\beta}+\frac{1}{g}(\phi^{cl}_{(2)})^{\dot\alpha}_{\dot\beta} \tag{5.16}$$

Der Term $\phi^{cl}_{(2)}$ soll übrig bleibende Terme kompensieren. In der Tat ist

$$D^2(\phi^{cl}_{(1)})^{\dot\alpha}_{\dot\beta}=\sqrt{2}g[\lambda,\psi]+4i\overline{U}^{\dot\alpha\alpha}Cf\Lambda_f f\overline{C}U_{\alpha\dot\beta},$$

mit

$$\Lambda_f=-\frac{1}{2\sqrt{2}}(\mathcal{N}^{\beta T}\mathcal{M}_\beta-\mathcal{M}^{\beta T}\mathcal{N}_\beta). \tag{5.17}$$

Per constructionem muß damit

$$D^2(\phi^{cl}_{(2)})^{\dot\alpha}_{\dot\beta} = -4i\overline{U}^{\dot\alpha\alpha}Cf\Lambda_f f\overline{C}U_{\alpha\dot\beta} \tag{5.18}$$

sein. Wie bei der Bestimmung von $\phi^{(0)}$ setzt man auch hier wieder an:

$$\phi^{cl}_{(2)} = -\frac{1}{g}i\overline{U}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \mathcal{A}'_f & \\ 0 & & \end{pmatrix}U, \qquad \partial_\mu\mathcal{A}'_f = 0, \qquad \mathcal{A}'^{\beta}_{fkl\alpha} = \mathcal{A}'_{fkl}\delta^\beta_\alpha \tag{5.19}$$

Eine weitere Rechnung analog der oben durchgeführten führt dann auf die Bestimmungsgleichung für die antisymmetrische $k*k$ - Matrix $\mathcal{A}'_f$:

$$-[B'^\mu,[B'_\mu,\mathcal{A}'_f]] + \frac{1}{2}\{\mathcal{A}'_f, W\} = \Lambda_f. \tag{5.20}$$

Damit ist

$$\phi^{\dot\alpha}_{\dot\beta} = -i\overline{U}^{\dot\alpha\alpha}\mathcal{A}^{\beta}_{tot\alpha}U_{\beta\dot\beta} - \frac{i}{2\sqrt{2}}\overline{U}^{\dot\alpha\alpha}(\mathcal{N}_\alpha f\mathcal{M}^{T\beta} - \mathcal{M}_\alpha f\mathcal{N}^{T\beta})U_{\beta\dot\beta} \tag{5.21}$$

mit

$$\begin{aligned} L\mathcal{A}_{tot} &= \Lambda_{tot} &(5.22)\\ (\Lambda_{tot})_{kl} &= \Lambda_{kl} + \Lambda_{fkl} &(5.23)\\ LX &\equiv -[B'^\mu,[B'_\mu,X]] + \frac{1}{2}\{X,W\}. &(5.24)\end{aligned}$$

Damit sind nun die Felder $\lambda, \psi, A_\mu, \phi$ durch die kollektiven Koordinaten $\mathcal{M}^\alpha, \mathcal{N}^\alpha, B, C, \mathcal{A}_{tot}$ parametrisiert. Die Frage, ob man die Transformationen (5.7) nun von den Feldern auf diese kollektiven Koordinaten übertragen kann, soll im nächsten Kapitel geklärt werden.

5.3 Kollektive Koordinaten

Wie die SUSY - Transformationen auf den kollektiven Koordinaten realisiert werden können, soll zunächst am Beispiel des Eichfeldes gezeigt werden. Grundlage dieses Kapitels ist die Arbeit [3]. Da $\overline{U}$ auf den zu M orthogonalen Raum projiziert, vgl. (4.5), ist $\delta\overline{U}M = -\overline{U}\delta M$ und somit

$$\delta\overline{U} = -\overline{U}\delta M f\overline{M}^4. \tag{5.25}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}\delta A_\mu &= \frac{1}{g}(\delta\overline{U}\partial_\mu U + \overline{U}\partial_\mu\delta U)\\ &= \frac{1}{g}(-\overline{U}\delta M f\overline{M}\partial_\mu U - \overline{U}\partial_\mu(Mf\delta\overline{M}U)).\end{aligned}$$

Benutzt man noch $\delta M = \delta B$ und $\overline{U}M = 0$, so findet man schließlich:

$$\begin{aligned}\delta A_\mu &= \frac{1}{g}(\overline{U}\delta Bf\overline{\sigma}_\mu\overline{C}U - \overline{U}\sigma_\mu Cf\delta\overline{B}U)\\ &\overset{!}{=} \frac{i}{g}\overline{\xi}(x)\overline{\sigma}_\mu(\overline{U}\mathcal{M}f\overline{C}U - \overline{U}Cf\mathcal{M}^TU) - \frac{i}{g}\overline{\xi}'(x)\overline{\sigma}_\mu(\overline{U}\mathcal{N}f\overline{C}U - \overline{U}Cf\mathcal{N}^TU),\end{aligned}$$

[4] ein Term der Art $+\Sigma(x)\overline{U}$ spielt keine Rolle; man kann $\Sigma(x) = 0$ setzen.

wobei ich im letzten Schritt noch λ und ψ aus (4.18) eingesetzt habe und $\delta A_\mu = i\bar{\xi}\overline{\sigma}_\mu\lambda - i\bar{\xi}'\overline{\sigma}_\mu\psi$ benutzt worden ist. Ein Vergleich liefert nun:

$$\begin{aligned} \delta B_{\alpha\dot{\alpha}} &= \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\mathcal{M}_\alpha - \bar{\xi}'_{\dot{\alpha}}\mathcal{N}_\alpha \\ \delta\overline{B}^{\beta}_{\dot{\alpha}} &= \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\mathcal{M}^{T\beta} - \bar{\xi}'_{\dot{\alpha}}\mathcal{N}^{T\beta}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Ganz analog findet man für die fermionischen kollektiven Koordinaten (vgl. [3]):

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{M}_\alpha &= -4iC\xi_\alpha + 2\sqrt{2}C_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}'^{\dot{\alpha}} \\ \delta\mathcal{M}^T_\alpha &= -4i\overline{C}\xi_\alpha + 2\sqrt{2}\bar{\xi}'_{\dot{\alpha}}\overline{C}^{\dot{\alpha}}_{\alpha}, \end{aligned} \tag{5.27}$$

und analoge Gleichungen für $\mathcal{N}_\alpha$. Hierin ist $C_{\alpha\dot{\alpha}}$ eine $(k+1)*k$ - Matrix:

$$C_{\alpha\dot{\alpha}} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{\beta}_{00\alpha}w_{1\beta\dot{\alpha}} - w_{l\alpha\dot{\beta}}\mathcal{A}^{\dot{\beta}}_{totl1\dot{\alpha}} & \cdots & \mathcal{A}^{\beta}_{00\alpha}w_{k\beta\dot{\alpha}} - w_{l\alpha\dot{\beta}}\mathcal{A}^{\dot{\alpha}}_{totlk\dot{\beta}} \\ & [\mathcal{A}_{tot}, B'] & \end{pmatrix}. \tag{5.28}$$

Es bleibt schließlich noch das Transformationsverhalten von $\mathcal{A}_{tot}$ zu bestimmen. Dies geschieht mit Hilfe des Higgs - Feldes ϕ:

$$\delta\phi = \delta\{-\frac{i}{2\sqrt{2}}\overline{U}(\mathcal{N}f\mathcal{M}^T - \mathcal{M}f\mathcal{N}^T)U - i\overline{U}\mathcal{A}_{tot}U\} \stackrel{!}{=} \sqrt{2}\xi\psi + \sqrt{2}\xi'\lambda.$$

Einsetzen von $\delta\overline{U}, \delta\mathcal{N}, \delta\mathcal{M}, \delta f = -f(\delta\overline{B}M + \overline{M}\delta B)f$ und eine Rechnung wie oben ergibt für die Variationen nach ξ, ξ':

$$\delta_\xi\mathcal{A}_{tot} = \delta_{\xi'}\mathcal{A}_{tot} = 0.$$

Die Variation von ϕ nach $\bar{\xi}, \bar{\xi}'$ jedoch ist nicht so einfach. Man findet hier:

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{\xi}}\phi^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} &= -i\overline{U}^{\dot{\alpha}\alpha}(\mathcal{M}_\alpha f\bar{\xi}_{\dot{\gamma}}\overline{M}^{\dot{\gamma}\gamma}\mathcal{M}_\gamma f\mathcal{N}^{T\beta} - \mathcal{N}_\alpha f\bar{\xi}_{\dot{\gamma}}\overline{M}^{\dot{\gamma}\gamma}\mathcal{M}_\gamma f\mathcal{M}^{T\beta})U_{\beta\dot{\beta}} \\ &\quad -i\overline{U}^{\dot{\alpha}}\delta_{\bar{\xi}}\mathcal{A}^{\beta}_{tot\alpha}U_{\beta\dot{\beta}}. \end{aligned}$$

Ausnutzen der Zwangsbedingungen (4.21) in der Form $\mathcal{N}^T B\bar{\xi} + \bar{\xi}\overline{B}\mathcal{N} = 0$ ergibt dann:

$$\delta_{\bar{\xi}}\phi^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} = X\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} - i\overline{U}\delta_{\bar{\xi}}\mathcal{A}_{tot}U. \tag{5.29}$$

Da die Supersymmetrietransformationen mit der Spurbildung vertauschen, folgt schließlich $X = 0$ und durch Vergleich:

$$\delta_{\bar{\xi}}\mathcal{A}_{tot} = 0$$

Analog folgt $\delta_{\bar{\xi}'}\mathcal{A}_{tot} = 0$.
Insgesamt gelten damit folgende Transformationen für die kollektiven Koordinaten:

$$\begin{aligned} \delta B_{\alpha\dot{\alpha}} &= \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\mathcal{M}_\alpha - \bar{\xi}'_{\dot{\alpha}}\mathcal{N}_\alpha \\ \delta\mathcal{M}_\alpha &= -4iC\xi_\alpha + 2\sqrt{2}C_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}'^{\dot{\alpha}} \\ \delta\mathcal{N}_\alpha &= 4iC\xi'_\alpha + 2\sqrt{2}C_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}'^{\dot{\alpha}} \\ \delta\mathcal{A}_{tot} &= 0. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Um die Frage zu beantworten, inwiefern (5.30) die Algebra ($A.4$) darstellt, berechnet man die jeweiligen Kommutatoren. Es zeigt sich, daß die einzigen nicht - verschwindenden Kommutatoren die folgenden sind:

$$\begin{aligned}
[\delta_\xi, \delta_{\overline{\xi}}] B_{\alpha\dot{\alpha}} &= 4iC\xi_\alpha \overline{\xi}_{\dot{\alpha}} \\
[\delta_{\xi'}, \delta_{\overline{\xi}'}] B_{\alpha\dot{\alpha}} &= 4iC\xi'_\alpha \overline{\xi}'_{\dot{\alpha}} \\
[\delta_{\overline{\xi}}, \delta_{\overline{\xi}'}] \mathcal{M}_\alpha &= 2\sqrt{2}(\overline{\xi}\overline{\xi}')C_{\mathcal{M}\alpha} \\
[\delta_{\overline{\xi}}, \delta_{\overline{\xi}'}] \mathcal{N}_\alpha &= 2\sqrt{2}(\overline{\xi}\overline{\xi}')C_{\mathcal{N}\alpha}.
\end{aligned}$$

Hierin ist $C_{\mathcal{M}\alpha}$ in Analogie zu $C_{\alpha\dot{\alpha}}$ definiert:

$$C_{\mathcal{M}\alpha} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{00}\mu_1 - \mu_k \mathcal{A}_{totl1} & \cdots & \mathcal{A}_{00}\mu_k - \mathcal{M}_{0l}\mathcal{A}_{totlk} \\ & [\mathcal{A}_{tot}, \mathcal{M}_{ij\alpha}] & \end{pmatrix}_\alpha \tag{5.31}$$

Diese Kommutatoren legen eine Interpretation der C als Erzeugende der Translation nahe, während die Matrix $\mathcal{A}_{tot}$ in $C_{\alpha\dot{\alpha}}$ und $C_{\mathcal{M}\alpha}$ eine Rotation ist [16].

5.4 Der Spezialfall $k = 1$

Den Fall $k = 1$ möchte ich näher betrachten, da man hier die Gleichungen (5.2) - (5.4) intensiver untersuchen kann.
Sowohl A_μ, λ, ψ als auch $\phi^{(0)}$ sind für $k = 1$ schon aus der Literatur bekannt (vgl. [5][6]):

$$\begin{aligned}
A_\mu &= \frac{1}{g}\frac{2\rho^2 x_\nu \overline{\eta}'^a_{\mu\nu}}{x^2(x^2+\rho^2)}\frac{\tau^a}{2} \\
F_{\mu\nu} &= \frac{4\rho^2}{g}\frac{1}{x^2(x^2+\rho^2)^2}(-x^2\overline{\eta}'^a_{\mu\nu} + 2x_\rho x_\nu \overline{\eta}'^a_{\mu\rho} + 2x_\rho x_\mu \overline{\eta}'^a_{\rho\nu})\frac{\tau^a}{2} \\
\phi^{(0)} &= \frac{x^2}{x^2+\rho^2} v^3 \frac{\tau^3}{2} \\
\lambda &= -\xi(x)\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
\psi &= \xi'(x)\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Hierbei habe ich auf die aus der Literatur bekannten η - Symbole zurückgegriffen, deren Zusammenhang mit den σ - Matrizen im Anhang erläutert wird. Man erkennt an den Gleichungen (5.32) einmal, daß $\phi^{(0)}$ im Unendlichen gegen den Vakuumerwartungswert v^3 strebt, und zum anderen, daß die $SU(2)$ - Symmetrie der Fermionen durch eine Symmetrie $\xi(x) \longleftrightarrow \xi'(x)$ realisiert ist.
Es bleibt noch ϕ^{cl} zu berechnen, was man mit den Methoden aus 5.2 machen kann. Ich möchte hier aber einen anderen Weg einschlagen: Erstens, da man im $k = 1$ - Fall mit obiger Methode nicht allzuviel erkennt und zweitens im Hinblick auf das restliche Unterkapitel. Dort werde ich dann nämlich von diesen Rechnungen Gebrauch machen. Der hier eingeschlagene Weg nutzt das Aussehen der fermionischen Nullmoden sowie ($A.3$) explizit aus. Es ist:

$$\begin{aligned}
D^2\phi^{cl} \stackrel{!}{=} \sqrt{2}ig[\lambda, \psi] &= -\sqrt{2}ig\xi(x)\sigma^{\mu\nu}[F_{\mu\nu}, \psi] \\
&= \sqrt{2}(\not{D}\,\overline{\not{D}} + D^2)\xi(x)\psi \\
&= \sqrt{2}\xi(x)D^2\psi + \sqrt{2}(\not{D}\,\overline{\not{D}} + D^2)\xi(x)\cdot\psi \\
&= \sqrt{2}D^2(\xi(x)\psi)
\end{aligned}$$

Hier habe ich noch (5.6) und (5.8) ausgenutzt. Schließlich ergibt sich nach Invertierung des Operators $\frac{1}{D^2}$:

$$\phi^{cl} = \sqrt{2}\xi(x)\psi = \sqrt{2}\xi'(x)\sigma^{\mu\nu}\xi(x)F_{\mu\nu}. \tag{5.33}$$

Damit sind alle Felder bis zur Ordnung $1/g$ bestimmt. Felder in dieser Ordnung versehe ich für den Rest dieses Kapitels mit dem oberen Index cl.
Mit dieser Methode kann man die Gleichungen (5.2) - (5.4) auch noch zu höheren Ordnungen weiterentwickeln. Dabei beginnt man für die Ordnung g^0 (oberer Index (0)) am besten mit (5.4):

$$\begin{aligned} D^2\phi^{\dagger(0)} &= 0 \\ \not{D}\overline{\psi}^{(0)} &= \sqrt{2}g[\lambda^{cl}, \phi^{\dagger(0)}]. \end{aligned} \tag{5.34}$$

$\phi^{\dagger(0)}$ ist aus der Literatur bekannt [5]:

$$\phi^{\dagger(0)} = \frac{x^2}{x^2+\rho^2}\overline{v}^3\frac{\tau^3}{2} \tag{5.35}$$

$\overline{\psi}^{(0)}$ kann nun nach obigem Verfahren berechnet werden:

$$\begin{aligned} \not{D}\overline{\psi}^{(0)} \overset{!}{=} \sqrt{2}g[\lambda^{cl}, \phi^{\dagger(0)}] &= -\sqrt{2}g\xi(x)\sigma^{\mu\nu}[F_{\mu\nu}, \phi^{\dagger(0)}] \\ &= -i\sqrt{2}(\not{D}\,\overline{\not{D}}^{\alpha}_{\beta} + \delta^{\alpha}_{\beta}D^2)\xi^{\beta}(x)\phi^{\dagger(0)} \\ &= -i\sqrt{2}(\not{D}\,\overline{\not{D}}^{\alpha}_{\beta}(\xi^{\beta}(x)\phi^{\dagger(0)}) + \phi^{\dagger(0)}D^2\xi^{\alpha}(x)) \\ &= -i\sqrt{2}\,\not{D}(\xi(x)\,\not{D}\phi^{\dagger(0)} + 2\overline{\eta}\phi^{\dagger(0)}) \end{aligned}$$

und damit gilt

$$\overline{\psi}^{(0)} = -i\sqrt{2}(\xi(x)\,\not{D} + 2\overline{\eta})\phi^{\dagger(0)}. \tag{5.36}$$

Aufgrund der oben erwähnten $SU(2)$ - Symmetrie zwischen den Spinoren findet man sofort:

$$\overline{\lambda}^{(0)} = -i\sqrt{2}(\xi'(x)\,\not{D} + 2\overline{\eta}')\phi^{\dagger(0)}. \tag{5.37}$$

Als nächstes betrachte ich das Eichfeld A_μ, das die Fluktuationsgleichung lösen muß:

$$\begin{aligned} D^2A^{(0)}_{\nu} \quad &- \quad ig[F^{cl}_{\mu\nu}, A^{\mu(0)}] - D^{\mu}D_{\nu}A^{(0)}_{\mu} = \\ = -ig([\phi^{cl}, D_\nu\phi^{\dagger(0)}] \quad &+ \quad [\phi^{\dagger(0)}, D_\nu\phi^{cl}]) - g(\lambda^{cl}\sigma_\nu\overline{\lambda}^{(0)} + \overline{\lambda}^{(0)}\overline{\sigma}_\nu\lambda^{cl} + \psi^{cl}\sigma_\nu\overline{\psi}^{(0)}\overline{\sigma}_\nu\psi^{cl}). \end{aligned}$$

Der rechte Teil der Gleichung ist vollständig bekannt, und er lautet:

$$\begin{aligned} 4g\xi(x)\sigma_\mu[F^{cl}_{\mu\nu}, \overline{\lambda}^{(0)}] \quad &- \quad 3ig\sqrt{2}\overline{\eta}\sigma_\nu[\phi^{\dagger(0)}, \psi^{cl}] - 2ig\sqrt{2}\xi(x)\sigma_\mu\overline{\sigma}_\nu[D_\mu\phi^{\dagger(0)}, \psi^{cl}] \\ &- \quad ig\sqrt{2}\xi(x)[D_\nu\phi^{\dagger(0)}, \psi^{cl}] - ig\sqrt{2}\xi(x)[\phi^{\dagger(0)}, D_\nu\psi^{cl}]. \end{aligned}$$

Ersetzt man weiter ψ durch $\xi'(x)\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ und beachtet (5.37), so findet man schließlich:

$$\begin{aligned} &= 3i\overline{\eta}\sigma_\nu\,\not{D}\overline{\lambda}^{(0)} - i\xi(x)D_\nu\,\not{D}\overline{\lambda}^{(0)} + 2g\xi(x)\sigma^{\mu}[F^{cl}_{\mu\nu}, \overline{\lambda}^{(0)}] + i\xi(x)\sigma_\nu D^2\overline{\lambda}^{(0)} \\ &= i\overline{\eta}\sigma_\nu\,\not{D}\overline{\lambda}^{(0)} - 4i\overline{\eta}D_\nu\overline{\lambda}^{(0)} - i\xi(x)D_\nu\,\not{D}\overline{\lambda}^{(0)} + 2g\xi(x)\sigma^{\mu}[F^{cl}_{\mu\nu}, \overline{\lambda}^{(0)}] + iD^2(\xi(x)\sigma_\nu\overline{\lambda}^{(0)}) \\ &= iD^2(\xi(x)\sigma_\nu\overline{\lambda}^{(0)}) + g\xi(x)\sigma_\mu[F^{cl}_{\mu\nu}, \overline{\lambda}^{(0)}] - iD^{\mu}D_\nu(\xi(x)\sigma_\mu\overline{\lambda}^{(0)}). \end{aligned}$$

Umkehrung der Fluktuationsgleichung liefert somit:

$$A_\mu^{(0)} = i\xi(x)\sigma_\mu\overline{\lambda}^{(0)}, \tag{5.38}$$

und damit gilt

$$F_{\mu\nu}^{(0)} = i\xi(x)\sigma_\nu D_\mu\overline{\lambda}^{(0)} - i\xi(x)\sigma_\mu D_\nu\overline{\lambda}^{(0)} - 4i\overline{\eta}\overline{\sigma}_{\mu\nu}\overline{\lambda}^{(0)}. \tag{5.39}$$

$F_{\mu\nu}^{(0)}$ steht global senkrecht auf $F_{\mu\nu}^{cl}$:

$$\begin{aligned} Sp\int d^4x\, F_{\mu\nu}^{(0)}F^{\mu\nu cl} &= Sp\int d^4x\, [i\xi(x)\sigma_\nu D_\mu\overline{\lambda}^{(0)} - i\xi(x)\sigma_\mu D_\nu\overline{\lambda}^{(0)} - 4i\overline{\eta}\overline{\sigma}_{\mu\nu}\overline{\lambda}^{(0)}]F^{\mu\nu cl} \\ &= Sp\int d^4x\, [i\xi(x)\sigma_\nu D_\mu\overline{\lambda}^{(0)} - i\xi(x)\sigma_\mu D_\nu\overline{\lambda}^{(0)}]F^{\mu\nu cl}. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\int d^4x\, \xi(x)\sigma_\nu(D_\mu\overline{\lambda}^{(0)})F^{\mu\nu cl} =$$
$$\int d^4x\, D_\mu(\xi(x)\sigma_\nu\overline{\lambda}^{(0)}F^{\mu\nu cl}) - \int d^4x\, (\partial_\mu\xi(x))\sigma_\nu\overline{\lambda}^{(0)}F^{\mu\nu cl}.$$

Wegen des starken Abfallverhaltens von $F^{\mu\nu cl}$ und $\lambda^{(0)}$ verschwindet der erste Term, während der zweite ergibt:

$$\begin{aligned} (\partial_\mu\xi(x))\sigma_\nu\overline{\lambda}^{(0)}F^{\mu\nu cl} &= -\overline{\eta}\,\overline{\sigma}_\mu\sigma_\nu\overline{\lambda}^{(0)}F^{\mu\nu cl} \\ &= -2\overline{\eta}\,\overline{\sigma}_{\mu\nu}\overline{\lambda}^{(0)}F^{\mu\nu cl} = 0, \end{aligned}$$

wobei ich noch $F^{\mu\nu cl} = -F^{\nu\mu cl}$ ausgenutzt habe.
Es bleiben noch $\lambda^{(0)}$ und $\psi^{(0)}$ zu bestimmen. Hier ist:

$$\begin{aligned} -ig\overline{\sigma}^\mu[A_\mu^{(0)}, \lambda^{cl}] + \overline{\not{D}}\lambda^{(0)} &= \sqrt{2}g[\phi^{cl}\overline{\psi}^{(0)}] \\ \Leftrightarrow \qquad \overline{\not{D}}\lambda^{(0)} &= 2g\xi(x)[\psi^{cl}, \overline{\psi}^{(0)}]. \end{aligned}$$

Mit zu oben analogen Umformungen findet man schließlich:

$$\lambda^{(0)} = i\xi(x)^2\, \not{D}\overline{\lambda}^{(0)} \tag{5.40}$$

und

$$\psi^{(0)} = i\xi'(x)^2\, \not{D}\overline{\psi}^{(0)}. \tag{5.41}$$

Damit sind nun alle Felder bis zur Ordnung g^0 bestimmt. Die Berechnung der nächsten Ordnung g^1 ist allerdings zum Scheitern verurteilt. Die Feldstärke $F^{\mu\nu(1)}$ muß nämlich u.a. folgenden Anteil enthalten:

$$D^\mu\tilde{F}_{\mu\nu}^{(1)} = -2i[\phi^{\dagger(0)}, D_\nu\phi^{(0)}].$$

Nach [11] kann man nun wieder versuchen, die Fluktuationsgleichung für $A_\mu^{(1)}$ zu invertieren. Dann stellt man aber fest, daß $F_{\mu\nu}^{(1)}$ im Gegensatz zu $F_{\mu\nu}^{cl}$ nicht mehr eindeutig bestimmt ist, da $[\phi^{\dagger(0)}, \phi^{(0)}]$ *nicht* mehr senkrecht auf allen Nullmoden der Fluktuationsgleichung steht.
Solche Nullmoden Z_μ sind durch $(D^\mu Z_\mu = 0) \wedge (D_\nu Z_\mu = (D_\nu Z_\mu)^*)$ gekennzeichnet. Eines dieser Z_μ ist zum Beispiel durch

$$Z_\mu = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial\rho}A_\mu^{cl} = \rho\frac{x_\nu\overline{\eta}'^a_{\mu\nu}}{(x^2+\rho^2)^2}\frac{\tau^a}{2} \tag{5.42}$$

gegeben. Insgesamt gibt es für ein Instanton der Windungszahl k $8k$ solcher bosonischer Nullmoden. Mit $[\phi^{\dagger(0)}, D_\nu \phi^{(0)}] = \frac{4\rho^2|v|^2x^2}{(x^2+\rho^2)^3} x_\mu \overline{\eta}'^a_{\nu\mu} \frac{\tau^a}{2}$ gilt aber:

$$
\begin{aligned}
Sp \int d^4x \, Z_\nu [\phi^{\dagger(0)}, D_\nu \phi^{(0)}] &= 4\rho^3|v|^2 \int d^4x \, \frac{x^2 x_\mu x_\rho}{(x^2+\rho^2)^5} \overline{\eta}'^a_{\mu\nu} \overline{\eta}'^a_{\rho\nu} \\
&= 12\rho^3|v|^2 \int d^4x \, \frac{x^4}{(x^2+\rho^2)^5} \\
&= 3\rho|v|^2\pi^2 \neq 0
\end{aligned}
$$

und damit kann $F^{\mu\nu(1)}$ nur noch bis auf eine Beimischung bosonischer Nullmoden bestimmt werden. Um das Eichfeld weiterentwickeln zu können, muß man damit auf die in von Affleck vorgeschlagene Methode der *constraint instantons* zurückgreifen, das heißt, man muß ein Variationsproblem mit Zwangsbedingungen lösen (siehe [7], wo diese Methode eingeführt wird).
Der Vollständigkeit halber möchte ich die hier berechneten Felder auch noch in ihren kollektiven Koordinaten angeben:

$$
\begin{aligned}
B_{\alpha\dot{\alpha}} &= \begin{pmatrix} w_{\alpha\dot{\alpha}} \\ X_{\alpha\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \qquad |w| = \rho \qquad X_{\alpha\dot{\alpha}} = x_{0\alpha\dot{\alpha}} \\
\mathcal{M}_\alpha &= \begin{pmatrix} \mu_\alpha \\ \mathcal{M}_{11\alpha} \end{pmatrix} \qquad \mu_\alpha = 4 w_{\alpha\dot{\alpha}} \overline{\eta}^{\dot{\alpha}} \qquad \mathcal{M}_{11\alpha} = 4\xi_\alpha \\
\mathcal{N}_\alpha &= \begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \mathcal{N}_{11\alpha} \end{pmatrix} \qquad \nu_\alpha = 4 w_{\alpha\dot{\alpha}} \overline{\eta}'^{\dot{\alpha}} \qquad \mathcal{N}_{11\alpha} = 4\xi'_\alpha \\
& \mathcal{A}_{tot} = 0.
\end{aligned}
\tag{5.43}
$$

6 Die Instanton - Koeffizienten

In diesem Kapitel sollen $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ aus Gleichung (3.12) mit der Instanton - Konfiguration (5.8) berechnet werden. Dies geschieht wie in [2] beschrieben mit Hilfe der Greensfunktion

$$
G_{l+4} \equiv < \overline{\lambda}_{\dot{\alpha}}(x_1) \overline{\lambda}_{\dot{\beta}}(x_2) \overline{\psi}_{\dot{\gamma}}(x_3) \overline{\psi}_{\dot{\delta}}(x_4) \delta\phi^\dagger(x_5) \ldots \delta\phi^\dagger(x_{l+4}) > . \tag{6.1}
$$

Höhere Koeffizienten als $\mathcal{F}_2$ können nicht explizit berechnet werden; ihnen ist das nächste Kapitel gewidmet.

6.1 Das Instanton - Maß

Um (6.1) berechnen zu können, benötigt man zunächst einmal das Maß über die kollektiven Koordinaten. Nach [5] ist es gegeben durch:

$$
\int d\mu_k = \frac{1}{S_k} \int (\prod_{i=1}^{8k} dX_i d\xi_i) \sqrt{\frac{J_{bose}}{J_{fermi}}} e^{-S_{inst}}. \tag{6.2}
$$

Der Faktor $1/S_k$ spiegelt die in Kapitel 4.2 erläuterte diskrete Redundanz wider. Die X_i und ξ_i sind die jeweils $8k$ bosonischen und fermionischen unabhängigen kollektiven Koordinaten, über welche anstelle der Felder integriert wird: Entsprechend ist $\sqrt{\frac{J_{bose}}{J_{fermi}}}$ die Jacobi - Determinante dieser Transformation von den Feldern auf die kollektiven Koordinaten. Diese ist für $k = 2$ explizit in [12] berechnet worden, während man für $k \geq 3$ auf bisher nicht überwundene Schwierigkeiten stößt. Die

Wirkung S_{inst} schließlich soll nun für ein Instanton der Windungszahl k berechnet werden. Ausgangspunkt ist (5.1) mit den Feldern, die (5.8) lösen. Das heißt, man geht von einer selbstdualen Feldstärke sowie den fermionischen Nullmoden und $\phi = \phi^{cl} + \phi^{(0)}$ aus. $\overline{\psi}$ und $\overline{\lambda}$ verschwinden. $\phi^\dagger$ wird als unabhängig von ϕ betrachtet; insbesondere fordert man von $\phi^\dagger$ *nicht*, daß es irgendeine Gleichung löst, sondern es muß nur die Randbedingung $\phi^\dagger \stackrel{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \overline{v}$ erfüllen. Damit kann man $\phi^\dagger$ nun aber an endlichen Punkten zu Null setzen. Die Wahl dieser Feldkonfiguration liegt in ihrer supersymmetrischen Invarianz begründet, siehe Kapitel 5.
Die einzigen nicht - verschwindenden Terme der Wirkung lauten also:

$$S = \int d^4x\, Sp\{-\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - 2D^\mu\phi^\dagger D_\mu\phi + 2\sqrt{2}gi[\phi^\dagger,\psi]\lambda\}. \tag{6.3}$$

Der von den skalaren Feldern abhängige Anteil läßt sich umformen:

$$\begin{aligned}
&\int d^4x\, Sp\{-2D^\mu\phi^\dagger D_\mu\phi + 2\sqrt{2}gi[\phi^\dagger,\psi]\lambda\} = \\
&\int d^4x\, Sp\{-2D^\mu(\phi^\dagger D_\mu\phi) + 2\phi^\dagger D^2\phi + 2\sqrt{2}gi[\phi^\dagger,\psi]\lambda\} = \\
&\int d^4x\, Sp\{-2D^\mu(\phi^\dagger D_\mu\phi)\} = -2\int d\Omega_\infty \phi^\dagger \hat{x}^\mu D_\mu\phi.
\end{aligned}$$

Hier habe ich nach einer partiellen Integration die Bewegungsgleichung von ϕ eingesetzt; $\hat{x}^\mu$ ist ein Einheitsvektor auf der 3 - Sphäre Ω_∞ im Unendlichen. Außerdem gilt auf dem Rand der Spähre im Unendlichen: $\phi^\dagger = \overline{\mathcal{A}}_{00}$. Also:

$$\begin{aligned}
S &= \int d^4x\,\{-\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\} - 2\int d\Omega_\infty \overline{\mathcal{A}}_{00}\hat{x}^\mu D_\mu\phi^{(0)} - 2\int d\Omega_\infty \overline{\mathcal{A}}_{00}\hat{x}^\mu D_\mu\phi^{cl} \\
&\equiv S_{cl} + S_{higgs} + S_{yuk}.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Aus Kapitel 4 ist $S_{cl} = \frac{8\pi^2}{g^2}k$ schon bekannt.
Als nächstes soll S_{higgs} bestimmt werden, und zwar mit dem bekannten Feld $\phi^{(0)}$ aus Kapitel 5.2. Da nur über die Sphäre im Unendlichen integriert wird, genügt es, die Asymptotik zu betrachten. Mit $\phi^{(0)}$ aus (5.11) gilt:

$$\hat{x}^\mu D_\mu\phi^{(0)} = i\hat{x}^\mu(\overline{U}\partial_\mu M f \overline{M}\mathcal{A}U - \overline{U}\mathcal{A}Mf\partial_\mu\overline{M}U). \tag{6.5}$$

Der Term $\overline{U}\mathcal{A}M$ kann wie folgt vereinfacht werden:

$$\overline{U}\mathcal{A}M = \overline{U}\mathcal{A}(B+Cx) = \overline{U}\mathcal{A}B + \overline{U}\begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & Cx \\ 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & \mathcal{A}' & \end{pmatrix},$$

und mit $\overline{U}M = \overline{U}(B+Cx) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{U}Cx = -\overline{U}B$ aus (4.7) erhält man:

$$\overline{U}\mathcal{A}M = \overline{U}\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{00}w_1 - w_l\mathcal{A}'_{l1} & \cdots & \mathcal{A}_{00}w_k - w_l\mathcal{A}'_{lk} \\ & [\mathcal{A}', B'] & \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

$\overline{M}\mathcal{A}U$ berechnet sich analog. Benutzt man nun neben der Asymptotik (5.11) noch

$$f^{-1} = \overline{M}M \stackrel{|x|\to\infty}{\longrightarrow} |x|^2, \tag{6.7}$$

so findet man schließlich:

$$\hat{x}^\mu D_\mu\phi^{(0)} \stackrel{|x|\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{|x|^3}(\mathcal{A}^\beta_{00\alpha}\sum_i |w_i|^2 - w_{i\alpha\dot{\alpha}}\mathcal{A}'_{ij}\overline{w}^{\dot{\alpha}\beta}_j). \tag{6.8}$$

Damit läßt sich die Integration über die 3 - Sphäre im Unendlichen ausführen, und es bleibt:

$$S_{higgs} = 16\pi^2|\mathcal{A}_{00}|^2 \sum_i |w_i|^2 - 8\pi^2(\overline{w}_i\overline{\mathcal{A}}_{00}w_j - \overline{w}_j\overline{\mathcal{A}}_{00}w_i)\mathcal{A}'_{ij}, \tag{6.9}$$

wobei ich noch $\mathcal{A}'_{ij} = -\mathcal{A}'_{ji}$ ausgenutzt habe.
Genauso kann man S_{yuk} berechnen, indem man die Asymptotik von ϕ^{cl} aus (5.17) einsetzt. Damit findet man:

$$S_{yuk} = 4\sqrt{2}\pi^2\mu_i\overline{\mathcal{A}}_{00}\nu_i - 8\pi^2(\overline{w}\overline{\mathcal{A}}_{00}w_j - \overline{w}_j\overline{\mathcal{A}}_{00}w_i)\mathcal{A}'_{fij}. \tag{6.10}$$

Einen alternativen Weg zur Berechnung von S_{yuk} werde ich in Kapitel 6.3 aufzeigen. Zunächst gebe ich jedoch einmal die komplette Instanton - Wirkung an:

$$\begin{aligned} S_{inst} &= \frac{8\pi^2}{g^2}k + 16\pi^2|\mathcal{A}_{00}|^2\sum_i |w_i|^2 - 8\pi^2(\overline{w}_i\overline{\mathcal{A}}_{00}w_j - \overline{w}_j\overline{\mathcal{A}}_{00}w_i)\mathcal{A}'_{ij} \\ &+ 4\sqrt{2}\pi^2\mu_i\overline{\mathcal{A}}_{00}\nu_i - 8\pi^2(\overline{w}_i\overline{\mathcal{A}}_{00}w_j - \overline{w}_j\overline{\mathcal{A}}_{00}w_i)\mathcal{A}'_{fij} \\ &= \frac{8\pi^2}{g^2}k + 16\pi^2|\mathcal{A}_{00}|^2\sum_i |w_i|^2 + 4\sqrt{2}\pi^2\mu_i\overline{\mathcal{A}}_{00}\nu_i - 8\pi^2(\overline{w}_i\overline{\mathcal{A}}_{00}w_j)\mathcal{A}_{ijtot}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Mit (5.34) zeigt man nun, daß diese Wirkung in der Tat eine supersymmetrische Invariante ist:

$$\begin{aligned} \delta(16\pi^2|\mathcal{A}_{00}|^2\sum_i|w_i|^2) &= 16\pi^2|\mathcal{A}_{00}|^2\sum_i w_i\delta\overline{w_i} = 16\pi^2|\mathcal{A}_{00}|^2(\nu_i w_i\overline{\xi}' - \mu_i w_i\overline{\xi}) \\ \delta(16\pi^2\overline{w}_i\overline{\mathcal{A}}_{00}w_j\mathcal{A}_{totij}) &= 16\pi^2\delta\overline{w}_i\overline{\mathcal{A}}_{00}w_j\mathcal{A}_{totij} \\ &= 16\pi^2(\overline{\xi}'\overline{w}_i\overline{\mathcal{A}}_{00}\nu_j - \mu_i\overline{\mathcal{A}}_{00}w_j\overline{\xi})\mathcal{A}_{totij} \\ \text{und } \delta(4\sqrt{2}\pi^2\mu_i\mathcal{A}_{00}\nu_i) &= 4\sqrt{2}\pi^2\delta\mu_i\mathcal{A}_{00}\nu_i + 4\sqrt{2}\pi^2\mu_i\mathcal{A}_{00}\delta\nu_i \\ &= 16\pi^2C_{0i}\overline{\xi}'\overline{\mathcal{A}}_{00}\nu_i + 16\pi^2\mu_i\overline{\mathcal{A}}_{00}C_{0i}\overline{\xi}. \end{aligned}$$

Darin ist C_{0i} der i-te Eintrag in der 0-ten Zeile der Matrix C_{ki} aus (5.29). Man sieht, daß die Summe der drei Terme verschwindet, so daß (6.11) supersymmetrisch invariant ist.

6.2 Die Koeffizienten $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$

Ich beginne zunächst mit dem weniger komplizierten $k = 1$ - Fall, der den Koeffizienten $\mathcal{F}_1$ liefert. Hier lautet die Wirkung (ausgedrückt in den η - Symbolen aus dem Anhang):

$$\begin{aligned} S_{inst} &= \frac{8\pi^2}{g^2} + 16\pi^2|\mathcal{A}_{00}|^2|w|^2 + \frac{1}{g}4\sqrt{2}\pi^2\mu\overline{\mathcal{A}}_{00}\nu \\ &= \frac{8\pi^2}{g^2} + 4\pi^2|v|^2\rho^2 + \frac{16}{g}\sqrt{2}\pi^2\rho^2\overline{v}^a\overline{\eta}'^a_{\mu\nu}\overline{\eta}'\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\eta}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

In dieser Wirkung tauchen die superkonformen Nullmoden $\overline{\eta}, \overline{\eta}'$ auf: Sie werden angehoben (geliftet). ξ, ξ' hingegen kommen in (6.12) nicht vor; dies sind die 4 ungelifteten supersymmetrischen Nullmoden. Allgemein werden für ein k - Instanton $8k - 4$ Nullmoden angehoben [2].
Da ja auch über die Grassmann - Variablen ξ, ξ' integriert wird, die in der Instanton - Wirkung nicht vorkommen, müssen diese durch die Felder in der Greensfunktion saturiert werden. Dies leisten u.a. die vier Antifermionen in (6.1).
Zunächst jedoch benötigt man noch das Verhalten der Felder $\delta\phi^\dagger, \overline{\psi}$ und $\overline{\lambda}$ für große Entfernungen. In diesem Fall kann man das $\phi^\dagger$ - Feld entwickeln:

$$\phi^\dagger = \frac{(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2+\rho^2}\overline{v}^a\frac{\tau^a}{2} = (1 - \frac{\rho^2}{(x-x_0)^2} \pm \cdots)\overline{v}^a\frac{\tau^a}{2}. \tag{6.13}$$

Die ersten beiden Terme in der Klammer erfüllen noch die langreichweitige $U(1)$ - Bewegungsgleichung (der Higgs - Mechanismus bricht ja die $SU(2)$ - Eichgruppe zur $U(1)$ - Eichgruppe):

$$\Box\phi^\dagger = 0. \tag{6.14}$$

Nach [2] setzt man deshalb an:

$$\delta\phi^\dagger(x) = -\frac{\overline{v}\rho^2}{(x-x_0)^2} = -v^{-1}S_{higgs}G(x,x_0), \tag{6.15}$$

worin

$$G(x,x_0) = \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{(x-x_0)^2} \tag{6.16}$$

der masselose euklidische Propagator des skalaren Feldes ist.
Aus (5.40) und (5.41) erhält man dann die Antifermionen im langreichweitigen Fall:

$$\overline{\psi}_{\dot\alpha}(x) = -i\sqrt{2}\xi^\alpha\ \partial\!\!\!/_{\alpha\dot\alpha}\phi^\dagger(x) = i\sqrt{2}v^{-1}S_{higgs}\xi^\alpha S_{\alpha\dot\alpha}(x,x_0), \tag{6.17}$$

worin noch der Spinorpropagator $S(x,x_0) = \partial\!\!\!/ G(x,x_0)$ eingeführt wurde. Analog erhält man für das andere Feld:

$$\overline{\lambda}_{\dot\alpha}(x) = -i\sqrt{2}\xi'^\alpha S_{\alpha\dot\alpha}(x,x_0)S_{higgs}. \tag{6.18}$$

Diese Form der Felder, proportional zur Higgs - Wirkung S_{higgs}, gilt auch für den komplizierteren $k>1$ - Fall, wobei die auftretenden fermionischen Nullmoden immer die ungelifteten sind (vgl. [2]).
(6.1) lautet nun ausgeschrieben:

$$\begin{aligned}&< \overline{\lambda}_{\dot\alpha}(x_1)\overline{\lambda}_{\dot\beta}(x_2)\overline{\psi}_{\dot\gamma}(x_3)\overline{\psi}_{\dot\delta}(x_4)\delta\phi^\dagger(x_5)\ldots\phi^\dagger(x_{l+4}) > \\ &= \int d\!\!\!/\mu_1\,\overline{\lambda}_{\dot\alpha}(x_1)\overline{\lambda}_{\dot\beta}(x_2)\overline{\psi}_{\dot\gamma}(x_3)\overline{\psi}_{\dot\delta}(x_4)\delta\phi^\dagger(x_5)\ldots\delta\phi^\dagger(x_{l+4}) \\ &= 2^{-8}\pi^{-2}\Lambda^4\int d^4x_0\frac{d\rho}{\rho}d^2\xi d^2\xi' d^2\overline{\eta}d^2\overline{\eta}' e^{-S_{higgs}-S_{yuk}} * Felder.\end{aligned} \tag{6.19}$$

Hierin habe ich (6.2) mit $S_1 = 2$ und $\Lambda^4 = \hat{\mu}^4 e^{-\frac{8\pi^2}{g^2}}$ aus der Pauli - Villars - Regularisierung benutzt (vgl. [5]).
Mit $S_{yuk} = \frac{1}{g}16\sqrt{2}\pi^2\rho^2\overline{v}^a\overline{\eta}'^a_{\mu\nu}\overline{\eta}'\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\eta}$ und den Formeln für die η - Symbole aus dem Anhang findet man:

$$\int d^2\overline{\eta}d^2\overline{\eta}' e^{-S_{yuk}} = -2^9\pi^4g^{-2}\rho^4\overline{v}^2. \tag{6.20}$$

Es bleibt:

$$\begin{aligned}G_{l+4} = -2\frac{\pi^2}{g^2}\Lambda^4\overline{v}^2\int d^4x_0\rho^3 d\rho d^2\xi d^2\xi'(S_{higgs})^{l+4}\xi^2\xi'^2\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\gamma\delta}v^{-l-4}e^{-S_{higgs}} * \\ *S_{\alpha\dot\alpha}(x_0,x_1)S_{\beta\dot\beta}(x_0,x_2)S_{\gamma\dot\gamma}(x_0,x_3)S_{\delta\dot\delta}(x_0,x_4)G(x_0,x_5)\ldots G(x_0,x_{l+4}).\end{aligned}$$

Mit $S_{higgs} = 4\pi^2|v|^2\rho^2$ kann man die ρ - Integration ausführen und erhält:

$$G_{l+4} = \int d^4x_0\frac{(5+l)!\Lambda^4}{16\pi^2g^2(-v^{l+6})}\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\gamma\delta}S_{\alpha\dot\alpha}(x_0,x_1)S_{\beta\dot\beta}(x_0,x_2)S_{\gamma\dot\gamma}(x_0,x_3)S_{\delta\dot\delta}(x_0,x_4)G(x_0,x_5)\ldots G(x_0,x_{l+4}). \tag{6.21}$$

Der zugehörige effektive Vertex, der (6.21) induziert, lautet dann [2]:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2!2!l!}\psi^2\lambda^2(\delta\phi)^l \frac{(5+l)!\Lambda^4}{16\pi^2 g^2(-v)^{l+6}} = \frac{15}{8}\frac{\Lambda^4}{g^2\pi^2}\frac{\psi^2\lambda^2}{\phi^6}. \tag{6.22}$$

Hierin wurde für ϕ noch $\phi = v + \delta\phi$ verwendet. Ein Vergleich mit (3.12) liefert für den ersten Instanton - Koeffizienten:

$$\mathcal{F}_1 = \frac{1}{2} \tag{6.23}$$

in Übereinstimmung mit Seiberg und Witten.
Auch der $k = 2$ - Fall kann noch explizit berechnet werden, wobei der Rechenaufwand erheblich größer ist. Dabei parametrisiere ich die kollektiven Koordinaten nach [2] wie folgt:

$$\mathcal{N}_\gamma = \begin{pmatrix} \nu_{1\gamma} & \nu_{2\gamma} \\ 4\xi'_\gamma + \mathcal{N}_{3\gamma} & \mathcal{N}_{1\gamma} \\ \mathcal{N}_{1\gamma} & 4\xi'_\gamma - \mathcal{N}_{3\gamma} \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}_\alpha = \begin{pmatrix} \mu_{1\alpha} & \mu_{2\alpha} \\ 4\xi_\alpha + \mathcal{M}_{3\alpha} & \mathcal{M}_{1\alpha} \\ \mathcal{M}_{1\alpha} & 4\xi_\alpha - \mathcal{M}_{3\alpha} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ x_0 + b_3 & b_1 \\ b_1 & x_0 - b_3 \end{pmatrix}. \tag{6.24}$$

Die Zwangsbedingungen (4.6) und (4.21) können hier explizit gelöst werden:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{4|b_3|^2} b_3(\overline{w}_2 w_1 - \overline{w}_1 w_2) \\ \mathcal{M}_1 &= \frac{1}{2|b_3|} b_3(2\overline{b_1}\mathcal{M}_3 + \overline{w}_2\mu_1 - \overline{w}_1\mu_2) \\ \mathcal{N}_1 &= \frac{1}{2|b_3|^2} b_3(2\overline{b}_1\mathcal{N}_3 + \overline{w}_2\nu_1 - \overline{w}_1\nu_2). \end{aligned} \tag{6.25}$$

Der Faktor S_2 in (6.2) ist $S_2 = 8$, sowohl $\mathcal{A}'_{12}$ als auch $\mathcal{A}'_{f12}$ können aus (5.25) bestimmt werden:

$$\mathcal{A}'_{12} = -\frac{\omega}{H} \qquad \mathcal{A}'_{f12} = -\frac{\nu_1\mu_2 - \nu_2\mu_1 + 2\mathcal{N}_3\mathcal{M}_1 - 2\mathcal{M}_3\mathcal{N}_1}{H}, \tag{6.26}$$

und die Wirkung schreibt sich mit den neuen Variablen

$$\begin{aligned} H &= L + 4|b_1|^2 + 4|b_3|^2 \\ L &= |w_1|^2 + |w_2|^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 \\ \Omega &= w_1\overline{w}_2 - w_2\overline{w}_1 \\ \omega &= \frac{1}{2}Sp(\Omega\mathcal{A}_{00}) = \overline{w}_2\mathcal{A}_{00}w_1 - \overline{w}_1\mathcal{A}_{00}w_2 \end{aligned} \tag{6.27}$$

als

$$S_{inst} = \frac{16\pi^2}{g^2} + 16\pi^2(L|\mathcal{A}_{00}|^2 - \frac{|\omega|^2}{H}) + 4\sqrt{2}\pi^2[-\nu_i\overline{\mathcal{A}}_{00}\mu_i + \frac{\overline{\omega}}{H}(\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1 + 2\mathcal{M}_3\mathcal{N}_1 - 2\mathcal{N}_3\mathcal{M}_1)]. \tag{6.28}$$

Für die Jacobi - Determinante erhält man (vgl. [2][12]):

$$\sqrt{\frac{J_{bose}}{J_{fermi}}}e^{-S_{cl}} = 2^6\pi^{-8}\Lambda^8 \frac{\left||b_3|^2 - |b_1|^2\right|}{H} \tag{6.29}$$

Für die in (6.1) eingesetzten Felder verwendet man wieder (6.15) bis (6.18), wobei nun aber

$$S_{higgs} = 16\pi^2(L|\mathcal{A}_{00}|^2 - \frac{|\omega|^2}{H}) \tag{6.30}$$

ist. Die unabhängigen fermionischen Koordinaten sind $\mathcal{M}_3, \mathcal{N}_3, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ sowie ξ und ξ'. Die beiden letztgenannten sind die 4 nicht angehobenen, supersymmetrischen Nullmoden, die über die Antifermionen saturiert werden. Die verbleibende fermionische Integration

$$\begin{aligned} & \int d^2\mathcal{M}_3 d^2\mathcal{N}_3 d^2\nu_1 d^2\nu_2 d^2\mu_1 d^2\mu_2 e^{-S_{yuk}} \\ = & \int d^2\mathcal{M}_3 d^2\mathcal{N}_3 d^2\nu_1 d^2\nu_2 d^2\mu_1 d^2\mu_2 e^{-4\sqrt{2}\pi^2[-\nu_i\overline{\mathcal{A}}_{00}\mu_i + \frac{\overline{\omega}}{H}(\mu_1\nu_2 - \nu_1\mu_2 + 2\mathcal{M}_3\mathcal{N}_1 - 2\mathcal{N}_3\mathcal{M}_1)]} \end{aligned}$$

kann mit (6.25) ausgeführt werden und ergibt:

$$\begin{aligned} & \int d^2\mathcal{M}_3 d^2\mathcal{N}_3 d^2\nu_1 d^2\nu_2 d^2\mu_1 d^2\mu_2 e^{-S_{yuk}} \\ = & -\Big(\frac{16\sqrt{2}\pi^6|\omega|}{|b_3|^2 H|\Omega|}\Big)^2 \frac{\overline{v}^5}{v}\Big(\frac{|\Omega|^4}{16} + \frac{1}{2}\frac{|\Omega|^2|\omega|^2}{H|v|^2} + \frac{L^2 - |\Omega|^2}{H^2}|\omega|^2\frac{|\Omega|^2}{|v|^2} + \frac{|\Omega|^2|\omega|^4}{H^4 v^4}\Big). \end{aligned} \tag{6.31}$$

Als Zwischenergebnis findet man:

$$\begin{aligned} -G_{l+4} = & \int d^4b_3 d^4x_0 d^4w_1 d^4w_2 (\frac{16\sqrt{2}\pi^6|\omega|}{|b_3|^2 H|\Omega|^2})^2 \frac{\overline{v}^5}{v} 2^6\pi^{-8}\Lambda^8 (S_{higgs})^{l+4} \frac{||b_3|^2 - |b_1|^2|}{H} * \\ & * \ (-v)^{l+4}\Big(\frac{|\Omega|^4}{16} + \frac{1}{2}\frac{|\Omega|^2|\omega|^2}{H|v|^2} + \frac{L^2 - |\Omega|^2}{H^2}|\omega|^2\frac{|\Omega|^2}{|v|^2} + \frac{|\Omega|^2|\omega|^4}{H^4 v^4}\Big) e^{-S_{higgs}} * \\ & * \ \epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\gamma\delta} S_{\alpha\dot{\alpha}}(x_1, x_0) S_{\beta\dot{\beta}}(x_2, x_0) S_{\gamma\dot{\gamma}}(x_3, x_0) S_{\delta\dot{\delta}}(x_4, x_0) G(x_5, x_0) \ldots G(x_{l+4}, x_0). \end{aligned}$$

Dieser Integrand ist invariant unter folgender Transformation:

$$|b_3|^2 \longrightarrow \frac{|\Omega|^2}{16|b_3|^2}. \tag{6.32}$$

Diese Symmetrie macht man sich zunutze, um die d^4b_3 - Integration auszuführen:

$$\int d^4b_3 = \pi^2 \int_0^\infty |b_3|^2 d|b_3|^2 = 2\pi^2 \int_{\frac{|\Omega|}{4}}^\infty |b_3|^2 d|b_3|^2$$

und erhält damit schließlich:

$$\int d^4b_3 \frac{\Big||b_3|^2 - |b_1|^2\Big|}{|b_3|^4} = \frac{\pi^2}{2}\int_{L+2|\Omega|}^\infty dH.$$

Mit Hilfe des Tricks

$$(S_{higgs})^{l+4} e^{-S_{higgs}} \to \frac{\partial^{l+4}}{\partial(-\lambda)^{l+4}} e^{-\lambda S_{higgs}}\Big|_{\lambda=1}$$

und den weiteren Variablensubstitutionen

$$\begin{aligned} \int d^4w_1 d^4w_2 &= \frac{\pi^4}{4}\int_0^\infty dL \int_0^L |\Omega|^2 d|\Omega| \int_{-1}^1 d\cos\theta \\ |\omega| &= \frac{1}{2}|\Omega||v|\cos\theta \end{aligned}$$

sowie der Reskalierungen $H' = \frac{H}{L}$ und $|\Omega'| = \frac{|\Omega|}{L}$ gelingt es den Autoren von [2], G_{l+4} zu bestimmen:

$$\begin{aligned} G_{l+4} &= \int d^4x_0 \epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\gamma\delta} S_{\alpha\dot{\alpha}}(x_1,x_0) S_{\beta\dot{\beta}}(x_2,x_0) S_{\gamma\dot{\gamma}}(x_3,x_0) S_{\delta\dot{\delta}}(x_4,x_0) G(x_5,x_0)\ldots G(x_{l+4},x_0) * \\ &\quad * \frac{\Lambda^8 (9+l)!}{3\cdot 2^{10}\pi^2(-v)^{10+l}g^6}. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Der zugehörige Vertex lautet hier:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2!2!l!}\psi^2\lambda^2(\delta\phi)^l \frac{(9+l)!\Lambda^8}{3\cdot 2^{10}\pi^2 g^6(-v)^{10+l}} = \frac{945}{32}\frac{\Lambda^8}{\pi^2 g^6}\frac{\lambda^2\psi^2}{\phi^{10}}. \tag{6.34}$$

Durch Vergleich mit (3.12) findet man schließlich $\mathcal{F}_2$:

$$\mathcal{F}_2 = \frac{5}{16} \tag{6.35}$$

wieder in Übereinstimmung mit Seiberg und Witten.

6.3 S_{yuk} alternativ berechnet

Einen ganz anderen Weg zur Berechnung von S_{yuk} aus (6.4) gehen die Autoren in [6]. Diese gehen von den folgenden Bewegungsgleichungen der skalaren Felder aus:

$$D^2\phi = D^2\phi^\dagger = 0,$$

und sie bestimmen die fermionischen Nullmoden von $D^\dagger D$ (siehe unten) in zweiter Ordnung der Störungstheorie. Dazu schreiben sie den fermionischen Teil der Wirkung als:

$$\begin{aligned} S_{ferm} &= Sp\int d^4x\, -i\lambda \not{D}\overline{\lambda} - i\overline{\lambda}\,\overline{\not{D}}\lambda - i\psi\not{D}\overline{\psi} - i\overline{\psi}\,\overline{\not{D}}\psi + 2\sqrt{2}gi([\phi^\dagger,\psi]\lambda + \overline{\lambda}[\phi,\overline{\psi}]) \\ &= -i\begin{pmatrix} \overline{\lambda} & \psi & \lambda & \overline{\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\not{D}} & -\sqrt{2}g[\phi,\cdot] & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}g[\phi^\dagger,\cdot] & \not{D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \not{D} & \sqrt{2}g[\phi^\dagger,\cdot] \\ 0 & 0 & \sqrt{2}g[\phi,\cdot] & \overline{\not{D}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \overline{\psi} \\ \overline{\lambda} \\ \psi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.36}$$

. Mit

$$D^{(0)} = \begin{pmatrix} \overline{\not{D}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \not{D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \not{D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\not{D}} \end{pmatrix}, \quad \epsilon D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}g[\phi,\cdot] & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}[\phi^\dagger,\cdot] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}[\phi^\dagger,\cdot] \\ 0 & 0 & \sqrt{2}g[\phi,\cdot] & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.37}$$

ϵ klein, berechnet man den Beitrag zum Instanton als:

$$\int \prod_{i=1}^{8k-4} d\overline{\eta}_i d\overline{\eta}'_j e^{\int d^4y \phi^\dagger[\lambda_i,\psi_j]} = \sqrt{detD^\dagger D}. \tag{6.38}$$

Das Integral ist dabei über alle angehobenen Nullmoden zu nehmen. Die Determinante berechnet man in Störungstheorie:

$$\begin{aligned} H\Psi &= E\Psi \\ E &= \epsilon E^{(1)} + \epsilon^2 E^{(2)} \\ \Psi &= \psi^{(0)} + \epsilon(\psi^{(1)} + \hat{\psi}^{(1)}) + \epsilon^2(\psi^{(2)} + \hat{\psi}^{(2)} \\ H &= D^\dagger D = D^{\dagger(0)}D^{(0)} + \epsilon(D^{\dagger(0)}D^{(1)} + D^{\dagger(1)}D^{(0)}) + \epsilon^2 D^{\dagger(1)}D^{(1)}. \end{aligned}$$

Hierin habe ich mit $\psi^{(i)}$ den Beitrag i-ter Ordnung zum Eigenvektor Ψ in Richtung der Nullmoden $\psi^{(0)}$ bezeichnet, während $\hat{\psi}^{(i)}$ senkrecht zur Nullmodenrichtung steht. Wegen $E^{(1)} =< \psi^{(0)}|D^{\dagger(0)}D^{(1)}+D^{\dagger(1)}D^{(0)}|\psi^{(0)} >= 0$ findet man in erster Ordnung: $|\hat{\psi}^{(1)} >= -\frac{1}{D^{\dagger(0)}D^{(0)}}D^{\dagger(0)}D^{(1)}|\psi^{(0)} >$. Da man den Term $\frac{1}{D^{\dagger(0)}D^{(0)}} = \sum_i |\psi_i^{(0)} > \frac{1}{D^{\dagger(0)}D^{(0)}} < \psi_i^{(0)}|$ nach Nullmoden entwickeln kann, findet man in zweiter Ordnung der Störungstheorie:

$$E_{ij}^{(2)} = \sum_k < \psi_i^{(0)}|D^{\dagger(1)}|\overline{\psi}_k^{(0)} >< \overline{\psi}_k^{(0)}|D^{(1)}|\overline{\psi}_j^{(0)} >,$$

womit die Determinante nun berechnet werden kann.
Im letzten Teil dieses Kapitel möchte ich nun untersuchen, inwiefern die Rechnung aus 6.2 mit der von [6] übereinstimmt, bzw. wo sich Unterschiede ergeben. Dazu greife ich die Rechnung von Kapitel 6.2 noch einmal auf, benutze aber im weiteren Verlauf den Propagatorformalismus nach [11]. Dazu schreibe ich das skalare Feld als Faltung des Propagators mit dem Yukawa - Term $[\lambda, \psi]$:

$$\int d\Omega_\infty \phi^\dagger \hat{x}^\mu D_\mu \phi = \int d\Omega_\infty \phi^\dagger \hat{x}^\mu D_\mu \int d^4y \frac{1}{D^2}(x,y)[\lambda,\psi](y). \tag{6.39}$$

$\frac{1}{D^2}$ wurde in [11] bestimmt. Er lautet:

$$\frac{1}{D^2}_{ab}(x,y) = \frac{W^{ab}(x,y)}{4\pi^2(x-y)^2} + \frac{C^{ab}(x,y)}{4\pi^2\Pi(x)\Pi(y)}. \tag{6.40}$$

Die Indizes a, b beziehen sich auf die $SU(2)$ - Eichgruppe; folgende Größen kommen in (6.40) zu stehen:

$$\begin{aligned}
\Pi(z) &= 1 + \sum_{i=1}^k \frac{\rho_i^2}{(x-x_{i0})^2} \\
C^{ab}(x,y) &= \sum_{i,j,l,m}^k \frac{\rho_i\rho_j\rho_l\rho_m c_{ij,lm}}{(x-x_{i0})^2(x-x_{j0})^2(y-y_{l0})^2(y-y_{m0})^2}\overline{\eta}'^a_{\mu\nu}(x-x_{0i})_\mu(x-x_{0j})_\nu\overline{\eta}'^b_{\sigma\rho}(y-y_{l0})_\sigma(y-y_{0m})_\rho \\
c_{ij,lm} &= const. \\
W^{ab} &= \frac{1}{2}Sp(\tau^a\Delta(x,y)\tau^b\overline{\Delta}(x,y)) \\
\Delta(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{\Pi(x)}}\left(1 + \sum_{i=1}^k \frac{\sigma^\mu(x-x_{0i})_\mu\overline{\sigma}^\nu(y-y_{0i})_\nu}{(x-x_{0i})^2(y-y_{0i})^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\Pi(y)}}
\end{aligned}$$

Da im x - Raum über die Sphäre im Unendlichen integriert wird, kann man alle diese Größen in x entwickeln:

$$\Pi(x) \to 1, \quad \Delta(x,y) \to \frac{1}{\Pi(y)}, \quad W^{ab} \to \frac{\delta^{ab}}{\Pi(y)}.$$

Wegen $\overline{\eta}'^a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu = 0$ ist $C^{ab}(x,y) \propto \frac{1}{x^3}$. Da in (6.39) aber auch noch ein $\hat{x}^\mu D_\mu$ steht, wird dieser C^{ab} - Term in (6.40) somit $\propto \frac{1}{x^4}$ und liefert keinen Beitrag zur Integration über die Sphäre. Es bleibt:

$$\int d\Omega_\infty \phi^\dagger \hat{x}^\mu D_\mu \phi \longrightarrow \int d\Omega_\infty \phi^\dagger \hat{x}^\mu D_\mu \int d^4y \frac{1}{4\pi^2(x-y)^2\Pi(y)}[\lambda,\psi](y).$$

Die Integration über y spaltet man in 2 Bereiche auf:

a) Fernfeld, $y \to \infty$

b) Nahfeld, $y < o(x)$

Da der Kommutator $[\lambda, \psi] \propto \frac{1}{y6}$ ist, wird dieser Term in a) verschwindend klein, so daß dieser Teil keinen Beitrag liefert. In b) kann man jedoch $(x-y)^2 \approx x^2$ entwickeln; Differentiation und Integration über $d\Omega_\infty$ ergibt damit:

$$\int d\Omega_\infty \phi^\dagger \hat{x}^\mu D_\mu \phi \longrightarrow \int d^4y \phi^\dagger \frac{1}{\Pi(y)} [\lambda, \psi](y). \tag{6.41}$$

Wegen $\Pi(y) = 1 + \sum_i \frac{\rho_i^2}{(y-y_{i0})^2}$ erhält man also noch Zusatzterme $\sum_i \frac{\rho_i^2}{(y-y_{i0})^2}$, wenn man (6.41) mit (6.38) vergleicht. Diese Terme sind insbesondere dann nicht zu vernachlässigen, wenn man sich mit der Integrationsvariable y in der Nähe eines Instantons befindet (lokalisiert am Orte y_{i0}). Geht man damit über den im nächsten Kapitel näher besprochenen Bereich des dilute gas hinaus, bekommt man somit weitere Beiträge als die von Dorey et. al. [2] berechneten. Die Methode der letztgenannten Autoren ist dennoch derjenigen von Affleck et. al. [6] vorzuziehen, da sie manifest supersymmetrisch invariant ist. Für die in [6] beschriebene Methode ist das aber nicht der Fall!

6.4 Höhere Beiträge

In diesem Abschnitt möchte ich kurz der Frage nachgehen, ob man mit obiger Rechnung schon alle Beiträge zu den effektiven Vertizes (6.22, 6.34) erhalten hat. Um effektive Vertizes zu bestimmen, müssen Greensfunktionen berechnet werden, in welche wiederum die äußeren Felder eingesetzt werden. Die Frage nach der Exaktheit der Vertizes läßt sich somit mit Hilfe der äußeren Felder beantworten. Wie weit muß man die äußeren Felder $\phi^\dagger, \overline{\psi}, \overline{\lambda}$ entwickeln? Dies soll zunächst anhand des skalaren Feldes untersucht werden: Gibt es weitere Beiträge zu $\phi^\dagger$ von der Ordnung $\frac{1}{x^2}$, das heißt, ist $\delta\phi^\dagger = -v^{-1} S_{higgs} G(x, x_0)$ aus (6.15) schon exakt?
Um diese Form zu erhalten, wurde ja die Bewegungsgleichung in nullter Ordnung für $\phi^\dagger$, $D^2\phi^\dagger = 0$, gelöst. Das so erhaltene skalare Feld wurde in Potenzen $\frac{\rho}{(x-x_0)^2}$ entwickelt und somit schließlich $\delta\phi^\dagger$ extrahiert.
Schon in der nächsten Ordnung in g muß $\phi^\dagger$ aber folgender Gleichung genügen:

$$D^2\phi^{\dagger(1)} = \sqrt{2} ig[\overline{\lambda}^{(0)}, \overline{\psi}^{(0)}] - g^2[[\phi^{(cl)}, \phi^{\dagger(0)}], \phi^{\dagger(0)}] + igD^\mu[A_\mu^{(0)}, \phi^{\dagger(0)}],$$

oder nach Invertierung des Operators D^2:

$$\phi^{\dagger(1)} = \frac{1}{D^2} * \{\sqrt{2} ig[\overline{\lambda}^{(0)}, \overline{\psi}^{(0)}] - g^2[[\phi^{(cl)}, \phi^{\dagger(0)}], \phi^{\dagger(0)}] + igD^\mu[A_\mu^{(0)}, \phi^{\dagger(0)}]\}.$$

Insbesondere verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung nicht, weshalb Beiträge höherer Ordnung zu den äußeren Feldern und damit auch zur Greensfunktion nicht ausgeschlossen werden können!
Genausowenig kann man eine exakte Aussage über das Abfallverhalten der Antifermionen machen. Es bleibt also weiterhin eine offene Frage, ob die berechneten Greensfunktionen und damit die effektiven Vertizes auch tatsächlich alle möglichen Beiträge enthalten.

7 Verdünntes Gas (dilute gas)

7.1 Idee und Ansatz

In den vorhergehenden Kapiteln war schon häufiger die Rede davon, daß die Instanton - Koeffizienten für $k > 2$ nicht mehr exakt berechnet werden können. Das liegt zum einen an den Jacobi -

Determinanten in (6.2), die bisher nur für $k = 2$ berechnet worden sind. Die größeren Schwierigkeiten jedoch bereiten die ADHM - Zwangsbedingungen (4.6). Für $k > 3$ können diese nicht mehr allgemein gelöst werden. Man muß also nach Näherungsmöglichkeiten suchen, will man $\mathcal{F}_k$ für $k > 2$ berechnen.
Der im folgenden betrachtete Ansatz dieser Art ist die Methode des verdünnten Gases, weiterhin *dilute gas* genannt. Die Idee hierbei ist, eine k - Instanton - Konfiguration durch k nicht wechselwirkende 1 - Instantonen anzunähern. Hierfür haben [10] eine Parametrisierung angegeben, und zwar entwickeln sie (4.6) in eine Potenzreihe, wobei der Entwicklungsparameter

$$\beta = \frac{\rho_i}{|y_i - y_j|} \tag{7.1}$$

ist. Hierin ist ρ_i die Ausdehnung eines Instantons und $|y_i - y_j|$ der Abstand zweier Instantonen. Dilute gas bedeutet nun, daß bei konstanter Größe ρ_i des Instantons $|y_i - y_j| \longrightarrow \infty$, das heißt zwei Instantonen dürfen sich anschaulich gesprochen nicht zu nahe kommen! Den oben genannten Autoren gelingt es, die Nebendiagonalelemente von B' in β zu entwickeln:

$$b'_{ij} = \frac{1}{2}\frac{y_i - y_j}{|y_i - y_j|^2}[\overline{w}_j w_i - \overline{w}_i w_j + \sum_l (\overline{b}'_{lj} b'_{li} - \overline{b}'_{li} b'_{lj})]. \tag{7.2}$$

Betrachtet man den Fall $k = 2$ aus Kapitel 6.2 genauer, so stellt man mit $|b_3| = \frac{1}{2}|y_1 - y_2|$ fest, daß hier die Ordnung β^2 schon das exakte Ergebnis liefert.
Allgemein erkennt man an (7.2), daß die führende Ordnung der Nebendiagonalelemente $\sim O(\beta^2)$ ist! Dilute gas heißt nun, $b'_{ij} = 0$ anzusetzen:

$$B^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} w_1^{\alpha\beta} & \cdots & w_k^{\alpha\beta} \\ y_1^{\alpha\beta} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & y_k^{\alpha\beta} \end{pmatrix}. \tag{7.3}$$

Mit diesem Ansatz ergeben sich über die Zwangsbedingungen (4.21) dann folgende fermionische Matrizen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$:

$$\mathcal{M}_\alpha = \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_k \\ \mathcal{M}_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{M}_{kk} \end{pmatrix}_\alpha , \quad \mathcal{N}_\alpha = \begin{pmatrix} \nu_1 & \cdots & \nu_k \\ \mathcal{N}_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{N}_{kk} \end{pmatrix}_\alpha .$$

Setzt man diese Konfiguration allerdings in die Greensfunktion (6.1) ein, so stellt man fest, daß nicht alle Grassmann - Integrationen saturiert werden, was eine verschwindende Greensfunktion zur Folge hat. Physikalisch liegt dies an der Tatsache, daß in der dilute - gas - Näherung die globale Translationssymmetrie der einzelnen Nullmoden $\mathcal{M}_{ii}, \mathcal{N}_{jj}$ nicht gebrochen wird: Es werden somit weniger als $8k - 4$ Nullmoden angehoben.
Dieses Problem wird gelöst, indem man die Zwangsbedingungen (4.6) nach [10] bis zur nächsten Ordnung entwickelt:

$$B = \begin{pmatrix} w_1 & \dots & w_k \\ y_1 & & b'_{ij} \\ & \ddots & \\ b'_{ij} & & y_k \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \dots & \mu_k \\ \mathcal{M}_{11} & & \mathcal{M}'_{ij} \\ & \ddots & \\ \mathcal{M}'_{ij} & & \mathcal{M}_{kk} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N} = \begin{pmatrix} \nu_1 & \dots & \nu_k \\ \mathcal{N}_{11} & & \mathcal{N}'_{ij} \\ & \ddots & \\ \mathcal{N}'_{ij} & & \mathcal{N}_{kk} \end{pmatrix}. \tag{7.4}$$

Die fermionischen Nebendiagonalelemente sind durch

$$\mathcal{M}'_{ij} = \frac{1}{\overline{y}_i - \overline{y}_j} \overline{b}'_{ij}(\mathcal{M}_{ii} - \mathcal{M}_{jj}) \ , \quad \mathcal{N}'_{ij} \text{ analog} \tag{7.5}$$

gegeben. Es resultiert damit folgende Instanton - Wirkung:

$$S = \frac{8\pi^2}{g^2} k + S_{higgs} - 4\sqrt{2}\pi^2 \sum_i \nu_i \overline{\mathcal{A}}_{00} \mu_i + \hat{S}_{yuk}. \tag{7.6}$$

Der Term S_{higgs} wird weiter unten genauer betrachtet, insbesondere kann er auch in dieser Näherung exakt behandelt werden. Der zweite fermionische Anteil, $\hat{S}_{yuk}$, ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\hat{S}_{yuk} = 8\pi^2 \sum_{i \neq j} \frac{\overline{w}_i \overline{\mathcal{A}}_{00} w_j - \overline{w}_j \overline{\mathcal{A}}_{00} w_i}{|y_i - y_j|^4} \mathcal{N}^{\alpha}_{ii} (w_i \overline{w}_j - w_j \overline{w}_i)_{\alpha\beta} \mathcal{M}^{\beta}_{jj}. \tag{7.7}$$

7.2 Die Greensfunktion im dilute - gas - Limit

Die Greensfunktion lautet in dieser Näherung dann wie folgt:

$$< \overline{\lambda}_{\dot\alpha}(x_1, x_0) \overline{\lambda}_{\dot\beta}(x_2, x_0) \overline{\psi}_{\dot\gamma}(x_3, x_0) \overline{\psi}_{\dot\delta}(x_4, x_0) \delta\phi^\dagger(x_5, x_0) \dots \delta\phi^\dagger(x_{l+4}, x_0) >=$$

$$\begin{aligned} = \ & \frac{1}{(-v)^{l+4}} \Lambda^{4k} \int \prod_{i=1}^{k} d^4 w_i \, d^4 y_i \, d^2\nu_i \, d^2\mu_i \, d^2\mathcal{M}_{ii} \, d^2\mathcal{N}_{ii} \, \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta} \epsilon^{\dot\gamma\dot\delta} S_{\alpha\dot\alpha}(x_0, x_1) S_{\beta\dot\beta}(x_0, x_2) S_{\gamma\dot\gamma}(x_0, x_3) S_{\delta\dot\delta}(x_0, x_4) \, * \\ * \ & G(x_0, x_5) \dots G(x_0, x_{l+4}) \frac{\partial^{l+4}}{\partial(-\lambda)^{l+4}} e^{-\lambda S_{higgs}} \Big|_{\lambda=1} e^{-\hat{S}_{yuk}} e^{4\sqrt{2}\pi^2 \nu_i \overline{\mathcal{A}}_{00} \mu_i}. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Nun macht man die Variablentransformation

$$\rho \equiv \sum_i |w_i|^2 \tag{7.9}$$

und reskaliert die Variablen

$$\Lambda'_{ij} = \frac{\Lambda}{\rho} \quad L' = \frac{L}{\rho}, \tag{7.10}$$

worin L der lineare Operator aus (5.14),

$$LX = \frac{1}{2}\{X, W\} - [B'^{\mu}, [B'_{\mu}, X]] \tag{7.11}$$

ist. Man erkennt an der allgemeinen Form (6.11) der exakten Instanton - Wirkung, daß $S_{yuk} \neq S_{yuk}(\rho)$, während $S_{higgs} = \rho \hat{S}_{higgs}$, mit $\hat{S}_{higgs} \neq \hat{S}_{higgs}(\rho)$ ist. Diese Tatsache überträgt sich auf den dilute - gas - Fall, so daß man die Integration über die neue Variable ρ sofort ausführen kann:

$$\begin{aligned} \int d\rho \, \rho^3 \frac{\partial^{l+4}}{\partial(-\lambda)^{l+4}} e^{-\lambda\rho\hat{S}_{higgs}} &= \frac{\partial^{l+4}}{\partial(-\lambda)^{l+4}} \frac{1}{(-\lambda)^{4k-2} (\hat{S}_{higgs})^{4k-2}} \\ &= \frac{(l + 4k - 3)!}{\hat{S}^{4k-2}_{higgs}}. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Die fermionische Integration kann in dieser Näherung sogar komplett ausgeführt werden:

$$\int \prod_i d^2\nu_i \, d^2\mu_i \; e^{-4\sqrt{2}\pi^2 n_i \overline{\mathcal{A}}_{00}\mu_i} = \frac{(4\sqrt{2}\pi^2)^{2k}}{(2k)!} 2^{-2k} (\overline{\mathcal{A}}_{00})^{2k} \tag{7.13}$$

und

$$\int \prod_{i\neq j} d^2\mathcal{M}_{ii} \, d^2\mathcal{N}_{jj} \; e^{-\hat{S}_{yuk}} = \frac{(8\pi^2)^{2k}}{(2k)!} * \det \hat{X}^{\alpha\beta}_{ij}. \tag{7.14}$$

Hierin ist die Matrix $\hat{X}$ gegeben durch:

$$\hat{X}^{\alpha\beta}_{ij} = \frac{\overline{\Lambda}^{2k}_{ij}}{|y_i - y_j|^{8k}} [(w_i \overline{w}_j - w_j \overline{w}_i)^{\alpha\beta}]^{2k}$$

Faßt man alle diese Terme zusammen, ergibt sich:

$$G_{l+4} = \int d^4x_0 \int_{\sum_i |w_i|^2=1} \prod_i d^4w_i \int_{y_i=0}^{\infty} \prod_{i=2}^{k} *\left(\frac{(l+4k-3)!}{2 * 2^{2k}(2k)!} (8\pi^2)^{2k} (4\sqrt{2}\pi^2)^{2k}\right) * \det X^{\alpha\beta}_{ij} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\delta}} *$$

$$* S_{\alpha\dot{\alpha}}(x_0, x_1) S_{\beta\dot{\beta}}(x_0, x_2) S_{\gamma\dot{\gamma}}(x_0, x_3) S_{\delta\dot{\delta}}(x_0, x_4) G(x_0, x_5) \ldots G(x_0, x_{l+4}). \tag{7.15}$$

Hierin habe ich eine bosonische Integration, nämlich die über die Lokalisationen x_0, abgespalten. Die Ladungen der Instantonen müssen aufgrund der oben erklärten Skalierung auf der Einheitskugel liegen. Die verbleibenden Integrationen über die Orte y_i der Instantonen sind von 0 bis ∞ auszuführen; ein Punkt, auf den ich später noch zu sprechen komme. In der verbleibenden Determinante $\det X$ schließlich sind alle oben ausintegrierten Terme enthalten. X ist gegeben durch:

$$X^{\alpha\beta}_{ij} = \frac{(\overline{\Lambda}_{ij})^{2k} (\overline{\mathcal{A}}_{00})^{2k}}{|y_i - y_j|^{8k} (\hat{S}_{higgs})^{4k-2}} [(w_i \overline{w}_j - w_j \overline{w}_i)^{\alpha\beta}]^{2k} \tag{7.16}$$

Diese resultierende Determinante sowie das Integral (7.15) sind nichttrivial und nicht mehr weiter elementar ausführbar. Es ist jedoch zu beachten, daß die Integrationen über die (nach der Reskalierung) dimensionslosen y_i für $y_i \to 0$ divergieren. Dies wird verständlich, wenn man bedenkt, daß die Näherung des verdünnten Gases nur für $|y_i - y_j| \to \infty$ sinnvoll ist. Hier muß man die Integrale an den unteren Enden abschneiden. Es zeigt sich im $k = 2$ - Fall, daß die betrachtete Determinante für $y_i \to 1$ eine glatte, integrierbare Funktion wird. Diesen Regularisierungsparameter extrapoliere ich somit auch auf größere $k > 2$. Damit bleibt letztendlich nur noch folgende Integration zurück:

$$G_{l+4} = \left(\int_{\sum |w_i|^2=1} \prod_i d^4w_i \int_{y_i=1}^{\infty} \prod_{i=2}^{k} d^4y_i \; \det X^{\alpha\beta}_{ij}\right) * \quad \hat{G}_{l+4}, \tag{7.17}$$

mit

$$\hat{G}_{l+4} = \int d^4x_0 \, \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon \dot{\gamma} \dot{\delta} S_{\alpha\dot{\alpha}}(x_0, x_1) S_{\beta\dot{\beta}}(x_0, x_2) S_{\gamma\dot{\gamma}}(x_0, x_3) S_{\delta\dot{\delta}}(x_0, x_4) G(x_0, x_5) \ldots G(x_0, x_{l+4})$$

Im Fall $k = 2$ sind die Integrale noch elementar ausführbar, und für diesen Fall erhält man einen Instanton - Koeffizienten, der $\mathcal{F}_2$ zu 60% nahekommt.

7.3 Die Rekursionsformel nach Matone

M. Matone leitet in [24] eine Rekursionsformel für die Instanton - Koeffizienten $\mathcal{F}_k$ ab. In diesem Teilkapitel möchte ich kurz auf den Zusammenhang zwischen dieser Rekursionsformel und der im vorigen Unterkapitel eingeführten Näherungsmethode eingehen.
Ausgehend von dem in Kapitel 3 eingeführten Präpotential $\mathcal{F}(a)$ definiert Matone die Funktion

$$G \equiv i\pi(\mathcal{F}(a) - \frac{1}{2}a\frac{\partial}{\partial a}\mathcal{F}(a)),$$

für die er mit Hilfe der Ergebnisse von Seiberg und Witten folgende Differentialgleichung ableitet:

$$(1-G^2)\frac{d^2G}{da^2} + \frac{1}{2}a\frac{dG}{da} = 0. \tag{7.18}$$

Mit einer Potenzreihenentwicklung dieser Gleichung in $\frac{1}{a}$ findet er dann folgende Rekursionsformel für $g_k \equiv 2i\pi k\mathcal{F}_k$, und damit auch für die Koeffizienten $\mathcal{F}_k$:

$$\begin{aligned} g_{k+1} &= \frac{1}{2(k+1)^2}\{(2k-1)(4k-1)g_k + \sum_{i=0}^{k-1} g_{k-i}g_{i+1}c(k,i) - 2\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{j+1} g_{k-j}g_{j+1-i}g_i d(i,j,k)\} \\ c(i,k) &= 2i(k-i-1)+k-1 \\ d(i,j,k) &= [2(k-j)-1][2k-3j-1+2i(j-i+1)]. \end{aligned}$$

Es ist jetzt die Frage, inwiefern man in dilute - gas an diese Rekursionsformel herankommt. Dazu muß man sich noch einmal das Integral (7.14) samt zugöhriger Determinante $X_{ij}^{\alpha\beta}$ anschauen. Es gibt in der Tat keinen Hinweis auf eine solche Rekursionsstruktur des Integrals. Diese Frage muß damit weiterhin offen bleiben.

8 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden die Instanton - Koeffizienten des Präpotentials (3.12) im Seiberg - Witten - Modell untersucht. Dabei wurden nach einer kurzen Einführung in das Modell und den allgemeinen Instanton - Kalkül zunächst die Euler - Lagrange - Gleichungen des Modells genauer analysiert.
Diese Gleichungen wurden um eine selbstduale Instanton - Lösung herum entwickelt. Dabei zeigte es sich, daß der von Dorey et. al. in [2] gewählte Ansatz nicht das gleiche Ergebnis wie das von Affleck in [6] gefundene liefert. Vielmehr weichen beide Resultate voneinander ab, sobald man über dilute gas - Terme hinausgeht. Dennoch wurde in dieser Arbeit die Methode von Dorey et.al. bevorzugt, da sie den großen Vorteil der manifesten supersymmetrischen Invarianz hat.
Die Euler - Lagrange - Gleichungen wurden für den Spezialfall $k = 1$ weiterentwickelt. Ich habe gezeigt, daß dies nur bis zur Ordnung g^0 eindeutig möglich ist; für höhere Ordnungen läßt sich die Fluktuationsgleichung nicht mehr invertieren und damit A_μ nicht mehr eindeutig bestimmen. Vielmehr muß man hier auf die von Affleck in [7] entwickelte Methode der constraint - instantons zurückgreifen.
Es wurde auch die Frage untersucht, ob mit den vorliegenden Rechnungen auch alle Beiträge zu den effektiven Vertizes bzw. den Greensfunktionen erhalten werden. Diese Frage konnte ich nicht eindeutig beantworten; es ist mitnichten klar, daß man keine höheren Beiträge erhält.
Um höhere Instanton - Koeffizienten als die schon aus der Literatur bekannten $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ [2] zu bestimmen, habe ich die Methode des verdünnten Gases angewandt. Damit ist es mir für ein Instanton beliebiger Windungszahl k gelungen, alle fermionischen Integrationen auszuführen. Es bleiben bosonische Integrationen über eine nichttriviale Determinante X.

Es stellt sich die Frage, ob man in diesem letzten Integral auch eine Struktur ähnlich der von Matone [24] gefundenen Rekursionsformel findet. Auch dieses Problem wird in Zukunft noch genauer untersucht werden müssen. Bis zum heutigen Tag gibt es keinen Hinweis auf eine solche Struktur in der Determinante. Nach neuesten Überlegungen [25] dürfte man allerdings in der in dieser Arbeit betrachteten Näherung auch gar keine Rekursionsstruktur finden.

Danksagungen

Herrn Prof. Dr. R. Flume, unter dessen Anleitung diese Arbeit entstand, danke ich für die interessante Aufgabenstellung und hervorragende Betreuung.
Desweiteren möchte ich mich bei H. Storch, T. Albert und K. Ruhlig für die zahlreichen anregenden Diskussionen bedanken. Ebenfalls möchte ich mich bei der gesamten Theoriegruppe des Physikalischen Instituts für die hervorragende Arbeitsatmosphäre bedanken.
Außerdem möchte ich mich bei S. Großkopf, D. Vollmer und W. von Hänisch für die tatkräftige Hilfe bedanken.
Ein ganz besonderer Dank gilt schließlich S. Albrecht für Ihre ständige Unterstützung.
Meinen Eltern möchte ich dafür danken, daß sie mir das Studium überhaupt erst ermöglicht haben.

A Anhang

A.1 Rechenregeln

In dieser Arbeit werden zweikomponentige Weyl - Spinoren $\psi_\alpha, \overline{\psi}_{\dot{\alpha}}$ betrachtet, die sich irreduzibel unter der Überlagerungsgruppe $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$ der Lorentzgruppe transformieren:

$$\psi'_\alpha = M_\alpha^{\ \beta} \psi_\beta \qquad \overline{\psi}'_{\dot{\alpha}} = \overline{M}_{\dot{\alpha}}^{\ \dot{\beta}} \overline{\psi}_{\dot{\beta}},$$

worin $M \,\epsilon\, \mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$ und $\overline{M}$ die zu M komplex konjugierte Matrix ist. $\alpha, \dot{\alpha} = 0, 1$ sind die $SU(2)$ - Indizes; in der gesamten Arbeit wird die Einsteinsche Summenkonvention benutzt.
Das Hoch- und Runterziehen von Indizes erfolgt mit dem antisymmetrischen ϵ - Tensor, $\epsilon^{01} = +1$:

$$\psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \psi_\beta.$$

Sind $SU(2)$ - Indizes nicht ausgeschrieben, so werden sie automatisch kontrahiert:

$$\begin{aligned} \psi\chi &= \psi^\alpha \chi_\alpha = -\chi_\alpha \psi^\alpha = -\epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{\alpha\gamma} \chi^\beta \psi_\gamma = \chi^\beta \psi_\beta = \chi\psi \\ \overline{\psi}\overline{\chi} &= \overline{\psi}_{\dot{\alpha}} \overline{\chi}^{\dot{\alpha}} = -\overline{\chi}^{\dot{\alpha}} \overline{\psi}_{\dot{\alpha}} = -\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} \overline{\chi}_{\dot{\beta}} \overline{\psi}^{\dot{\gamma}} = \overline{\chi}\overline{\psi}. \end{aligned}$$

Die σ - Matrizen sind mit den Pauli - Matrizen $\vec{\tau}$ auf folgende Art verknüpft:

$$\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\alpha\dot{\beta}} \\ \vec{\tau}_{\alpha\dot{\beta}} \end{pmatrix} \qquad \overline{\sigma}^\mu_{\dot{\alpha}\beta} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\dot{\alpha}\beta} \\ -\vec{\tau}_{\dot{\alpha}\beta} \end{pmatrix}.$$

Folgende Linearkombinationen spielen eine wichtige Rolle:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^{\mu\nu\beta} &= \frac{1}{4}(\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \overline{\sigma}^{\nu\dot{\alpha}\beta} - \sigma^\nu_{\alpha\dot{\alpha}} \overline{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}) \\ \overline{\sigma}_{\dot{\alpha}}^{\mu\nu\dot{\beta}} &= \frac{1}{4}(\overline{\sigma}^\mu_{\dot{\alpha}\beta} \sigma^{\nu\beta\dot{\beta}} - \overline{\sigma}^\nu_{\dot{\alpha}\beta} \sigma^{\mu\beta\dot{\beta}}) \end{aligned} \tag{A.1}$$

Weitere Umformungen findet man in [22], deren Notation ich auch übernommen habe. Wichtig sind außerdem noch die sog. η - Symbole, $\eta'^a_{\mu\nu}$, die wie folgt mit den σ - Matrizen zusammenhängen:

$$\sigma_{\mu\nu} = \overline{\eta}'^a_{\mu\nu} \frac{\tau^a}{2} \qquad \overline{\sigma}_{\mu\nu} = \overline{\eta}^a_{\mu\nu} \frac{\tau^a}{2}$$

$$\overline{\eta}'^a_{\mu\nu} = -\overline{\eta}'^a_{\nu\mu}.$$

Der Index a läuft hierbei von $1 \ldots 3$ und ist der Index der adjungierten (Spin 1 -) Darstellung, welche die in dieser Arbeit einzig betrachtete Darstellung ist. Die η - Symbole haben analog den σ - Matrizen einige wichtige Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \overline{\eta}'^a_{\mu\nu} \overline{\eta}'^a_{\rho\sigma} &= \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} - \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \\ \epsilon_{abc} \overline{\eta}'^b_{\mu\nu} \overline{\eta}'^c_{\rho\sigma} &= \delta_{\mu\rho} \overline{\eta}'^a_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \overline{\eta}'^a_{\nu\rho} - \delta_{\rho\nu} \overline{\eta}'^a_{\mu\sigma} + \delta_{\nu\sigma} \overline{\eta}'^a_{\mu\rho}. \end{aligned}$$

Weitere Formeln findet man in [5].
Sowohl die σ - Matrizen als auch die η - Symbole besitzen nun die Dualitätseigenschaft:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu} &= \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \sigma^{\rho\sigma} \qquad \overline{\eta}^a_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \overline{\eta}^{a\rho\sigma} \\ \overline{\sigma}_{\mu\nu} &= -\frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \overline{\sigma}^{\rho\sigma} \qquad \overline{\eta}'^a_{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \overline{\eta}'^{a\rho\sigma} \end{aligned}$$

$$Sp(\sigma^{\mu\nu}\overline{\sigma}_{\mu\nu}) = \overline{\eta}^a_{\mu\nu}\overline{\eta}'^{a\mu\nu} = 0.$$

Damit kann man die Felder nun umschreiben, von $A_\mu = A^a_\mu \frac{\tau^a}{2}$ in $A_\mu = A^{\dot{\alpha}}_{\mu\dot{\beta}}$, alle anderen Felder analog. Nun ist immer $Sp(A_\mu) = A^a_\mu\, Sp(\frac{\tau^a}{2}) = A^{\dot{\alpha}}_{\mu\dot{\alpha}} = 0$.
Die wichtigsten Formeln für das fünfte Kapitel lauten [2]:

$$\overline{\sigma}^\mu\sigma^{\nu\rho} = \frac{1}{2}(g^{\mu\rho}\overline{\sigma}^\nu - g^{\mu\nu}\overline{\sigma}^\rho - i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{\sigma}^\sigma) \tag{A.2}$$

$\sigma^\mu\sigma^{\nu\rho}, \overline{\sigma}^\mu\overline{\sigma}^{\nu\rho}, \sigma\overline{\sigma}^{\nu\rho}$ entsprechend. Hierin ist $g^{\mu\nu}$ die Metrik des zugrundeliegenden Raumes, also $diag(1,-1,-1,-1)$ im Minkowskiraum und $diag(1,1,1,1)$ im Euklidischen. Weiter gelten folgende Formeln für die kovarianten Ableitungen [2]:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu]X &= -ig[F_{\mu\nu}, X] \\ (\not{D}\,\overline{\not{D}})^\beta_\alpha X &= -\delta^\beta_\alpha D^2 X - ig\sigma^{\mu\nu\beta}_\alpha[F_{\mu\nu}, X] \\ (\overline{\not{D}}\,\not{D})^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} X &= -\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} D^2 X - ig\overline{\sigma}^{\mu\nu\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}[F_{\mu\nu}, X] \end{aligned} \tag{A.3}$$

Hierin und in der gesamten Arbeit ist $D_\mu X \equiv \partial_\mu X - ig[A^{cl}_\mu, X]$, in der Notation von Kapitel 5. Die σ - Matrizen projizieren entsprechend ihrer eigenen Dualität auf den jeweiligen selbst- (s.d.) bzw. antiselbstdualen (a.s.d.) Anteil der Feldstärke:

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= \sigma^{\mu\nu}F^{s.d.}_{\mu\nu} \\ \overline{\sigma}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= \overline{\sigma}^{\mu\nu}F^{a.s.d.}_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

A.2 Grundlagen der Supersymmetrie

Hier soll nun eine kurze Einführung in die $N=1$ - SUSY sowie den Superfeldformalismus gegeben werden. Dieser Teil ist als Grundlage für Kapitel 2 gedacht.

A.2.1 Die Algebra und der Superraum

Supersymmetrie ist per definitionem eine Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen. Sie ist eine Erweiterung der Raum - Zeit - Symmetrie, genauer: Man erhält zusätzlich zu den Generatoren der Poincaré - Algebra noch die Generatoren der SUSY - Algebra. Letztere sind fermionische Spin - 1/2 - Operatoren $Q^i_\alpha, \overline{Q}^{j\dot{\alpha}}$. Hierbei beziehen sich die Indizes $\alpha, \dot{\alpha} = 0,1$ auf zweikomponentige Weyl - Spinoren, während $i,j = 1...n$ diese Generatoren durchnumerieren. Man spricht von der $N=n$ Supersymmetrie, für $n>1$ auch von erweiterter Supersymmetrie. Die Generatoren Q sind Teil der sog. Super - Poincaré - Algebra:

$$\begin{gathered} \{Q^i_\alpha, \overline{Q}_{\dot{\beta}j}\} = 2\delta^i_j\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}P_\mu \\ \{Q^i_\alpha, Q^j_\beta\} = \{\overline{Q}_{i\dot{\alpha}}, \overline{Q}_{j\dot{\beta}}\} = 0 \\ [P_\mu, Q^i_\alpha] = [P_\mu, \overline{Q}_{\dot{\alpha}j}] = 0 \\ [P_\mu, P_\nu] = 0. \end{gathered} \tag{A.4}$$

Hierbei ist P_μ der aus der Quantenfeldtheorie bekannte Viererimpuls.
Um die Wirkung der Supersymmetrie - Transformationen auf Quantenfelder determinieren zu können, muß man nun irreduzible Darstellungen obiger Algebra finden. Das eleganteste Mittel hierfür ist der

Superraum. Dazu benötigt man antikommutierende Grassmann - Variablen θ^α, $\overline{\theta}_{\dot\alpha}$:

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = \{\overline{\theta}_{\dot\alpha}, \overline{\theta}_{\dot\beta}\} = \{\theta^\alpha, \overline{\theta}_{\dot\alpha}\} = \{\theta^\alpha, Q^\beta\} = ... = [\theta^\alpha, P_\mu] = 0. \tag{A.5}$$

Mit Hilfe dieser Variablen läßt sich die Algebra $(A.4)$ auf Kommutatoren umschreiben [22]; insbesondere ist $[\theta Q, \overline{\theta Q}] = 2\theta\sigma^\mu\overline{\theta}P_\mu$ (Nicht ausgeschriebene Indizes entsprechen dabei immer automatisch einer Kontraktion: $\theta Q = \theta^\alpha Q_\alpha$). Nun kann man zeigen, daß man eine zu $(A.4)$ korrespondierende Gruppe finden kann und so in der Lage ist, den Superraum in Analogie zum vierdimensionalen Minkowskiraum einzuführen [23]. Letzterer ist durch $x_\mu$parametrisiert, und man führt Quantenfelder $\phi(x)$ über die Relationen

$$\phi(x) = e^{-ixP}\phi(0)e^{ixP} \tag{A.6}$$

$$e^{iyP}e^{ixP} = e^{i(x+y)P} \tag{A.7}$$

ein. Analog definiert man Superfelder im Superraum, parametrisiert durch x_μ, θ^α und $\overline{\theta}_{\dot\alpha}$. Ein Gruppenelement der gesuchten Gruppe lautet

$$g(x, \theta, \overline{\theta}) = e^{i(-xP+\theta Q+\overline{\theta Q})}. \tag{A.8}$$

Die Multiplikation zweier Gruppenelemente ist definiert über

$$g(y, \xi, \overline{\xi})g(x, \theta, \overline{\theta}) = g(x', \theta', \overline{\theta}') \tag{A.9}$$

mit

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + y^\mu + i\xi\sigma^\mu\overline{\theta} - i\theta\sigma^\mu\overline{\xi} \\ \theta' &= \theta + \xi \qquad \overline{\theta}' = \overline{\theta} + \overline{\xi}. \end{aligned}$$

Damit definiert man nun das Superfeld $\Phi(x, \theta, \overline{\theta})$:

$$\Phi(x, \theta, \overline{\theta}) \equiv g(x, \theta, \overline{\theta})\Phi(0,0,0)g^{-1}(x, \theta, \overline{\theta}). \tag{A.10}$$

Genauso, wie man im Minkowski - Raum eine Darstellung von P_μ durch eine Entwicklung von $(A.6)$ findet, $d(P_\mu) = -i\partial_\mu$, erhält man auch im Superraum aus $(A.10)$ eine Darstellung der Supersymmetrie - Generatoren [22]:

$$\begin{aligned} d(Q_\alpha) &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}\partial_\mu \\ d(\overline{Q}^{\dot\alpha}) &= \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}} - i\theta^\alpha\overline{\sigma}^\mu_{\alpha\dot\beta}\epsilon^{\dot\beta\dot\alpha}\partial_\mu, \end{aligned} \tag{A.11}$$

wobei

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \text{ und } \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}} \text{ über } \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\theta^\beta = \delta^\beta_\alpha \; , \; \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}}\overline{\theta}_{\dot\beta} = \delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta} \tag{A.12}$$

definiert sind.
Aus $(A.10)$ und der Haussdorff - Formel ($e^Ae^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\cdots}$) findet man mittels einer Taylorentwicklung folgende Komponentendarstellung eines Superfeldes:

$$\Phi(x, \theta, \overline{\theta}) = \phi(x) + \theta\eta(x) + \overline{\theta}\overline{\chi}(x) + \theta^2 m(x) + \overline{\theta}^2 n(x) + \theta\sigma^\mu\overline{\theta}v_\mu(x) + \theta^2\overline{\theta}\overline{\lambda}(x) + \overline{\theta}^2\theta\psi(x) + \theta^2\overline{\theta}^2 d(x). \tag{A.13}$$

In der Tat kann man dies auch als die eigentliche Definition eines Superfeldes ansehen: $\eta^\alpha(x), \psi^\alpha(x)$, $\overline{\chi}_{\dot\alpha}(x), \overline{\lambda}_{\dot\alpha}(x)$ sind Weyl - Spinoren im vierdimensionalen Minkowski - Raum; $\phi(x), m(x), n(x), d(x)$

komplexe, skalare Quantenfelder, und $v_m(x)$ ist ein komplexes Vektorfeld. Das Ziel, irreduzible Darstellungen der SUSY - Algebra zu finden, ist aber noch nicht ganz erreicht. Denn Darstellungen von $(A.4)$ in der Form $(A.13)$ sind i.a. reduzibel. Man muß noch supersymmetrische Zwangsbedingungen finden, die irreduzible Darstellungen liefern. Die wichtigste Zwangsbedingung lautet:

$$D_\alpha \Phi(x,\theta,\overline{\theta}) = 0, \tag{A.14}$$

wobei $D_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu$ ($\overline{D}_{\dot{\alpha}}$ entsprechend). Man findet leicht, daß $\{D^\alpha, Q^\beta\} = \{D^\alpha, \overline{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0$, so daß mit Φ auch $D\Phi$ ein Superfeld ist. Man nennt das Superfeld, welches $(A.14)$ erfüllt, auch *chirales Superfeld*. Das zweite wichtige Superfeld ist das *relle Vektorsuperfeld* $V(x,\theta,\overline{\theta})$, welches die Zwangsbedingung

$$V(x,\theta,\overline{\theta}) = V^\dagger(x,\theta,\overline{\theta}) \tag{A.15}$$

erfüllt.

A.2.2 $N = 1$ Supersymmetrie

Löst man die Zwangsbedingung $(A.14)$, so erhält man das chirale Superfeld in Komponenten [22]:

$$\Phi(x,\theta,\overline{\theta}) = \phi(x) + i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu\phi(x) + \frac{1}{4}\theta^2\overline{\theta}^2\Box\phi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2(\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\overline{\theta}) + \theta^2 F(x). \tag{A.16}$$

Hierin sind ein Spin - 1/2 - Feld $\psi(x)$, sowie die skalaren Felder $\phi(x)$ und $F(x)$ enthalten. Unter einer Supersymmetrietransformation transformieren sich diese Quantenfelder nun wie folgt:

$$\begin{aligned} \delta\phi(x) &= \sqrt{2}\theta\psi(x) \\ \delta\psi^\alpha(x) &= i\sqrt{2}\sigma^{\mu\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial_\mu\phi(x) + \sqrt{2}\theta^\alpha F \\ \delta F(x) &= i\sqrt{2}\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\overline{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\partial_\mu\psi_\alpha(x). \end{aligned} \tag{A.17}$$

Hieran sieht man nicht nur, wie Bosonen und Fermionen ineinander transformiert werden, sondern auch, daß das Feld $F(x)$ in eine totale Ableitung übergeht.
Damit ist die Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} L &= \int d^4x\, d^2\theta d^2\overline{\theta}\Phi^\dagger\Phi = \\ &= \int d^4x\, [\, -\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\phi + i\partial_\mu\overline{\psi}\overline{\sigma}\psi + F^\dagger F] \end{aligned} \tag{A.18}$$

invariant unter den Transformationen $(A.17)$. Da F nur eine rein algebraische Bewegungsgleichung hat, nennt man F auch *Hilfsfeld*.
Als nächstes betrachte ich das reelle Vektorsuperfeld, $V^\dagger = V$. In Komponenten[5]:

$$V(x,\theta,\overline{\theta}) = -\theta\sigma^\mu\overline{\theta}A_\mu(x) + i\theta^2\overline{\theta\lambda}(x) - i\overline{\theta}^2\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta^2\overline{\theta}^2 D(x). \tag{A.19}$$

Die einzige in dieser Arbeit betrachtete Eichgruppe ist dabei die $SU(2)$ mit den Generatoren $\frac{\tau^a}{2}$. Da das Vektorfeld A_μ in der adjungierten Darstellung sein muß, erfordert SUSY, daß sich das gesamte

[5]Hierbei habe ich von vornherein die *nicht* - supersymmetrische Wess - Zumino - Eichung gewählt; genaueres findet man unter [22], S. 37ff).

Supermultiplett in dieser Darstellung befinden muß:

$$A_\mu = A_\mu^a \frac{\tau^a}{2} \tag{A.20}$$

$$[\frac{\tau^a}{2}, \frac{\tau^b}{2}] = i\epsilon^{abc}\frac{\tau^c}{2} \tag{A.21}$$

$$a, b, c = 1, 2, 3.$$

Aber genauso, wie man in der Yang - Mills - Theorie eher den Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ denn das Potential A_μ betrachtet, führt man auch in der SUSY ein Feldstärkesuperfeld W^α ein:

$$W^\alpha = \frac{1}{4g}\overline{D}^2(e^{2gV}D_\alpha e^{-2gV}), \tag{A.22}$$

wobei g die dimensionslose Kopplungskonstante ist. Mit

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \\ D_\mu\lambda &= \partial_\mu\lambda - ig[A_\mu, \lambda] \\ y^\mu &= x^\mu + i\theta\sigma^\mu\overline{\theta} \\ \lambda(y) &= \lambda(x) + i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu\lambda(x) - \frac{1}{2}\theta^2\overline{\theta}^2\Box\lambda(x) \end{aligned} \tag{A.23}$$

lautet dieses Superfeld in Komponenten:

$$W_\alpha = (-i\lambda_\alpha + \theta_\alpha D - i\sigma_\alpha^{\mu\nu\beta}\theta_\beta F_{\mu\nu} + \theta^2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}D_\mu\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}})(y), \tag{A.24}$$

Die Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} L &= \int d^4x\, d^2\theta Sp[W^\alpha W_\alpha] \\ &= \frac{1}{g}\int d^4x\, [-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} - 2i\lambda\sigma^\mu D_\mu\overline{\lambda} + D^2] \end{aligned} \tag{A.25}$$

ist invariant unter folgenden SUSY - Transformationen:

$$\begin{aligned} \delta F_{\mu\nu} &= i[\theta\sigma_\nu D_\mu\overline{\lambda} - \theta\sigma_\mu D_\nu\overline{\lambda} + \overline{\theta}\overline{\sigma}_\nu D_\mu\lambda - \overline{\theta}\overline{\sigma}_\mu D_\nu\lambda] \\ \delta\lambda &= i\theta D + \sigma^{\mu\nu}\theta F_{\mu\nu} \\ \delta D &= \overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu D_\mu\lambda - \theta\sigma^\mu D_\mu\overline{\lambda}. \end{aligned} \tag{A.26}$$

In $(A.25)$ ist mit Sp die Spurbildung über die $SU(2)$ - Indizes gemeint: $Sp(\frac{\tau^a}{2}\frac{\tau^b}{2}) = \delta^{ab}$. Physikalisch beschreibt $(A.24)$ ein freies, nicht - abelsches Eichteilchen A_μ sowie seinen supersymmetrischen fermionischen Partner λ (*gaugino*). D ist wieder nur ein Hilfsfeld.

Literatur

[1] N. Seiberg und E. Witten, Nucl. Phys. B424 (1994) 19; Nucl. Phys. B430 (1990) 485

[2] N. Dorey, V. Khoze und M. Mattis, *Multi - Instanton Calculus in $N = 2$ - Supersymmetric Gauge Theory*, hep-th/9603136 und Phys. Rev. D54 (1996) 2921

[3] N. Dorey, V. Khoze und M. Mattis, *Multi - Instanton Calculus in $N = 2$ - Supersymmetric Gauge Theory II: Coupling to matter*, hep-th/9607202 und Phys. Rev. D54 (1996) 7832

[4] M. Atiyah, V. Drinfeld, N. Hitchin und Y. Manin, Phys. Lett. A65 (1978) 185

[5] G. t'Hooft, Phys. Rev. D14 (1976) 3432

[6] I. Affleck, M. Dine und N. Seiberg, Nucl. Phys. B241 (1984) 493; Nucl. Phys. B256 (1985) 557

[7] I. Affleck, Nucl. Phys. B191 (1981) 429

[8] N. Seiberg, Phys. Lett.. B206 (1988) 75

[9] E. Corrigan, P. Goddard, und S. Templeton, Nucl. Phys. B151 (1979) 93;
E. Corrigan, D. Fairlie, P. Goddard und S. Templeton, Nucl. Phys. B140 (1978) 31

[10] N. Christ, E. Weinberg und N. Stanton, Phys. Rev. D18 (1978) 2013

[11] L. Brown, R. Carlitz, D. Creamer und C. Lee, Phys. Rev. D17 (1978) 1583

[12] H. Osborn, Ann. Phys. 135 (1981) 373

[13] E. Witten und D. Olive, Phys. Lett. 78B (1978) 97

[14] R. Grimm, M. Sohnius und J. Wess, Nucl. Phys. B159 (1979) 429

[15] R. Flume, M. Magro, L. O'Raifeartaigh, I. Sachs und O. Schnetz, *Uniqueness of the Seiberg - Witten Effective Lagrangian*, hep-th/9611123 und Nucl. Phys. B494 (1997) 331

[16] H. Storch, Private Mitteilungen

[17] G. Moore und E. Witten, *Integration over the u - plane in Donaldson - theory*, hep-th/9709193

[18] L. Alvarez-Gaumé, J. Distler, C. Kounnas und M. Marino *Large Softly broken $N = 2$ QCD*, hep-th/9604004

[19] S. Coleman *The uses of instantons*, in: *Aspects of symmetrie*, Cambridge University Press, 1985

[20] A. Bilal, *Duality in $N = 2$ SUSY $SU(2)$ Yang - Mills Theory: A pedagogical introduction to the work of Seiberg and Witten*, hep-th/9601007

[21] W. Lerche, *Introduction to Seiberg - Witten Theory and its stringy origin*, hep-th/9611190

[22] J. Wess und J. Bagger *Supersymmetrie and Supergravity*, Princeton University Press, 1983

[23] M. Sohnius, *Introducing Supersymmetrie*, Phys. Rep. 128 (1985) 39

[24] M. Matone, Phys. Lett. 357B (1995) 342

[25] R. Flume, H. Storch, Private Mitteilungen