UNIVERSITÄT BONN
Physikalisches Institut

W-Algebren
Quasiprimäre Felder
&
Nicht-Minimale Modelle

Michael Flohr

Dieser Forschungsbericht wurde von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms Universität Bonn als Diplomarbeit angenommen.

Datum: 27. Februar 1991 Referent: Prof. W. Nahm Koreferent: Prof. R. Flume

W-Algebren
Quasiprimäre Felder
&
Nicht-Minimale Modelle

von

Michael Flohr

Abstract

$\mathcal{W}$-algebras are extensions of the Virasoro-algebra by primary fields. In this work an explicit construction of a basis for the quasi-primary fields contained in a $\mathcal{W}$-algebra is given. In particular, the number of independent fields of given conformal dimension is determined. An efficient algorithm for explicitly constructing such algebras is presented. As an application, all $\mathcal{W}$-algebras with one further primary field up to conformal dimension 10 and a few examples for $\mathcal{W}$-algebras with two additional fields are calculated. Some new series of $\mathcal{W}$-algebras which are not related to any minimal model are established using a free field construction with BRST-structure. It is shown that for any $c = 1 - 24\delta$, $\delta \in \mathbb{Z}_+/2$, there exists an infinitely generated $\mathcal{W}$-algebra with generators of dimension $(r^2-1)\delta$, $r \in \mathbb{Z}_+$, which has finitely generated closed sub-algebras. Finally, first results concerning the representation theory are obtained for the simplest example, the $\mathcal{W}(2, \frac{9}{2})$ for $c = -35$.

Post address:
Nussallee 12
D-5300 Bonn 1
W-Germany
email: unp055@dbnrhrz1

BONN-IR-91-30
Bonn University
June 1991
ISSN-0172-8741

I – VII

Inhalt

IV,V Tabellen:

I

Einführung

Konforme Feldtheorie in zwei Dimensionen verspricht, zu einem der wichtigsten Werkzeuge der theoretischen Physik zu werden. Seit den fundamentalen Arbeiten von Belavin, Polyakov, Zamolodchikov [6,88,89,90] einerseits und Friedan, Qiu, Shenker [50,51] andererseits nimmt das Interesse sowohl bei Physikern als auch bei Mathematikern ständig zu [-16,-14,-13,-10,-5,-4,-3,1,52].

Zum einen ist es mit ihr möglich, die Universalitätsklassen der kontinuierlichen Phasenübergänge zweidimensionaler statistischer Systeme zu verstehen. Diese ergeben sich aus den durch die zentrale Ladung c charakterisierten zu den Phasenübergängen korrespondierenden zweidimensionalen Quantenfeldtheorien, genauer durch die zentrale Erweiterung ihrer Symmetriealgebra. Jene Algebra ist nach den Vorstellungen von Belavin, Polyakov und Zamolodchikov [6] gerade diejenige, welche die konforme Gruppe generiert. Die zentrale Erweiterung erscheint dann notwendigerweise im Zusammenhang mit Darstellungen der Algebra auf projektiven Hilberträumen, bei denen das Spektrum des Energieoperators nach unten beschränkt ist.

Zum anderen erhofft man sich von der konformen Feldtheorie Fortschritte bei der String- und Superstringtheorie [-13,-6]. Insbesondere könnte hier das Problem der zehn bzw. 26 Dimensionen gelöst werden, wenn es gelänge, die überzähligen in Form von zusätzlichen Freiheitsgraden einer auf der Weltfläche eines Strings sitzenden Quantenfeldtheorie zu schreiben. Die konforme Invarianz dieser Feldtheorie ist für die Reparametrisierungsinvarianz des Strings notwendig, welche wiederum unbedingt erforderlich scheint, um Quantenmechanik und allgemeine Relativität einheitlich behandeln zu können – um also letztendlich das Geheimnis der Gravitation erklären zu können.

Zum dritten bietet die konforme Feldtheorie die Möglichkeit, ein mathematisch fundierteres und physikalisch exakteres Verständnis von Quantenfeldtheorien zu erhalten. Dies deshalb, weil in zwei Dimensionen Besonderheiten auftreten – zum Beipiel ist nur hier die konforme Gruppe

unendlich dimensional –, die es im Prinzip erlauben, alle physikalisch interessanten Größen exakt auszurechnen, und die es erleichtern, eine mathematisch konsistente axiomatische Definition von (zweidimensionaler) Quantenfeldtheorie zu geben. Vom rein mathematischen Standpunkt aus, wie er vor allem von Segal [-3,76,77] vertreten wird, ergeben sich vielversprechende Zusammenhänge zwischen konformer Feldtheorie und statistischer Mechanik einerseits und Knotentheorie, von-Neumann-Algebren und bestimmten Invarianten von 3-Mannigfaltigkeiten andererseits [68,86,87]. Letztere erinnern an die bis heute empfindlichste Klassifikation von 4-Mannigfaltigkeiten, welche mittels Yang-Mills-Theorien durchgeführt wird. Auch scheint es, daß hier erstmalig der in der modernen Quantenfeldtheorie so erfolgreiche Funktionalintegralkalkül [-15] auf eine elegante mathematische Grundlage gestellt werden könnte [76]. Aber nicht nur die algebraische Topologie, sondern auch die reine Algebra und Gruppentheorie erfahren wichtige Impulse von der konformen Quantenfeldtheorie und vice versa, wobei hier die Konstruktion des Monsters, der größten der sporadischen einfachen Gruppen, mittels Vertexoperatoralgebren durch Frenkel, Lepowsky und Meurman [-16,32] besonders hervorstechend ist.
Zum vierten werden zunehmend interessante und aktuelle theoretische Ergebnisse auf anderen Gebieten der theoretischen Physik mit Hilfe von Methoden aus der konformen Feldtheorie gewonnen. Exemplarisch seien hier die Liouvilletheorien, bei denen immanent konforme Invarianz vorliegt, und die Todatheorien [4,5,19,20], wo das Auftreten dimensionsbehafteter Parameter die konforme Invarianz bricht, genannt. Die Todatheorien führen dabei zu einer tiefen Verbindung zwischen konformer Feldtheorie und integrablen Systemen [4,5,8], also insbesondere auch zur klassichen Physik, und stellen ein Beispiel dafür dar, daß die konforme Feldtheorie auch bei Nichtvorhandensein der vollen konformen Invarianz erfolgreich angewandt werden kann. Desweiteren sei noch erwähnt, daß auch die algebraische Feldtheorie [21,22,23,33,48,49] durch die konforme zu neuem Leben erweckt worden ist.
Nicht zuletzt sei auf die experimentellen Befunde hingewiesen, wie zum Beispiel Hochtemperatur-Supraleitung, sogenannte zweidimensionale Ströme oder der fraktionale Quanten-Hall-Effekt, für die auf konformer Feldtheorie basierende theoretische Modelle entwickelt werden. Inzwischen existieren auch Messungen zweidimensionaler statistischer Systeme an ihren Phasenübergängen zweiter Ordnung, die die bereits erwähnte Klassifikation derselben durch die zweidimensionale konforme Feldtheorie bestätigen. [i,ii,iii,iv,v,vi]

Dies alles mag rechtfertigen, sich vom Standpunkte eines mathematischen Physikers aus mit konformer Feldtheorie an sich zu beschäftigen. Unter den damit auftretenden Fragestellungen ist eine besonders hervorzuhebende die, welche größeren Symmetriealgebren als die bekannte Virasoro-Algebra eingeführt werden können. Allgemeiner erhebt sich zunächst die Frage, welche Algebren chiraler, lokaler Felder überhaupt konsistent zu definieren sind. Die Virasoro-Algebra sowie die Kac-Moody-Algebren zählen zu den unendlich dimensionalen Lie-Algebren [-9,-7]. Die Verallgemeinerung dieser Struktur zu Feldern mit höherem Spin führt auf die sogenannten $\mathcal{W}$-Algebren [89], die, ausgehend von einer endlichen Basis von erzeugenden Feldern, die Jakobi-Identitäten nur innerhalb einer bestimmten Unteralgebra der Vervollständigung ihrer universellen Einhüllenden erfüllen. Dies bedeutet, daß die $\mathcal{W}$-Algebren auch die normalgeordneten Produkte der Felder und ihrer Ableitungen involvieren, damit aber dann wirklich eine algebraisch abgeschlossene Struktur bilden.
Das Interesse an größeren Symmetriealgebren rührt hauptsächlich von dem Wunsche her, alle sogenannten rationalen konformen Feldtheorien [69,70,71], das sind die, deren Operatoralgebren endlich erzeugt sind, klassifizieren zu wollen. Dies ist bis jetzt nur für die speziellen zentralen Ladungen aus der unitären diskreten Serie [6,50,51,57] geglückt, da hier alle möglichen Darstellungen der Virasoro-Algebra und damit der vollständige Feldinhalt der konformen Theorie explizit bekannt sind. In diesen sogenannten minimalen Modellen schließen die Feldalgebren immer innerhalb von endlich vielen konformen Familien rationaler Dimension. Wegen ihres Zusammenhangs zu statistischen Modellen sind die unitären Theorien von besonderer Bedeutung,

wovon sich die oben erwähnten minimalen Theorien durch ihre Einfachheit auszeichnen. Die unitären Theorien zu zentralen Ladungen $c > 1$ sind aber bis heute nicht klassifiziert, ebensowenig die nicht unitären Modelle aus der diskreten Serie. Für alle anderen Werte der zentralen Ladung, außer für $c = 1$ [53], fehlt bislang jegliche Interpretation.
Seit die $\mathcal{W}$-Algebren von Zamolodchikov [89] eingeführt wurden, hegte man die Hoffnung, insbesondere Theorien mit $c > 1$ besser verstehen zu können. Relativ bald wurde klar, daß es eine ganze Reihe von $\mathcal{W}$-Algebren gibt, die für alle Werte der zentralen Erweiterung existieren. Es sind dies solche, deren Felder Spins von der Ordnung der Casimir-Operatoren einer Lie-Algebra besitzen, und die daher in einem gewissen Sinne als die Casimir-Algebra der affinen, zu dieser Lie-Algebra gehörigen, Kac-Moody-Algebra angesehen werden können [-4,12,13], gleichwohl diese Operatoren nicht mit allen Elementen der Algebra vertauschen. Welche weiteren $\mathcal{W}$-Algebren es aber gibt, ob sie nun für generische zentrale Ladung existieren oder ob nur für spezielle Werte derselben, ist eine Fragestellung, die noch weit entfernt davon war, vollständig beantwortet werden zu können [12,13,45,54,60,91].

Ziel dieser Arbeit im Rahmen der Gruppe um Professor W. Nahm ist es, einen Beitrag zur Erforschung der $\mathcal{W}$-Algebren zu liefern und insbesondere die letzte obengenannte Frage beantworten zu helfen. Während der Zeit, in der diese Diplomarbeit entstand, wurden in dieser Gruppe eine ganze Reihe neuer $\mathcal{W}$-Algebren konstruiert und auch teilweise die Werte der zentralen Ladung, für die diese konsistent existieren, interpretiert, wobei sich Gesetzmäßigkeiten zeigten, die erwarten lassen, eine Systematik entwickeln zu können [11]. Wie im bereits vorher erwähnten Fall der Casimir-Algebren, scheint es auch bei $\mathcal{W}$-Algebren, die nur für eine bestimmte Anzahl diskreter c-Werte existieren, eine Struktur in Form von Serien zu geben, vielleicht in einem gewissen Sinne analog zu den Serien der einfachen Lie-Algebren. Aufgrund des damit verbundenen Rechenaufwandes, zu testen, ob eine Algebra konsistent ist, wurden hier nur $\mathcal{W}$-Algebren betrachtet, die nicht mehr als zwei zusätzliche Felder enthalten.
In dieser Arbeit werden zwei Beiträge zu dieser Forschung geliefert. Zum einen wird die Struktur der sogenannten quasiprimären Felder untersucht, was vor allem die normalgeordneten Produkte zu betrachten bedeutet, so daß insbesondere für die konkreten Rechnungen jeweils eine Basis des Vektorraums der quasiprimären Felder, die in den Kommutatoren der Felder der $\mathcal{W}$-Algebren auftreten, angegeben werden kann. Zum anderen wird eine Serie von $\mathcal{W}$-Algebren untersucht, die für Werte der zentralen Ladung existieren, die *nicht* aus der minimalen Serie stammen, und insbesondere ihre Existenz im Rahmen von Vertexoperatordarstellungen bewiesen, sowie auch teilweise der Feldinhalt der konformen Feldtheorie in Form von Tiefstgewichtsdarstellungen angegeben.

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert:
Im zweiten Kapitel wird eine kompakte, eher axiomatische Definition von konformer Feldtheorie gegeben, so wie sie hier verstanden werden soll. Der dabei gewählte Zugang über Vertexoperatoren, folgend der sogenannten meromorphen Feldtheorie von Goddard [55,31,32], ist daher weniger historisch und von der Form her eher mathematisch. Dies geschieht, weil ein solcher Zugang nicht nur recht kurz gehalten werden kann, sondern sich auch für den letzten Teil der Arbeit als sehr nützlich erweist, sowie die Allgemeinverständlichkeit der Arbeit vielleicht zu steigern vermag, und obwohl diese dadurch insgesamt an Länge gewinnt. Die wesentlichen Begriffe aus der konformen Feldtheorie werden alle in diesem Kapitel definiert und in Zusammenhang mit der hier ausgeführten Sichtweise gebracht, deren Eleganz dadurch deutlich zutage treten sollte. Ebenso wird festgelegt, was im folgenden unter einer $\mathcal{W}$-Algebra zu verstehen ist. Der bereits mit konformer Feldtheorie vertraute Leser mag daher das Studium dieser Arbeit direkt mit Abschnitt 2.6 beginnen.
Das dritte Kapitel widmet sich der Untersuchung des Feldinhalts chiraler $SU(1,1)$-invarianter Theorien lokaler Felder, wie sie von $\mathcal{W}$-Algebren gegeben werden. Genauer geht es um eine Analyse des bezüglich des Spins graduierten Vektorraumes der nichtderivativen Felder einer

solchen Theorie. Zunächst wird ein Poincaré-Birkhoff-de Witt-ähnlicher Satz bewiesen, der im wesentlichen besagt, daß dieser Vektorraum ein Erzeugendensystem wie ein Fockraum besitzt. Die Operation des Normalordnens und anschließenden Projizierens auf die quasiprimären Felder bildet eine kommutative, aber nicht assoziative Algebra. Die Produkte in dieser Algebra lassen sich aber dennoch immer in einer bestimmten Reihenfolge ordnen, was gerade die Aussage des oben angeführten Satzes ist. Dieses Erzeugendensystem ist aber in manchen Fällen immer noch zu groß, und der Rest dieses Kapitels wird darauf verwendet, dieses zu einer Basis zu reduzieren.
Mit dem vierten Kapitel werden die Ergebnisse über $\mathcal{W}$-Algebren zusammengetragen und kurz erläutert, wie sie, ausgehend von den allgemeinen Resultaten über die Struktur von $\mathcal{W}$-Algebren von Nahm [-4,73] in seiner Gruppe erarbeitet worden sind [11]. Im zweiten Kapitel wurde bereits der Zusammenhang zwischen Feldern und Operatorprodukten einerseits und Fouriermoden der Felder und Algebren andererseits dargestellt und auf die Äquivalenz der beiden Betrachtungsweisen eingegangen. Es hat sich aber gezeigt, daß der Zugang über die Algebren der Moden gegenüber dem über die Operatorproduktentwicklung den Vorteil hat, die praktischen Berechnungen relativ einfach mit symbolischen Programmiersprachen wie REDUCE von Computern durchführen lassen zu können, da mit solchen Programmiersystemen leicht Vertauschungsrelationen und vor allem polynomiale Ausdrücke definiert werden können.
Im fünften Kapitel wird dann die durch die explizit konstruierten Beispiele von $\mathcal{W}$-Algebren nahegelegte Existenz der Serie $c = 1 - 8\Delta$ mittels Vertexoperatoren allgemein etabliert. Dafür müssen aus dem Vermamodul einer solchen $\mathcal{W}$-Algebra noch seine Nullzustände entfernt werden, um einen irreduziblen Modul zu erhalten, was über den Formalismus abgeschirmter Vertexoperatoren und sogenannter BRST-Operatoren im Sinne einer Freie-Feld-Konstruktion [34,35,42,43] geschieht. Soweit dies im Rahmen dieser Arbeit noch möglich war, wurden auch die Darstellungen dieser $\mathcal{W}$-Algebren untersucht.
Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung der Resultate und einem Ausblick auf die noch offenen Fragen.

II

Konforme Feldtheorie
Meromorphe Feldtheorie

In diesem Kapitel soll eine Einführung in die konforme Feldtheorie im einfachst möglichen Fall gegeben werden, in welchem alle in der Theorie auftretenden Funktionen wohldefiniert und holomorph sind, und wo die Theorie lediglich auf der komplexen Ebene betrachtet wird, also nicht auf Riemannschen Flächen mit nichtverschwindendem Geschlecht. Erstere Einschränkung bedeutet insbesondere, daß sich hier nur mit chiralen Theorien beschäftigt wird, da in solchen, im euklidischen Fall, alle Felder nur jeweils von einer der als voneinander unabhängig betrachteten komplexen Variablen z und $\bar{z}$ abhängen. Sei nämlich $\phi(x,t)$ ein auf $M = S^1 \times \mathbb{R}$ gegebenes Feld, so ist dieses *chiral*, wenn es nur von einer der beiden lichtartigen Koordinaten $u = t + x$ und $v = t - x$ abhängt, die auf M eine kausale Struktur über die vom Skalarprodukt $u \cdot v$ induzierte Metrik definieren. Der Übergang zur euklidischen Theorie erfolgt, indem man, nach Ausführen der Wickrotation $t \mapsto it$, $z = e^{-iu}$ und $\bar{z} = e^{-iv}$ setzt, wobei M auf die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ ohne den Ursprung abgebildet wird. Genauer betrachtet man eigentlich den $\mathbb{C}^2$ mit z und $\bar{z}$ als unabhängigen Variablen. Felder einer euklidischen Feldtheorie sind dann chiral, wenn sie nur von einer dieser beiden Variablen abhängen, was nichts anderes heißt, als daß sie entweder holomorph oder antiholomorph sind.

Es sei bereits hier darauf hingewiesen, daß es manchmal sinnvoll ist, von der euklidischen Theorie zur minkowskischen oder umgekehrt zu wechseln, was mitunter ohne Vorwarnung geschieht, da anhand des Kontextes immer klar sein sollte, ob reelle oder komplexe Variablen verwendet werden. Die konforme Feldtheorie läßt sich im Euklidischen wesentlich einfacher und eleganter behandeln, da einem hier der ganze Apparat der Funktionentheorie zur Verfügung steht, einzelne Probleme, vor allem der Wohldefiniertheit von Objekten, lassen sich aber leichter mit reellen Variablen, also im Minkowskischen, lösen.

Diese Darstellung folgt weitgehend den Arbeiten von Goddard [55] und Nahm [-4,72,73]. Zunächst werden Vertexoperatoren auf geeigneten Hilberträumen eingeführt und ihre algebraischen

Eigenschaften unter der Voraussetzung von Lokalität untersucht, welche erforderlich ist, um die auftretenden n-Punkt-Funktionen wohldefiniert zu machen. Anschließend wird das Konzept der $su(1,1)$- und der konformen Invarianz schrittweise als Erweiterung der Translationsinvarianz erhalten und gezeigt, wie sich Felder und n-Punkt-Funktionen dadurch weitgehend festlegen lassen. Mit einigen zusätzlichen Annahmen und nach Einführen der Fouriermoden von Vertexoperatoren können dann Begriffe wie Operatorproduktentwicklung, Virasoro-Algebra und primäre Felder abgeleitet werden. Die genauere Untersuchung der Operatorproduktentwicklung führt zu den normalgeordneten Produkten und daraus zu der Definition von $\mathcal{W}$-Algebren. Abschließend werden noch einige elementare Beispiele der expliziten Konstruktion von Vertexoperatoralgebren diskutiert, die im wesentlichen aus Heisenbergalgebren von Gittern gewonnen werden.

2.1. Vertexoperatoren und Lokalität

Sei im folgenden $\mathcal{H}$ der Hilbertraum der Zustände (bei nicht unitären Theorien hat man allerdings lediglich einen mit einem nicht degenerierten Skalarprodukt versehene Raum der Zustände) und $\mathcal{F} = \coprod_{i\in I} \mathcal{F}_i$ ein dichter graduierter Teilraum mit $dim\, \mathcal{F}_i < \infty$ und I eine abzählbare Indexmenge, wie zum Beispiel der Raum von Zuständen mit endlicher Besetzungszahl in einem Fockraum. Für diesen dichten Unterraum hat man also eine explizite Basis. Bezeichne weiter $\Psi_0 \in \mathcal{F}$ einen ausgezeichneten Zustand, das Vakuum, und $\mathcal{L}$ einen speziellen Operator, der das Vakuum annihiliert, d.h.

$$\mathcal{L}\Psi_0 \;=\; 0\,. \tag{2.1}$$

Dieser Operator wird später als der Generator der Translationen interpretiert werden und auch die oben geforderte Graduierung implementieren. Es kann im Rahmen dieser Arbeit nicht darauf eingegangen werden, warum man in einer Quantenfeldtheorie solche Hilberträume und Operatoren als physikalisch sinnvoll annimmt, es sei jedoch angemerkt, daß man zu einer Operatoralgebra mittels der GNS-Konstruktion immer einen Hilbertraum von Zuständen erzeugen kann, der im allgemeinen die von Physikern gewünschten Eigenschaften besitzt [21]. Insbesondere wird oft verlangt, daß das Vakuum ein zyklischer Zustand ist.

Die Bedingungen an den Teilraum sollen es ermöglichen, lineare Operatoren V zu betrachten, die Elemente von $\mathcal{F}$ in unendliche Summen solcher Elemente abbilden, d.h. $V:\mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathcal{F}} = \prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$. Dabei stellt die Forderung, der Teilraum $\mathcal{F}$ sei graduiert, ein für eine algebraische Behandlung angemesseneres Konzept dar, als die Einführung einer geeigneten (schwachen) Topologie, nämlich das der linearen Algebra unendlicher direkter Summen. Die Problematik soll kurz angedeutet werden:

Der Raum der linearen Operatoren von $\mathcal{F}$ nach $\overline{\mathcal{F}}$ stellt keine Algebra mehr dar, da man im allgemeinen nicht das Produkt zweier solcher Operatoren definieren kann. Um die Verkettung zweier Operatoren zumindest teilweise erklären zu können, stelle man sich V als unendliche Matrix $(V_{ij})_{i,j\in I}$ vor, wobei die $V_{ij}:\mathcal{F}_i \longrightarrow \mathcal{F}_j$ lineare Operatoren seien. Definiert man $\mathcal{F}' = \coprod_{i\in I}\mathcal{F}_i^*$ als den graduierten Dualraum zu $\mathcal{F}$, was $(\mathcal{F}')^* = \overline{\mathcal{F}}$ impliziert, so kann man mit Hilfe der auf $\mathcal{H}$ gegebenen Metrik ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $\overline{\mathcal{F}}$ über die natürliche Paarung zwischen $\mathcal{F}'$ und $\overline{\mathcal{F}}$ einführen. Die V_{ij} sind dann als diejenigen linearen Abbildungen eindeutig bestimmt, für die für alle $\phi\in\mathcal{F}_i$, $\psi\in\mathcal{F}_j$ gilt, daß $\langle\psi, V\phi\rangle = \langle\psi, V_{ij}\phi\rangle$ ist. Man sagt, das Produkt $VW:\mathcal{F}\longrightarrow\overline{\mathcal{F}}$ existiere, wenn die Reihe $\sum_{k\in I}\langle\psi, V_{kj}W_{ik}\phi\rangle$ für alle $i,j\in I$ und alle $\phi\in\mathcal{F}_i$, $\psi\in\mathcal{F}_j$ absolut konvergent ist. In diesem Fall ist $VW = ((VW)_{ij})_{i,j\in I}$ natürlich durch $\langle\psi, (VW)_{ij}\phi\rangle$ definiert. Mit $\overline{End}\,\mathcal{F}$ sei der Raum der linearen Operatoren von $\mathcal{F}$ nach $\overline{\mathcal{F}}$ bezeichnet, versehen mit dem oben definierten, nur für geeignete Operatoren existierenden Produkt. Aufgrund der absoluten Konvergenz ist dieses Produkt, wenn es existiert, assoziativ [-16].

Definition 2.1. Ein *Vertexoperator* zu einem gegebenen Zustand $\psi \in \mathcal{F}$ ist ein für alle $z \in \mathbb{C}$ definierter Operator $V(\psi, z) \in \overline{End}\,\mathcal{F}$ mit den folgenden vier Eigenschaften:

- Angewandt auf das Vakuum hat der Operator die Gestalt

$$V(\psi, z)\Psi_0 \;=\; e^{z\mathcal{L}}\psi\,, \tag{2.2}$$

- für alle $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{F}$ sind die Matrixelemente

$$\langle\phi_1,\, V(\psi, z)\phi_2\rangle \tag{2.3}$$

algebraische Funktionen in z,

- der Definitionsbereich von $V(\psi, z)$ kann induktiv auf alle *verallgemeinerten kohärenten Zustände* der Form $V(\psi_1, z_1)V(\psi_2, z_2)\ldots V(\psi_n, z_n)\phi$ für $\phi \in \mathcal{F}$ erweitert werden, falls das Produkt *radial geordnet* ist, d.h. $|z_1| > |z_2| > \ldots > |z_n|$,

- für $|z| > |\zeta|$ und für alle $\phi_1, \phi_2, \psi, \chi \in \mathcal{F}$ existiere eine analytische Fortsetzung, so daß gilt

$$\langle\phi_1,\, V(\psi, z)V(\chi, \zeta)\phi_2\rangle \;=\; \varepsilon_{\psi\chi}\langle\phi_1,\, V(\chi, \zeta)V(\psi, z)\phi_2\rangle\,, \tag{2.4}$$

wo $\varepsilon_{\psi\chi}$ eine allein von den Zuständen ψ, χ abhängige Phase ist.

Die letzten beiden Forderung besagen zweierlei, zum einen verlangen sie, daß das Produkt zweier Operatoren immer definiert ist, zum anderen begründen sie sich aus der Tatsache, daß, wenn man Matrixelemente von Produkten von Feldoperatoren betrachtet, diese nur wohldefiniert sind, wenn das Produkt eine bestimmte Ordnung der Punkte, um die die Feldoperatoren lokalisiert sind, respektiert. In Quantenfeldtheorien betrachtet man daher üblicherweise Vakuumerwartungswerte von zeitgeordneten Produkten. Bei dem oben beschriebenen Übergang zur euklidischen Theorie geht die Zeitordnung in eine radiale Ordnung über, d.h. für zwei Feldoperatoren $\xi(z)$ und $\eta(z)$ sind für alle $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{F}$ die Matrixelemente

$$f_{\xi\eta}(z, \zeta) \;=\; \langle\phi_1,\, \xi(z)\eta(\zeta)\phi_2\rangle \tag{2.5}$$

zunächst lediglich für $|z| > |\zeta|$ wohldefiniert. Man kann aber die so definierten Funktionen auf die ganze komplexe Ebene, außer Singularitäten auf $|z| = |\zeta|$, fortsetzen, so daß diese Fortsetzung der Gleichung

$$f_{\xi\eta}(z, \zeta) \;=\; \varepsilon_{\xi\eta} f_{\xi\eta}(\zeta, z) \tag{2.6}$$

genügt, wo $\varepsilon_{\xi\eta}$ eine Phase ist. Oft wird dafür stattdessen auch einfach die Operatoridentität

$$\xi(z)\eta(\zeta) \;=\; \varepsilon_{\xi\eta}\eta(\zeta)\xi(z) \tag{2.6'}$$

geschrieben, worunter immer das Verhalten der durch Matrixelemente definierten Funktionen verstanden werden soll.
Das durch die obigen Definitionen gegebene System $V(\cdot,\cdot)$ von Operatoren nennt man auch eine *Vertexoperatoralgebra*. Die Struktur einer Algebra erhält man, indem man in Definition 2.1 auch Operatoren $V(\psi, z)$ für allgemeine kohärente Zustände ψ zuläßt, so daß das System bezüglich des Produktes abgeschlossen ist.

Definition 2.2. Zwei Feldoperatoren $\xi(z), \eta(\zeta)$ heißen *lokal* zueinander, wenn die Matrixelemente $f_{\xi\eta}$ für $|z| > |\zeta|$ holomorphe Funktionen definieren, deren meromorphe Fortsetzungen Gleichung (2.6) mit $\varepsilon_{\xi\eta} = \pm 1$ erfüllen.

Ein *lokales System* von Vertexoperatoren ist eine Menge $\mathcal{V} = \{V(\psi, z) \mid \psi \in \mathcal{F}\}$ von Vertexoperatoren, so daß alle Matrixelemente meromorphe Funktionen und alle Operatoren zueinander lokal sind.

Eine nicht singuläre Transformation *U operiert lokal* auf einem lokalen System $\mathcal{V}$, wenn für alle $\psi \in \mathcal{F}$ die Operatoren $UV(\psi, z)U^{-1}$ lokal zu allen Vertexoperatoren aus $\mathcal{V}$ sind.

Der wesentliche Effekt dieser zusätzlichen Forderung ist, daß alle Matrixelemente wohldefinierte Funktionen darstellen. Allerdings lassen sich viele der weiter unten aus der Lokalität gewonnenen Folgerungen schon allein mit (2.4) ableiten, man spricht dann von *regulären Systemen* von Vertexoperatoren und *relativ lokal* operierenden Transformationen, das sind solche, die die Phasen bis auf das Vorzeichen invariant lassen. In diesem allgemeineren Fall liefern die analytischen Fortsetzungen der Matrixelemente Funktionen, die auf Riemannschen Flächen nichtverschwindenden Geschlechtes definiert werden müssen. Es wird sich später zeigen, daß lokale Feldoperatoren immer bosonisch oder fermionisch sind.
Für das Weitere ist es hilfreich, nochmals eine Bemerkung zu Definitions- und Wertebereich von Vertexoperatoren $V(\psi, z)$ zu machen. Zunächst ist $V(\psi, z)$ auf $\mathcal{F}$ definiert, stellt aber im allgemeinen, angewandt auf irgendein $\phi \in \mathcal{F}$, kein Element von $\mathcal{F}$ mehr dar. Gewinnt man den Hilbertraum $\mathcal{H}$ mittels GNS-Konstruktion aus einer Operatoralgebra und ist $\mathcal{L}$ ein Element dieser Algebra, so ergibt die rechte Seite von Gleichung (2.2) nur für $z = 0$ einen Zustand aus $\mathcal{F}$. Zur Veranschaulichung wähle man sich als Operatoralgebra die der Erzeuger a_k und Vernichter a_k^+ eines eindimensionalen harmonischen Oszillators in zweiter Quantisierung, als $V(z)$ den durch die unendliche Reihe

$$V(z) \;=\; \sum_k z^k a_k$$

gegeben Operator aus $\overline{End\mathcal{F}}$. Dann bildet $V(z)$ den Fockraum nicht in sich ab, da dieser Operator für jedes $z \neq 0$, angewandt auf einen Fockraumzustand, immer zu einer unendlichen Summe von Zuständen führt. Da der Physiker aber an einer algebraischen Struktur auf dem Raum der Felder interessiert ist, war es notwendig, in der Definition der Vertexoperatoren so weitgehende, die Vorstellungen über den oben definierten Raum $\overline{End\mathcal{F}}$, aus dem die Vertexoperatoren stammen, konkretisierende, Voraussetzungen zu machen, daß jene wirklich eine Algebra bilden. Es würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, nun zu diskutieren, unter welchen Umständen man die Existenz solcher Räume und einer solchen Algebra wirklich beweisen kann, und wie man aus dem Raum $\overline{\mathcal{F}}$, der ja nicht reflexiv ist, letztendlich den Hilbertraum $\mathcal{H}$ erhält.

Da $\mathcal{W}$-Algebren immer Algebren lokaler Systeme chiraler Felder sind, wird hier zunächst diskutiert, welche Folgerungen sich aus der Annahme von Lokalität ergeben, die sich in der Tat als ausgesprochen mächtig erweist.

Proposition 2.3. Eindeutigkeit. Sei $\mathcal{V} = \{V(\psi, z)\,|\,\psi \in \mathcal{F}\}$ ein lokales System von Vertexoperatoren und sei $\tilde{V}(\phi, z)$ mit

$$\tilde{V}(\phi, z)\Psi_0 \;=\; e^{z\mathcal{L}}\phi \tag{2.7}$$

ein für ein bestimmtes $\phi \in \mathcal{F}$ gegebener, zu allen Vertexoperatoren aus $\mathcal{V}$ lokaler Operator. Dann ist

$$\tilde{V}(\phi, z) \;=\; V(\phi, z)\,. \tag{2.8}$$

Beweis: Man betrachte die Wirkung von $\tilde{V}(\phi, z)$ auf einem beliebigen Zustand $\psi \in \mathcal{F}$. Mit Lokalität folgt dann sofort

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(\phi, z)e^{\zeta\mathcal{L}}\psi &= \tilde{V}(\phi, z)V(\psi, \zeta)\Psi_0 \\
&= \varepsilon_{\phi\psi}V(\psi, \zeta)\tilde{V}(\phi, z)\Psi_0 \\
&= \varepsilon_{\phi\psi}V(\psi, \zeta)e^{z\mathcal{L}}\phi\,,
\end{aligned}$$

und da $V(\phi, z)$ ebenfalls (2.7) genügt, ist die Wirkung der beiden Operatoren auf jedem Zustand die gleiche,

$$\tilde{V}(\phi, z)e^{\zeta\mathcal{L}} \;=\; V(\phi, z)e^{\zeta\mathcal{L}}\,,$$

so daß die Operatoren identisch sind. In einem lokalen System sind die Operatoren also durch die Eigenschaft (2.2) bereits eindeutig bestimmt. Insbesondere ist in einem lokalen System von Vertexoperatoren immer $V(\Psi_0, z) = \mathbf{1}$. ■

Proposition 2.4. Translationen. Wenn $U = e^{\lambda\mathcal{L}}$ lokal auf $\mathcal{V}$ operiert, so ist U der Translationsoperator, d.h. es ist

$$e^{\lambda\mathcal{L}} V(\psi, z) e^{-\lambda\mathcal{L}} = V(\psi, z + \lambda) \tag{2.9}$$

für alle $V(\psi, z) \in \mathcal{V}$.

Beweis: Die linke Seite von (2.9) ist nach Voraussetzung lokal bezüglich $\mathcal{V}$, und daher genügt es, ihre Wirkung auf das Vakuum Ψ_0 zu betrachten, da diese nach Proposition 2.3 den Vertexoperator bereits eindeutig festlegt. Nach Definition hat man

$$\begin{aligned} e^{\lambda\mathcal{L}} V(\psi, z) e^{-\lambda\mathcal{L}} \Psi_0 &= e^{\lambda\mathcal{L}} e^{z\mathcal{L}} \psi \\ &= e^{(\lambda+z)\mathcal{L}} \psi \,, \end{aligned}$$

was dasselbe wie die Wirkung der rechten Seite von (2.9) ist. ■
Als Korollar ergibt sich sofort aus Proposition 2.4, indem man (2.9) nach λ differenziert und dann $\lambda = 0$ setzt, daß

$$\frac{d}{dz} V(\psi, z) = [\mathcal{L}, V(\psi, z)] \,. \tag{2.10}$$

Weiter folgt durch Anwenden dieser Gleichung auf das Vakuum, die Eindeutigkeit der Vertexoperatoren ausnutzend, daß

$$\frac{d}{dz} V(\psi, z) = V(\mathcal{L}\psi, z) \,. \tag{2.11}$$

Sei nun U irgendeine lokal operierende Transformation, die das Vakuum invariant läßt, d.h. $U\Psi_0 = \Psi_0$. Dann liefert das Argument des Beweises von Proposition 2.4 die Beziehung

$$V_U(\psi, z)\Psi_0 = e^{z\mathcal{L}_U} U\psi \,, \tag{2.12}$$

wobei $V_U(\psi, z) = UV(\psi, z)U^{-1}$ und $\mathcal{L}_U = U\mathcal{L}U^{-1}$ gesetzt ist.

Proposition 2.5. Dualität. Seien $V(\phi, z), V(\psi, z) \in \mathcal{V}$. Dann ist

$$V(\psi, z)V(\phi, \zeta) = V(V(\psi, z - \zeta)\phi, \zeta) \,. \tag{2.13}$$

Das Produkt zweier Vertexoperatoren läßt sich also wieder durch einen Vertexoperator aus $\mathcal{V}$ ausdrücken.

Beweis: Die linke Seite von (2.13) stellt das Produkt zweier lokaler Operatoren dar, ist also, betrachtet als Funktion von ζ für festgehaltenes $z - \zeta$, selbst ein lokaler Operator. Wegen Eindeutigkeit genügt es also wieder, die Gleichheit der Wirkungen auf das Vakuum nachzuweisen. Mit Proposition 2.4 gilt

$$\begin{aligned} V(\psi, z)V(\phi, \zeta)\Psi_0 &= V(\psi, z)e^{\zeta\mathcal{L}}\phi \\ &= e^{\zeta\mathcal{L}} V(\psi, z - \zeta)\phi \,, \end{aligned}$$

was die Behauptung liefert. ■
Dieses Resultat stellt die Grundlage einer präzisen Definition der noch einzuführenden Operatorproduktentwicklung dar und besagt an sich nichts weiter, als daß Vertexoperatoren einen Isomorphismus zwischen Feldern und Zuständen des Hilbertraumes vermitteln, eine konkrete Manifestation der GNS-Konstruktion. Daher wird oft einfach der Raum der Felder mit dem Raum $\mathcal{F}$ der Zustände, beziehungsweise mit dessen Vervollständigung identifiziert.
Die Bezeichnung Dualität für Proposition 2.5 stammt übrigens von den sogenannten Duale-Resonanz-Modellen her, den Vorläufern der modernen Superstringtheorie [-13,-6].

Translationsinvarianz ist im allgemeinen nicht die einzige Symmetrie einer Quantenfeldtheorie, ist doch gerade die Lorentzinvarianz eine der grundlegenden Voraussetzungen, um zum Beispiel das PCT-Theorem ableiten zu können [-2]. In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß alle Möbiustransformationen

$$z \mapsto \gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{2.14}$$

mit $ad - bc = 1$, Symmetrien der Theorie sind, wenn sie das Vakuum und damit eben die Vakuumerwartungswerte invariant lassen. So ist der Vakuumerwartungswert $\langle \Psi_0, V(\psi, z)\Psi_0 \rangle$ dann und nur dann translationsinvariant, wenn $\mathcal{L}^\dagger \Psi_0 = 0$ gilt, denn in diesem Fall ist

$$\langle V(\psi, z) \rangle \equiv \langle \Psi_0, V(\psi, z)\Psi_0 \rangle = \langle \Psi_0, \psi \rangle = 0$$

für alle Vertexoperatoren von Zuständen orthogonal zum Vakuum. Dabei sind die Generatoren der Möbiusgruppe $L_1 = \mathcal{L}$, $L_{-1} = \mathcal{L}^\dagger$ und $L_0 = \frac{1}{2}[\mathcal{L}^\dagger, \mathcal{L}]$. (Für den Translationsgenerator $\mathcal{L}$ werde von nun an immer L_1 geschrieben.)
Es sei zunächst ein Operator L_0 mit den Eigenschaften

$$[L_0, L_1] = L_1, \ L_0^\dagger = L_0 \text{ und } L_0\Psi_0 = 0 \tag{2.15}$$

eingeführt, der zusammen mit L_1 eine Untergruppe der Möbiustransformationen generiert.

Proposition 2.6. Skalentransformationen. Sei L_0 ein Operator, der (2.15) genügt, sei $L_0\psi = h\psi$, und operiere $x^{L_0} \equiv e^{\lambda L_0}$ lokal auf $\mathcal{V}$. Dann ist

$$x^{L_0} V(\psi, z) x^{-L_0} = x^h V(\psi, xz). \tag{2.16}$$

Beweis: Da es bekanntlich ausreicht, $x^{L_0} V(\psi, z) x^{-L_0}\Psi_0$ zu untersuchen, wendet man hierfür (2.12) an und beachtet, daß nach der Campell-Baker-Hausdorff-Formel $x^{L_0} L_1 = L_1 x^{(L_0+1)}$ ist. ■
Durch differenzieren nach und anschließendem Nullsetzen von λ in (2.16) erhält man in Analogie zu (2.10)

$$[L_0, V(\psi, z)] = \left(z\frac{d}{dz} + h\right) V(\psi, z). \tag{2.17}$$

Die Propositionen 2.4 und 2.6 gestatten einem auch, Zwei-Punkt-Funktionen zu berechnen. Für z, ζ, x, ξ beliebig mit $|z| > |\zeta|$ und $|x| > |\xi|$ ist dann

$$\begin{aligned} \langle V(\psi, z) V(\phi, \zeta) \rangle &\equiv \langle \Psi_0, V(\psi, z) V(\phi, \zeta)\Psi_0 \rangle \\ &= \langle \Psi_0, e^{\zeta L_1} V(\psi, z-\zeta)\phi \rangle \\ &= (z-\zeta)^{-h(\psi)} \langle \Psi_0, (z-\zeta)^{L_0} V(\psi, 1)(z-\zeta)^{-L_0}\phi \rangle \\ &= (z-\zeta)^{-h(\psi)-h(\phi)} \langle \Psi_0, V(\psi, 1)\phi \rangle \\ &= \left(\frac{x-\xi}{z-\zeta}\right)^{h(\psi)+h(\phi)} \langle V(\psi, x) V(\phi, \xi) \rangle, \end{aligned} \tag{2.18}$$

wobei $L_0\psi = h(\psi)\psi$, $L_0\phi = h(\phi)\phi$ und $L_1^\dagger\Psi_0 = 0$ sein soll. Die Zwei-Punkt-Funktion verhält sich also bezüglich Translationen und Streckungen wie eine automorphe Funktion vom Gewichte $h(\psi) + h(\phi)$.

Zusammen mit $L_{-1} = L_1^\dagger$ erhält man eine $su(1,1)$-Lie-Algebra

$$[L_0, L_{\pm 1}] \;=\; \pm L_{\pm 1}\,, \quad [L_1, L_{-1}] \;=\; 2L_0\,, \tag{2.19}$$

von der angenommen werden soll, daß sie das Vakuum annihiliert, d.h.

$$L_n\Psi_0 \;=\; 0 \text{ für } n \;=\; -1,0,1\,. \tag{2.20}$$

Die durch L_{-1} erzeugten Transformationen heißen *spezielle konforme Transformationen*, und es gilt, falls sie lokal auf $\mathcal{V}$ operieren, daß

$$e^{\mu L_{-1}}V(\psi,z)e^{-\mu L_{-1}} \;=\; (1-\mu z)^{-2h}V(\psi, z(1-\mu z)^{-1})\,, \tag{2.21}$$

wobei noch $L_0\psi \;=\; h\psi$ und $L_{-1}\psi \;=\; 0$ gefordert wird. Um dies einzusehen, ist es nützlich, die übliche zweidimensionale Darstellung der $SL(2,\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}^2$ zu betrachten, deren Zusammenhangskomponente der Eins die Möbiusgruppe bildet,

$$e^{\lambda L_1} \;\leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\; e^{\lambda L_0} \;\leftrightarrow\; \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}\lambda} \end{pmatrix},\; e^{\lambda L_{-1}} \;\leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Dann ist nämlich

$$\begin{aligned} e^{\mu L_{-1}}V(\psi,z)e^{-\mu L_{-1}}\Psi_0 \;&=\; e^{\mu L_{-1}}e^{zL_1}\psi \\ &=\; \exp\left(\frac{z}{1-\mu z}L_1\right)(1-\mu z)^{-2L_0}\exp\left(\frac{\mu}{1-\mu z}L_{-1}\right)\psi\,, \text{ da} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mu & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & \frac{z}{1-\mu z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\mu z} & 0 \\ 0 & 1-\mu z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-\mu}{1-\mu z} & 1 \end{pmatrix}$$

die Standardzerlegung eines Elementes der Möbiusgruppe in das Produkt der Exponenten ihrer Generatoren darstellt. Auch hier kann man wieder durch Differenzieren nach μ eine infinitesimale Form von (2.21) ableiten. Der nächste Satz faßt die bis dahin gewonnenen Ergebnisse zusammen.

Satz 2.7. $SU(1,1)$**-Invarianz.** Seien L_n, $n = -1,0,1$ Operatoren, die eine $su(1,1)$-Lie-Algebra darstellen und das Vakuum annihilieren, d.h. $L_n\Psi_0 = 0$ für $n = -1,0,1$. Ferner möge die durch sie generierte Möbiusgruppe lokal auf $\mathcal{V}$ operieren. Wenn $\psi \in \mathcal{F}$ mit $L_0\psi = h\psi$ und $L_{-1}\psi = 0$ ein $su(1,1)$-*Tiefstgewichtszustand* und $\gamma \in SU(1,1)$ ist, so gilt

$$D_\gamma V(\psi,z)D_\gamma^{-1} \;=\; \left(\frac{d\gamma(z)}{dz}\right)^h V(\psi,\gamma(z))\,, \tag{2.23}$$

wobei die Darstellung D der Möbiusgruppe auf $\mathcal{V}$ für $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gegeben ist durch

$$D_\gamma \;=\; \exp\left(\frac{b}{d}L_1\right)d^{-2L_0}\exp\left(-\frac{c}{d}L_{-1}\right).$$

Vertexoperatoren zu $su(1,1)$-Tiefstgewichtszuständen sind also automorphe Funktionen vom konformen Gewichte h, das von nun an auch als die *Dimension* $h(\psi)$ des Feldes $V(\psi,z)$ bezeichnet wird. Äquivalent zu (2.23) ist die infinitesimale Schreibweise

$$[L_n, V(\psi,z)] \;=\; z^{-n}\left(z\frac{d}{dz} - (n-1)h\right)V(\psi,z),\; n = -1,0,1\,. \tag{2.24}$$

Felder, die (2.23) oder (2.24) erfüllen, heißen auch *quasiprimär* oder $su(1,1)$-*primär*. ∎

In der Mathematik spricht man üblicherweise von $su(1,1)$-Höchstgewichtszuständen, bei denen dann $L_1\psi$ verschwinden soll. Die hier gewählte Konvention, bei der die Operatoren L_1 und L_{-1} genau andersherum als in der Mathematik üblich verwendet werden, macht die physikalische Bedeutung besonders des Spektrums von L_0 als Energiespektrum einleuchtender. Weiter sei an dieser Stelle noch darauf hingewiesen, daß die $su(1,1)$ Lie-Algebra (2.19) lokal isomorph zu $sl(2,\mathbb{C})$ ist. Sie stellt jedoch keine kompakte Form der letzteren dar, so daß es keine endlichdimensionalen irreduziblen unitären Darstellungen gibt. Im euklidischen Formalismus wiederum arbeitet man wirklich mit $sl(2,\mathbb{C})$ und der Möbiusgruppe. Die sprachliche Inkonsistenz soll darauf hinweisen, daß die Symmetriegruppe analog der Lorentzgruppe in der relativistischen Raum-Zeit gesucht und erst dann ins Euklidische übersetzt wird.
Für quasiprimäre Felder kann man auch, ähnlich wie in (2.18), die Drei-Punkt-Funktionen berechnen. Mit den Bezeichnungen $L_0\psi_j = h(j)\psi_j$ und $h_{ij} = h(i)+h(j)-h(6-i-j)$ erhält man

$$\langle V(\psi_1,z_1)V(\psi_2,z_2)V(\psi_3,z_3)\rangle = \prod_{i<j}\left(\frac{w_i-w_j}{z_i-z_j}\right)^{h_{ij}} \langle V(\psi_1,w_1)V(\psi_2,w_2)V(\psi_3,w_3)\rangle\,. \qquad (2.25)$$

Wenn also $SU(1,1)$ lokal auf $\mathcal{V}$ operiert und das Vakuum invariant läßt, sind die Zwei- und Drei-Punkt-Funktionen bereits eindeutig durch das Transformationsverhalten der Vertexoperatoren festgelegt.

2.3. Hermitizität und L_0-Graduierung

Observablen in Quantenfeldtheorien sind im allgemeinen selbstadjungierte oder zumindest hermitesche Operatoren, haben also ein reelles, also physikalisch meßbares, Spektrum. Oft muß man in einer solchen Theorie fordern, daß die Spektren von Observablen in eine Richtung beschränkt sind. Wäre beispielsweise das Spektrum des Hamilton-Operators unbeschränkt, gäbe es keinen Grundzustand definierter niedrigster Energie, das Vakuum wäre instabil und würde zerfallen. Da in der euklidischen Theorie die radiale Richtung mit der Zeit korrespondiert, vermittelt L_0 so etwas, wie die Translationen in der Zeit. Tatsächlich stellt $L_0+\bar{L}_0$ den Energieoperator einer allgemeinen, nicht chiralen konformen Feldtheorie dar, die man sich als direkte Summe zweier (meist identischer) chiraler Feldtheorien denken kann. Ein allgemeines Feld $\Phi(z,\bar{z})$ hat dann ein $su(1,1)$-Gewicht $(h,\bar{h})$. Es ist daher sinnvoll, für L_0 ein beschränktes Spektrum zu fordern.
Es soll nun vorausgesetzt sein, daß L_0 in $\mathcal{F}$ diagonalisiert werden kann, so daß $\mathcal{F}$ die direkte Summe der Eigenräume von L_0 ist, d.h.

$$\mathcal{F} = \coprod_{\lambda}\mathcal{F}_\lambda, \quad \text{wo} \quad L_0\psi = \lambda\psi \;\forall\psi\in\mathcal{F}_\lambda\,. \qquad (2.26)$$

Da L_1 und L_{-1} die Eigenwerte von L_0 um ± 1 ändern, wolle man weiter annehmen, daß sie die entsprechenden Eigenräume ineinander abbilden, also $L_{\pm 1}:\mathcal{F}_\lambda \longrightarrow \mathcal{F}_{\lambda\pm 1}$. Wenn dann ψ ein $su(1,1)$-Tiefstgewichtszustand ist und ferner $L_1^\dagger = L_{-1}$ gesetzt wird, so hat man

$$\|L_1\psi\|^2 = \langle\psi,\, L_{-1}L_1\psi\rangle = 2h\|\psi\|^2\,, \qquad (2.27)$$

so daß, wenn der Raum ein positiv definites Skalarprodukt besitzt, zwingend $h\geq 0$ sein muß. Wäre nämlich $h<0$, so würde $L_{-1}^n\psi, n>0$ eine unendliche Reihe nicht verschwindender Zustände mit negativen L_0-Eigenwerten $h-n$ liefern, das Spektrum von L_0 wäre dann unbeschränkt.
Sei nun das Spektrum von L_0 nicht negativ und somit beschränkt. Dann folgt mit Standardargumenten der Darstellungstheorie, daß $\mathcal{F}$ die direkte Summe von $su(1,1)$-Tiefstgewichtsdarstellungen ist, von Darstellungen also, die durch Tiefstgewichtszustände ψ, $L_0\psi =$

$h\psi$, $L_{-1}\psi = 0$ erzeugt werden. Im folgenden sei also immer davon ausgegangen, daß $\mathcal{F}$ die direkte Summe von $su(1,1)$-Tiefstgewichtsdarstellungen ist, und daß der durch Ψ_0 erzeugte Unterraum der einzige $SU(1,1)$-invariante ist. Wenn das Skalarprodukt positiv definit ist, folgt daraus umgekehrt, daß das Spektrum von L_0 nicht negativ und der Unterraum $\mathcal{F}_0$, da allein erzeugt von Ψ_0, eindimensional ist, und außerdem daß alle Eigenräume $\mathcal{F}_\lambda$ endlichdimensional sind. Dieser Fall des positiv definiten Skalarproduktes werde als der *euklidische Bereich* der Theorie bezeichnet.

Die Hermitizitätsbedingungen $L_n^\dagger = L_{-n}$ und die Gleichung (2.24) implizieren für $su(1,1)$-Tiefstgewichtszustände ψ, daß

$$V^\dagger(\psi, z) \;=\; z^{-2h} \left(V(\psi, 1/z^*)\right)^\dagger \tag{2.28}$$

ebenfalls ein quasiprimäres Feld vom Gewichte h ist. Insbesondere hat man für $n = 1$ die Translationseigenschaft (2.9)

$$V^\dagger(\psi, z+\varepsilon)\Psi_0 \;=\; e^{zL_1} V^\dagger(\psi, \varepsilon)\Psi_0 \,.$$

Man postuliert, daß für jeden $su(1,1)$-Tiefstgewichtszustand ψ der Grenzwert

$$\psi^\dagger \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0} V^\dagger(\psi, \varepsilon)\Psi_0 \tag{2.29}$$

existiert und daß $V^\dagger(\psi, z)$ lokal bezüglich $\mathcal{V}$ ist. Die Eindeutigkeit (Proposition 2.3) impliziert dann

$$V^\dagger(\psi, z) \;=\; V(\psi^\dagger, z) \,. \tag{2.30}$$

Ein $su(1,1)$-Tiefstgewichtszustand mit $\psi^\dagger = \psi$ heißt *reell*, und es ist immer möglich, im Raum aller $su(1,1)$-Tiefstgewichtszustände vom Gewichte h, $\mathcal{F}^Q(h) = \{\psi \in \mathcal{F} \mid L_0\psi = h\psi,\, L_{-1}\psi = 0\}$, eine reelle Basis zu wählen. Aus (2.18) erhält man dann für die Zwei-Punkt-Funktionen von $\psi \in \mathcal{F}^Q(h)$

$$\langle V(\psi^\dagger, z) V(\psi, \zeta)\rangle \;=\; \left(\frac{x-\xi}{z-\zeta}\right)^{2h} \langle V(\psi^\dagger, x) V(\psi, \xi)\rangle \,, \tag{2.31}$$

also insbesondere für lokale Systeme die Bedingung $2h \in \mathbb{Z}$. Da alle Zustände durch Anwenden von L_1 auf $su(1,1)$-Tiefstgewichtszustände erzeugt werden können, muß das Spektrum von L_0 halbzahlig sein. Wenn ψ reell ist, so erkennt man mit Hilfe von Gleichung (2.4), daß im Falle $\varepsilon_{\psi\psi} = 1$ immer $h \in \mathbb{Z}$ und im Falle $\varepsilon_{\psi\psi} = -1$ immer $h \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ ist, das heißt, daß lokale Vertexoperatoren entweder bosonische oder fermionische Felder sind. Die Umkehrung dieses Sachverhaltes gilt natürlich im allgemeinen nicht.

2.4. Operatorproduktentwicklung

Die Operatorproduktentwicklung (OPE) wurde zuerst von Wilson [85,92] eingeführt, zunächst um Quantenfeldtheorien ohne Lagrangefunktionen definieren zu können. Die Idee ist, ein System von Observablen $\{\Phi_i(z) \mid i \in I\}$, also insbesondere lokaler Operatoren, zu haben, das eine assoziative Algebra (mit Eins) bildet, solange die Punkte, um die die Operatoren lokalisiert sind, sehr nahe beieinander liegen. Ein Produkt zweier "nahe beieinander liegender" Operatoren hat dann eine asymptotische Entwicklung in jeweils mit analytischen Funktionen multiplizierten Observablen,

$$\Phi_a(x)\Phi_b(y) \;=\; \sum_{i\in I} \frac{f^i_{ab}(x-y)}{((x-y)^2)^{(d_a+d_b-d_i)/2}} \Phi_i(y) \,,$$

wo die d_j die Skalen- oder Massendimensionen der Felder Φ_j und $f^i_{ab}(x-y)$ in einer Umgebung von y nicht divergierende Funktionen sind. Dabei heißt "nahe beieinander liegend", daß x und y raumartig mit $(x-y)^2 \approx 0$ sind.
Dieses Konzept erfährt in der algebraischen Feldtheorie [21,22,49,33] mit ihren Netzen von Operatoralgebren eine neue Interpretation, indem man versucht, die gesamte Information einer Quantenfeldtheorie in der Operatoralgebra ihrer Felder und deren Darstellungen zu finden. Vorausgesetzt wird nur eine zunächst meist nicht näher bestimmte Algebra der Observablen, die mit einer kausalen Struktur auf einer gegebenen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit verträglich ist. Genauer definiert man eine die Kausalität respektierende Topologie von Umgebungen von Punkten, und für jede solche Umgebung σ eine eigene Algebra $\mathcal{A}(\sigma)$ der Observablen, die in diesem Gebiet möglich sind. Viele Aspekte einer Quantenfeldtheorie können dann aus wenigen axiomatischen Annahmen über das Verhalten von Observablen aus verschiedenen Algebren $\mathcal{A}(\sigma)$ und $\mathcal{A}(\sigma')$ zu verschiedenen Gebieten σ und σ' abgeleitet werden.
Wenngleich OPEs auf elegante Weise einen Lagrange-freien Zugang zu einer Quantenfeldtheorie zu eröffnen scheinen, ist es im allgemeinen Fall nicht möglich, eine mathematisch einwandfreie Definition zu geben – die Situation ändert sich jedoch entscheidend im Falle zweidimensionaler konformer Feldtheorien (CFT) (die Abkürzung kommt aus dem in diesem Fall der lateinischen Abstammung gerechter werdenden Englischen).

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden oft funktionentheoretische Sachverhalte eher algebraisch formuliert werden, wie zum Beispiel die infinitesimale Schreibweise (2.24) für das automorphe Transformationsverhalten (2.23) von Vertexoperatoren. Dazu seien die (Fourier-) Moden eines Feldes $V(\psi,z)$ mit $L_0\psi = h\psi$ über die Entwicklung

$$V(\psi,z) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}+h} V_n(\psi) z^{n-h} \tag{2.32}$$

eingeführt. Gemäß Gleichung (2.2) ist dann natürlich

$$\psi \;=\; V_h(\psi)\Psi_0 \quad \text{und} \quad V_n(\psi)\Psi_0 \;=\; 0\;\forall n < h\,. \tag{2.33}$$

Offensichtlich sind die Moden von Bosonen ganz- und die von Fermionen halbzahlig. Die Gleichung (2.24) ist dann äquivalent zu dem System von Vertauschungsrelationen

$$[L_m, V_n(\psi)] \;=\; (n - m(h-1))\, V_{m+n}(\psi),\;\; m = -1, 0, 1 \tag{2.34}$$

der homogenen Komponenten von $V(\psi,z)$. Insbesondere ist $[L_0, V_n(\psi)] = nV_n(\psi)$, so daß $V_n(\psi)$ den Eigenwert von L_0 um n erhöht.
Diese Entwicklung nach Moden kann natürlich auch in der Dualitätsrelation (2.13) angewandt werden. Für $\psi \in \mathcal{F}_{h(\psi)}$, $\phi \in \mathcal{F}_{h(\phi)}$ ist zunächst

$$V(\psi, z-\zeta)\phi \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}+h(\psi)} (z-\zeta)^{n-h(\psi)} V_n(\psi)\phi\,,$$

und da das Spektrum von L_0 nach Voraussetzung nicht negativ ist, verschwinden alle Terme mit $n < -h(\phi)$, $V_n(\psi)\phi = 0$, und die Summe reduziert sich zu

$$V(\psi, z-\zeta)\phi \;=\; \sum_{m\geq -h(\phi)-h(\psi)} (z-\zeta)^m V_{m+h(\psi)}(\psi)\phi\,, \tag{2.35}$$

mit $m \in \mathbb{Z}$. In die Dualitätsrelation (2.13) eingesetzt, nimmt diese folgende Form an, die gerade eine Operatorproduktentwicklung im oben definierten Sinne darstellt.

Satz 2.8. Operatorproduktentwicklung. Seien $V(\psi, z), V(\phi, \zeta) \in \mathcal{V}$ und $\psi \in \mathcal{F}_{h(\psi)}$, $\phi \in \mathcal{F}_{h(\phi)}$. Dann ist für alle $|z| > |\zeta|$ die Operatorproduktentwicklung gegeben durch

$$V(\psi, z)V(\phi, \zeta) = \sum_{r \geq 0} (z - \zeta)^{r-h(\psi)-h(\phi)} V(\chi_r, \zeta)\,, \tag{2.36}$$

wobei $r \in \mathbb{Z} + h(\psi) + h(\phi)$ und die Felder der linken Seite durch die Zustände

$$\chi_r = V_{r-h(\phi)}(\psi)\phi \in \mathcal{F}_r \tag{2.36'}$$

gegeben werden. ■

Dies ist, zumindest für lokale Systeme, eine mathematisch einwandfreie Ableitung der OPE allein aus Lokalität und Dualität, wobei letztere Ausdruck der Assoziativität der OPE ist. Das Operatorprodukt kann als Summe über lokale Operatoren geschrieben werden, wobei der singuläre Teil von endlicher Ordnung ist. Damit stellt (2.36) eines der nützlichsten Werkzeuge zur Berechnung algebraischer Eigenschaften von Vertexoperatoren dar. So sind offensichtlich Kommutatoren durch den singulären Teil der OPE bestimmt und können in der Tat mit dessen Hilfe berechnet werden. Interessanterweise gilt jedoch für $\mathcal{W}$-Algebren auch die Umkehrung, daß die OPE durch den Kommutator bereits vollständig bestimmt ist. Es sei noch angemerkt, daß $V_n(\psi)^\dagger = V_{-n}(\psi^\dagger)$ ist und somit für reelle ψ die Moden der Vertexoperatoren die Hermitizitätsbedingung $V_r(\psi)^\dagger = V_{-r}(\psi)$ erfüllen.
Für nicht lokale Systeme kann man, unter Verzicht auf irgendwelche Hermitizitätsbedingungen, auf ähnliche Weise versuchen, eine OPE abzuleiten. Man wird dann allerdings mit dem Problem konfrontiert, daß die Ordnungen α der $(z-\zeta)^\alpha$ Terme nicht mehr ganzzahlig, diese Funktionen also nicht mehr wohldefiniert sind, d.h. keine eindeutigen analytischen Fortsetzungen aus dem Bereich $|z| > |\zeta| > |z - \zeta|$ hinaus existieren. Für Theorien auf nichttrivialen Riemannschen Flächen mag dies jedoch immer noch sinnvoll sein.

2.5. Konforme Invarianz und die Virasoro-Algebra

Wir haben bereits bei der Diskussion von minkowskischer und euklidischer Theorie gesehen, wie durch Einführen chiraler Koordinaten ein Zusammenhang zwischen ihrem Skalarprodukt und einer kausalen Struktur hergestellt wird. Eine physikalisch sinnvolle Theorie muß die kausale Stuktur respektieren, was im allgemeinen Lorentzinvarianz bedeutet, also Invarianz des Skalarproduktes unter Lorentztransformationen beziehungsweise der ganzen Poincaré-Gruppe. Sei genauer (M, g) eine Mannigfaltigkeit M versehen mit einer Metrik g der Signatur (p, q). Dann ist das durch die Metrik definierte Skalarprodukt invariant unter $\mathrm{SO}(p, q)$ zuzüglich der Translationen. Wenn die Theorie allerdings die zusätzliche Eigenschaft der Skaleninvarianz besitzt, wie es zum Beispiel bei masselosen Theorien und besonders bei statistischen Systemen am Phasenübergang zweiter Ordnung der Fall ist, so braucht auch die Metrik g nur bis auf einen Skalenfaktor invariant zu sein, d.h. $g_{\mu\nu}(x) \mapsto g'_{\mu\nu}(x') = \lambda(x')g_{\mu\nu}(x')$. Transformationen mit dieser Eigenschaft sind die *konformen* oder winkeltreuen Transformationen. Für $M = \mathbb{R}^{p,q}$, $p + q \neq 2$ kann die konforme Gruppe im wesentlichen in $\mathrm{SO}(p + 1, q + 1)$ eingebettet werden. Ist hingegen $M = \mathbb{R}^{1,1}$, so ist die konforme Gruppe des kompaktifizierten Raumes $\hat{M} = S^1 \times S^1$ der Signatur $(1, 1)$ unendlichdimensional. Beim Übergang ins Euklidische wurde erläutert, daß konforme Invarianz gleichbedeutend mit Holomorphie oder Antiholomorphie der Funktionen ist, denn jede auf der ganzen Riemannschen Zahlenkugel (anti-)holomorphe Funktion, und das sind gerade die Möbiustransformationen, bildet diese konform in sich ab. Allerdings wurde bei diesem Übergang ins Komplexe zunächst in den kompaktifizierten $\mathbb{C}^2$ gegangen, da z und $\bar{z}$ als unabhängige Variablen aufgefaßt wurden. Dem muß man durch einen geeigneten Schnitt abhelfen, der einen dann wieder auf $S^1 \times S^1$ bringt. Und hier ist die konforme Gruppe gerade $Diff(S^1) \times Diff(S^1)$, also unendlichdimensional und wird gerade durch die Lie-Algebra der linksinvarianten Vektorfelder $L_n = z^{n+1}\partial_z$, $n \in \mathbb{Z}$, mit $[L_m, L_n] = (n-m)L_{m+n}$, generiert [-12]. Die gerade gemachten Ausführungen sollen klarstellen, daß man zwar generell im zweidimensionalen Fall die unendlichdimensionale Algebra der infinitesimalen konformen Transformationen hat, diese aber nur in dem speziellen Falle $M = \hat{M}$ vollständig zur unendlichdimensionalen Gruppe integriert werden kann.

Die $su(1,1)$-Algebra (2.19) kann man in der suggestiveren Form

$$[L_m, L_n] = (n-m)L_{m+n}, \; m,n = -1,0,1 \tag{2.37}$$

schreiben. Wenn man das mit (2.34) vergleicht, drängt sich einem der Gedanke auf, die Operatoren L_n, $n = -1,0,1$ seien drei der homogenen Komponenten eines Vertexoperators zu einem $su(1,1)$-Tiefstgewichtszustand ω_c mit $h(\omega_c) = 2$, dem sogenannten *konformen Zustand*. Unter der Annahme der Existenz eines solchen Zustandes ω_c kann man dann

$$V(\omega_c, z) = T(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n z^{n-2} \tag{2.38}$$

setzen. Dann ist (2.37) für $m = -1,0,1$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ gültig. Aus der Definition von Vertexoperatoren, Gleichung (2.2), erhält man dann, daß $\omega_c = L_2\Psi_0$, und aus (2.38), daß auch tatsächlich $L_{-1}\omega_c = 0$, also ω_c ein $su(1,1)$-Tiefstgewichtszustand ist. Außerdem kann man immer ω_c als reell annehmen, andernfalls bräuchte man ihn nur durch den reellen Zustand $\frac{1}{2}(\omega_c + \omega_c^\dagger)$ zu ersetzen, der ebenfalls L_n, $n = -1,0,1$ als drei der homogenen Komponenten seines Vertexoperators besitzt, da $L_n^\dagger = L_{-n}$ für $n = -1,0,1$. Damit hat man dann Hermitizität für alle Komponenten, d.h.

$$L_n^\dagger = L_{-n} \;\; \forall n \in \mathbb{Z}\,. \tag{2.39}$$

Wie nicht anders zu erwarten, wird sich $T(z)$ als Generator der konformen Transformationen erweisen, genauer stellt $T(z)$ eine Komponente des Energie-Impuls-Tensors dar.
Dazu sei an dieser Stelle eine kurze Erläuterung eingeschoben. Sei $\mathcal{L}(x^\mu, \phi_j(x^\nu), \partial^\mu\phi_j(x^\nu))$ die Lagrangefunktion einer Feldtheorie. Dann ist durch

$$T^{\mu\nu} = \sum_j \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi_j}\partial^\nu\phi_j - g^{\mu\nu}\mathcal{L}$$

der Energie-Impuls-Tensor definiert, der eine symmetrische, divergenzfreie Größe darstellt, d.h. $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ und $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, und daher Erhaltungsgrößen in Form von Kontinuitätsgleichungen liefert. Im hier betrachteten Fall ist überdies der Energie-Impuls-Tensor auch spurfrei, $T^\mu_\mu = 0$, da die Theorie Skaleninvarianz besitzt. In zwei Dimensionen bedeuten diese Bedingungen an $T_{\mu\nu}$, daß, in chiralen Koordinaten, $T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0$ und $T_{zz} = T(z)$, $T_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{T}(\bar{z})$ ist, also $T_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = T(z)(dz)^2 + \bar{T}(\bar{z})(d\bar{z})^2$. Das Verhalten chiraler Felder unter einer Transformation $z \mapsto z(1+\varepsilon(z))$ wird dann, wie noch abgeleitet werden wird, durch den Kommutator $\delta\phi(\zeta) = [Q_\varepsilon, \phi(\zeta)]$ mit den "Ladungen"

$$Q_\varepsilon = \oint dz\, \varepsilon(z) T(z)$$

gegeben, wobei das Integral längs eines um den Ursprung geschlossenen Weges zu nehmen ist.
Zunächst jedoch soll der Kommutator $[L_m, L_n]$ für alle ganzen Zahlen m,n berechnen werden. Die Operatorproduktentwicklung (2.36) liefert für $|z| > |\zeta|$

$$\begin{aligned} T(z)T(\zeta) \;\sim\;& (z-\zeta)^{-4}V(L_{-2}\omega_c) + (z-\zeta)^{-3}V(L_{-1}\omega_c) \\ &+ (z-\zeta)^{-2}V(L_0\omega_c) + (z-\zeta)^{-1}V(L_1\omega_c)\,, \end{aligned} \tag{2.40}$$

wobei die hier eingeführte Schreibweise $A(z,\zeta) \sim B(z,\zeta)$ bedeutet, daß beide Seiten bis auf Terme übereinstimmen, die für $z=\zeta$ nicht singulär sind. Um (2.40) weiter auszurechnen, vergegenwärtigt man sich die folgenden Tatsachen:

- $L_{-2}\omega_c \in \mathcal{F}_0$, da der Eigenraum zum Gewicht 0 eindimensional ist, und damit hat man $L_{-2}\omega_c = L_{-2}L_2\Psi_0 = \frac{c}{2}\Psi_0$ für eine reelle Zahl $c = 2\|\omega_c\|^2$.
- $L_{-1}\omega_c = 0$ und $L_0\omega_c = 2\omega_c$ nach Voraussetzung.
- $V(\Psi_0, z) = \mathbf{1}$ und $V(L_1\psi, z) = \frac{d}{dz}V(\psi, z)$ als elementare Resultate über Vertexoperatoren.

Dies alles in (2.40) angewandt ergibt schließlich die Operatorproduktentwicklung des Energie-Impuls-Tensors,

$$T(z)T(\zeta) \;\sim\; \frac{c/2}{(z-\zeta)^4} + \frac{2T(\zeta)}{(z-\zeta)^2} + \frac{1}{(z-\zeta)}\frac{dT(\zeta)}{d\zeta}, \quad |z| > |\zeta|\,. \tag{2.41}$$

Dieses Ergebnis versetzt einen nun in die Lage, die Kommutatoren der Moden des Energie-Impuls-Tensors zu berechnen.

Proposition 2.9. Virasoro-Algebra. Seien die L_n, $n \in \mathbb{Z}$ die Moden eines Vertexoperators zu einem konformen Zustand. Dann ist der Kommutator gegeben durch

$$[L_m, L_n] \;=\; (n-m)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}\,. \tag{2.42}$$

Die Zahl c wird auch *zentrale Ladung* genannt.

Genauer handelt es sich bei c um einen Operator, eine *zentrale Erweiterung* der Witt-Algebra, die aber in jeder irreduziblen Darstellung als Zahl angesehen werden kann. Sie resultiert aus der Tatsache, daß man eigentlich, wegen der Normierungsbedingung an die Zustände, auf einem projektiven Hilbertraum arbeitet.

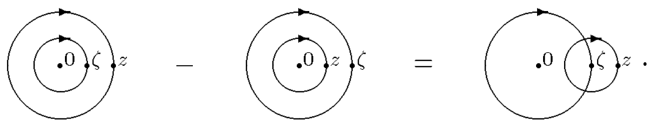
Beweis: Die Moden L_n des Energie-Impuls-Tensors $T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{n-2}L_n$ sind gegeben durch

$$L_n \;=\; \frac{1}{2\pi i}\oint dz\, z^{-n+1}T(z)\,, \tag{2.43}$$

wobei das Integral längs einer den Ursprung umschließenden Kurve zu nehmen ist. Der Kommutator ist dann entsprechend durch

$$\begin{aligned}[L_m\,, L_n] \;&=\; \frac{1}{2\pi i}\oint dz \frac{1}{2\pi i}\oint d\zeta\, z^{-m+1}\zeta^{-n+1}T(z)T(\zeta)\Big|_{|z|>|\zeta|} \\ &-\; \frac{1}{2\pi i}\oint dz \frac{1}{2\pi i}\oint d\zeta\, z^{-m+1}\zeta^{-n+1}T(\zeta)T(z)\Big|_{|\zeta|>|z|}\end{aligned} \tag{2.44}$$

gegeben. Da ω_c ein Zustand von ganzzahligem $su(1,1)$-Gewichte 2, also $\varepsilon_{\omega_c\omega_c} = 1$ ist, definieren die Integranden auf der rechten Seite der Gleichung ein und dieselbe meromorphe (operatorwertige) Funktion, deren singulärer Teil für $z=\zeta$ durch (2.41) gegeben wird. Daher kann man nun – ein Standardargument der Funktionentheorie, das immer angewandt wird, wenn aus einer OPE Kommutatoren berechnet werden sollen – die Integrationswege deformieren, also



Mit dieser Veränderung der Integrationswege, wo also die Integration über z entlang eines kleinen, ζ umschließenden Kreises und diejenige über ζ entlang eines den Urspung umschließenden Weges erfolgt, ergibt sich dann

$$[L_m\,,L_n] = \frac{1}{2\pi i}\oint_0 d\zeta\,\zeta^{-n+1}\frac{1}{2\pi i}\oint_\zeta dz\,z^{-m+1}\left(\frac{c/2}{(z-\zeta)^4}+\frac{2T(\zeta)}{(z-\zeta)^2}+\frac{1}{(z-\zeta)}\frac{dT(\zeta)}{d\zeta}\right)\,, \qquad (2.45)$$

was durch Anwenden des Cauchyschen Satzes sofort auf die gewünschte Form (2.42) gebracht werden kann. ■

Man kann nun die oben gemachten Betrachtungen bezüglich der $su(1,1)$-Algebra (2.19) auf diese größere Algebra übertragen. Für den euklidischen Bereich der Theorie kann man $\mathcal{F}$ sogar als direkte Summe von irreduziblen Tiefstgewichtsdarstellungen der Virasoro-Algebra (2.42) schreiben, i.e. Darstellungen, die durch *(konforme) Tiefstgewichtszustände* ψ generiert werden. Solche Zustände sind dadurch definiert, daß sie für ein h

$$L_0\psi \;=\; h\psi, \;\; L_n\psi \;=\; 0 \;\;\forall n<0 \qquad (2.46)$$

erfüllen. Den Raum aller dieser Zustände, die (2.46) für ein festes *(konformes) Gewicht h* genügen, werde mit $\mathcal{F}^P(h)$ bezeichnet. Das Operatorprodukt zwischen $T(z)$ und einem Vertexoperator zu einem konformen Tiefstgewichtszustand $\psi\in\mathcal{F}^P(h)$ hat dann nach (2.36) die Entwicklung

$$\begin{aligned} T(z)V(\psi,\zeta) \;&\sim\; (z-\zeta)^{-2}V(L_0\psi,\zeta)+(z-\zeta)^{-1}V(L_1\psi,\zeta)\\ &=\; \frac{h}{(z-\zeta)^2}V(\psi,\zeta)+\frac{1}{(z-\zeta)}\frac{d}{d\zeta}V(\psi,\zeta)\,, \end{aligned} \qquad (2.47)$$

aus der mit Hilfe von (2.46) und (2.11) auf dieselbe Weise, wie bei (2.42), der Kommutator

$$[L_m,\,V(\psi,z)] \;=\; z^{-m}\left(z\frac{d}{dz}-(m-1)h\right)V(\psi,z),\;\; m\in\mathbb{Z} \qquad (2.48)$$

berechnet werden kann, was (2.24) auf die ganze Virasoro-Algebra verallgemeinert. Dies impliziert natürlich auch die Verallgemeinerung von Gleichung (2.34) für die Moden von $V(\psi,z)$,

$$[L_m,\,V_n(\psi)] \;=\; (n-m(h-1))\,V_{m+n}(\psi),\;\; m\in\mathbb{Z},\;\forall n\,. \qquad (2.49)$$

Ein Feld $V(\psi,z)$, daß (2.47) beziehungsweise (2.48) erfüllt, heißt *primäres Feld* vom Gewichte $h(\psi)$, der es erzeugende Virasoro-Tiefstgewichtszustand auch *primärer Zustand.*

Man sieht sich nun in der Lage zu definieren, was unter einer konformen Feldtheorie im Rahmen dieser Arbeit verstanden werden soll.

Definition 2.10. Eine *(meromorphe) konforme Feldtheorie* ist ein Quadrupel $(\mathcal{H},\mathcal{F},\mathcal{V},T)$, bestehend aus einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, einem dichten Teilraum $\mathcal{F}\subset\mathcal{H}$, der mit einer explizit gegebenen Basis versehen ist, einem lokalen System $\mathcal{V}=\{V(\psi,z),\,\psi\in\mathcal{F}\mid\varepsilon_{\psi\psi'}=\pm1\}$ von Vertexoperatoren, und einer konformen Struktur T, die durch die Virasoro-Algebra der Moden eines spurfreien Energie-Impuls-Tensors $T(z)$ gegeben wird.

Zwei solche konforme Feldtheorien $(\mathcal{H},\mathcal{F},\mathcal{V},T)$ und $(\mathcal{H}',\mathcal{F}',\mathcal{V}',T')$ heißen *äquivalent*, wenn es einen Hilbertraum-Isomorphismus $U:\mathcal{H}\mapsto\mathcal{H}'$ gibt, so daß

$$U(\mathcal{F})=\mathcal{F}',\;\; UV(\psi,z)U^{-1}=V(U\psi,z),\;\; UT(z)U^{-1}=T'(z)\,. \qquad (2.50)$$

Bis jetzt wurden nur chirale Feldtheorien betrachtet. Im allgemeinen Fall hat man als Symmetriealgebra eine doppelte Kopie der Virasoro-Algebra mit (meist identischen) zentralen Ladungen c und $\bar{c}$. Alle Felder zerfallen in einen holomorphen und antiholomorphen Anteil mit

Gewichten h bzw. $\bar{h}$. Es bedeutet daher keine Einschränkung, nur chirale Algebren zu betrachten, der nicht chirale Fall läßt sich immer leicht aus solchen rekonstruieren.

2.6. Normalgeordnete Produkte und $\mathcal{W}$ Algebren

Dieser Abschnitt widmet sich nun schließlich der Definition von $\mathcal{W}$-Algebren als speziellen, chiralen $su(1,1)$-invarianten Feldalgebren. Dabei wird sich insbesondere herausstellen, daß im hier betrachteten Fall die OPE exakt dieselbe Information enthält, wie die Kommutatoren der Fouriermoden, denn der reguläre Teil von ihr ist durch die im singulären Teil auftretenden Felder bereits vollständig bestimmt. Es soll daher zunächst die Frage geklärt werden, welche Felder im regulären Teil einer OPE zweier quasiprimärer Felder auftreten.
Da, wie bereits weiter oben bemerkt wurde, alle Zustände aus quasiprimären erzeugt werden können, und somit über den durch die Vertexoperatoren gegebenen Isomorphismus $\psi \leftrightarrow V_h(\psi)\Psi_0$ auch alle Felder aus quasiprimären, sei von nun an angenommen, daß man in dem lokalen System $\mathcal{V}$ ein Erzeugendensystem von quasiprimären, rein reellen oder rein imaginären Feldern $\phi_i(z) \equiv V(\phi_i, z)$ mit $L_0\phi_i = h(i)\phi_i$ ausgewählt habe. Ihre Moden seien mit $\phi_{i,n}$ bezeichnet. Aus diesem Erzeugendensystem erhält man dann die sogenannten *derivativen Felder*

$$V(L_1^k\phi_i, z) = \left(\frac{d}{dz}\right)^k \phi_i(z) .$$

Weiter kann man für quasiprimäre Felder leicht eine noch explizitere Form der Zwei- und Drei-Punkt-Funktionen (2.18) bzw. (2.25) angeben, indem man die Laurent-Entwicklung der Felder einsetzt und $su(1,1)$-Invarianz ausnutzt. Für erstere erhält man

$$\begin{aligned}
\langle\phi_i(z)\phi_j(\zeta)\rangle &= (z-\zeta)^{-h(i)-h(j)}\langle V(\phi_i,1)\phi_j\rangle \\
&= (z-\zeta)^{-h(i)-h(j)}\left\langle \sum_{n\le -h(i)} \phi_{i,n}\phi_{j,h(j)}\right\rangle \\
&= (z-\zeta)^{-h(i)-h(j)}\left(\left\langle \sum_{n\le -h(i)-1} [L_{-1},\phi_{i,n+1}]\phi_{j,h(j)}\right\rangle \frac{1}{n+h(i)} + \langle\phi_{i,-h(i)}\phi_{j,h(j)}\rangle\right) \\
&= (z-\zeta)^{-h(i)-h(j)}\left(\left\langle \sum_{n\le -h(i)-1} \phi_{i,n+1}[\phi_{j,h(j)},L_{-1}]\right\rangle \frac{1}{n+h(i)} + \langle\phi_{i,-h(i)}\phi_{j,h(j)}\rangle\right) \\
&= (z-\zeta)^{-h(i)-h(j)}\left(0+\langle\phi_{i,-h(i)}\phi_{j,h(j)}\rangle\right) \\
&= \frac{d_{ij}}{(z-\zeta)^{h(i)+h(j)}} ,
\end{aligned} \tag{2.51}$$

wobei $d_{ij} \equiv \langle\Psi_0, \phi_{i,-h(i)}\phi_{j,h(j)}\Psi_0\rangle$ definiert wurde. Man erkennt unschwer, daß für $su(1,1)$-primäre Felder $d_{ij} \propto \delta_{h(i),h(j)}$ ist. Mit dieser Bilinearform kann das Erzeugendensystem zu einer Basis reduziert werden, so daß die Form nicht degeneriert ist, und es soll im folgenden immer von dieser Situation ausgegangen werden. Ähnlich berechnet sich die Drei-Punkt-Funktion mit den Definitionen $C_{ijk} \equiv \langle\Psi_0, \phi_{i,-h(i)}\phi_{j,h(i)-h(k)}\phi_{k,h(k)}\Psi_0\rangle = \langle\phi_i(\infty)\phi_j(1)\phi_k(0)\rangle$ und $k(ij) = 2(h(i)+h(j)) - H$, $H = h(i)+h(j)+h(k)$ zu

$$\langle\phi_i(z_i)\phi_j(z_j)\phi_k(z_k)\rangle = \prod_{i'<j'} \frac{1}{(z_{i'}-z_{j'})^{k(i'j')}} C_{ijk} . \tag{2.52}$$

Man nennt die d_{ij} und die über $C_{ijk} = C_{ij}^{k'} d_{k'k}$ gegebenen C_{ij}^k die *Strukturkonstanten* der Operatoralgebra. Die C_{ijk} sind invariant bezüglich zyklischer Vertauschung ihrer Indizes und ändern ihr Vorzeichen um $(-)^{h(i)+h(j)-h(k)}$ bei ungeraden Permutationen, wie man durch komplexes Konjugieren sieht, falls angenommen wird, daß auf dem Raum der Zustände eine Involution der Form $\phi^\dagger = (-)^{\lfloor h(\phi) \rfloor} \phi$ existiert. Die Zwei- und Drei-Punkt-Funktionen sind also jeweils durch eine explizit bekannte analytische Funktion bis auf eine Konstante bestimmt.
Für ein solches Erzeugendensystem von quasiprimären Feldern kann man nun explizit auch die Felder aus dem regulären Teil der OPE (2.36) angeben, die hier die Form

$$\phi_i(z)\phi_j(\zeta) \;=\; \sum_{r \geq -h(i)-h(j)} (z-\zeta)^r V(\phi_{i,h(i)+r}\phi_{j,h(j)}\Psi_0, \zeta) \tag{2.53}$$

annimmt. Entwickelt man die Felder aus dem regulären Anteil $r \geq 0$ in ihre Moden und bedenkt, daß es nach Proposition 2.3 ausreicht, die Wirkung auf das Vakuum zu kennen, so erhält man

$$V_{(h(i)+h(j)+r)+n}(\phi_{i,h(i)+r}\phi_{j,h(j)}\Psi_0)\Psi_0 \;=\; \sum_{k=0}^{n} \phi_{i,h(i)+r+k}\phi_{j,h(j)+n-k}\Psi_0\,, \quad n \geq 0\,, \tag{2.54}$$

indem man $V_{h+n}\Psi_0 = \frac{1}{n}[L_1^n, V_h]\Psi_0$ schreibt und die L_1-Operatoren nach rechts durchzieht. Berechnet man auf ähnliche Weise $V_m\Psi_0$, $0 \leq m < h$, so stellt man fest, daß diese Terme nicht verschwinden, also daß die Felder aus dem regulären Teil der OPE nicht mehr quasiprimär sind. Die Moden für $m < 0$ lassen sich leicht durch Adjungieren bestimmen, $V_{-m}(\phi\psi) = V_m(\psi\phi)$ für reelle ϕ, ψ; man beachte, daß sich dabei die Reihenfolge umkehrt. Wie man weiter aus (2.54) entnimmt, kann man dort die Summe auch ad infinitum nehmen, die zusätzlichen Terme werden vom Vakuum annihiliert. Alles zusammengenommen zeigt sich, daß die Moden der Felder des regulären Teils der OPE durch Normalordnung gegeben werden können, die Felder also normalgeordnete Produkte im Sinne der folgenden Definition darstellen.

Definition 2.11. Die *Normalgeordneten Produke* zweier chiraler Felder $\phi(z)$, $\psi(z)$ sind für alle $m \in \mathbb{Z}$ definiert durch

$$\begin{aligned} N^{(m)}(\phi,\psi)(z) &= \sum_n z^{n-h(\phi)-h(\psi)} N^{(m)}(\phi,\psi)_n\,, \\ N^{(m)}(\phi,\psi)_n &= \varepsilon_{\phi\psi} \sum_{k=-\infty}^{m-1} \phi_{n-k}\psi_k + \sum_{k=m}^{\infty} \psi_k\phi_{n-k}\,, \end{aligned} \tag{2.55}$$

wobei die unendlichen Summationen als Limites in der schwachen Topologie zu verstehen sind. Dabei ist für ein derivatives Feld $\phi'(z) = (\partial^r\phi)(z)$ die Dimension als $h(\phi') = h(\phi) + r$ gegeben.

Felder, die weder derivativ, noch normalgeordnete Produkte sind, heißen *einfache Felder*. Die Ableitungen eines primären Feldes und seine normalgeordneten Produkte mit dem Virasorofeld nennt man auch seine *descendanten Felder*.

Damit ist dann $V(\phi_{i,h(i)+r}\phi_{j,h(j)}\Psi_0, z) = \frac{1}{r} N^{(h(i)+r)}(\partial^r\phi_i, \phi_j)(z)$, und die OPE hat nun die Form

$$\phi_i(z)\phi_j(\zeta) \;=\; \textit{singuläre Terme} \;+\; \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r}(z-\zeta)^r N^{(h(i)+r)}(\phi_j, \partial^r\phi_i)\,. \tag{2.56}$$

Es sei darauf hingewiesen, daß die genaue Definition des normalgeordneten Produktes relativ unwichtig ist. $N^{(m)}$ und $N^{(m')}$ unterscheiden sich in ihren Moden immer nur durch endlich viele lokale Terme, insbesondere ist $N^{(m+1)}(\phi,\psi)_n - N^{(m)}(\phi,\psi)_n = [\phi_{n-m}, \psi_m]$. Dennoch ist diese etwas willkürliche Freiheit sowie die Tatsache, daß diese Felder nicht mehr quasiprimär sind, nicht sehr ästhetisch und etwas unbefriedigend.

Nun können aber alle Felder als Linearkombinationen von Ableitungen quasiprimärer Felder geschrieben werden. Dies kann man auch für die normalgeordneten Produkte tun, wenn man die OPE noch genauer analysiert. Mit dem folgenden Ansatz für quasiprimäre Felder,

$$\phi_i(z)\phi_j(\zeta) \;=\; \sum_{k\geq 0}(z-\zeta)^{k-h(i)-h(j)}W^{(k)}(\zeta)\,,$$

wobei die $W^{(k)}$ Felder der konformen Dimension k seien, erhält man durch Integration beider Seiten mit $\oint \frac{1}{2\pi i}(z-\zeta)^{k-1}dz$ entlang eines Kreises um den Ursprung mit Radius $|z|>|\zeta|$, anschließendem Anwenden des Ergebnisses auf das Vakuum und Vergleichen der Laurententwicklung in ζ die Beziehung

$$\sum_{l\geq 0}(-)^l\binom{k-1}{l}\phi_{i,h(i)-k+l}\phi_{j,h(j)+n-l}\Psi_0 \;=\; W^{(h(i)+h(j)-k)}_{n+h(W)}\Psi_0\,. \tag{2.57}$$

Für $n=0$ fällt die Summe auf der linken Seite zusammen bis auf den Term $\phi_{i,h(i)-k}\phi_{j,h(j)}\Psi_0$. Sei nun $W^{(k)}$ eine Linearkombination aus Ableitungen von Feldern aus der Basis,

$$W^{(k)}(z) \;=\; \sum_{\{k'\in I|h(k')\leq k\}}\partial^{k-h(k')}\phi_{k'}(z)\,.$$

Multipliziert man (2.57) auf beiden Seiten von links mit $\Psi_0\phi_{k',-h(W)-n}$ so kann man den jeweiligen quasiprimären Anteil extrahieren. Zusammen mit der $su(1,1)$-Invarianz, mit deren Hilfe man die auftretenden Terme auf die Strukturkonstanten zurückführen kann,

$$\begin{aligned}\langle\Psi_0,\,\phi_{k,-h(k)-r}\phi_{i,h(k)+r-h(j)}\phi_{j,h(j)}\Psi_0\rangle \;&=\; \binom{h(k)+h(i)-h(j)+r-1}{r}C_{ijk}\\ \langle\Psi_0,\,\phi_{k,-h(k)-r}\phi_{k,h(k)+r}\Psi_0\rangle \;&=\; \binom{2h(k)+r-1}{r}d_{kk}\,,\end{aligned}$$

leitet man schließlich die in den nicht derivativen Feldern der Basis ausgeschriebene OPE ab,

$$\phi_i(z)\phi_j(\zeta) \;=\; \sum_{k\in I}(z-\zeta)^{-h(ijk)}C_{ij}^k\sum_{r\geq 0}(z-\zeta)^r\frac{1}{r}a^r_{ijk}\partial^r\phi_k(\zeta)\,, \tag{2.58}$$

wobei die Abkürzungen $h(ijk)=h(i)+h(j)-h(k)$ und

$$a^r_{ijk} \;=\; \binom{2h(k)+r-1}{r}^{-1}\binom{h(k)+h(i)-h(j)+r-1}{r} \tag{2.58'}$$

verwendet wurden. Die Terme in den derivativen Feldern sind also vermöge der $su(1,1)$-Invarianz vollständig durch die der nicht derivativen Felder bestimmt.
Für die Felder $W^{(h(i)+h(j)+n)}$, $n\geq 0$, die im regulären Teil der OPE erscheinen, ist schon abgeleitet worden, daß sie sich als normalgeordnete Produkte schreiben lassen,

$$W^{(h(i)+h(j)+n)} \;=\; N^{(h(i)+n)}(\phi_j,\partial^n\phi_i)\,.$$

Das kann mit (2.58) in die quasiprimären Anteile aufgespalten werden, die dabei auftretenden Terme mit Dimension $h(k)\geq h(i)+h(j)$ sind dann die gesuchten quasiprimären normalgeordneten

Produkte (NOPs) $\mathcal{N}(\phi_j, \partial^{-h(ijk)}\phi_i)(z) \equiv \phi_k(z)$, so daß man die Zerlegung

$$
\begin{aligned}
N^{(h(i)+n)}(\phi_j, \partial^n\phi_i) &= \sum_{\{k|h(ijk)\geq 1\}} C_{ij}^k \frac{a_{ijk}^{h(ijk)+n}}{(h(ijk)+n)} \partial^{h(ijk)+n}\phi_k \\
&+ \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} \binom{2(h(i)+h(j)+n)-r-1}{r}^{-1} \binom{2h(i)+n-1}{r} \partial^r \mathcal{N}(\phi_j, \partial^{n-r}\phi_i)
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

hat. Löst man dieses System nach den $\mathcal{N}$-Produkten auf, erhält man eine explizit berechenbare Form für diese und eine sehr elegante für die Operatorproduktentwicklung, die singulären und regulären Teil voneinander trennt.

Proposition 2.12. OPE und quasiprimäre NOPs. Seien ϕ_i, ϕ_j zwei Elemente der quasiprimären Basis der Felder. Dann ist die Operatorproduktentwicklung in quasiprimären Feldern gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\phi_i(z)\phi_j(\zeta) &= \sum_{\{k|h(ijk)\geq 1\}} (z-\zeta)^{-h(ijk)} C_{ij}^k \sum_{r=0}^{\infty} a_{ijk}^r \frac{1}{r}(z-\zeta)^r \partial^r \phi_k(\zeta) \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_{ijn'}^r}{nr}(z-\zeta)^{n+r}\partial^r \mathcal{N}(\phi_j, \partial^n\phi_i)(\zeta),
\end{aligned}
\tag{2.60}
$$

wobei $h(n') = h(i)+h(j)+n$ in $a_{ijn'}^r$ als die Dimension der quasiprimären normalgeordneten Produkte einzusetzen ist. Diese Produkte haben dabei die Gestalt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}(\phi_j, \partial^n\phi_i) &= \sum_{r=0}^{n} (-)^r \binom{n}{r} \binom{2(h(i)+h(j)+n-1)}{r}^{-1} \binom{2h(i)+n-1}{r} \\
&\quad \times \partial^r N^{(h(i)+n+r)}(\phi_j, \partial^{n-r}\phi_i) \\
&- (-)^n \sum_{\{k|h(ijk)\geq 1\}} C_{ij}^k \binom{h(ijk)+n-1}{n} \binom{2(h(i)+h(j)+n-1)}{n}^{-1} \\
&\quad \times \binom{2h(i)+n-1}{h(ijk)+n} \binom{\sigma(ijk)-1}{h(ijk)-1}^{-1} \frac{\partial^{h(ijk)+n}\phi_k}{(\sigma(ijk)+n)(h(ijk)-1)}
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

mit $\sigma(ijk) = h(i)+h(j)+h(k)-1$. Diese normalgeordneten Produkte sind (anti)kommutativ, d.h. $\mathcal{N}(\phi,\psi) = \varepsilon_{\phi\psi}\mathcal{N}(\psi,\phi)$, aber nicht assoziativ. Desweiteren gilt $\mathcal{N}(\phi, \partial\psi) = -\mathcal{N}(\partial\phi, \psi)$.

Beweis: Es bleiben nach den obigen Ausführungen nur noch die Bemerkungen am Schluß zu zeigen. Kommutativität folgt aus der Definition der naiven normalgeordneten Produkte und den Symmetrieeigenschaften der C_{ij}^k. Die Ungültigkeit von Assoziativität sieht man durch explizite Rechnung an Beispielen. Die Quasiprimarität liefert sofort die letzte Behauptung, da $[L_1, \mathcal{N}] = \partial\mathcal{N} = 0$ ist und die naiven NOPs die Leibnitzsche Regel erfüllen. ∎

Wie beim Energie-Impuls-Tensor kann aus der OPE auch der Kommutator zwischen Fouriermoden ausgerechnet werden. Dies zeigt dann auch, daß in dem hier betrachteten Fall lokaler chiraler Algebren die OPE und die Lie-Algebra der Moden exakt dieselbe Information enthalten. Die Moden für ein quasiprimäres Feld erhält man wie üblich durch Integration

$$
\phi_{i,m} = \frac{1}{2\pi i}\oint dz\, z^{h(i)-m-1}\phi_i(z)
$$

längs eines im positiven Sinne den Ursprung umfahrenden Kreises. Somit ist der Kommutator einer Mode des Feldes ϕ_i mit dem Feld ϕ_j (beide quasiprimär) durch

$$
\begin{aligned}
[\phi_{i,m},\, \phi_j(\zeta)]_{\varepsilon_{ij}} &= \oint_{|z|>|\zeta|} \frac{dz}{2\pi i} z^{h(i)-m-1} \phi_i(z)\phi_j(\zeta) \\
&- \oint_{|\zeta|>|z|} \frac{dz}{2\pi i} z^{h(i)-m-1} \phi_i(z)\phi_j(\zeta)
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

gegeben. Man beachte, daß man wegen der im Kommutator eingeführten Phase immer die Differenz der beiden Integrale erhält, so daß man das schon bei der Virasoro-Algebra erwähnte Argument des Deformierens der Integrationswege anwenden kann. (2.62) reduziert sich also zu einem Integral längs eines hinreichend kleinen Kreises um ζ, wobei für den Integranden der singuläre Teil der OPE einzusetzen ist. Die Laurententwicklung der resultierenden Gleichung in ζ liefert dann

$$
[\phi_{i,m},\, \phi_{j,n}]_{\varepsilon_{ij}} = d_{ij}\delta_{n+m,0}\binom{n+h(i)-1}{2h(i)-1} + \sum_{\{k\in I|h(ijk)\geq 1\}} C_{ij}^k p_{ijk}(m,n)\phi_{k,m+n}\,, \tag{2.63}
$$

wobei die universellen Polynome, die die Anteile derivativer, nicht quasiprimärer Felder aufsummieren, die Gestalt

$$
p_{ijk}(m,n) = \sum_{r,s\in\mathbb{Z}_+} \delta_{r+s,h(ijk)-1} a_{ijk}^r \binom{-m+h(i)-1}{s}\binom{m+n-h(k)}{r} \tag{2.63'}
$$

haben. Diese Polynome lassen sich noch in einer etwas symmetrischeren Form schreiben, die in dem folgenden Satz gegeben wird, der die bisherigen Ergebnisse über die Lie-Algebra der Moden einer chiralen Feldalgebra noch einmal zusammenfaßt.

Satz 2.13. Lie-Algebra chiraler Feldalgebren. Sei $\{\phi_i(z)|i \in I\}$ ein Erzeugendensystem quasiprimärer Felder für $\mathcal{F}$. Bezeichne $h(i)$ die Dimension des Feldes $\phi_i(z)$, das rein reell sei, falls $\lfloor h(i)\rfloor \in 2\mathbb{Z}$, und rein imaginär für $\lfloor h(i)\rfloor \in 2\mathbb{Z}+1$. Seien die *Strukturkonstanten* definiert als

$$
\begin{aligned}
C_{ijk} &= \langle \Psi_0,\, \phi_{k,-h(k)}\phi_{i,h(k)-h(j)}\phi_{j,h(j)}\Psi_0\rangle \\
d_{ij} &= \langle \Psi_0,\, \phi_{i,-h(i)}\phi_{j,h(j)}\Psi_0\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Dann hat die Lie-Algebra der Fouriermoden der linkschiralen Felder die Form

$$
[\phi_{i,m},\, \phi_{j,n}]_{\varepsilon_{ij}} = \sum_{k\in I} C_{ij}^k p_{ijk}(m,n)\phi_{k,m+n} + d_{ij}\delta_{h(i),h(j)}\delta_{n+m,0}\binom{n+h(i)-1}{2h(i)-1}, \tag{2.63}
$$

wobei

$$
C_{ij}^{k'} d_{k'k} = C_{ijk}\,.
$$

Mit der abkürzenden Notation

$$
h(ijk) = h(i)+h(j)-h(k)
$$

hat man

$$
p_{ijk}(m,n) = \sum_{r,s\in\mathbb{Z}_+} \delta_{r+s,h(ijk)-1} b_{ijk}^r \binom{m+h(i)-1}{r}\binom{n+h(j)-1}{s} \tag{2.63''}
$$

und

$$
b_{ijk}^r = (-)^r \frac{(2h(k)-1)sr}{(h(i)+h(j)+h(k)-2)}\binom{2h(i)-2-r}{s}\binom{2h(j)-2-s}{r}. \tag{2.63'''}
$$

Die Strukturkonstanten $d_{ij} = C_{ij}^0$ und C_{ij}^k sind reell. ∎

Die letzte Behauptung, die Strukturkonstanten seien reell, folgt durch Adjungieren von (2.63) und der Beobachtung, daß $p_{ijk}(-m,-n) = (-)^{h(ijk)-1}p_{ijk}(m,n)$ ist. Die Konstruktion ist so gemacht, daß die Jakobi-Identität erfüllt ist, sofern die quasiprimären Felder wirklich ein Erzeugendensystem von $\mathcal{F}$ bzw. eines darin enthaltenen lokalen Systems sind.

Man ist nun in der Lage, zu definieren, was unter einer $\mathcal{W}$-Algebra zu verstehen ist. Der Hauptpunkt ist der, daß man als Generatoren der Algebra nicht mehr alle quasiprimären Felder nehmen will, dafür aber die $\mathcal{N}$-Produkte zur Erzeugung der Algebra zuläßt.

Definition 2.14.$\mathcal{W}$Algebren. Eine *(endlich erzeugte) $\mathcal{W}$-Algebra* ist eine meromorphe konforme Feldtheorie $(\mathcal{H},\mathcal{F},\mathcal{W},T)$ in der eine ausgezeichnete (endliche) Menge von einfachen quasiprimären Feldern $\mathcal{B}_\mathcal{W} = \{\phi_i(z)|i \in I\} \cup \{T(z)\}$ existiert, so daß das lokale System $\mathcal{W}$ allein durch die Operationen $\mathcal{N}$ und ∂ aus $\mathcal{B}_\mathcal{W}$ erzeugt wird. Die so generierte Algebra wird mit $\mathcal{W}(2,h(1),h(2),\ldots)$ notiert.

Ist $\mathcal{B}_\mathcal{W}$ ein minimales Erzeugendensystem im obigen Sinne, so ist es bis auf lineare Basiswechsel seines Spans eindeutig bestimmt. Da das lokale System $\mathcal{W}$ per definitionem eine abgeschlossene assoziative Algebra bilden soll, impliziert die obige Definition einer $\mathcal{W}$-Algebra, daß die OPE assoziativ ist, oder, vollkommen äquivalent dazu, die Lie-Algebra der Fouriermoden die Jakobi-Identitäten erfüllt. Dahingegen ist die Voraussetzung, die Menge $\mathcal{B}_\mathcal{W}$ bestehe bis auf $T(z)$ ausschließlich aus primären Feldern, zu scharf, da eine Projektion eines solchen Erzeugendensystems auf die primären Felder nicht für alle zentralen Erweiterungen c möglich zu sein braucht. Dennoch sei im folgenden, wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt, unter einer $\mathcal{W}$-Algebra immer eine solche aus primären Feldern erzeugte verstanden, da nur diese leicht explizit konstruiert werden können.

2.7. Heisenbergalgebren und Gitter

Zum Abschluß dieser langen Einführung soll in diesem Abschnitt eine konkrete Realisierung von Vertexoperatoren angegeben werden, um der oben entwickelten Theorie das Fundament der Existenz zu geben, denn bis jetzt fehlt ja noch ein konkretes Beispiel für eine Vertexoperatoralgebra. Eine solche Konstruktion wird aus Heisenbergalgebren, welche von der zweiten Quantisierung des harmonischen Oszillators oder von den Stromalgebren her wohl bekannt sein dürften, oder aus Cliffordalgebren, die beim fermionischen Oszillator auftreten, gewonnen.

Sei Λ ein *ganzes Gitter* der Dimension d, d.h. für alle $\alpha,\alpha' \in \Lambda$ ist das euklidische Skalarprodukt $\alpha\cdot\alpha' \in \mathbb{Z}$. Jedem $\alpha \in \Lambda$ ordnet man einen Vektor $|\alpha\rangle$ zu, so daß $\langle\alpha|\alpha'\rangle = \delta_{\alpha\alpha'}$ ist. Weiter sei eine *Heisenbergalgebra* von Oszillatoren j_n^a, $n \in \mathbb{Z}$, $1 \le a \le d$ über die Vertauschungsrelationen

$$[j_m^a, j_n^b] \;=\; n\delta^{ab}\delta_{m+n,0} \tag{2.64}$$

gegeben, die die folgenden Bedingungen erfüllen möge, derentwegen sie auch die vom Gitter Λ induzierte Heisenbergalgebra heißt:

$$j_n^{a\dagger} \;=\; j_{-n}^a\,,\quad j_n^a|\alpha\rangle \;=\; 0\;\forall n<0\,,\quad j_0^a|\alpha\rangle \;=\; \sqrt{2}\alpha^a|\alpha\rangle\,. \tag{2.65}$$

Der Hilbertraum $\mathcal{F}$ wird dann durch die Operation der j_n^a, $n > 0$ auf der Menge $\{|\alpha\rangle \mid \alpha \in \Lambda\}$ erzeugt, sein Vakuum Ψ_0 ist der Vektor $|0\rangle$. Dieser Fockraum zerfällt also in unendlich viele *Superauswahlsektoren* $\mathcal{F}_\alpha$ bezüglich der Heisenbergalgebra, die durch ihre *Ladungen* $\sqrt{2}\alpha$ charakterisiert sind. Man definiert nun ein Feld

$$L(z) \;\equiv\; \frac{1}{2}N^{(0)}(j^a,j^a) \;=\; \frac{1}{2}\mathcal{N}(j^a,j^a)\,, \tag{2.66}$$

dessen Moden, wie eine einfache explizite Rechnung zeigt, die Virasoro-Algebra mit $c = d$ erfüllen. Die $|\alpha\rangle$ sind dann Tiefstgewichtszustände mit $L_0|\alpha\rangle = (\alpha)^2|\alpha\rangle$.
Man will nun sogenannte *Parafelder* konstruieren, die die Ladung zu ändern vermögen, also Superauswahlsektoren ineinander abbilden. Dazu ist es von Vorteil, nun in den minkowskischen Bereich der CFT zu gehen. Für Felder gilt die Beziehung

$$z^{h(\phi)}\phi_{euklid.}(z) \;=\; \phi_{mink.}(u)\,.$$

Da nun L_0, $L_1 + L_{-1}$ und $i(L_1 - L_{-1})$ die konformen Transformationen erzeugen, drückt sich die $su(1,1)$-Invarianz nun in der Form

$$[L_n,\, \phi(u)] \;=\; e^{inu}(i\partial_u - nh(\phi))\phi(u)\,,\ n = -1, 0, 1 \tag{2.24'}$$

aus. Insbesondere ist nun L_0 der Generator der Translationen. Man sucht also ein Feld $\chi_\alpha(u)$, das einerseits die Ladung um $\sqrt{2}\alpha$ ändern soll, und zwar so, daß $\chi_\alpha|0\rangle = |\alpha\rangle$ ist, und andererseits relativ lokal zu den $j^a(u)$ ist. Dieses Feld muß mindestens die Dimension haben, die dem Gewicht des Tiefstgewichtszustandes entspricht, also $h = (\alpha)^2$. Mit diesen Forderungen ist der Kommutator mit j^a bereits festgelegt,

$$[j^a(u),\, \chi_\alpha(u')] \;=\; \sqrt{2}\alpha^a\chi_\alpha(u)\delta(u-u')\,,$$

d.h. der Kommutator mit j^a_n, $n \neq 0$ ist, gemäß der Heisenbergalgebra, durch die Ableitung bezüglich j^a_{-n} gegeben. (Man denke daran, daß für zueinander konjugierte Operatoren A, B, $[A, B] \propto \mathbf{1}$ immer die Darstellung $A = x$, $B = \partial_x$ existiert.) Damit erhält man für das Parafeld die Form

$$\chi_\alpha(u) \;=\; \exp\left(-\sum_{n>0}\sqrt{2}\alpha^a j^a_n\frac{e^{-inu}}{n}\right)\exp\left(-\sum_{n<0}\sqrt{2}\alpha^a j^a_n\frac{e^{-inu}}{n}\right)c_\alpha(u)\,, \tag{2.67}$$

wobei $c_\alpha(u)$ mit den j^a_n für $n \neq 0$ kommutiert, andererseits, da es die Ladung erhöht, gilt

$$[j^a_0,\, c_\alpha(u)] \;=\; \sqrt{2}\alpha^a c_\alpha(u)\,.$$

Um Translationsinvarianz zu erhalten, also $[L_0, \chi_\alpha(u)] = -i\partial\chi_\alpha(u)$, muß man die Gleichung

$$-i\partial c_\alpha(u) \;=\; \frac{1}{2}[(j_0)^2,\, c_\alpha(u)] \;=\; c_\alpha(u)\left(\sqrt{2}\alpha^a j^a_0 + (\alpha)^2\right)$$

erfüllen, was einem

$$c_\alpha(u) \;=\; c(\alpha)\exp\left(i\sqrt{2}\alpha^a j^a_0 u + i(\alpha)^2 u\right) \tag{2.68}$$

liefert, wobei $c(\alpha)$ unabhängig von u ist. Es kann so gewählt werden, daß $c(\alpha)|\beta\rangle = |\alpha + \beta\rangle$ ist, da es Grundzustände ineinander abbildet. Mit dieser Wahl gilt dann insbesondere

$$\chi_\alpha(u)^\dagger \;=\; \chi_{-\alpha}(u)\,.$$

Die Phase auf der rechten Seite von (2.68) ist ein Operator, der mit der ganzen Heisenbergalgebra vertauscht, der also eine zentrale Erweiterung jener darstellt. Hier war es von Nutzen, minkowskische Felder zu verwenden, da der Translationsoperator so besonders einfach wurde.
Die so konstruierten Felder $\chi_\alpha(u)$ sind Vertexoperatoren im Sinne von Definition 2.1 (wobei man hier wieder in den euklidischen Bereich zurückgehen müßte), die bis auf eine Phase kommutieren,

$$\chi_\alpha(u)\chi_\beta(u') \;=\; \varepsilon_{\alpha\beta}\chi_\beta(u')\chi_\alpha(u)\,.$$

Diese Phase kann man bestimmen, wenn man die Periodizität ausnutzt. Erhöht man u um 2π, so ändert sich die Reihenfolge von u und u'. Andererseits hat man

$$\chi_\alpha(u+2\pi) \;=\; \chi_\alpha(u)\exp\left(2\pi i(\sqrt{2}\alpha\cdot j_0 + \alpha\cdot\alpha)\right)\,.$$

Konsistenz liegt nur vor, wenn

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \;=\; \exp(2\pi i\alpha\cdot\beta) \tag{2.69}$$

ist, und somit hat man nach Voraussetzung der Ganzheit des Gitters ein lokales System von Vertexoperatoren konstruiert. (Das Vorzeichen wird durch den Fall $\alpha = 0$ und Stetigkeit fixiert.) Eine Variante der obigen Konstruktion ist die mit nur einem Strom j, aber einer modifizierten Definition des Virasorofeldes. Mit

$$\hat{L}(z) \;=\; \mathcal{N}(j,j)(z) + \sqrt{2}\alpha_0\partial j(z) \tag{2.66'}$$

erhält man diesmal eine Virasoro-Algebra mit $c = 1-24\alpha_0^2$ aus den Moden $\hat{L}_n = L_n+\sqrt{2}\alpha_0(n-1)j_n$. Konstruiert man wie oben translationsinvariante Vertexoperatoren, so ändert sich die Phase zu

$$c_\alpha(u) \;=\; c(\alpha)\exp\left(i\sqrt{2}\alpha j_0 u + i\alpha(\alpha-2\alpha_0)u\right)\,, \tag{2.68'}$$

was auch die Dimension der Vertexoperatoren modifiziert, $h(\chi_\alpha) = \alpha(\alpha-2\alpha_0)$. An sich wird χ_α lediglich mit $\exp(-2i\alpha\alpha_0 u)$ multipliziert, insbesondere ändern sich die Phasen $\varepsilon_{\alpha\beta}$ nicht. Die auf diese Weise eingeführte Konstante α_0 wird auch als *Hintergrundsladung im Unendlichen* bezeichnet.

Es soll noch darauf hingewiesen werden, das eine analoge Konstruktion auch mit *Neveu-Schwarz-Fermionen* ψ_r^a, $r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$, $1\le a\le d$, möglich ist, die die Vertauschungsrelationen

$$\{\psi_r^a,\,\psi_s^b\} \;=\; \delta^{ab}\delta_{r+s,0} \tag{2.69}$$

erfüllen. Das Virasorofeld ist dann gegeben durch $L(z) = \mathcal{N}(\psi^a,\partial\psi^a)(z)$ mit zentraler Ladung $c = \frac{d}{2}$. Ebenso kann man statt einer Heisenbergalgebra auch eine *Kac-Moody-Algebra* $\hat{\mathbf{g}}$ zur Konstruktion heranziehen, deren Vertauschungsrelationen durch

$$[j_m^a, j_n^b] = f_{ab}^c j_{m+n}^c + kn(j^a,j^b)\delta_{m+n,0} \tag{2.70}$$

gegeben sind. Dabei bezeichnet $(\cdot,\cdot)$ eine symmetrische, invariante, nicht degenerierte Bilinearform. Dieser Ansatz ist mit Satz 2.13 verträglich und erfüllt die Jacobi-Bedingungen genau dann, wenn die f_{ab}^c vollständig antisymmetrische Strukturkonstanten einer Lie-Algebra $\mathbf{g}$ sind, deren Affinisierung gerade $\hat{\mathbf{g}}$ ist. Für die Bilinearform kann beispielsweise die Killingform gewählt werden. Für eine einfache Lie-Algebra $\mathbf{g}$ erzeugt man sich dann das Virasorofeld ähnlich wie zuvor aus

$$L(z) \;=\; \frac{1}{Q+2k}\mathcal{N}(j^a,j_a)(z)\,, \tag{2.71}$$

wobei Q durch den Eigenwert des quadratischen Casimiroperators in der adjungierten Darstellung gegeben wird. Die zentrale Ladung ergibt sich jetzt zu

$$c = \frac{2k\,dim\mathbf{g}}{Q+2k}\,. \tag{2.72}$$

Solche Konstruktionen des Virasorofeldes werden *Sugawara-Konstruktionen* genannt. Außer der modifizierten Version mit einem linearen Term, die jede beliebige zentrale Ladung produzieren kann, erhält man mit diesen Konstruktionen immer $c\ge 1$.

III

Der Feldinhalt Chiraler Lokaler Algebren

Dieses Kapitel beschäftigt sich damit, zu einer gegebenen Menge $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ von primären Feldern und dem Energie-Impuls-Tensor alle linear unabhängigen quasiprimären Felder, also die NOPs, anzugeben, die in der Feldalgebra auftreten können. Im folgenden sei I eine (endliche) Indexmenge und $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \{\phi_i | i \in I\} \cup \{L\}$, wobei die ϕ_i bezüglich L primäre Felder seien. Wie im zweiten Kapitel bereits gezeigt wurde, besitzt der Raum der Felder eine Graduierung bezüglich der Dimension der Felder. Weiter konnten die Felder in quasiprimäre, zu Tiefstgewichtszuständen korrespondierende, und derivative, aus ersteren abzuleitende, eingeteilt werden, so daß

$$\mathcal{F} \;=\; \coprod_{k \in \mathbb{Z}_+} \coprod_{n \in \mathbb{Z}_+/2} \partial^k \mathcal{F}^Q(n)\,, \tag{3.1}$$

wobei $\mathcal{F}^Q(n)$ der Raum der quasiprimären Felder der Dimension $h = n$ ist. In rein bosonischen Theorien ist $n \in \mathbb{Z}$, in rein fermionischen $n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. Insbesondere gilt $\mathcal{F}^Q(n)^\dagger = \mathcal{F}^Q(n)$. Ziel ist es nun, eine explizite Basis für die Räume $\mathcal{F}^Q(n)$ und somit auch ihre Dimension anzugeben.
Dazu seien noch drei nützliche Projektoren eingeführt. Bezeichne zunächst $\mathcal{Q}(k,n)$ den Projektor auf $\partial^k \mathcal{F}^Q(n)$. Dann ist der Projektor auf alle Felder der homogenen Dimension n gegeben durch

$$\mathcal{Q}(n) \;=\; \sum_{k=0}^{\lfloor n \rfloor} \mathcal{Q}(k, n-k)\,, \tag{3.2}$$

und der Projektor auf alle quasiprimären, d.h. nicht derivativen Felder durch

$$\mathcal{P} = \sum_n \mathcal{Q}(0,n)\,. \tag{3.3}$$

Mit diesen Definitionen ist dann nämlich für zwei Felder ϕ, ψ die Projektion $\mathcal{PQ}(h(\phi) + h(\psi))$ $N^{(m)}(\phi, \psi)$ unabhängig von m, da der Kommutator von ϕ und ψ nur nicht derivative Felder mit Dimensionen $h < h(\phi) + h(\psi)$ involviert. Man kann dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit die quasiprimären NOPs elegant in der Form

$$\mathcal{N}(\phi, \psi) = \mathcal{PQ}(h(\phi) + h(\psi))N^{(0)}(\phi, \psi) \tag{3.4}$$

schreiben.
Die in diesem Kapitel gegebenen Beweise sind zum Teil etwas technisch und nicht übertrieben elegant. Mit Sicherheit lassen sich einige der Lemmata auch mit wenigen algebraischen Argumenten ableiten. Die direkten Beweise waren aber für die explizite Konstruktion von $\mathcal{W}$-Algebren sehr hilfreich, da das praktische Rechnen mit den NOPs dabei erlernt sowie einige den Rechenaufwand erheblich reduzierende Methoden gefunden werden konnten.

3.1. Assoziatoren von NOPs

Es sei noch einmal an die Definition des naiven NOPs erinnert, wie sie im zweiten Kapitel eingeführt worden ist,

$$N^{(m)}(\phi, \psi)_n \;=\; \varepsilon_{\phi\psi} \sum_{r<m} \phi_{n-r}\psi_r + \sum_{r\geq m} \psi_r\phi_{n-r}\,. \tag{2.55}$$

Mit den abkürzenden Schreibweisen $N([\phi, \psi]_{\varepsilon_{\phi\psi}}) \equiv N^{(h(\psi))}(\phi, \psi) - \varepsilon_{\phi\psi} N^{(h(\phi))}(\psi, \phi)$ und $N(\phi, \psi) \equiv N^{(h(\psi))}(\phi, \psi)$ ist eine assoziatorähnliche Struktur auf den naiven NOPs folgendermaßen gegeben:

Lemma 3.1. Seien $\phi, \psi, \chi \in \mathcal{F}$. Dann hat man die Relation

$$N(N(\phi, \psi), \chi) - \varepsilon_{\psi\chi} N(N(\phi, \chi), \psi) \;=\; N(\phi, N([\psi, \chi]_{\varepsilon_{\psi\chi}}))\,. \tag{3.5}$$

Beweis: Man betrachte zunächst die Fouriermoden der rechten Seite. Das innere der naiven NOPs hat die Entwicklung

$$\begin{aligned} N([\psi, \chi]_\varepsilon)_n \;&=\; \varepsilon \sum_{r<h(\chi)} \psi_{n-r}\chi_r + \sum_{r\geq h(\chi)} \chi_r\psi_{n-r} - \varepsilon\left(\varepsilon \sum_{r<h(\psi)} \chi_{n-r}\psi_r + \sum_{r\geq h(\psi)} \psi_r\chi_{n-r}\right) \\ &=\; \varepsilon \sum_{r<h(\chi)} \psi_{n-r}\chi_r - \varepsilon \sum_{r\leq n-h(\psi)} \psi_{n-r}\chi_r + \sum_{r\geq h(\chi)} \chi_r\psi_{n-r} - \varepsilon^2 \sum_{r>n-h(\psi)} \chi_r\psi_{n-r}\,, \end{aligned}$$

wobei ε für $\varepsilon_{\psi\chi}$ geschrieben wurde. Da $\varepsilon^2 = 1$ ist, liefert eine Fallunterscheidung das Resultat

$$N([\psi, \chi]_{\varepsilon_{\psi\chi}})_n \;=\; \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=n-h(\psi)+1}^{h(\chi)-1} [\psi_{n-r}, \chi_r]_{\varepsilon_{\psi\chi}} & \text{falls } n < h(\psi) + h(\chi) \\[2ex] \displaystyle\sum_{r=h(\chi)}^{n-h(\psi)} [\chi_r, \psi_{n-r}]_{\varepsilon_{\psi\chi}} & \text{falls } n \geq h(\psi) + h(\chi)\,. \end{cases} \tag{3.6}$$

Auf der linken Seite schreibt man ebenfalls die n-te Fourierkomponente der NOPs aus, wobei man wieder $\varepsilon^2 = 1$ beachtet, und faßt zusammen,

$$(L.S.)_n \;=\; \sum_{r<h(\chi)} \sum_{s<h(\psi)} \phi_{n-r-s}\,(\psi_s\chi_r - \varepsilon\chi_r\psi_s) + \varepsilon \sum_{r\geq h(\chi)} \sum_{s\geq h(\psi)} (\chi_r\psi_s - \varepsilon\psi_s\chi_r)\,\phi_{n-r-s}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{t<h(\psi)+h(\chi)} \sum_{r=t-h(\psi)+1}^{h(\chi)-1} \phi_{n-t}\,[\psi_{t-r},\chi_r]_\varepsilon + \sum_{t\geq h(\psi)+h(\chi)} \sum_{r=h(\chi)}^{t-h(\psi)} [\chi_r,\psi_{r-t}]_\varepsilon\,\phi_{n-t} \\
&= N^{(h(\psi)+h(\chi))}(\phi, N([\psi,\chi]_\varepsilon))_n\,,
\end{aligned}
$$

was die Behauptung liefert. ■

Es sei noch bemerkt, daß für diese Rechnung nicht vorausgesetzt wurde, daß die Felder einfach oder quasiprimär sind. Die im folgenden gemachten Aussagen sind meist struktureller Natur, d.h. es kommt insbesondere nicht auf irgendwelche Faktoren vor den Feldern an. Diese werden daher oft nicht mehr explizit ausgeschrieben, der Lesbarkeit willen.

Lemma 3.2. Seien ϕ, ψ, χ nicht derivative Felder. Der *Assoziator* der $\mathcal{N}$-Produkte hat dann die folgende Struktur:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{N}(\mathcal{N}(\phi,\partial^m\psi),\partial^n\chi) - \varepsilon\mathcal{N}(\mathcal{N}(\phi,\partial^n\chi),\partial^m\psi) \\
&= \sum_{\mu=0}^{m-1} D_{\psi\chi}(m,\mu)\mathcal{N}(\mathcal{N}(\phi,\partial^\mu\psi),\partial^{n+m-\mu}\chi) + \sum_{\nu=0}^{n-1} D_{\chi\psi}(n,\nu)\mathcal{N}(\mathcal{N}(\phi,\partial^\nu\chi),\partial^{n+m-\nu}\psi) \\
&+ \sum_{\{k|h(k)<h(\psi)+h(\chi)\}} D^{(k)}_{[\psi\chi]_\varepsilon}(m)\mathcal{N}(\phi,\partial^{m+n+h(\psi\chi k)}\Phi^{[\psi\chi]_\varepsilon}_{(k)}) + \textit{zyklisch in } (\phi,\psi,\chi)\,.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Beweis: Der Einfachheit halber sei hier lediglich der rein bosonische Fall betrachtet, das heißt, es ist immer $\varepsilon = 1$. Die linke Seite ist mit dem Assoziator identisch, da das $\mathcal{N}$-Produkt kommutativ ist. Man ersetze zunächst die äußeren $\mathcal{N}$-Produkte durch die naiven NOPs und schreibe die inneren $\mathcal{N}$-Produkte aus. Qualitativ erhält man

$$
\begin{aligned}
&N(\mathcal{N}(\phi,\partial^m\psi),\partial^n\chi) - N(\mathcal{N}(\phi,\partial^n\chi),\partial^m\psi) \\
&= N\left(\sum_{\mu=0}^{m} d_{\phi\psi}(m,\mu)\partial^\mu N(\phi,\partial^{m-\mu}\psi) - \sum_{\{k|h(k)<h(\phi)+h(\psi)\}} d^{(k)}_{[\phi\psi]}(m)\partial^{h(\phi\psi k)+m}\Phi^{[\phi\psi]}_{(k)},\ \partial^n\chi\right) \\
&- N\left(\sum_{\nu=0}^{n} d_{\phi\chi}(n,\nu)\partial^\nu N(\phi,\partial^{n-\nu}\chi) - \sum_{\{l|h(l)<h(\phi)+h(\chi)\}} d^{(l)}_{[\phi\chi]}(n)\partial^{h(\phi\chi l)+n}\Phi^{[\phi\chi]}_{(l)},\ \partial^m\psi\right)\,,
\end{aligned}
$$

wobei $\Phi^{[AB]}_{(i)}$ die im Kommutator von A und B auftretenden Felder sind. Die Ableitungen vor den inneren NOPs werden nun auf das jeweils ganz hinten stehende Feld gewälzt, was lediglich Vorzeichen verändert und rein derivative Terme einbringt, da die naiven NOPs gemäß der Leibnitzregel differenziert werden. Sodann schreibt man die inneren naiven NOPs wieder als Ausdrücke in $\mathcal{N}$-Produkten und erhält, wobei der Term mit $\mu = \nu = 0$ seperat notiert wird,

$$
\begin{aligned}
&N(\mathcal{N}(\phi,\partial^m\psi),\partial^n\chi) - N(\mathcal{N}(\phi,\partial^n\chi),\partial^m\psi) \\
&= \sum_{\mu=1}^{m} d_{\phi\psi}(m,\mu)(-)^\mu \sum_{\mu'=0}^{m-\mu} d^{\phi\psi}(m-\mu,\mu')N(\partial^{\mu'}\mathcal{N}(\phi,\partial^{m-\mu-\mu'}\psi),\partial^{n+\mu}\chi) \\
&+ \sum_{\nu=1}^{n} d_{\phi\chi}(n,\nu)(-)^\nu \sum_{\nu'=0}^{n-\nu} d^{\phi\chi}(n-\nu,\nu')N(\partial^{\nu'}\mathcal{N}(\phi,\partial^{n-\nu-\nu'}\chi),\partial^{m+\nu}\psi) \\
&+ \sum_k d^{(k)}_{[\phi\psi]}(m)N(\partial^{h(\phi\psi k)+m+n}\Phi^{[\phi\psi]}_{(k)},\chi) + \sum_l d^{(l)}_{[\phi\chi]}(n)N(\partial^{h(\phi\chi l)+n+m}\Phi^{[\phi\chi]}_{(l)},\psi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad N(\phi, N([\partial^m\psi, \partial^n\chi]) + \textit{derivative Felder} \\
&= \quad \sum_{r=1}^{m} d_{\phi\psi}^{\phi\psi}(m,r) N(\mathcal{N}(\phi, \partial^{m-r}\psi), \partial^{n+r}\chi) + \sum_{s=1}^{n} d_{\phi\chi}^{\phi\chi}(n,s) N(\mathcal{N}(\phi, \partial^{n-s}\chi), \partial^{m+s}\psi) + \ldots \\
&+ \quad \sum_j \tilde{d}_{[\psi\chi]}^{(j)}(m+n) N(\phi, \partial^{h(\psi\chi j)+m+n}\Phi_{(j)}^{[\psi\chi]}) + \textit{derivative Felder}\,.
\end{aligned}
$$

Beim letzten Schritt wurden die Ableitungen vor den $\mathcal{N}$-Produkten ebenfalls nach hinten gebracht und der oben abgespaltene Term für $\mu = \nu = 0$ umgeschrieben. Wendet man auf dieses Resultat den Projektor $\mathcal{PQ}(h(\phi) + h(\psi) + h(\chi) + m + n)$ an und benennt die Laufindizes um, so folgt die Behauptung. ∎
Es kommt hier nur auf die Struktur des Assoziators an, so daß die Koeffizienten hier nur symbolisch angedeutet wurden und die oberen Indizes an den naiven NOPs gemäß der oben definierten Konvention weggelassen wurden. Die Gestalt des Assoziators wird etwas einsichtiger, wenn man zwei Spezialfälle betrachtet.
Sei zum einen $m = n = 0$. Dann wird (3.7) zu

$$
\mathcal{N}(\mathcal{N}(\phi,\psi),\chi) - \mathcal{N}(\mathcal{N}(\phi,\chi),\psi) = \sum_k D_{[\psi\chi]}^{(k)} \mathcal{N}(\phi, \partial^{h(\psi\chi k)}\Phi_{(k)}^{[\psi\chi]}) + \textit{zyklisch}\,. \tag{3.8}
$$

Für diesen Fall lassen sich auch die Koeffizienten leicht bestimmen. Dazu definiere man den Ausdruck

$$
\mathcal{N}([\phi,\psi],\chi) \equiv \sum_{\{k|h(\phi\psi k)\geq 1\}} C_{\phi\psi}^{(k)} \binom{2h(\psi)-1}{h(\phi\psi k)} \binom{\sigma(\phi\psi k)}{h(\phi\psi k)}^{-1} \frac{1}{h(\phi\psi k)} \mathcal{N}(\partial^{h(\phi\psi k)}\Phi_{(k)}^{[\phi\psi]}, \chi) \tag{3.8$'$}
$$

und erhält damit, wovon man sich durch direktes Nachrechnen überzeugen kann, die suggestive Schreibweise

$$
\mathcal{N}(\mathcal{N}(\phi,\psi),\chi) - \mathcal{N}(\mathcal{N}(\phi,\chi),\psi) = \mathcal{N}([\phi,\psi],\chi) - \mathcal{N}([\phi,\chi],\psi) + \mathcal{N}(\phi,[\psi,\chi]) - \mathcal{N}(\phi,[\chi,\psi])\,. \tag{3.8$''$}
$$

Sei zum anderen $\psi = \chi = L$. In diesem Fall führt (3.7) auf

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{N}(\mathcal{N}(\phi,\partial^m L),\partial^n L) - \mathcal{N}(\mathcal{N}(\phi,\partial^n L),\partial^m L) \\
&= \sum_{\nu=0}^{\max\{m-1,n-1\}} D_{LL}(m+n,\nu)\mathcal{N}(\mathcal{N}(\phi,\partial^\nu L),\partial^{m+n-\nu}L) + D_{[LL]}^{L}\mathcal{N}(\phi,\partial^{m+n+2}L)\,,
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

da im Kommutator zweier Virasorofelder nur wieder ein Virasorofeld auftreten kann und überdies von den zyklischen Termen die anderen beiden verschwinden müssen. Es gilt nämlich

$$
\binom{3+\nu}{2+h(\phi)-h(\psi)+\nu} C_{L\phi}^{\psi} = 0 \quad \text{für } \psi \neq \phi\,,
$$

da der Binominalkoeffizient nur für $|h(\phi)-h(\psi)| \leq 1$ nicht verschwindet, aber im Falle $h(\phi)-h(\psi) = 1$ man

$$
C_{L\phi\psi} = \langle \psi_{-h(\psi)} L_{-1} \phi_{h(\phi)} \rangle = 0
$$

hat, sofern ϕ quasiprimär ist.
Über die hier nur symbolisch notierten Koeffizienten wurden bis jetzt keinerlei Aussagen gemacht, insbesondere könnten sie zum Teil auch verschwinden oder sich gegenseitig wegheben.

Mit diesem Abschnitt wird das Analogon des für Lie-Algebren wohlbekannten Poincaré-Birkhoff-de Witt-Theorems [-11] im Falle der $\mathcal{W}$-Algebren bewiesen. Die algebraische Analogie wird deutlich, wenn man das nicht assoziative $\mathcal{N}$-Produkt symbolischer schreibt. Dazu setzt man $\mathcal{N}_m^\phi = \mathcal{N}(\,\cdot\,, \partial^{m-h(\phi)}\phi)$, $m \geq h(\phi)$ für alle quasiprimären Felder ϕ. Der Assoziator schreibt sich dann als $[\mathcal{N}_m^\psi, \mathcal{N}_n^\chi](\phi)$, sieht nun also wie ein Kommutator, angewandt auf ϕ, aus. Dies ist eine generell gültige Tatsache der universellen Algebra, daß nicht assoziative und nicht kommutative Strukturen völlig gleichartig behandelt werden können, sofern nur eine von beiden vorliegt.
Der entscheidende Punkt des Beweises ist die Einführung einer Graduierung auf dem Vektorraum $\mathcal{F}^Q$ der quasiprimären Felder, auf die das Prinzip der vollständigen Induktion angewandt werden kann.

Definition 3.3. Auf $\mathcal{F}^Q$ sei eine Graduierung gegeben durch die *Ordnungsdimension* Δ, die induktiv durch $\Delta(\phi_i) \equiv \Delta(i) = h(i)$ für $\phi_i \in \mathcal{B}_\mathcal{W}$, und $\Delta(\mathcal{N}(\psi, \partial^n\phi_i)) = \Delta(\mathcal{N}^i_{n+h(i)}(\psi)) = \Delta(\psi) + h(i)$ definiert ist.

Die Ordnungsdimension Δ vergißt also sozusagen die Ableitungen, sie ist ein gewichtetes Maß für die Anzahl der einfachen Felder in einem NOP. Setzt man noch $\Delta(\partial^n\psi) = \Delta(\psi)$, so kann diese Graduierung auf ganz $\mathcal{F}$ erweitert werden und es gilt offensichtlich immer $\Delta(\phi) \leq h(\phi)$. Der Vorteil dieser Graduierung liegt in der folgenden wichtigen Feststellung:

Lemma 3.4. Für alle $\phi, \psi \in \mathcal{F}$ gilt

$$\Delta(\pi_\chi([\phi, \psi])) < \Delta(\phi) + \Delta(\psi)\ \forall \chi \in \mathcal{F}\,, \tag{3.10}$$

wobei π_χ der Projektor auf das Feld χ ist und daher nur dann von Null verschieden sein kann, wenn $h(\phi\psi\chi) \geq 0$ ist.

Beweis: Nach Satz 2.13. gilt die Behauptung für einfache Felder, da in deren Kommutator nur Felder auftreten, deren Dimensionen kleiner als die Summe $h(\psi) + h(\phi)$ ist. Offensichtlich ist die Behauptung auch dann für Ableitungen von Feldern richtig, wenn sie es für die nicht derivativen Felder ist, da in der Fourierentwicklung die Ableitungen nur als kombinatorische Faktoren auftreten. Es bleibt daher, wenn man die Form (2.61) der $\mathcal{N}$-Produkte beachtet, der Fall von Kommutatoren mit Feldern des Typs $N^{(m)}(\phi\chi)$ zu betrachten. Dazu werde der Kommutator auf irgendeinen Zustand angewandt, so daß die Fourierentwicklung des NOP nur eine endliche Summe von Monomen in Moden einfacher Felder liefert, da in einer $\mathcal{W}$-Algebra nur solche NOPs auftreten. Nun ist ein Kommutator aber insbesondere eine Derivation, so daß die Leibnitzsche Produktregel angewandt werden kann und einem mit (2.63) rekursiv

$$[N^{(m)}(\phi,\chi)_k, \psi_n] = \sum_{ijl} \tilde{p}_{ijl}(k,n) N^{(m)}(\partial^i\Phi^{[\phi\psi]}_{(l)}, \partial^j\chi)_{k+n} + \sum_{ijl'} \tilde{p}'_{ijl'}(k,n) N^{(m)}(\partial^i\phi, \partial^j\Phi^{[\chi\psi]}_{(l')})_{k+n}$$

ergibt, wobei die Polynome $\tilde{p}_{ijl}$ und $\tilde{p}'_{ijl'}$ explizit bekannt und die Summen derart eingeschränkt sind, daß $h(\phi\psi\Phi_{(l)})$ und $h(\chi\psi\Phi_{(l')})$ beide $\geq i+j+1$ sind. Die Rekursion muß bei den einfachen Feldern abbrechen, da es keine negativen Dimensionen gibt und jene eben nicht mehr weiter zusammengesetzt sind, was nach Satz 2.13 die Behauptung liefert. ∎

Es sei nun auf $\mathcal{B}_\mathcal{W}$ eine Ordnung der Indexmenge I bezüglich der Dimension der Felder eingeführt, so daß für ϕ_i und ϕ_j aus $\mathcal{B}_\mathcal{W}$ mit $i < j$ auch $h(i) \leq h(j)$ gilt.
Wenn man nun im Assoziator (3.7) zum einen für χ ein $\mathcal{N}$-Produkt $\mathcal{N}(\chi', \chi'')$ einsetzt oder zum anderen $\phi = \phi_i$, $\psi = \phi_j$, $\chi = \phi_k$ als einfache Felder so aus $\mathcal{B}_\mathcal{W}$ wählt, daß $i \leq k \leq j$ ist, so erhält man aus obigem Lemma 3.4 sofort die folgenden Korollare durch eine simple Induktion nach der Ordnungsdimension, welche in allen unerwünschterweise auftretenden Termen abnimmt:

Korollar 3.5. Alle $\mathcal{N}$-Produkte können in ihrer inneren Klammersetzung vollständig in eine Richtung geordnet werden, d.h. sie lassen sich alle als Linearkombinationen von $\mathcal{N}$-Produkten schreiben, die, ausgeschrieben in den einfachen Feldern, die Form

$$\mathcal{N}(\mathcal{N}(\ldots(\mathcal{N}(\mathcal{N}(\phi_{i_1}, \partial^{m_2}\phi_{i_2}), \partial^{m_3}\phi_{i_3}), \ldots), \partial^{m_n}\phi_{i_n})$$

haben. ■

Korollar 3.6. Alle $\mathcal{N}$-Produkte können, ausgeschrieben in den einfachen Feldern, *dimensional*, genauer *dem Index nach*, geordnet werden, das heißt, sie sind Linearkombinationen von Produkten

$$\mathcal{N}^{i_n}_{m_n}\mathcal{N}^{i_{n-1}}_{m_{n-1}}\ldots\mathcal{N}^{i_2}_{m_2}\mathcal{N}^{i_1}_{m_1}(\partial^{m_0}\phi_{i_0}),$$

für die gilt, daß $i_{k-1} \geq i_k$ ist. ■

Auf ähnliche Weise kann man nun auch in einem dimensional geordneten $\mathcal{N}$-Produkt in einem Teil mit identischen Feldern deren Ableitungen umsortieren. Dazu betrachtet man wieder den Assoziator (3.7), diesmal für den Fall $\psi = \chi = \phi_i$ ein einfaches Feld, womit man offensichtlich die Form

$$[\mathcal{N}^i_m, \mathcal{N}^i_n](\phi) = \sum_{\nu=h(i)}^{\max\{n,m\}-1} D_{ii}(m,n,\nu)\mathcal{N}^i_{n+m-\nu}\mathcal{N}^i_\nu(\phi) + \ldots$$

erhält, wobei die ... für Terme kleinerer Ordnungsdimension stehen. Sei nun $m + n = k = const$ gesetzt. Diese Konstante kann man also durch $\lfloor\frac{k}{2}\rfloor + 1$ verschiedene Wahlen von m und n darstellen, $k = 0 + k = 1 + (k-1) = \ldots = \lfloor\frac{k}{2}\rfloor + \lceil\frac{k}{2}\rceil$, was einem (fast) genauso viele Gleichungen des Typs

$$0 = \sum_{\nu=h(i)}^{\max\{n,m\}} \tilde{D}_{ii}(m,n,\nu)\mathcal{N}^i_{k-\nu}\mathcal{N}^i_\nu(\phi) + \ldots$$

liefert, der Fall $m = n$ ist hier natürlich ohne Aussage. Wenn man im Sinne einer Induktion über die Ordnungsdimension die ...-Terme vernachlässigt, kann man mit diesem System von Gleichungen $\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor$ der $k+1$ verschiedenen NOPs eliminieren, und zwar, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, beispielsweise alle die, für die $m < n$ ist. Dazu ist noch zu bemerken, daß diese Gleichungen alle unabhängig voneinander sind, da die Matrix des Systems obere Dreiecksgestalt hat, und alle Koeffizienten (außer für $m = n$) aus der Entwicklung der $\mathcal{N}$-Produkte in die naiven NOPs und umgekehrt stammen und daher sämtlich nicht verschwinden. Damit ist das Poincaré-Birkhoff-de Witt-Theorem für $\mathcal{W}$-Algebren bewiesen. Natürlich hätte man auch eine andere Art der Ordnung einführen können, die hier gewählte hat sich aber bei der expliziten Konstruktion von $\mathcal{W}$-Algebren als sehr geschickt erwiesen.

Satz 3.7. Poincaré-Birkhoff-de Witt. Sei $\mathcal{B}_\mathcal{W} = \{\phi_i | i \in I\}$ die Menge der einfachen Felder, die die $\mathcal{W}$-Algebra erzeugen. Dann hat der Vektorraum $\mathcal{F}^Q$ der quasiprimären Felder das Erzeugendensystem $\mathcal{G}^Q$,

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^Q \;=\; & \Big\{\mathcal{N}^{i_n}_{m_n}\mathcal{N}^{i_{n-1}}_{m_{n-1}}\ldots\mathcal{N}^{i_2}_{m_2}\mathcal{N}^{i_1}_{m_1}(\partial^{m_0}\phi_{i_0}) \;\Big| \\ & \Big|\; n \geq 1,\; i_{k-1} \geq i_k,\; i_{k-1} = i_k \Rightarrow m_{k-1} \geq m_k,\; k = 1\ldots n\Big\} \cup \mathcal{B}_\mathcal{W}\,.\end{aligned} \qquad (3.11)$$

Im generischen Fall ist dieses Erzeugendensystem eine Basis. ■

Die letzte Bemerkung begründet sich daraus, daß die obigen Beweise die Information des Assoziators vollständig ausgenutzt haben, d.h. im Sinne der universellen Algebra hat man hier durch explizite Konstruktion alle durch den Assoziator erzeugten Relationen aus der freien Algebra herausgeteilt. Weitere lineare Abhängigkeiten können daher nur durch das Vorhandensein von sogenannten *singulären Zuständen* auftreten. Dabei heißt ein Zustand *singulär*, falls er verschwindet, wenn auf ihn ein negativer Mode eines Feldes angewandt wird. Von besonderer Bedeutung sind dabei die bezüglich der Virasoro-Algebra singulären Zustände ψ, so daß $L_n\psi = 0 \ \forall n < 0$. Im allgemeinen existieren solche singulären Zustände aber nur für spezielle Werte der zentralen Ladung.

3.3. Die Vektorraumbasis für $\mathcal{F}^Q$

Der letzte Abschnitt lieferte ein Erzeugendensystem für den Vektorraum der quasiprimären Felder, $\mathcal{F}^Q$. Da die Felder auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ in Form von Tiefstgewichtsdarstellungen operieren, liegt es nahe, nun zu untersuchen, ob dieses Erzeugendensystem $\mathcal{G}^Q$ auf diesen Darstellungen noch reduziert werden kann. Bezeichne $|\mathbf{h}\rangle = |h_0, h_1, \ldots, h_n\rangle$ den Tiefstgewichtszustand der $\mathcal{W}$-Algebra, die aus den einfachen Feldern $\phi_0 = L, \phi_1, \ldots, \phi_n$ erzeugt wird, so daß $\phi_{i,0}|\mathbf{h}\rangle = h_i|\mathbf{h}\rangle$ ist; das Vakuum entspricht dann dem Zustand $|\mathbf{0}\rangle$. Für eine generische zentrale Erweiterung c ist die Darstellung der $\mathcal{W}$-Algebra durch den *Vermamodul* $M_{|\mathbf{h}\rangle}$ gegeben, der als Erzeugendensystem alle Zustände der Form

$$\phi_{i_1,m_1}\phi_{i_2,m_2}\ldots\phi_{i_n,m_n}|\mathbf{h}\rangle,\ m_k > 0,\ i_{k+1} \geq i_k,\ i_{k+1} = i_k \Rightarrow m_{k+1} \geq m_k$$

hat. Wenn man den durch den Vertexoperator gegebenen Isomorphismus zwischen Feldern und Zuständen benutzt, zeigt (3.11), daß der Vermamodul der quasiprimären Zustände, $M^Q_{|\mathbf{h}\rangle}$, durch alle Zustände der Form

$$\tilde{\phi}_{i_1,m_1}\tilde{\phi}_{i_2,m_2}\ldots\tilde{\phi}_{i_n,m_n}|\mathbf{h}\rangle,\ m_k \geq h(i_k),\ i_{k+1} \geq i_k,\ i_{k+1} = i_k \Rightarrow m_{k+1} \geq m_k$$

gegeben ist, wobei die $\tilde{\phi}_{i,m}$ als Deformationen der Moden der Felder ϕ_i, verursacht durch Anwenden des Projektors $\mathcal{PQ}$ auf die naiven NOPs, zu verstehen sind.
Für generisches c gibt es hier keine weiteren linearen Abhängigkeiten, außer für den Fall $|\mathbf{h}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$. Dies ist aber gerade der in Satz 2.13 interessante Fall, da die Strukturkonstanten durch Vakuumerwartungswerte gegeben sind. In diesem speziellen Fall gilt nämlich die stärkere Bedingung $\phi_{i,n}|\mathbf{0}\rangle = 0 \ \forall n < h(i)$, man hat also für generisches c *Nullzustände*, mit deren Hilfe man singuläre Zustände konstruieren könnte.
Explizit kann man das für den Nullzustand $L_1|\mathbf{0}\rangle$ tun, da über den Kommutator mit dem Operator L_1 gerade Quasiprimarität definiert und jener daher explizit bekannt ist. Offensichtlich ist für ein $\mathcal{N}$-Produkt aus dem Erzeugendensystem (3.11)

$$\mathcal{PQ}\left(L_1\mathcal{N}^{i_1}_{m_1}\mathcal{N}^{i_2}_{m_2}\ldots\mathcal{N}^{i_n}_{m_n}(\partial^{m_{n+1}}\phi_{i_{n+1}})\right)|\mathbf{0}\rangle = 0\,, \tag{3.12}$$

da das Anwenden von L_1 ein derivatives Feld ergibt, das per definitionem im Kern des Projektors auf die quasiprimären Felder liegt. Andererseits läßt sich der Operator L_1 auch "durchziehen" und schließlich direkt auf das Vakuum anwenden, auf dem er verschwindet, so daß (3.12) auch als

$$\mathcal{PQ}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\mathcal{N}^1_{m_1}\ldots\left[L_1,\mathcal{N}^{i_k}_{m_k}\right]\ldots\mathcal{N}^{i_n}_{m_n}(\partial^{m_{n+1}}\phi_{i_{n+1}})\right)|\mathbf{0}\rangle = 0 \tag{3.13}$$

geschrieben werden kann. Dabei möge man sich an einem Beispiel verdeutlichen, was mit der obigen Kommutatorschreibweise gemeint ist. Sei dazu der Einfachheit halber das $\mathcal{N}$-Produkt lediglich mit dem Virasorofeld gebildet, d.h. $\phi_{i_l} = L$ für $1 \leq l \leq n+1$. Man erhält dann die explizite Rekursionsformel

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{N}^0_\nu(\phi))_h |\mathbf{0}\rangle &= \sum_{r=0}^{\nu} (-)^r \nu \binom{2(h-1)}{r}^{-1} \binom{\nu+3}{r} \\
&\quad \times \sum_{s=0}^{r} \binom{\nu-r+s}{s} \frac{1}{(r-s)} L_{h-(h(\phi)+r-s)} (L_1)^{r-s} \phi_{h(\phi)} |\mathbf{0}\rangle \qquad (3.14) \\
&- (-)^\nu \frac{(\nu+1)(\nu+3)}{2(2h(\phi)+\nu+1)} \binom{2(h-1)}{\nu}^{-1} (L_1)^{\nu+2} \phi_{h(\phi)} |\mathbf{0}\rangle ,
\end{aligned}
$$

wobei $h = h(\phi) + 2 + \nu$ und $\phi \in \mathcal{F}^Q$ ist. (Diese Formel ist natürlich für beliebige quasiprimäre Felder ϕ gültig, nicht allein nur für aus dem Virasorofeld gebildete.) Damit sind dann auch alle anderen Fouriermoden durch die Wirkung der $su(1,1)$-Algebra (2.19) bestimmt. Es ist dann klar, daß die Kommutatorschreibweise in (3.13) einfach den Kommutator von L_1 mit den L's aus den Moden meint,

$$
\begin{aligned}
\left([L_1, \mathcal{N}^0_\nu](\phi)\right)_h |\mathbf{0}\rangle &= \sum_{r=0}^{\nu} \left(\alpha_r L_{h+1-(h(\phi)+r)} (L_1)^r + \alpha'_r L_{h-(h(\phi)+r)} (L_1)^{r+1}\right) \phi_{h(\phi)} |\mathbf{0}\rangle \\
&+ \alpha''_{\nu+1} L_1 \phi_h |\mathbf{0}\rangle ,
\end{aligned} \qquad (3.15)
$$

wobei die kombinatorischen Faktoren hier lediglich angedeutet wurden. Dies läßt sich wieder in Moden von $\mathcal{N}$-Produkten ausdrücken, so daß

$$
\left([L_1, \mathcal{N}^0_\nu](\phi)\right)_h |\mathbf{0}\rangle = \sum_{r=0}^{\nu+1} \beta_r \left(\partial^r \mathcal{N}^0_{\nu+1-r}(\phi)\right)_h + \ldots , \qquad (3.16)
$$

nicht notiert wurden hier Terme kleinerer Ordnungsdimension. Analog entwickelt man den allgemeinen Fall. Mittels Satz 3.7, der einem gestattet, dies in Termen des Erzeugendensystems (3.11) zu schreiben, nimmt (3.12) dann die Form

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{P}\mathcal{Q} \left(L_1 \mathcal{N}^{i_1}_{m_1} \mathcal{N}^{i_2}_{m_2} \ldots \mathcal{N}^{i_n}_{m_n} (\partial^{m_{n+1}} \phi_{i_{n+1}})\right) |\mathbf{0}\rangle \\
&= \mathcal{P}\mathcal{Q} \left(\sum_{r=1}^{n+1} \gamma_r \mathcal{N}^{i_1}_{m_1} \ldots \mathcal{N}^{i_r}_{m_r+1} \ldots \mathcal{N}^{i_n}_{m_n} (\partial^{m_{n+1}} \phi_{i_{n+1}})\right) |\mathbf{0}\rangle + \ldots \qquad (3.17) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

an, wobei wieder Terme kleinerer Ordnungsdimension weggelassen wurden. Die Koeffizienten γ_r verschwinden alle nicht, weil, wie man leicht nachprüft, die Koeffizienten α_r und α'_r in (3.15) sämtlich ungleich Null sind, und somit beim Umschreiben in die $\mathcal{N}$-Produkte mindestens der führende Term $r = 0$ in (3.16) auftreten muß, da sonst nicht alle Terme aus (3.15) in der Fourierentwicklung von (3.16) vorkommen können. Das hier angegebene Verfahren liefert also, bis auf zusätzliche Terme kleinerer Ordnungsdimension, eine lineare Abhängigkeit unter den $\mathcal{N}$-Produkten des Erzeugendensystems aus Abschnitt 3.2 aufgrund des Nullzustandes $L_1|0\rangle$. Damit liefert Induktion über die Ordnungsdimension den folgenden Satz:

Satz 3.8. Explizite Basis für $\mathcal{F}^Q$. Das Erzeugendensystem aus Satz 3.7 kann in der Vakuumdarstellung der $\mathcal{W}$-Algebra wie folgt reduziert werden:

Zu jedem $\mathcal{N}$-Produkt der Dimension h und der Form gemäß Satz 3.7,

$$\mathcal{N}^{i(1)}_{\{m(1)_1,m(1)_2,\ldots,m(1)_{k(1)}\}}\mathcal{N}^{i(2)}_{\{m(2)_1,m(2)_2,\ldots,m(2)_{k(2)}\}}\cdots\mathcal{N}^{i(n)}_{\{m(n)_1,m(n)_2,\ldots,m(n)_{k(n)}\}}(\mathbf{1})\,,$$

wobei $\mathcal{N}^{i(l)}_{\{m(l)_1,\ldots,m(l)_{k(l)}\}}$ ein $\mathcal{N}$-Produkt allein mit dem einfachen Feld $\phi_{i(l)}$ und $\mathcal{N}^{i}_{m}(\mathbf{1})$ einfach $\partial^{m-h(i)}\phi_i$ bezeichne, gibt es eine verschwindende Linearkombination aus folgenden Feldern der Dimension $h+1$, so daß eines davon eliminiert werden kann:

$$\left\{\mathcal{N}^{i(1)}_{\{m(1)_1,m(1)_2,\ldots,m(1)_{k(1)}\}}\cdots\mathcal{N}^{i(l)}_{\sigma\{m(l)_1,\ldots,m(l)_{r(l)}+1,\ldots,m(l)_{k(l)}\}}\cdots\mathcal{N}^{i(n)}_{\{m(n)_1,m(n)_2,\ldots,m(n)_{k(n)}\}}(\mathbf{1})\;\middle|\; 1\leq l\leq n,\ 1\leq r(l)\leq k(l)\right\},$$

und $\sigma\{m_1,\ldots,m_n\}$ sei die kanonische arithmetische Ordnung des Zahlentupels $\{m_1,\ldots,m_n\}$.

Das so reduzierte Erzeugendensystem $\mathcal{G}^Q(h+1)$ wird mit $\mathcal{B}^Q(h+1)$ bezeichnet. ■

Es werden nun die Konsequenzen des Satzes 3.8 an dem für die explizite Konstuktion von $\mathcal{W}$-Algebren wichtigsten Fall demonstriert, nämlich dem bereits oben betrachteten, wo das $\mathcal{N}$-Produkt allein aus dem Virasorofeld gebildet wird. Der Satz besagt dann folgendes: Nach Satz 3.7 kann das dort gegebene Erzeugendensystem der Felder der Dimension h durch die Partitionen der Zahl h, die die Eins nicht enthalten, numeriert werden. Wenn eine solche Partition $p=(n_1,n_2,\ldots,n_k)$ fest gegeben sei, dann gibt es eine verschwindende Linearkombination aus genau den Feldern der Dimension $h+1$, deren Numerierung man durch Addieren von Eins zu irgendeiner der Zahlen der Partition p erhalten kann, $\{(n_1+1,n_2,\ldots,n_k),\ldots,(n_1,n_2,\ldots,n_k+1)\}$, wobei sich dabei ergebende gleiche Partitionen nur einfach zu nehmen sind. Man kann also aus der Gesamtmenge der Felder aus $\mathcal{G}^Q$ der Dimension $h+1$ so viele eliminieren, wie es Felder der Dimension h in $\mathcal{G}^Q$ gibt. Daß das so erhaltene System von linearen Gleichungen nicht degeneriert ist, kann man direkt nachprüfen, es wird aber im nächsten Abschnitt dies auf indirekte, elegantere Weise gezeigt. Damit wird dann auch sichergestellt, daß das so reduzierte Erzeugendensystem wirklich eine Basis von $\mathcal{F}^Q(h+1)$ darstellt.
Für die anderen Nullzustände der Vakuumdarstellung kann man diese Reduktion nicht explizit durchführen, da die Kommutatoren der anderen einfachen Felder untereinander nicht bekannt sind. Nichtsdestotrotz ist natürlich zu erwarten, daß das Erzeugendensystem noch degeneriert ist. Allerdings ist dieser Fall bei allen in dieser Gruppe [11] konstruierten $\mathcal{W}$-Algebren nicht von Belang gewesen, da hier noch keine $\mathcal{N}$-Produkte auftraten, die auf diese Weise in ihrer Anzahl reduziert hätten werden können.

An dieser Stelle sollen zwei konkrete Beispiel gegeben werden, die die Konsequenzen des Satzes 3.8 aufzeigen sollen. Will man von allein aus dem Virasorofeld gebildeten $\mathcal{N}$-Produkten der Dimension sechs linear unabhängige auswählen, so kann man zunächst einmal die folgenden, bereits nach Satz 3.7 geordneten, bilden:

$$\mathcal{N}^2_2\mathcal{N}^2_2\mathcal{N}^2_2(\mathbf{1})=\mathcal{N}(\mathcal{N}(L,L),L)$$

$$\mathcal{N}^2_4\mathcal{N}^2_2(\mathbf{1})=\mathcal{N}(\partial^2L,L)\sim\mathcal{N}(\partial L,\partial L)=\mathcal{N}^2_3\mathcal{N}^2_3(\mathbf{1})\,,$$

wobei schon angedeutet wurde, welche davon noch linear abhängig sind, denn man hat das folgende Schema der Partitionen ohne die Eins für die Zahlen fünf und sechs:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & (23) & \longrightarrow & 0 & = & (33)+(24) \\ 1 & + & (5) & \longrightarrow & 0 & = & (6)\,, \end{array}$$

wobei die einstelligen Partitionen natürlich zu keinem $\mathcal{N}$-Produkt, sondern zu den derivativen Feldern $\partial^3 L$ bzw. $\partial^4 L$ korrespondieren. Damit sind also $\mathcal{N}(\mathcal{N}(L,L),L)$ und $\mathcal{N}(\partial^2 L, L)$ linear unabhängig und spannen den Raum derjenigen quasiprimären Felder der Dimension sechs auf, die descendant zur Identität sind. Genauso kann man zeigen, daß für ein bosonisches Feld W immer $\mathcal{N}(W, \partial^{2n+1}W) = 0$ ist. Man erhält hier nämlich das folgende durch Partitionen symbolisierte Gleichungssystem, wobei $h(W) = d$ gesetzt wurde:

$$\begin{array}{cclccrcl}
1 & + & (d, d+2n) & \longrightarrow & 0 & = & (d, d+2n+1) & + & (d+1, d+2n) \\
1 & + & (d+1, d+2n-1) & \longrightarrow & 0 & = & (d+1, d+2n) & + & (d+2, d+2n-1) \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
1 & + & (d+n-1, d+n+1) & \longrightarrow & 0 & = & (d+n-1, d+n+2) & + & (d+n, d+n+1) \\
1 & + & (d+n, d+n) & \longrightarrow & 0 & = & & (d+n, d+n+1)\,. &
\end{array}$$

Es darf nun auf den rechten Seiten je eine Partition gestrichen werden. Beginnt man unten, so sieht man, daß keine übrigbleibt. Die $\mathcal{N}$-Produkte mit geraden Ableitungen verschwinden aber nicht, da hier die unterste der Gleichungen ebenfalls noch zwei Partitionen enthält, insgesamt also eine übrigbleiben muß. Bei fermionischen Feldern ist es genau umgekehrt.

3.4. Partitionen

Bis jetzt ist noch nicht klar, ob das im vorherigen Abschnitt konstruierte Erzeugendensystem wirklich eine Basis ist, also nicht mehr verkleinert werden kann. Um dies nachzuweisen, sollte man die Dimensionen der Vektorräume $\mathcal{F}^Q(h)$ der quasiprimären Felder der Dimension h direkt bestimmen und zeigen, daß sie mit der Anzahl der Felder der Erzeugendensysteme $\mathcal{B}^Q(h)$ übereinstimmen.

Unter der *Partitionsfunktion* der Darstellung einer $\mathcal{W}$-Algebra zum Tiefstgewicht $|\mathbf{h}\rangle$ versteht man den formalen Ausdruck

$$\Pi_{|\mathbf{h}\rangle}(q) = \sum_{d \in \mathbb{Z}_+/2} dim\, \mathcal{F}^Q(d) q^{d+h_0}\,, \tag{3.18}$$

worin q eine rein formale Variable ist. In Kapitel 2 wurde bereits erläutert, daß $dim\, \mathcal{F}^Q(d) < \infty$ für alle d ist. Nach Satz 3.7 werden die Vektorräume $\mathcal{F}^Q(d)$ für generisches $|\mathbf{h}\rangle \neq |\mathbf{0}\rangle$ durch alle die Zustände

$$\mathcal{N}^{i(1)}_{\{m(1)_1, m(1)_2, \ldots, m(1)_{k(1)}\}} \cdots \mathcal{N}^{i(n)}_{\{m(n)_1, m(n)_2, \ldots, m(n)_{k(n)}\}}(|\mathbf{h}\rangle)$$

aufgespannt, die die Dimension d haben und für die $h(i(l+1)) \geq h(i(l))$, $i(l) \in I$ und $\{m(l)_1, m(l)_2, \ldots, m(l)_{k(l)}\}$ auf kanonische Weise arithmetisch geordnete Mengen mit $m(l)_1 \geq h(l)$ sind. Diese Zustände werden also auf natürliche Weise durch diejenigen Partitionen der Zahl d numeriert, die folgendermaßen gebildet werden:

Die $\mathcal{N}$-Produkte, die nur aus einem einfachen Feld allein aufgebaut sind, das die Dimension h habe, spannen einen Unterraum von $\mathcal{F}^Q(d)$ auf, dessen Basis durch die Partitionen $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ von d numeriert werden kann, die nur aus Zahlen $n_r \geq h$ bestehen. Im folgenden sei $p(n)$ die Anzahl der Partitionen der Zahl n aus allen natürlichen Zahlen, und sei die gesuchte Anzahl mit $p^h_{|\mathbf{h}\rangle}(n)$ bezeichnet. Jedes allgemeine $\mathcal{N}$-Produkt ist nach Satz 3.7 aus Blöcken solcher *reiner* $\mathcal{N}$-Produkte aufgebaut. Wenn $\Pi^{h(i)}_{|\mathbf{h}\rangle}(q)$ die Partitionsfunktion der Blöcke, die allein aus dem Feld ϕ_i aufgebaut sind, bezeichne, so ist die Partitionsfunktion der $\mathcal{W}$-Algebra gegeben durch

$$\Pi_{|\mathbf{h}\rangle}(q) = \prod_{i \in I} \Pi^{h(i)}_{|\mathbf{h}\rangle}(q)\,. \tag{3.19}$$

Für die Partitionen der natürlichen Zahlen kann leicht eine generierende Funktion gefunden werden, deren Taylorentwicklung als Koeffizienten die $p(n)$ hat, nämlich

$$\sum_{n\geq 0} p(n)q^n = \prod_{n\geq 1} \frac{1}{(1-q^n)} \,. \tag{3.20}$$

Damit hat man dann entsprechend

$$\Pi^{h(i)}_{|\mathbf{h}\rangle}(q) = \prod_{n\geq h(i)} \frac{1}{(1-q^n)} = \prod_{m=1}^{h(i)-1} (1-q^m) \sum_{n\geq 0} p(n)q^n \,, \tag{3.21}$$

was einem gestattet, $p^{h(i)}_{|\mathbf{h}\rangle}(n)$ durch $p(n)$ auszudrücken. Die obigen Formeln gelten allerdings nur für bosonische Felder, für Felder mit halbzahligem Spin erhält man aufgrund des Pauliverbotes, welches das Auftreten zweier gleicher Moden untersagt, andere Partitionsfunktionen, nämlich die fermionischen,

$$\Pi^{h(i)}_{|\mathbf{h}\rangle}(q) = \prod_{n\geq h(i)} (1+q^n) \,. \tag{3.21$'$}$$

Im Falle der Vakuumdarstellung $|\mathbf{h}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$ treten Relationen auf, die den Raum $\partial\mathcal{F}^Q(d-1) = L_1\mathcal{F}^Q(d-1)$ als einen Unterraum von $\mathcal{F}^Q(d)$ erscheinen lassen, indem der L_1-Operator durch die Felder durchkommutiert und dann durch Anwenden auf das Vakuum zum Verschwinden gebracht wird. Es resultiert jeweils eine Linearkombination aus quasiprimären Feldern, die ein derivatives Feld darstellt, und somit identisch Null sein muß. Die richtige Dimension von $\mathcal{F}^Q(d)$ ergibt sich also, indem man von der nach (3.19) bis (3.21) berechneten die auf die selbe Weise kalkulierte des Raumes $\mathcal{F}^Q(d-1)$ noch subtrahiert,

$$\Pi_{|\mathbf{0}\rangle}(q) = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} (1-q)\Pi_{|\mathbf{h}\rangle}(q) \,. \tag{3.22}$$

Für die bei der expliziten Konstruktion von $\mathcal{W}$-Algebren mit nicht mehr als drei Generatoren relevantesten Fälle ergibt sich folgendes Bild. Die $\mathcal{N}$-Produkte vom Gewichte d, die allein aus dem Virasorofeld bestehen, bilden Vektorräume der Dimensionen

$$p^{(L)}_{|\mathbf{0}\rangle}(d) = p(d) - 2p(d-1) + p(d-2) \,,$$

diejenigen, die noch genau ein Feld des Gewichtes $h \neq 0$ enthalten, Vektorräume der Dimensionen

$$\begin{aligned} p^{(L)}_{|h,\mathbf{0}\rangle}(d) &= \Big(p(d-h) + p(d-(h+1)) + p(d-(h+2)) + \ldots \Big) \\ &- 2\Big(p((d-h)-1) + p((d-(h+1))-1) + \ldots \Big) \\ &+ \Big(p((d-h)-2) + p((d-(h+1))-2) + \ldots \Big) \\ &= p(d-h) - p(d-h-1) \end{aligned}$$

et cetera für $\mathcal{N}$-Produkte mit mehr als einem primären Feld.
Man kann nun die Partitionsfunktion einer $\mathcal{W}$-Algebra mit einem weiteren Generator des Gewichtes h, die mit $\mathcal{W}(2,h)$ bezeichnet sei, in der Vakuumdarstellung explizit angeben:

Korollar 3.9. Gleichung (3.19) wird einfach zu

$$\Pi_{|\mathbf{0}\rangle}(q) = \Pi^{(L)}_{|\mathbf{0}\rangle}(q)\Pi^{h}_{|\mathbf{0}\rangle}(q) \,. \tag{3.19$'$}$$

Diese Partitionsfunktion gestattet es für eine $\mathcal{W}(2,h)$-Algebra, explizit die Felder einer gegebenen Dimension abzuzählen. ■

Beim Berechnen der Kommutatoren interessieren nur Terme hinreichend kleiner Dimension, so daß man vor allem keine $\mathcal{N}$-Produkte mit mehr als zwei Stück des primären Feldes betrachten muß. Multipliziert man entsprechend (3.19′) aus, erhalten wir

$$\Pi_{|\mathbf{0}\rangle}(q) = \Pi^{(L)}_{|0,0\rangle}(q) + \Pi^{(L)}_{|h,0\rangle}(q) + \Pi^{(L)}_{|2h',0\rangle}(q) + \dots\,, \tag{3.19''}$$

wobei man auf den Unterschied zwischen $\Pi^{(L)}_{|0,0\rangle}$ gemäß (3.22) und $\Pi^{(L)}_{|h,0\rangle} = q^h \Pi^{(L)}_{|\varepsilon,0\rangle}\Big|_{\varepsilon=0}$ achte. Dabei ist $h' = \lfloor h + \frac{1}{2} \rfloor$, da bei fermionischen Feldern dem Pauliprinzip genüge getan werden muß, dessentwegen $\mathcal{N}(\phi,\phi)|\mathbf{0}\rangle = \phi_h\phi_h|\mathbf{0}\rangle = 0$ ist. Man faßt also die $\mathcal{N}$-Produkte, die das primäre Feld genau einmal enthalten, als reine Virasoro-$\mathcal{N}$-Produkte auf dem Zustand mit dem Tiefstgewicht gleich der Dimension des Feldes auf; entsprechend für $\mathcal{N}$-Produkte mit zwei und mehr Einträgen des primären Feldes. Konkret haben nach (3.21) und (3.22) diese einzelnen Faktoren die folgenden Entwicklungen:

$$\begin{aligned}\Pi^{(L)}_{|0,0\rangle}(q) = 1 - q &\\ &+ q^2 + q^4 + 2q^6 + 3q^8 + q^9 + 4q^{10} + 2q^{11} + 7q^{12} + 3q^{13} + 10q^{14}\\ &+ 7q^{15} + 14q^{16} + 11q^{17} + 22q^{18} + 17q^{19} + 32q^{20} + 28q^{21} + 45q^{22} + 43q^{23} + 67q^{24}\\ &+ 63q^{25} + 95q^{26} + 96q^{27} + 134q^{28} + 139q^{29} + 192q^{30} + \dots\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pi^{(L)}_{|h,0\rangle}(q) = q^h \Big(1 &\\ &+ q^2 + q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 4q^6 + 4q^7 + 7q^8 + 8q^9 + 12q^{10} + 14q^{11}\\ &+ 21q^{12} + 24q^{13} + 34q^{14} + 41q^{15} + 55q^{16} + 66q^{17} + 88q^{18} + 105q^{19} + 137q^{20} + 165q^{21}\\ &+ 210q^{22} + 253q^{23} + 320q^{24} + 383q^{25} + 478q^{26} + 574q^{27} + 708q^{28} + 847q^{29} + 1039q^{30} + \dots \Big)\,.\end{aligned}$$

Bemerkung: Während die Reduktion der quasiprimären Felder auf eine Basis für die Vakuumdarstellung mit Hilfe von Satz 3.8 durchgeführt wird, kann mit Korollar 3.9 und Gleichung (3.19″) die Zahl der notwendigen Felder bestimmt und damit die Vollständigkeit der mutmaßlichen Basis geprüft werden.

Damit ist der Feldinhalt einer $\mathcal{W}$-Algebra, zumindest im Falle nur eines zusätzlichen Generators, vollständig bestimmt. Das starke Wachstum der Koeffizienten dieser Funktionen macht deutlich, daß die explizite Konstruktion von $\mathcal{W}(2,h)$ für große h zunehmend schwieriger wird, da sehr viele Felder in den Kommutatoren nach Satz 2.13 zu berücksichtigen sind. Eine etwas einfachere Situation liegt allerdings vor, wenn von vornherein klar ist, daß im Kommutator des primären Feldes mit sich selbst dieses nicht mehr auf der rechten Seite von (2.63) auftritt, das heißt, die zugehörige Strukturkonstante verschwindet. Bei primären Feldern ungerader oder halbzahliger Dimension ist dies wegen der Symmetrieeigenschaften der Strukturkonstanten immer der Fall.

IV

Explizite Konstruktion Von W-Algebren

Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so auffallend zu erkennen, wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen. Carl Friedrich Gauss

In diesem Kapitel sollen die Resultate der expliziten Konstruktion von $\mathcal{W}$-Algebren dargestellt werden, die durch die Gruppe von W. Nahm [11] erarbeitet worden sind. Es wurden alle $\mathcal{W}$-Algebren von chiralen Feldern konstruiert, die zusätzlich zum Energie-Impuls-Tensor einen weiteren Generator enthalten, dessen Dimension Zehn nicht überschreitet. Ebenso wurden die einfachsten Beispiele von $\mathcal{W}$-Algebren mit zwei weiteren Generatoren konstruiert. Das doch beträchtliche Datenmaterial für den ersteren Fall gestattet es, erste Ansätze für eine mögliche Klassifizierung zu formulieren.

Zunächst wird, ausgehend von den Resultaten der beiden vorhergehenden Kapitel, kurz der Algorithmus geschildert, mit dem die expliziten Konstruktionen durchgeführt wurden. Sodann folgt, als ein wohlbekanntes Beispiel, eine skizzenhafte Konstruktion der $\mathcal{W}(2,4)$-Algebra, die weiteren Resultate werden lediglich in relativ tabellarischer Form gegeben, desgleichen für die Algebren mit drei Generatoren. Zum Abschluß wird eine knappe Bilanz des jetzigen Standes der Bemühungen um eine Klassifikation der existierenden $\mathcal{W}$-Algebren gezogen.

Der interessierte Leser findet eine detailliertere Darstellung in der oben erwähnten Veröffentlichung [11]. Auf die speziellen Probleme bei der Konsistenzüberprüfung der einzelnen Algebren geht vor allem auch A. Kliem [66] ein. Beiträge zur Klassifizierung, die über die Bemerkungen im dritten Abschnitt dieses Kapitels und [11] hinausgehen, werden zum einen von R. Blumenhagen [9,10], zum anderen im folgenden Kapitel dieser Arbeit sowie in [47] gegeben. Ansätze zur hier überhaupt noch nicht erwähnten Darstellungstheorie wurden von R. Varnhagen [78,79] entwickelt.

Ein wesentlicher Punkt bei den Herleitungen der vorhergehenden beiden Kapitel bildete die Unterscheidung der nicht derivativen Felder in normalgeordnete und dazu orthogonale, die sogenannten einfachen Felder. Ein Feld letzteren Typs sei, wenn es nicht der Energie-Impuls-Tensor L ist, als primär vorausgesetzt.
Lemma 3.4 ist, wie sein Beweis zeigt, äquivalent zu der Aussage, daß Kommutatoren normalgeordneter Produkte vollständig durch die Kommutatoren der in ihnen enthaltenen einfachen Felder bestimmt sind. Dies bedeutet offensichtlich, daß die gesamte Lie-Algebra der Moden der Felder einer $\mathcal{W}$-Algebra allein schon durch die Kommutatoren der einfachen Felder ihrer Basis $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ festgelegt ist. Insbesondere braucht man die Jacobi-Identitäten lediglich für einfache Felder zu überprüfen, wegen der in (2.63) bereits eingebauten $su(1,1)$-Invarianz sogar nur für den Fall dreier primärer Felder. Auch braucht nur das Verschwinden der Koeffizienten vor Feldern, die primäre Felder sind oder enthalten, explizit gezeigt zu werden. Es gibt gute Argumente [-4,12,13], daß man auch dies nur für die primären Felder selbst zu tun braucht, ein Beweis steht aber noch aus.
Die Annahme, ein einfaches Feld sei entweder das Virasorofeld oder primär, ist notwendig, um die Strukturkonstanten berechnen zu können. So kann man beispielsweise Rekursionsformeln wie die folgende für diese ableiten. Sei χ ein nicht derivatives Feld der Dimension $h(\chi)$ und sei $\psi = \mathcal{N}(\chi, \partial^n L)$ ein NOP der Dimension $h(\psi) = h(\chi) + n + 2$. Für zwei primäre Felder ϕ_i, ϕ_j ist dann

$$\begin{aligned} C_{ij\psi} &= \sum_{r=0}^{n}(-1)^r n \binom{2h(\psi)-2}{r}^{-1} \binom{n+3}{r} \sum_{k=0}^{r} \binom{n-r+k}{k} \binom{h(\chi j i)+r-k-1}{r-k} \\ &\quad \times ((h(j)-1)(n+2-r+k) - h(i) + h(\psi))\, C_{ij\chi} \\ &- (-1)^n \frac{(n+1)(n+3)}{2(2h(\psi)-n-3)} \binom{2h(\psi)-2}{n}^{-1} \binom{h(\psi j i)-1}{n+2} C_{ij\chi}\,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Die bis hierhin gemachten allgemeinen Ausführungen gestatten es nun, einen Algorithmus für die explizite Konstruktion von chiralen $\mathcal{W}$-Algebren mit endlicher Basis $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ anzugeben.

Algorithmus 4.1. Sei eine Menge $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \{\phi_0 = L, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ einfacher Felder mit Dimensionen $h(i)$ gegeben. Die resultierende $\mathcal{W}$-Algebra wird dann durch $\mathcal{W}(2, h(1), h(2), \ldots, h(n))$ bezeichnet, wobei die 2 natürlich das Virasorofeld symbolisiert.

- Man bilde zunächst sämtliche linear unabhängigen $\mathcal{N}$-Produkte, die in den Kommutatoren der einfachen Felder aufzutreten vermögen, mit Hilfe der Sätze 3.7 und 3.8. Wenn $h = max\,\{h(\phi)|\phi \in \mathcal{B}_{\mathcal{W}}\}$ die maximal auftretende Dimension der einfachen Felder bezeichnet, so benötigt man alle solchen $\mathcal{N}$-Produkte bis zur Dimension $2\lfloor h - \frac{1}{2}\rfloor$.

- Man berechne nun alle in den Kommutatoren zweier einfacher Felder nach Satz 2.13 auftretenden Strukturkonstanten. Einige davon, nämlich die drei primäre einfache Felder verbindenden, bleiben vorläufig freie Parameter.

- Während die $SU(1,1)$-Invarianz der Algebra bereits durch die universellen Polynome aus Satz 2.13 gewährleistet wird, müssen die Jacobi-Identitäten, die – nach den obigen Bemerkungen – drei primäre einfache Felder involvieren, noch überprüft werden. Dies ergibt eine gewisse Zahl von Bedingungen an die bis dahin noch freien Parameter der $\mathcal{W}$-Algebra (siehe auch [-4,13]).

Der letzte Schritt ist im allgemeinen der schwierigste. Für eine $\mathcal{W}(2,h)$-Algebra reduziert er sich allerdings auf eine einzige zu erfüllende Identität. Nutzt man nun noch aus, daß die aus den universellen Polynomen gebildeten, in den Jacobi-Identitäten auftretenden, Polynome wegen linearer Abhängigkeiten einen im allgemeinen recht niederdimensionalen Raum aufspannen, so braucht man hier für $h < 8$ auf der rechten Seite nur den Term des primären Feldes zu betrachten. Für $h \geq 8$ müsste man eigentlich noch die $\mathcal{N}$-Produkte in diesem Feld mitnehmen. Bei $\mathcal{W}$-Algebren mit drei Generatoren steigt die Zahl der nicht trivialen Identitäten bereits deutlich an, läßt sich aber für primäre einfache Felder kleiner Dimensionen noch im Rahmen halten. Prinzipiell ist die Anwendbarkeit des Algorithmus aber allein durch die Leistungsfähigkeit der Computer begrenzt.

4.2. Die $\mathcal{W}$ Algebren

Hier soll nun zunächst der im letzten Abschnitt skizzierte Algorithmus an einem einfachen Beispiel demonstriert werden, für die weiteren auf diese Weise berechneten $\mathcal{W}$-Algebren werden aus Platzgründen lediglich die Resultate angegeben.

$\mathcal{W}(2,4)$. Diese $\mathcal{W}$-Algebra bietet die Möglichkeit, an einem in der Literatur bereits wohlbekannten Fall [13,60,91] ein Exempel für die hier verwendete Methode zu statuieren. Die einfachen Felder sind, neben der Identität, der Energie-Impuls-Tensor, der der Virasoro-Algebra

$$[L_m, L_n] = (n-m)L_{m+n} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \tag{2.42}$$

mit zentraler Ladung c genügt, und ein weiteres primäres Feld W der konformen Dimension vier,

$$[L_m, W_n] = (n-3m)W_{n+m}\,. \tag{4.2}$$

Der Kommutator von W mit sich selbst ist der einzige zu betrachtende Ausdruck. Aufgrund von Lokalität und $SU(1,1)$-Invarianz kann dieser lediglich nicht derivative Felder gerader Dimension h' bis $h' = 2h-2 = 6$ enthalten, als da sind $\mathbf{1}$, L, W, und die aus jenen erzeugbaren normalgeordneten Produkte dieser Dimensionen, gegeben durch

$$\begin{array}{llcl}
h'=4 & \Lambda & \equiv & \mathcal{N}(L,L) = N(L,L) - \frac{3}{10}\partial^2 L \\[2ex]
h'=6 & \Gamma & \equiv & \mathcal{N}(\partial^2 L, L) = N(L,\partial^2 L) - \partial N(L,\partial L) + \frac{2}{9}\partial^2 N(L,L) - \frac{1}{42}\partial^4 L \\[2ex]
 & \Delta & \equiv & \mathcal{N}(\Lambda, L) = N(\Lambda, L) - \frac{1}{6}\partial^2 \Lambda \\[2ex]
 & \Omega & \equiv & \mathcal{N}(W, L) = N(W, L) - \frac{1}{6}\partial^2 W\,.
\end{array} \tag{4.3}$$

(Man beachte, daß es genau $p(6) - 2p(5) + p(4) = 2$ linear unabhängige, allein aus L gebildete NOPs und $p(6-4) - p(6-4-1) = 1$ mit dem primären Feld W gebildetes NOP der Dimension 6 gibt, wie es im Abschnitt 3.4 abgeleitetet worden ist.) Mit diesen Feldern nimmt der Kommutator von W mit sich selbst nach Satz 2.13 die Gestalt

$$\begin{aligned}
[W_m, W_n] \;=\; & \frac{c}{4}\binom{n+3}{7}\delta_{n+m,0} + C_{WW}^{L} p_{442}(m,n) L_{m+n} + C_{WW}^{\Lambda} p_{444}(m,n)\Lambda_{m+n} \\
& + C_{WW}^{W} p_{444}(m,n) W_{m+n} + C_{WW}^{\Gamma} p_{446}(m,n)\Gamma_{m+n} + C_{WW}^{\Delta} p_{446}(m,n)\Delta_{m+n} \\
& + C_{WW}^{\Omega} p_{446}(m,n)\Omega_{m+n}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

an. In diesem ganzen Kapitel seien ohne Beschränkung der Allgemeinheit die einfachen Felder aus $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ so normiert, daß

$$d_{WW} = \frac{c}{h}\,. \tag{4.5}$$

Mit der allgemeinen Formel von Satz 2.13 kann man die Strukturkonstanten C_{WW}^{X} über die Relation $C_{WW}^{X} d_{XY} = C_{WWY}$ berechnen. Für $h(X) = 6$ muß man dazu die Matrix $D_6 = (d_{ij})$ mit $h(\phi_i) = h(\phi_j) = 6$ invertieren, die also nicht degeneriert sein sollte. Daher die Bemühungen des dritten Kapitels, linear unabhängige Systeme von Felder zu finden. Da die NOPs, die allein aus dem Virasorofeld L gebildet sind (und das sind hier Γ und Δ) orthogonal zu denen sind, die ein primäres W-Feld involvieren (hier Ω), spaltet die Determinante dieser Matrix,

$$\det D_6 = \det D_6^{(L)} \det D_6^{(W)} = \left(\frac{c^2}{21}(7c+68)(5c+22)(2c-1)\right)\left(\frac{c}{8}(c+24)\right)\,, \tag{4.6}$$

in zwei Faktoren auf, wobei der eine von Γ und Δ herrührt, der andere einfach mit $d_{\Omega\Omega}$ identisch ist. Damit ergeben sich die Strukturkonstanten zu

$$\begin{aligned}
C_{WW}^{L} &= 2\,, & C_{WW}^{\Lambda} &= \frac{42}{5c+22}\,, \\
C_{WW}^{\Gamma} &= \frac{3(19c-524)}{10(7c+68)(2c-1)}\,, & C_{WW}^{\Delta} &= \frac{24(72c+13)}{(5c+22)(7c+68)(2c-1)}\,, \\
C_{WW}^{\Omega} &= \frac{28}{3(c+24)} C_{WW}^{W}\,.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Die Nennernullstellen der Strukturkonstanten korrespondieren zu bestimmten Nullzuständen, die von der Kac-Determinante [-7,39,40,41,57,74] herrühren und die Algebra inkonsistent werden lassen; für $c = -\frac{68}{7}$ ist beispielsweise $35\Delta - 12\Gamma$ der Nullzustand. Die Kac-Determinante ist die Determinante der Cauchymatrix des Skalarproduktes auf dem durch die Virasoro-Algebra erzeugten Fockraum, an ihren Nullstellen ist das Skalarprodukt degeneriert. Für zentrale Ladungen, wo dies geschieht, ist die Projektion der Felder in $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ auf primäre nicht möglich, da dazu aufgrund der Nullzustände zu wenige quasiprimäre Felder zur Verfügung stehen, aus denen die primäre Linearkombination zu bilden wäre.
Bis jetzt ist, neben der zentralen Ladung c, die Strukturkonstante C_{WW}^{W} noch ein freier Parameter. Die Bedingung, daß die Jacobi-Identität zwischen drei W-Feldern gültig ist, erzwingt eine Beziehung zwischen diesen beiden Parametern. Setzt man (4.7) in $[[W_m, W_n], W_q] + zykl. = 0$ ein und benutzt (2.63), so erhält man

$$[[W_m, W_n], W_q] + zykl. = P_2(m,n,q) L_{m+n+q} + P_4(m,n,q) W_{m+n+q} + R_{m+n+q} = 0\,. \tag{4.8}$$

Die $P_k(m,n,q)$ bezeichnen hier die Linearkombinationen von Produkten der universellen Polynome einschließlich der zentralen Ladung c und der Strukturkonstanten C_{WW}^{W}. Der nicht einfache Teil der rechten Seite sei völlig in R_{m+n+q} aufsummiert. Wie weiter oben bereits erläutert wurde, ist es für das Verschwinden der gesamten rechten Seite hinreichend, wenn $P_4(m,n,q) = 0$ ist. Indem man hierfür den expliziten Ausdruck einsetzt und die linearen Abhängigkeiten von Produkten der universellen Polynome, die in diesem Ausdruck auftreten, beachtet, gelangt man zu der folgenden Bedingung an die Strukturkonstante C_{WW}^{W},

$$\frac{5c+22}{c+24}\left(C_{WW}^{W}\right)^2 = 54\frac{c^2-172c+196}{(7c+68)(2c-1)}\,, \tag{4.9}$$

die für $c \neq -24$ die c-Abhängigkeit von C_{WW}^{W} festlegt, und zwar zu

$$\left(C_{WW}^{W}\right)^2 = \frac{54(c+24)(c^2-172c+196)}{(5c+22)(7c+68)(2c-1)}\,. \tag{4.9'}$$

Für den Wert $c = -24$ der zentralen Ladung kann Gleichung (4.8) nicht erfüllt werden.
Die Bedingung (4.9) garantiert bereits, daß die Jacobi-Identität für alle chiralen Felder gültig ist, die in der $\mathcal{W}(2,4)$ auftreten können, so daß diese $\mathcal{W}$-Algebra $\mathcal{W}(2,4)$ für generische Werte der zentralen Ladung c existiert, mit Ausnahme der isolierten, diskreten Punkte $c = -24\,,\ -\frac{22}{5}\,,\ -\frac{68}{7}\,,\ \frac{1}{2}$. In den Bereichen $86 - 60\sqrt{2} < c < 86 + 60\sqrt{2}$, sowie $-\frac{22}{5} < c < 12$ und $-24 < c < -\frac{68}{7}$ ist C_{WW}^{W} nicht mehr reell, was gemäß Satz 2.13 unmöglich ist, sofern die Feldalgebra $\mathcal{F}$ eine Involution $\phi \mapsto \phi^{\dagger}$ besitzt. Weiter beachte man, daß die Strukturkonstante C_{WW}^{W} für die c-Werte $c = 86 \pm 60\sqrt{2}$ verschwindet, hingegen die Algebra an der "Nullstelle" $c = -24$ nicht konsistent ist. Dies bestätigt bzw. komplettiert die Ausführungen [13,91] und berichtigt [60].

$\mathcal{W}$(2,5). Da bei dieser $\mathcal{W}$-Algebra das zusätzliche primäre Feld ungerade Dimension hat, muß C_{WW}^{W} verschwinden. Es können NOPs gerader Dimension kleiner oder gleich 8 auftreten, allerdings nicht alle. Im Prinzip wäre $\mathcal{N}(W, \partial L)$ ein mögliches $\mathcal{N}$-Produkt, das im Kommutator $[W, W]$ auftreten könnte, doch sieht man leicht, daß seine Strukturkonstante $C_{WW}^{\mathcal{N}(W,\partial L)}$ proportional zu C_{WW}^{W} ist, so daß dieses Feld nicht beiträgt.
Für die genaue Form der Determinanten und Strukturkonstanten dieser und der folgenden Beispiele sei auf den Anhang in [11] verwiesen. Ganz analog zur $\mathcal{W}(2,4)$-Algebra wird auch hier die Jacobi-Identität aufgestellt. Allerdings hat man hier lediglich die zentrale Ladung c als freien Parameter, so daß es nicht verwundert, eine Bedingung zu erhalten, die nur fünf Möglichkeiten für c zuläßt,

$$c \;=\; \tfrac{6}{7}\,,\ -7\,,\ -\tfrac{350}{11}\,,\ 134 \pm 60\sqrt{5}\,. \tag{4.10}$$

Nur für diese c-Werte ist die $\mathcal{W}(2,5)$-Algebra konsistent, wie auch in [13] zu lesen ist.

$\mathcal{W}$(2,6). Es sei hier nur das Ergebnis angegeben. Die Strukturkonstanten sind ausgesprochen komplizierte Ausdrücke in c und C_{WW}^{W}. Auflösen der Jacobi-Identität ergibt die c-Abhängigkeit von C_{WW}^{W}, außer für den Fall $c \neq -2$, wo die Algebra wie bei der $\mathcal{W}(2,4)$ inkonsistent wird, zu

$$\left(C_{WW}^{W}\right)^2 = \frac{400(c^2 - 388c + 4)(c+2)(c+47)^2(13c+516)^2}{3(5c+22)(7c+68)(2c-1)(5c+3)(3c+46)(3c+286)(11c+232)}\,. \tag{4.11}$$

Folglich existiert $\mathcal{W}(2,6)$ für alle Werte der zentralen Ladung mit Ausnahme von $c = -2$, den Nennernullstellen von (4.11) und den folgenden Intervallen, innerhalb derer C_{WW}^{W} nicht länger reell sein würde: $194 - 112\sqrt{2} < c < 194 + 112\sqrt{2}$, $-\frac{3}{5} < c < \frac{1}{2}$, $-\frac{22}{5} < c < -2$, $-\frac{46}{3} < c < -\frac{68}{7}$, sowie, ohne die doppelten Nullstellen -47 und $-\frac{516}{13}$, der Bereich $-\frac{268}{3} < c < -\frac{232}{11}$. Die anderen Nullstellen von C_{WW}^{W} sind $194 \pm 112\sqrt{6}$, man siehe dazu auch [45].

$\mathcal{W}$(2,7). Bei dieser $\mathcal{W}$-Algebra spannen die Polynome aus der Jacobi-Identität erstmals einen zweidimensionalen Raum auf. Entgegen aller Erwartung haben die beiden daraus resultierenden Gleichungen an c eine gemeinsame Lösung,

$$c = -\tfrac{25}{2}\,. \tag{4.12}$$

Die $\mathcal{W}(2,7)$ existiert also nur für einen einzigen, negativen Wert der zentralen Ladung und hat daher insbesondere auch keinerlei unitäre Darstellungen.

$\mathcal{W}$(2,8). Auch hier spannen die Polynome der Jacobi-Identität einen zweidimensionalen Raum auf, allerdings ist C_{WW}^{W} ein zweiter freier Parameter, so daß man erwartet, diese Algebra könne wenigstens für einige diskrete c-Werte existieren. In der Tat findet man, daß $\mathcal{W}(2,8)$ konsistent ist für die rationalen Werte

$$c \;=\; \tfrac{21}{22}\,,\ -\tfrac{224}{65}\,,\ -\tfrac{944}{17}\,,\ -\tfrac{1015}{2} \tag{4.13}$$

mit den zugehörigen Strukturkonstanten (in derselben Reihenfolge angegeben)

$$\left(C_{WW}^{W}\right)^2 \;=\; \tfrac{86005968234265625}{124088261649132}\,,\ \tfrac{2731943701550627281872}{32463659123020775}\,,\ 0\,,\ \tfrac{83237962743648511799}{155898446715324359100}\,. \tag{4.13$'$}$$

Überraschenderweise zerfallen die riesigen Zähler und Nenner dieser Ausdrücke in sehr kleine Primzahlen. Weiter findet man Konsistenz für die irrationalen c-Werte

$$c \;=\; 350 \pm 252\sqrt{2} \tag{4.14}$$

mit den positiven Strukturkonstanten

$$\left(C_{WW}^{W}\right)^2 \;=\; \frac{45354384731278330470060480 \mp 3207037150593977899400886 6\sqrt{2}}{673801916160338661180 5}\,. \tag{4.14$'$}$$

Für die Werte $c = -23\,,\, -\frac{712}{7}$ und $-\frac{3164}{23}$ der zentralen Ladung ist zwar die Jacobi-Identität erfüllt, aber das Quadrat der Strukturkonstanten, $\left(C_{WW}^{W}\right)^2$, wird negativ.

Im Prinzip könnte man die Algebren $\mathcal{W}(2,h)$ für $h > 8$ in derselben Art und Weise angehen, aber der Rechenaufwand steigt beträchtlich mit h (ungefähr mit h, der Zahl der auszuführenden Kommutatoren, die notwendig sind, um die Strukturkonstanten d_{ij} zu berechnen). So wurden für die Algebren bis zur Dimension $h = 10$ lediglich notwendige Bedingungen für ihre Existenz bei verschwindender Strukturkonstante C_{WW}^{W} abgeleitet. Betrachtet man allerdings die Polynome, die in der Jacobi-Identität aus drei W-Feldern auftreten, etwas näher, so erkennt man, daß alle diese Algebren höchstens für isolierte Werte der zentralen Ladung existieren können, da die Anzahl der linear unabhängigen Polynome und somit Bedingungen, mindestens zwei ist und ungefähr mit $h/3$ ansteigt [-4,13], dahingegen aber höchstens zwei freie Parameter existieren, c und C_{WW}^{W}.

Bei den $\mathcal{W}(2,h)$-Algebren mit einem zusätzlichen Generator von halbzahliger Dimension benötigt man keine neuen Felder mehr, wenn man die für den ganzzahligen Fall nächst größerer Dimension kennt. Außerdem kann der Antikommutator $\{W_m, W_n\}$ ausschließlich $\mathcal{N}$-Produkte geradzahliger Dimension bis hin zu $2h-1$ enthalten, die allein aus dem Energie-Impuls-Tensor aufgebaut sind. Da C_{WW}^{W} nicht auftritt, erwartet man, daß diese fermionischen Algebren nur für einige isolierte c-Werte existieren. Die Ergebnisse der zum ganzzahligen Fall völlig analogen Rechnungen finden sich weiter hinten in tabellarischer Form (Tabelle 4.1), zu den niederdimensionalen Fällen siehe auch [13,89]. Bevor jedoch die Ergebnisse zu den Algebren vom Typ $\mathcal{W}(2,h)$ intepretiert werden, soll zunächst noch auf die bis jetzt explizit berechneten $\mathcal{W}$-Algebren mit drei Generatoren eingegangen werden.

$\mathcal{W}$(2,3,4). Wieder soll der einfachste Fall etwas ausführlicher geschildert werden, um die zusätzlich auftretenden Probleme zu verdeutlichen. Man hat nun zwei primäre Felder U und V der Dimensionen 3 und 4,

$$\begin{aligned} [L_m, U_n] &= (n-2m)U_{n+m}\,, \\ [L_m, V_n] &= (n-3m)V_{n+m}\,. \end{aligned}$$

Diese Algebra scheint so etwas wie die affine Casimir-Algebra von $su(4)$ zu sein [3], da sie tatsächlich, wie sich erweisen wird, für generische Werte der zentralen Ladung existiert.

Man muß nun allerdings anders als bei den $\mathcal{W}(2,h)$-Algebren verfahren, da jetzt drei grundlegende Kommutatoren zu betrachten sind, nämlich $[U,U]$, $[V,V]$ und $[U,V]$, die neben der zentralen Ladung c zwei weitere freie Parameter enthalten, C_{UU}^{V} and C_{VV}^{V}. Die relevanten NOPs sind durch die

Ausdrücke

$$
\begin{aligned}
h=4 \qquad & \Lambda \equiv \mathcal{N}(L,L) = N(L,L) - \frac{3}{10}\partial^2 L \\
h=5 \qquad & A \equiv \mathcal{N}(U,L) = N(U,L) - \frac{3}{14}\partial^2 U \\
h=6 \qquad & \Gamma \equiv \mathcal{N}(L,\partial^2 L) = N(L,\partial^2 L) - \partial N(L,\partial L) + \frac{2}{9}\partial^2 N(L,L) - \frac{1}{42}\partial^4 L \\
& \Delta \equiv \mathcal{N}(\Lambda,L) = N(\Lambda,L) - \tfrac{1}{6}\partial^2\Lambda \\
& \Omega \equiv \mathcal{N}(V,L) = N(V,L) - \tfrac{1}{6}\partial^2 V \\
& P \equiv \mathcal{N}(U,U) = N(U,U) - \frac{1}{84}\partial^4 L - \frac{40}{9(5c+22)}\partial^2\Lambda - \frac{5}{36}C_{UU}^{V}\partial^2 V \\
& T \equiv \mathcal{N}(U,\partial L) = N(U,\partial L) - \frac{2}{5}\partial N(U,L) + \frac{1}{20}\partial^3 U
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

gegeben. Damit nehmen die Kommutatoren die Form

$$
\begin{aligned}
[U_m,U_n] &= \frac{c}{3}\binom{n+2}{5}\delta_{n+m,0} + C_{UU}^{L} p_{332}(m,n) L_{m+n} + C_{UU}^{\Lambda} p_{334}(m,n)\Lambda_{m+n} \\
&\quad + C_{UU}^{V} p_{334}(m,n) V_{m+n} \\
[V_m,V_n] &= \frac{c}{4}\binom{n+3}{7}\delta_{n+m,0} + C_{VV}^{L} p_{442}(m,n) L_{m+n} + C_{VV}^{\Lambda} p_{444}(m,n)\Lambda_{m+n} \\
&\quad + C_{VV}^{V} p_{444}(m,n) V_{m+n} + p_{446}(m,n)\Big[C_{VV}^{\Gamma}\Gamma_{m+n} + C_{VV}^{\Delta}\Delta_{m+n} \\
&\quad + C_{VV}^{\Omega}\Omega_{m+n} + C_{VV}^{P} P_{m+n} + C_{VV}^{T} T_{m+n}\Big] \\
[U_m,V_n] &= C_{UV}^{L} p_{342}(m,n) L_{m+n} + C_{UV}^{U} p_{343}(m,n) U_{m+n} + C_{UV}^{\Lambda} p_{344}(m,n)\Lambda_{m+n} \\
&\quad + C_{UV}^{A} p_{345}(m,n) A_{m+n} + p_{346}(m,n)\Big[C_{UV}^{\Gamma}\Gamma_{m+n} + C_{UV}^{\Delta}\Delta_{m+n} \\
&\quad + C_{UV}^{\Omega}\Omega_{m+n} + C_{UV}^{P} P_{m+n} + C_{UV}^{T} T_{m+n}\Big]
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

an. Das Feld V kann nicht in dem letzten Kommutator auftreten, da $C_{UV}^{V} \sim C_{VV}^{U}$, welches natürlich verschwindet. Weiterhin beachte man, daß in diesem Beispiel selbst eines der normalgeordneten Produkte aus (4.15), die gemäß Proposition 2.12 gebildet wurden, noch von der Strukturkonstanten C_{UU}^{V} abhängt. Die Berechnung der Strukturkonstanten läuft wie zuvor und führt zu

$$
\begin{aligned}
& C_{UU}^{L} = 2\,, \qquad C_{UU}^{\Lambda} = \frac{32}{5c+22}\,, \\
& C_{UV}^{L} = C_{UV}^{\Lambda} = 0\,, \qquad C_{UV}^{U} = \frac{3}{4}C_{UU}^{V}\,, \qquad C_{UV}^{A} = \frac{39}{7c+114}C_{UU}^{V}\,, \\
& C_{UV}^{\Gamma} = C_{UV}^{\Delta} = C_{UV}^{\Omega} = C_{UV}^{P} = 0\,, \qquad C_{UV}^{T} = \frac{3}{4(c+2)}C_{UU}^{V}\,, \\
& C_{VV}^{L} = 2\,, \qquad C_{VV}^{\Lambda} = \frac{42}{5c+22}\,, \qquad C_{VV}^{T} = 0\,,
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

während die anderen Strukturkonstanten C_{VV}^{X} mit $h(X) = 6$ ausgesprochen komplizierte rationale Funktionen in C_{UU}^{V} und C_{VV}^{V} darstellen, die sich drastisch vereinfachen, wenn sie allein durch die zentrale Ladung c ausgedrückt werden. Daher seien diese erst am Ende der Rechnungen aufgeführt. Für die Konsistenz der $\mathcal{W}$-Algebra ist es notwendig und hinreichend, wenn alle Jacobi-Identitäten, die drei einfache, primäre Felder involvieren, erfüllt sind. Es zeigt sich aber, daß aufgrund der generellen Struktur der Identitäten tatsächlich alle Bedingungen an die Parameter bereits in der Gleichung

$$[[V_m, V_n], U_q] + zykl. \;=\; 0 \tag{4.18}$$

enthalten sind. Einsetzten der Kommutatoren (4.16) und der Strukturkonstanten (4.17) in diese Beziehung liefert einem nach längerer Rechnung, in der wieder die linearen Abhängigkeiten der Polynome eine wesentliche Rolle spielen, die gewünschten Relationen zwischen den noch freien Strukturkonstanten und c,

$$\begin{aligned} \left(C_{UU}^{V}\right)^2 &= \frac{16(7c+114)(c+2)}{3(5c+22)(c+7)} \\ \left(C_{VV}^{V}\right)^2 &= \frac{27(c^2+c+218)^2}{(7c+114)(5c+22)(c+7)(c+2)}\,, \end{aligned} \tag{4.19}$$

mit der zusätzlichen Einschränkungen, daß

$$C_{UU}^{V} C_{VV}^{V} = -\frac{12(c^2+c+218)}{(5c+22)(c+7)} \tag{4.19'}$$

ist (womit nur noch zwei der vier möglichen Vorzeichenkombinationen in (4.19) erlaubt sind) und

$$C_{UU}^{V} \neq 0\,. \tag{4.19''}$$

Damit lassen sich nun auch die noch verbleibenden restlichen Strukturkonstanten angeben,

$$\begin{aligned} C_{VV}^{\Gamma} &= \frac{3(19c-582)}{20(7c+114)(c+2)}\,, & C_{VV}^{\Delta} &= \frac{96(9c-2)}{(7c+114)(5c+22)(c+2)}\,, \\ C_{VV}^{P} &= \frac{45(5c+22)}{2(7c+114)(c+2)}\,, & C_{VV}^{\Omega} &= \frac{36(c^2+c+218)}{(5c+22)(c+7)(c+2)}\left(C_{VV}^{V}\right)^{-1}\,, \end{aligned} \tag{4.20}$$

ebenso die Determinante von allen in (4.15) eingeführten Feldern der Dimension 6, die wieder vollständig faktorisiert:

$$\det D_6 = -\frac{c^5}{2835}(c+7)(7c+114)(5c+22)(3c+116)(c+13)(c+2)^2(c-1)\,. \tag{4.21}$$

Somit existiert also die "Casimir-Algebra" $\mathcal{W}(2,3,4)$ für alle Werte von c, außer für die isolierten Punkte $c = -2\,, -\frac{22}{5}\,, -7\,, -\frac{114}{7}$ und den Intervallen $-\frac{114}{7} < c < -7$ und $-\frac{22}{5} < c < -2$, wo beide Strukturkonstanten, C_{UU}^{V} und C_{VV}^{V}, wieder nicht mehr reell wären.
Weiter zeigt die Bedingung (4.19″), daß diese Algebra $\mathcal{W}(2,3,4)$ nicht als direktes Produkt von $\mathcal{W}(2,3) \times \mathcal{W}(2,4)$ verstanden werden kann, indem man die Virasorofelder der beiden Faktoren entsprechend abzuändern versucht.

$\mathcal{W}$(2,4,h). Auf dieselbe Art und Weise kann die Existenz anderer $\mathcal{W}$-Algebren mit drei Generatoren etabliert werden. So sind inzwischen die Fälle $h = 4$, 5 und 6 behandelt worden [65,66]. Im nächst einfacheren Fall dieser Algebren, nämlich der $\mathcal{W}(2,4,4)$, die zwei unabhängige primäre Felder der gleichen Dimension 4 enthält, zeigen explizite Rechnungen, daß Konsistenz nur für zwei diskrete Werte der zentralen Ladung möglich ist,

$$c = 1\,,\ -\tfrac{656}{11}\,. \tag{4.22}$$

Bei der $\mathcal{W}(2,4,5)$ beobachtet man zunächst, daß diese die $\mathcal{W}(2,4)$ als Unteralgebra enthält. Damit hat man eine der drei zu prüfenden Jacobi-Identitäten bereits erfüllt, die anderen beiden führen wieder zu diskreten Lösungen,

$$c = 1\,,\ -\tfrac{253}{7}\,,\ -\tfrac{1060}{13}\,. \tag{4.23}$$

Die $\mathcal{W}(2,4,6)$-Algebra schließlich stellte sich als ausgesprochen kompliziert dar. Überraschenderweise erhält man hier zwei völlig unabhängige Lösungen für die Abhängigkeit der vier freien Strukturkonstanten von der zentralen Ladung, die jeweils für generische Werte derselben gültig sind. Der Vollständigkeit halber seien diese Strukturkonstanten für beide Fälle hier angegeben – ersterer stellt vermutlich den bosonischen Sektor der Super-$\mathcal{W}(2,\frac{3}{2})$-Algebra (Super-Virasorofeld) dar, letzterer die "Casimir-Algebra" von B_3 bzw. C_3 –, wobei U das Feld der Dimension 4, V das der Dimension 6 bezeichne:

$$\begin{aligned}
\left(C_{UU}^{U}\right)^2 &= \frac{54(10c^2+47c-82)^2}{(4c+21)(5c+22)(10c-7)}\,, & -\frac{(5c^2+309c-14)^2}{(c-26)(5c+3)(5c+22)}\,,\\
\left(C_{UU}^{V}\right)^2 &= \frac{144(c-1)^2(c+11)(5c+22)^2(14c+11)}{(c+24)(2c-1)(4c+21)(7c+68)(10c-7)}\,, & -\frac{2(c-1)(c+49)(c+76)(5c+22)^2(14c+11)}{3(c-26)(c+24)(2c-1)(5c+3)(7c+68)}\,,\\
\left(C_{UV}^{V}\right)^2 &= \frac{75(2c-1)^2(3c+20)^2(7c+68)^2}{2(c+24)^2(4c+21)(5c+22)(10c-7)}\,, & -\frac{25(c+50)^2(2c-1)^2(7c+68)^2}{9(c-26)(c+24)^2(5c+3)(5c+22)}\,,\\
\left(C_{VV}^{V}\right)^2 &= \frac{400(c-1)^2(616c^4+19106c^3+183931c^2+574876c+724096)^2}{9(c+11)(c+24)^3(2c-1)(4c+21)(7c+68)(10c-7)(14c+11)}\,,\\
&\quad -\frac{50(c+49)(1106c^5+72355c^4+839120c^3-574940c^2-1961680c-2510336)^2}{243(c-26)(c-1)(c+24)^3(c+76)(2c-1)(5c+3)(7c+68)(14c+11)}\,.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Generell lassen sich die folgenden Feststellungen zu $\mathcal{W}$-Algebren mit drei Generatoren machen: Zum einen gibt es eine spezifische Orbifold-Konstruktion, aus der die Existenz jeder beliebigen $\mathcal{W}(2,4,h)$ für den speziellen Wert $c = 1$ folgt [53,65]. Zum anderen gilt, daß alle $\mathcal{W}$-Algebren $\mathcal{W}(2,h_1,h_2)$, bei denen beide Dimensionen $h_i > 2$ ungerade sind, vollständig inkonsistent sind, d.h. für keinen Wert der zentralen Ladung existieren. Um dies einzusehen, mache man sich zunächst klar, daß die beiden Felder U und V der Dimensionen h_1 und h_2 miteinander kommutieren müssen (mit Hilfe von Formeln wie (4.1) drücke man alle relevanten Strukturkonstanten durch Vielfache von C_{UV}^{V}, C_{UV}^{U} und d_{UV} aus, erstere beiden verschwinden wegen Lokalität, letztere wegen der Orthogonalität von U and V). Dies hat dann aber zur Folge, daß beispielsweise die Jacobi-Identität, die zwei der U-Felder und ein V-Feld verknüpft, nicht erfüllt werden kann, wobei hier essentiell eingeht, daß die Polynome $p_{h_1h_12k}(m,n)p_{2kh_2h_2}(m+n,q)$ für $1 \le k \le h_1 - 1$ sämtlich linear unabhängig sind.

4.3. Interpretationen

Nachdem nun ein umfangreiches Datenmaterial zur Verfügung gestellt wurde, ist es nur natürlich, nach zugrundeliegenden systematischen Mustern zu suchen, um diese Resultate verallgemeinern zu können. In der Tat gibt es einige mehr oder weniger vollständig bewiesene Vermutungen dazu.

Die bekannteste Vermutung dieser Art dürfte die sogenannte *Casimir-Vermutung* sein, die generisch existierende $\mathcal{W}$-Algebren vorhersagt: Sei $\mathbf{g}$ eine Lie-Algebra mit den Exponenten $e_1, \ldots e_\ell$, $\ell =$ *rank* $\mathbf{g}$. Zum einen gibt es die zugehörige Casimir-Algebra $C(\mathbf{g}) \subset U(\mathbf{g})$, die eine Unteralgebra der universell Einhüllenden ist, denn die ℓ linear unabhängigen Casimiroperatoren C_i stellen symmetrische Polynome der Ordnungen $h_i = e_i + 1$ in den Generatoren von $\mathbf{g}$ dar. Zum anderen kann man $\mathbf{g}$ ihre affine Kac-Moody-Algebra $\hat{\mathbf{g}}$ zuordnen. Nicht klar hingegen ist, was man sich unter $C(\hat{\mathbf{g}})$ bzw. $\widehat{C(\mathbf{g})}$ vorzustellen hat, konsistente Definitionen dieser Objekte sind nicht ohne weiteres möglich. Die Casimir-Vermutung besagt nun, daß die $\mathcal{W}(\mathbf{g}) \equiv \mathcal{W}(h_1, \ldots, h_\ell)$ das gesuchte Objekt ist,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{g} & \xrightarrow{\wedge} & \hat{\mathbf{g}} \\ C\big\downarrow & & \big\downarrow C' \\ C(\mathbf{g}) & \xrightarrow{\wedge'} & \mathcal{W}(\mathbf{g}) \,. \end{array}$$

Die Algebren $\mathcal{W}(2,3)$, $\mathcal{W}(2,4)$, $\mathcal{W}(2,6)$, $\mathcal{W}(2,3,4)$ und $\mathcal{W}(2,4,6)$ lassen sich alle in den Rahmen dieser Vermutung einordnen, alle anderen $\mathcal{W}$-Algebren haben Generatoren mit Dimensionen, die nicht zu den Ordnungen von Casimiroperatoren irgendeiner Lie-Algebra passen. Für $\mathbf{g} = A_n$ ist die Vermutung bereits bewiesen [-4,2,28,29].

Im folgenden gilt das Interesse nun ausschließlich den $\mathcal{W}(2,h)$-Algebren mit verschwindender Strukturkonstante $C_{WW}^W = 0$. Zuerst seien diese Fälle einmal in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 4.1 $c-$Werte, für die C_{WW}^W verschwindet

$\mathcal{W}(2,\frac{5}{2})$	$c = -\frac{13}{14}$
$\mathcal{W}(2,3)$	c *generisch*
$\mathcal{W}(2,\frac{7}{2})$	$c = \frac{21}{22}\,,\ -\frac{19}{6}\,,\ -\frac{161}{8}$
$\mathcal{W}(2,4)$	$c = 86 \pm 60\sqrt{2}$
$\mathcal{W}(2,\frac{9}{2})$	$c = \frac{25}{26}\,,\ -\frac{7}{20}\,,\ -\frac{125}{22}\,,\ -\frac{279}{10}\,,\ -35$
$\mathcal{W}(2,5)$	$c = \frac{6}{7}\,,\ -7\,,\ -\frac{350}{11}\,,\ 134 \pm 60\sqrt{5}$
$\mathcal{W}(2,\frac{11}{2})$	$c = -\frac{217}{26}$
$\mathcal{W}(2,6)$	$c = -\frac{516}{13}\,,\ -47\,,\ 194 \pm 112\sqrt{2}$
$\mathcal{W}(2,\frac{13}{2})$	$c = \frac{9}{34}\,,\ -\frac{611}{14}\,,\ -\frac{111}{10}$
$\mathcal{W}(2,7)$	$c = -\frac{25}{2}$
$\mathcal{W}(2,\frac{15}{2})$	$c = \frac{25}{28}\,,\ -\frac{11}{38}\,,\ -\frac{39}{10}\,,\ -\frac{473}{34}\,,\ -\frac{825}{16}\,,\ -59$
$\mathcal{W}(2,8)$	$c = -\frac{944}{17}$
$\mathcal{W}(2,\frac{17}{2})$	$c = -\frac{637}{38}$
$\mathcal{W}(2,9)$	$c = -\frac{1206}{19}\,,\ -\frac{91}{5}\,,\ -\frac{208}{35}\,,\ -\frac{14}{11}\,,\ -71$
$\mathcal{W}(2,\frac{19}{2})$	$c = -\frac{1349}{20}\,,\ -\frac{275}{14}\,,\ -\frac{75}{46}$
$\mathcal{W}(2,10)$	$c = \frac{8}{35}$

Für die c-Werte der letzten beiden $\mathcal{W}$-Algebren wurden nur notwendige Bedingungen geprüft, so daß sie als nicht ganz gesichert gelten müssen. Der Wert für die $\mathcal{W}(2,\frac{5}{2})$ stammt aus [89].
Obwohl die Zahl der linear unabhängigen Bedingungen mit h ansteigt, so daß es scheint, $\mathcal{W}(2,h)$ könne für hinreichend großes h überhaupt nicht mehr existieren, gibt es doch sehr gute Argumente, die den folgenden Satz rechtfertigen:

Satz 4.2. Für alle $\delta \in \mathbb{Z}_+/2$, die eine Zerlegung $\delta = \frac{(p-2)(q-2)}{4}$, $p,q \in \mathbb{Z}_+$ teilerfremd, zulassen, existiert die Algebra $\mathcal{W}(2,\delta)$ für $c = 1 - 6\frac{(p-q)^2}{pq}$ mit verschwindender Strukturkonstante C_{WW}^W.

Für einen weitgehenden Beweis dieser Behauptung, der sich im wesentlichen auf die Betrachtung der sogenannten *Fusionsregeln* [6,30,80] gründet, siehe [9], im unitären Fall auch [33,49,75,84]. Hier sei nur soviel gesagt, daß für eine gegebene Darstellung der Virasoro-Algebra, deren zentrale Ladung c ein Element der *minimalen Serie* ist (siehe dazu auch das fünfte Kapitel), die Dimensionen der primären Felder, i.e. die Tiefstgewichte, nur solche der Form

$$h(p,q;r,s) = \frac{(pr-qs)^2-(p-q)^2}{4pq}\,, \quad 1 \leq r \leq q-1\,, \;\; 1 \leq s \leq p-1 \tag{4.25}$$

sein können [-7,6,74]. Damit ist dann $h(p,q;q-1,1) = h(p,q;1,p-1) = \delta$, sofern δ der Relation des Satzes genügt. Gemäß den von Belavin, Polyakov und Zamolodchikov [6] gegebenen Fusionsregeln impliziert dies

$$[\delta] \times [\delta] = [\mathbf{1}]\,, \tag{4.26}$$

wobei diese Schreibweise meint, daß das Operatorprodukt zweier Felder aus der Familie $\mathcal{F}_{|\delta\rangle}$ nur Felder aus der Familie $\mathcal{F}_{|0\rangle}$ enthält. Da dieses Feld nach Voraussetzung eine halbzahlige Dimension besitzt, muß nun nur noch die Lokalität gezeigt werden, damit die Operatoralgebra um dieses Feld ergänzt werden kann. ■

Die folgende Tabelle bietet eine Zusammenstellung aller auf diese Weise zu klassifizierenden $\mathcal{W}$-Algebren nebst einiger offensichtlich damit in Zusammenhang stehender Fälle. Die Spalten sind dabei mit dem in (4.25) erscheinenden Paar $(r,s) = (1,p-1)$ beschriftet, die c-Werte werden in dieser Tabelle durch die Notation $(p,q) = c$ bezeichnet, die besagt, daß der c-Wert durch das (p,q)-te Element der minimalen Serie gegeben ist und daß für $\delta = h(p,q;1,p-1)$ die Algebra $\mathcal{W}(2,\delta)$ mit verschwindender Strukturkonstante C_{WW}^{W} existiert.

Tabelle 4.2 Die Muster, die von den c–Werten stammen, die durch Satz 4.2 erklärt werden

	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
$\mathcal{W}(2,\frac{5}{2})$		$(4,7) = -\frac{13}{14}$			
$\mathcal{W}(2,3)$					
$\mathcal{W}(2,\frac{7}{2})$	$(3,16) = -\frac{161}{8}$	$(4,9) = -\frac{19}{6}$			
$\mathcal{W}(2,4)$					
$\mathcal{W}(2,\frac{9}{2})$	$(3,20) = -\frac{279}{10}$	$(4,11) = -\frac{125}{22}$	$(5,8) = -\frac{7}{20}$		
$\mathcal{W}(2,5)$	$(3,22) = -\frac{350}{11}$	$(4,12) = -7^*$		$(6,7) = \frac{6}{7}$	
$\mathcal{W}(2,\frac{11}{2})$		$(4,13) = -\frac{217}{26}$			
$\mathcal{W}(2,6)$	$(3,26) = -\frac{516}{13}$				
$\mathcal{W}(2,\frac{13}{2})$	$(3,28) = -\frac{611}{14}$	$(4,15) = -\frac{111}{10}$			
$\mathcal{W}(2,7)$		$(4,16) = -\frac{25}{2}{}^*$			
$\mathcal{W}(2,\frac{15}{2})$	$(3,32) = -\frac{825}{16}$	$(4,17) = -\frac{473}{34}$	$(5,12) = -\frac{39}{10}$		$(7,8) = \frac{25}{28}$
$\mathcal{W}(2,8)$	$(3,34) = -\frac{944}{17}$				
$\mathcal{W}(2,\frac{17}{2})$		$(4,19) = -\frac{637}{38}$			
$\mathcal{W}(2,9)$	$(3,38) = -\frac{1206}{19}$	$(4,20) = -\frac{91}{5}{}^*$	$(5,14) = -\frac{208}{35}$	$(6,11) = -\frac{14}{11}$	
$\mathcal{W}(2,\frac{19}{2})$	$(3,40) = -\frac{1349}{20}$	$(4,21) = -\frac{275}{14}$			
$\mathcal{W}(2,10)$					$(7,10) = \frac{8}{35}$

Die mit * markierten Einträge stellen c-Werte dar, die die Voraussetzungen von Satz 4.2 bis auf die Forderung erfüllen, daß p und q teilerfremd sein sollen. Diese Bedingung kann aber im allgemeinen nicht fallengelassen werden, so existiert zum Beispiel die $\mathcal{W}(2,8)$ nicht für $c = (4,18) = -\frac{46}{3}$. Eine mögliche Erklärung dieses Phänomens wird in [64] gegeben.

Ein beträchtlicher Anteil der c-Werte aus Tabelle 4.1 kann somit durch Satz 4.2 erklärt werden. Man findet aber dort noch weitere c-Werte, die zwar aus der minimalen Serie stammen, für die aber $\delta \neq h(p,q;1,p-1)$ ist, und zwar die folgenden fünf Stück, für die bemerkenswerterweise die Dimension des zusätzlichen Generators der $\mathcal{W}$-Algebra immer durch $\delta = h(p,q;1,5)$ gegeben ist:

Tabelle 4.3 Die minimalen c−Werte, die nicht aus Satz 4.2 stammen

$\mathcal{W}(2,\frac{7}{2})$	$(12,11) = \frac{21}{22}$
$\mathcal{W}(2,\frac{9}{2})$	$(12,13) = \frac{25}{26}$
$\mathcal{W}(2,\frac{13}{2})$	$(12,17) = \frac{9}{34}$
$\mathcal{W}(2,\frac{15}{2})$	$(12,19) = -\frac{11}{38}$
$\mathcal{W}(2,\frac{19}{2})$	$(12,23) = -\frac{75}{46}$

Beide Muster, das aus Tabelle 4.3 und jenes aus Satz 4.2 können in der sogenannten ADE-Klassifikation von modulinvarianten Partitionsfunktionen durch konforme Charaktere nach Cappelli, Itzykson und Zuber [25,16] wiederentdeckt werden, die dann sogar noch weitere Serien von $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren nahelegt, welche allerdings erst bei wesentlich größerem δ auftreten würden. In der folgenden Tabelle sind die nicht trivialen Beispiele, die mit den ADE-Serien in Verbindung gebracht werden können, zusammengestellt, wobei wieder die Notationen $h(p,q;r,s)$, die in (4.25) eingeführt wurde, und $c = (p,q)$ mit p,q teilerfremd für die zentrale Ladung aus der minimalen Serie verwendet werden. Die Beschriftung der Zeilen mit Paaren von Lie-Algebren ist genau wie in [25].

Tabelle 4.4 Die Muster, die mit der ADE−Klassifikation zusammenhängen

(A_{q-1}, D_{2n})	$h(4n-2,q;1,4n-3)$	$= (q-2)(n-1)$
(A_{q-1}, E_6)	$h(12,q;1,7)$	$= q-3$
	$h(12,q;1,5)$	$= \frac{q-4}{2}$
(A_{q-1}, E_8)	$h(30,q;1,11)$	$= q-5$
	$h(30,q;1,19)$	$= 3(q-3)$
	$h(30,q;1,29)$	$= 7(q-2)$

Dazu kurz einige Erläuterungen. Zunächst sei angenommen, daß die oben erwähnten Charaktere in der rationalen konformen Feldtheorie auftreten. Dann kann deren chiraler Feldinhalt vermöge des Isomorphismus zwischen dem Vektorraum der Felder und dem Hilbertraum aus diesen Charakteren abgelesen werden. Die Charaktere von Cappelli, Itzykson und Zuber haben die prinzipielle Gestalt

$$\sum_{r,s,r',s'} \mathcal{M}_{r,s,r',s'} \chi_{r,s} \chi^*_{r',s'} \,, \tag{4.27}$$

wobei die $\mathcal{M}_{r,s,r',s'}$ nicht-negative ganze Zahlen sind. Die erzeugende Funktion (Zustandssumme) des Vektorraums der chiralen Felder ist dann durch

$$Z = \sum_{r,s} \mathcal{M}_{r,s,1,1} \chi_{r,s} \tag{4.27'}$$

gegeben. Da die einfachen Felder mit Ausnahme des Virasorofeldes nach Voraussetzung primär sein sollen, kann ihre Anzahl nicht größer als $\sum_{r,s} \mathcal{M}_{r,s,1,1}$ sein. $\mathcal{W}$-Algebren mit zwei Generatoren lassen sich besonders leicht mit den Serien (A_{q-1}, D_{2n}) und (A_{q-1}, E_6) in Verbindung bringen, die Partitionsfunktionen enthalten dort Terme der Form $|\chi_{1,1} + \chi_{1,s}|^2$. Die Dimensionen $\delta = h(p,q;r,s)$

der dazu korrespondierenden primären Felder $\phi_{(1,s)}$ findet man in den ersten beiden Zeilen von Tabelle 4.4. Die (A_{q-1}, D_{2n})-Serie reproduziert exakt die c-Werte und Dimensionen δ, die aus Satz 4.2 abgeleitet werden können. Weiter liefert die Wahl $q = 11$ in der exzeptionellen Serie (A_{q-1}, E_6) den Wert $c = \frac{21}{22}$ mit $h = 8$ – und tatsächlich existiert $\mathcal{W}(2,8)$ für diese zentrale Ladung, wenn auch mit nicht verschwindender Strukturkonstante C_{WW}^{W}.
Doch es lassen sich noch weitere $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren in der ADE-Klassifikation der konformen Partitionsfunktionen finden: Man betrachte beispielsweise die (A_{q-1}, E_8)-Serie, deren Partitionsfunktionen den Term $|\,\chi_{1,1} + \chi_{1,11} + \chi_{1,19} + \chi_{1,29}\,|^2$ enthalten. Obwohl es scheint, dies korrespondiere zu einer $\mathcal{W}$-Algebra mit vier Generatoren der Dimensionen gemäß Tabelle 4.4, erkennt man, daß diese eine Unteralgebra mit zwei Generatoren beherbergt, da das primäre Feld $\phi_{(1,11)}$ der Dimension $q-5$ im Kommutator mit sich selbst die Felder $\phi_{(1,19)}$ und $\phi_{(1,29)}$ nicht enthalten kann, da jene dafür zu hohe Dimensionen haben. Daher muß die $\mathcal{W}(2,\delta)$ mit $\delta = h(30, q; 1, 11)$ bereits eine abgeschlossene Algebra sein. Damit kann dann die $\mathcal{W}(2,8)$ mit zentraler Ladung $c = -\frac{224}{65} = (30, 13)$ in das ADE-Schema eingeordnet werden.
Schließlich kann auch den c-Werten aus Tabelle 4.3 eine Interpretation durch die konformen Charaktere gegeben werden, wenn die Argumente, die zu Satz 4.2 führten, beachtet werden: Angenommen die $\mathcal{W}(2,\delta_1)$ existiere mit $\delta_1 = h(12, q; 1, 7)$ aus der (A_{q-1}, E_6)-Serie. Dann können die drei Kombinationen

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{(1)} &\equiv \chi_{1,1} + \chi_{1,7} \\ \tilde{\chi}_{(2)} &\equiv \chi_{1,4} + \chi_{1,8} \\ \tilde{\chi}_{(3)} &\equiv \chi_{1,5} + \chi_{1,11} \end{aligned} \tag{4.28}$$

als Charaktere einer irreduziblen Darstellung der $\mathcal{W}(2,\delta_1)$-Algebra aufgefaßt werden, die korrespondierenden primären Felder haben dann jeweils die kleinere der Dimensionen der auf der rechten Seite auftretenden [75]. Diese drei Darstellungen genügen Fusionsregeln des Ising-Typs [27,78,79], das heißt, daß $[\tilde{\phi}_{(1,5)}] \times [\tilde{\phi}_{(1,5)}] = [\tilde{\phi}_{(1,1)}] = [\mathbf{1}]$ ist. Der Beweis von Satz 4.2 [9] sichert auch in diesem Fall, daß die $\mathcal{W}(2,\delta_1)$ um das Feld $\tilde{\phi}_{(1,5)}$ der konformen Dimension $\delta_2 = \frac{q-4}{2}$ erweitert werden kann. Ähnlich wie im vorherigen Absatz bildet das neu hinzugenommene Feld eine Unteralgebra, da aus Dimensionsgründen der Kommutator $[\tilde{\phi}_{(1,5)}, \tilde{\phi}_{(1,5)}]$ das Feld der Dimension δ_1 nicht enthalten kann. Ein Beispiel wird durch die Algebren $\mathcal{W}(2,\frac{7}{2})$ und $\mathcal{W}(2,8)$, die beide für dieselbe zentrale Ladung $c = (12, 11) = \frac{21}{22}$ mit $\frac{7}{2} = h(12, 11; 1, 5)$ und $8 = h(12, 11; 1, 7)$ existieren, gegeben. Womöglich stellt in einem solchen Fall die $\mathcal{W}(2,\delta_1)$ den bosonischen Sektor der $\mathcal{W}(2,\delta_2)$ dar, das Feld $\phi_{(1,7)}$ wäre dann zusammengesetzt, $\phi_{(1,7)} = \mathcal{N}(\phi_{(1,5)}, \partial\phi_{(1,5)}) + \ldots$.
Erstaunlicherweise können alle $(p, q; r, s)$-Muster der hier konstruierten $\mathcal{W}$-Algebren auch mit der ADE-Klassifikation der superkonformen Partitionsfunktionen [24] in Einklang gebracht werden. Diese Tatsache läßt vermuten, daß für all diese $\mathcal{W}$-Algebren supersymmetrische Verallgemeinerungen existieren könnten. Einige solcher supersymmetrischer Algebren wurden bereits konstruiert [9,46,62], eine ähnliche Interpretation dieser Ergebnisse steht aber noch aus.

Eine große Zahl der gefundenen $\mathcal{W}$-Algebren lassen sich auch im Zusammenhang der sogenannten *Nebenklassen-Konstruktionen* erklären. Hier soll der Vollständigkeit halber nur kurz das Prinzip erläutert werden. Die Sugawarakonstruktion aus Abschnitt 2.7 liefert für eine reduktive Lie-Algebra $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1 + \ldots + \mathbf{g}_n$, mit $\mathbf{g}_0$ eine abelsche und $\mathbf{g}_i, i = 1, \ldots, n$ jeweils eine einfache Lie-Algebra, die zentrale Ladung

$$c_{\mathbf{g}} \;=\; dim\,\mathbf{g}_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{2k_i\,dim\,\mathbf{g}_i}{2k_i + Q_i}\,,$$

wobei k_i der Level der zu $\mathbf{g}_i$ gehörenden Kac-Moody-Algebra $\hat{\mathbf{g}}_i$ ist (ansonsten Bezeichnungen wie in Abschnitt 2.7). Sei $\hat{\mathbf{h}} \subset \hat{\mathbf{g}}$ eine Unteralgebra mit analog zu berechnender zentraler Ladung $c_{\mathbf{h}}$. Bezeichne $L^{\mathbf{g}}(z)$ und $L^{\mathbf{h}}(z)$ die jeweiligen Virasorofelder. Man kann dann zeigen, daß das

Virasorofeld

$$L(z) = L^{\mathbf{g}}(z) - L^{\mathbf{h}}(z)$$

mit $L^{\mathbf{h}}(z)$ kommutiert und die zentrale Ladung

$$c = c_{\mathbf{g}} - c_{\mathbf{h}}$$

besitzt. Dieses Virasorofeld gehört zu dem Nebenklassenraum $\mathbf{g}/\mathbf{h}$. Die hier beschriebene Methode heißt auch *Goddard-Kent-Olive-Konstruktion* [56,57,59], und erlaubt es einem, Virasoro-Algebren mit zentralen Ladungen $c < 1$ zu erzeugen. Die schon erwähnte minimale Serie wird beispielsweise durch die Nebenklassenräume

$$\frac{su(2)_m \oplus su(2)_1}{su_{m+1}}$$

generiert, wobei der Index den Level der $\widehat{su(2)}$ Kac-Moody-Algebra angibt. Zum Level m, der eine rationale Zahl $\frac{p-q}{q}$ sein darf (positive ganze Zahlen führen auf die Unterserie der unitären Modelle), gehört die zentrale Ladung

$$c = 1 - 6\frac{(p-q)^2}{pq}\,.$$

Ganz analog erhält man minimale Serien für die anderen einfachen Lie-Algebren vom *ADE*-Typ [56,57,59], für die nicht einfach geschnürten Lie-Algebren muß diese Konstruktion mittels BRST-Techniken modifiziert werden, da hier nicht mehr alle Wurzeln die gleiche Länge haben [44]. Eine Auswertung dieser Serien bezüglich der $\mathcal{W}$-Algebren findet sich in [11], auch wurde versucht, die Existenz von $\mathcal{W}$-Algebren indirekt durch Bestimmen der Partitionsfunktionen solcher Nebenklassen-Modelle nachzuweisen [9,10].

Damit sind für fast alle der diskreten c-Werte Erklärungen angeboten worden. Eine solche Interpretation steht aber noch für die irrationalen c-Werte, den Wert $c = -\frac{1015}{2}$ für die $\mathcal{W}(2,8)$ und die folgenden wie letzterer nicht aus der minimalen Serie stammenden c-Werte aus:

Tabelle 4.5 Eine spezielle nicht minimale Serie von c–Werten

$\mathcal{W}(2,\frac{3}{2})$	$(c = -11)$
$\mathcal{W}(2,3)$	$(c = -23)$
$\mathcal{W}(2,\frac{9}{2})$	$c = -35$
$\mathcal{W}(2,6)$	$c = -47$
$\mathcal{W}(2,\frac{15}{2})$	$c = -59$
$\mathcal{W}(2,9)$	$c = -71$
$\mathcal{W}(2,4)$	$(c = -11)$
$\mathcal{W}(2,8)$	$c = -23$

Diese c-Werte erfüllen offensichtlich das Bildungsgesetz $c = 1-8\delta$ bzw. $c = 1-3\delta$ und sind alleiniger Gegenstand des nächsten Kapitels. Die eingeklammerten Werte geben die Fortsetzung der Serien auf für generisches c existierende Algebren an.

V

W-Algebren Nicht-Minimaler Modelle

Thema dieses Kapitels soll der Versuch sein, die Existenz der $\mathcal{W}$-Algebren aus Tabelle 4.5 zu erklären. Das besondere an diesen Algebren ist, daß ihre c-Werte nicht aus der minimalen Serie, auch nicht aus irgendeiner anderen durch eine Goddard-Kent-Olive-Konstruktion zu erzeugenden diskreten Serie stammen.

Die ersten beiden Abschnitte dieses Kapitels widmen sich daher zunächst kurz der Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra im Bild der Vertexoperatoralgebren, um die außerordentliche Rolle der minimalen Serie aufzuzeigen. Dadurch wird gleichzeitig die Problematik des nicht minimalen Falles herausgearbeitet, denn nur im minimalen Fall ist die zu den Tiefstgewichtsdarstellungen eines c-Wertes korrespondierende Operatoralgebra endlich erzeugt. Sodann wird die Serie aus Tabelle 4.5 ebenfalls im Bild der Vertexoperatoralgebren betrachtet und ihre besonderen Eigenschaften im Sinne der Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra beleuchtet. Damit können dann eine ganze Reihe von $\mathcal{W}$-Algebren vorhergesagt werden, darunter auch solche mit unendlich vielen einfachen Feldern.

Die folgenden Abschnitte tragen dann die bis jetzt erzielten Ergebnisse zu diesen speziellen $\mathcal{W}$-Algebren zusammen: Die Virasoromodule werden durch eine BRST-Konstruktion nach der Methode von Felder [42,43,7,14,15] erhalten, und dadurch unerwünschte Nullzustände eliminiert. Für den einfachsten nicht trivialen Fall, die $\mathcal{W}(2, \frac{9}{2})$, war es rechentechnisch noch möglich, Darstellungen nach dem Verfahren von R. Varnhagen [78,79] zu suchen. Die Resultate sind unerwartet und harren noch ihrem vollständigen Verständnis, einige Anmerkungen können aber doch schon zu ihnen gemacht werden. Für einige der zuvor prophezeiten, aber aufgrund beschränkter Kapazitäten der Computer bisher nicht explizit konstruierten $\mathcal{W}$-Algebren lassen sich indirekte Argumente angeben, die deren Existenz zusätzlich nahelegen. Eine weniger lückenhafte Darstellung dieses Kapitels wird sich in [47] finden.

Gegenstand dieses Abschnitts ist eine kurze Einführung in die degenerierten Modelle. Bei solchen Modellen ist der irreduzible Modul der Virasoro-Algebra aufgrund von Nullzuständen nicht mit dem Vermamodul identisch. Die Operatoralgebra eines degenerierten Modells wird von primären Feldern generiert, die zu den Tiefstgewichtszuständen der Dimensionen

$$h_{r,s}(c) = \frac{1}{4}\left((\alpha_- r + \alpha_+ s)^2 - (\alpha_- + \alpha_+)^2\right) \tag{5.1}$$

korrespondieren, die Nullstellen der Kac-Determinante sind. Dabei wird die zentrale Ladung durch $c = 1 - 24\alpha_0^2$ parametrisiert, wobei

$$\alpha_\pm = \alpha_0 \pm \sqrt{1+\alpha_0^2} \tag{5.2}$$

ist. Die Kac-Determinante ist die Determinante der Cauchymatrix $M(c,h)$ des Skalarproduktes auf dem Virasoromodul $V(c,h)$. Die Matrixelemente sind einfach alle Ausdrücke der Form $\langle h|L_{m_1}L_{m_2}\dots L_{m_n}|h\rangle$, $m_i \le m_{i+1}$, die nur dann von Null verschieden sein können, wenn $\sum_{i=1}^n m_i = 0$ ist. Dadurch zerfällt die Matrix in Blockstruktur, die Blöcke enthalten alle Matrixelemente von Zuständen einer festen Energie und sind insbesondere endlichdimensional. Die Determinante der Cauchymatrix $M_N(c,h)$ zur Energie N hat die explizite Gestalt [-7,-4,1,26,52,90]

$$\det M_N(c,h) = C_N \prod_{rs\le N} (h - h_{r,s}(c))^{p(N-rs)}\ , \tag{5.1'}$$

wobei C_N eine von Null verschiedene Konstante ist, die allein von der Energie N abhängt, $p(n)$ die Anzahl der Partitionen von n bezeichnet und $h_{r,s}(c)$ durch (5.1) gegeben wird. Zu jedem dieser Tiefstgewichtszustände gehört ein singulärer Zustand des Gewichtes $h_{r,s}(c) + rs$. Dadurch ist die zu dem Zustand $|h_{r,s}(c)\rangle$ gehörende *konforme Familie* degeneriert, das heißt, der Modul der descendanten Zustände von $|h_{r,s}\rangle$ ist kleiner als der Vermamodul. Die möglichen Strukturen von degenerierten Familien und die zugrunde liegende Einbettungsstruktur von Vermamodulen ineinander wurden von Feigin und Fuks [39,40,41] klassifiziert.
Dies soll nun im Rahmen der Freie-Feld-Darstellung abgeleitet werden. Dabei wird die Struktur der degenerierten Familien über BRST-Operatoren und BRST-invarinate Felder erhalten, wie es erstmals von Felder [42,43] durchgeführt wurde.
Es sei an Abschnitt 2.7 erinnert. Der Hilbertraum des Modells ist durch die direkte Summe von geladenen Fockräumen $\mathcal{F}_{\alpha,\alpha_0}$ gegeben, die Darstellungsräume der Heisenbergalgebra

$$[j_m, j_n] = n\delta_{m+n,0} \tag{2.64'}$$

auf dem Vakuumzustand $|\alpha,\alpha_0\rangle$ sind, wobei letzterer ein Tiefstgewichtszustand sein soll,

$$j_n|\alpha,\alpha_0\rangle = 0\ \forall n<0\,,\quad j_0|\alpha,\alpha_0\rangle = \sqrt{2}\alpha|\alpha,\alpha_0\rangle\,. \tag{2.65'}$$

Diesen Fockräumen kann man die Struktur von Virasoromodulen geben, wenn das Virasorofeld durch

$$L(z) = \mathcal{N}(j,j)(z) + \sqrt{2}\alpha_0\partial j(z) \tag{2.66'}$$

definiert wird, es hat dann die zentrale Ladung $c = 1 - 24\alpha_0^2$. Der Vakuumzustand $|\alpha,\alpha_0\rangle$ ist dann auch ein Virasoro-Tiefstgewichtszustand von $\mathcal{F}_{\alpha,\alpha_0}$ mit dem Gewicht $h(\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha\alpha_0$,

$$L_0|\alpha,\alpha_0\rangle = h(\alpha)|\alpha,\alpha_0\rangle\,.$$

Als Virasoromodul besitzt $\mathcal{F}_{\alpha,\alpha_0}$ eine Graduierung in die L_0-Eigenräume $\mathcal{F}_{\alpha,\alpha_0}(n)$ zu den Eigenwerten $h(\alpha)+n$. Deren Dimension ist durch $p(n)$, die Anzahl der Partitionen der Zahl n,

gegeben, so daß $\mathcal{F}_{\alpha,\alpha_0} = \coprod_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathcal{F}_{\alpha,\alpha_0}(n)$ ganau dann isomorph zum Vermamodul der Virasoro-Algebra ist, falls dieser irreduzibel ist. Zu erwähnen ist noch, daß die graduierten Dualräume $\mathcal{F}^*_{\alpha,\alpha_0} = \coprod_{n\in\mathbb{Z}_+} (\mathcal{F}_{\alpha,\alpha_0}(n))^*$, über die wie in Abschnitt 2.1 das Skalarprodukt eingeführt wird, jeweils isomorph zu $\mathcal{F}_{2\alpha_0-\alpha,\alpha_0}$ sind, wenn man die Forderung $(L_n)^t = L_{-n}$ stellt.
In Abschnitt 2.7 wurden bereits die Parafelder χ_α eingeführt, die Fockräume unterschiedlicher Ladungen ineinander abzubilden vermögen, $\chi_\alpha : \mathcal{F}_{\beta,\alpha_0} \longrightarrow \mathcal{F}_{\beta+\alpha,\alpha_0}$,

$$\chi_\alpha(u) = \exp\left(-\sum_{n>0}\sqrt{2}\alpha j \frac{e^{-inu}}{n}\right)\exp\left(-\sum_{n<0}\sqrt{2}\alpha j \frac{e^{-inu}}{n}\right) c(\alpha) e^{\left(iu(\sqrt{2}\alpha j_0 + h(\alpha))\right)}\,, \qquad (2.67')$$

wobei der Operator $c_\alpha(u)$ aus (2.68′) direkt ausgeschrieben worden ist. Diese Parafelder sind primäre konforme Felder des Gewichtes $h(\alpha)$. Von besonderem Interesse sind primäre Felder mit degenerierten konformen Familien. Die Dimensionen $h_{r,s}(c)$ in (5.1) korrespondieren zu den Ladungen

$$\alpha_{r,s} = \frac{1}{2}(1-r)\alpha_- + \frac{1}{2}(1-s)\alpha_+\,, \qquad (5.3)$$

so daß $h(\alpha_{r,s}) = h_{r,s}(c)$ für $c = 1 - 24\alpha_0^2$ ist. Im folgenden seien α_0 bzw. c fest vorgegeben und daher die abkürzenden Schreibweisen $h_{r,s}$, $\mathcal{F}_{r,s}$ und $|r,s\rangle$ für Dimensionen, Fockräume und Vakuumzustände verwandt, also

$$\mathcal{F}_{r,s} = \mathcal{F}_{\alpha_{r,s},\alpha_0}$$

und ganz analog für die anderen Notationen.
Sei χ_α ein Parafeld mit $h(\chi_\alpha) = 1$. Dies ist der Fall für $\alpha = \alpha_{1,-1} = \alpha_+$ oder $\alpha = \alpha_{-1,1} = \alpha_-$. Dann ist $\chi_\alpha(u)du$ invariant unter der durch die Moden von $L(z)$ generierten Diffeomorphismengruppe. Damit sind auch Operatoren der Form

$$Q^{(n)}_\pm = \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \chi_{\alpha_\pm}(u_1)\ldots\chi_{\alpha_\pm}(u_n)du_1\ldots du_n \qquad (5.4)$$

invariant unter allen konformen Transformationen, d.h. $[L_m, Q^{(n)}_\pm] = 0\ \forall m \in \mathbb{Z}$, falls sie wohldefiniert sind. Diese Operatoren haben zwar das konforme Gewicht $h(Q^{(n)}_\pm) = 0$, sind aber nicht gleich der Identität, da sie zum Beispiel die Ladungen verändern.
Offensichtlich ist $Q^{(1)}$ keineswegs von vornherein ein wohldefinierter Operator, da $\chi_\alpha(u)$ nicht periodisch in u ist. Bedenkt man jedoch die beiden Tatsachen, daß zum einen die Phase zwischen zweien von diesen speziellen Vertexoperatoren durch

$$\varepsilon(\chi_{\alpha_\pm}, \chi_{\alpha_\pm}) = \varepsilon_{\alpha_\pm\alpha_\pm} = e^{2\pi i(\alpha_\pm)^2} = e^{4\pi i\alpha_0\alpha_\pm} \qquad (5.5)$$

gegeben ist, zum anderen die Wirkung von $\chi_{\alpha_\pm}(u)$ auf dem Fockraum $\mathcal{F}_{r,s}$ die Periodizitätseigenschaft

$$\chi_{\alpha_\pm}(u+2\pi)|\psi\rangle = e^{4\pi i\alpha_\pm\alpha_{r,s}}\chi_{\alpha_\pm}(u)|\psi\rangle = e^{4\pi i(1-\{{s \atop r}\})\alpha_0\alpha_\pm}\chi_{\alpha_\pm}(u)|\psi\rangle \qquad (5.6)$$

für alle $|\psi\rangle \in \mathcal{F}_{r,s}$ besitzt, so erkennt man, daß $Q^{(n)}_+$ für jedes n' auf $\mathcal{F}_{n',n}$ und umgekehrt $Q^{(n)}_-$ für jedes n' auf $\mathcal{F}_{n,n'}$ wohldefinierte Operatoren sind, da sich die Phasen dann gerade aufheben. Offensichtlich bilden diese sogenannten *BRST-Operatoren* die Fockräume wie folgt ab: $Q^{(n)}_+ : \mathcal{F}_{n',n} \longrightarrow \mathcal{F}_{n',-n}$ und $Q^{(n)}_- : \mathcal{F}_{n,n'} \longrightarrow \mathcal{F}_{-n,n'}$, $n \geq 0$, wobei $Q^{(0)}_\pm = \mathbf{1}$ gesetzt wird.
Damit die n-Punkt-Funktionen von Parafeldern $\chi_{\alpha_{r,s}}(u)$ nicht verschwinden, also physikalische Messungen repräsentieren, muß die sogenannte anomale Ladungserhaltung gelten,

$$\langle\chi_{\alpha_{r_1,s_1}}\ldots\chi_{\alpha_{r_n,s_n}}\rangle \neq 0 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^n \alpha_{s_i,r_i} = 2\alpha_0\,,$$

weshalb α_0 auch die *Hintergrundsladung im Unendlichen* genannt wird. Man stellt nun fest, daß viele n-Punkt-Funktionen für $\alpha_0 \neq 0$ verschwinden, die physikalisch relevant sind, insbesondere verschwinden alle 4-Punkt-Funktionen eines einzelnen Operators. Um dem abzuhelfen, sollte man die Ladungen der Operatoren "abschirmen" können, ohne deren Dimensionen zu ändern. Hierfür bieten sich nach dem oben gesagten gerade die BRST-Operatoren an, mit denen die *abgeschirmten Vertexoperatoren* formal definiert werden als

$$V^{(l'l)}_{(n'n)(m'm)}(u) \equiv e^{i\theta^{(l'l)}_{(n'n)(m'm)}} \chi_{\alpha_{n',n}}(u) Q_-^{(r')} Q_+^{(r)} : \mathcal{F}_{m',m} \longrightarrow \mathcal{F}_{l',l}\,, \tag{5.7}$$

wobei die Abkürzungen $l = m + n - 2r - 1$, $l' = m' + n' - 2r' - 1$ und die Phase

$$\theta^{(l'l)}_{(n'n)(m'm)} = \frac{\pi}{2}\Big((2n'+1)r + (2n+1)r' - 2\alpha_-^2 r'(r'-m') - 2\alpha_+^2 r(r-m)\Big) \tag{5.7'}$$

eingeführt wurden, letztere lediglich zur Vereinfachung späterer Rechnungen. Sie stellt sicher, daß der so definierte Operator reell ist, d.h. seine Matrixelemente reelle Linearkombinationen in Monomen von Virasorogeneratoren sind, die auf dem Tiefstgewichtszustand wirken. Da die Vertauschungsrelationen von $\chi_{\alpha_{n',n}}$ mit j bekannt sind, kann auch der Kommutator mit dem Virasorofeld berechnet werden. Es ergibt sich, daß die Felder $V^{(l'l)}_{(n'n)(m'm)}(u)$ primäre chirale Felder vom Gewichte $h_{n',n}$ sind,

$$\left[L_k, V^{(l'l)}_{(n'n)(m'm)}(u)\right] = e^{iku}\left(i\frac{\partial}{\partial u} - kh_{n',n}\right) V^{(l'l)}_{(n'n)(m'm)}\,. \tag{5.8}$$

Der Hilbertraum der degenerierten Modelle schreibt sich dann als direkte Summe von irreduziblen Darstellungsräumen eines Paares von Virasoro-Algebren getrennt in links- und rechts-chiralen Anteil,

$$\mathcal{H} = \coprod_{i',i} \mathcal{H}_{i',i} \otimes \mathcal{H}_{i',i}\,,$$

die Summe erstreckt sich über alle Paare i, i' von positiven ganzen Zahlen, die die degenerierten Tiefstgewichtsdarstellungen zu den Gewichten aus (5.1) angeben. Jeder primäre Operator der Dimension $h_{j',j}$ kann dann in seinen links- und rechts-chiralen Teil aufgespalten werden,

$$\Phi_{j',j}(u,v) = \sum_{i',i,k',k} D^{(i'i)}_{(j'j)(k'k)} V^{(i'i)}_{(j'j)(k'k)}(u) \otimes V^{(i'i)}_{(j'j)(k'k)}(v)\,.$$

Es seien nun die wesentlichen Eigenschaften der abgeschirmten Vertexoperatoren und der BRST-Ladungen angegeben, für die genauen Beweise sei auf die Arbeiten von Felder [42,43] und Dotsenko, Fateev [34,35] verwiesen. Eine mathematisch strengere Ableitung, in der alle Felder als operatorwertige Distributionen für geeignete Testfunktionen definiert werden, gibt [-4].

Proposition 5.1. BRST-Struktur. Abgeschirmte Vertexoperatoren sind bis auf eine Phase BRST-invariant, d.h.

$$Q_+^{(l)} V^{(l',l)}_{(n',n)(m',m)}(u) = V^{(l',-l+2m)}_{(n',n)(m',-m)}(u) Q_+^{(m)}\,,\ m, l \geq 0\,, \tag{5.9}$$

analog für $Q_-^{(m)}$.

Seien $\alpha_\pm^2 \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}_+$. Dann sind die irreduziblen Virasoromodule durch den Isomorphismus

$$\mathcal{H}_{m',m} \cong \ker(Q_+^{(m)} : \mathcal{F}_{m',m} \to \mathcal{F}_{m',-m})\,, m \geq 0 \tag{5.10}$$

gegeben.

Sei andererseits $\alpha_-^2 = \frac{p}{p'}$, $p, p' \in \mathbb{Z}_+$ teilerfremd. Dann hat man die Sequenz

$$\mathcal{F}_{m'-p',m-p} \overset{Q_+^{(p-m)}}{\longrightarrow} \mathcal{F}_{m',m} \overset{Q_+^{(m)}}{\longrightarrow} \mathcal{F}_{m',-m}\,,$$

wobei $Q_+^{(m)} Q_+^{(p-m)} = Q_+^{(p)} = 0$ ist, und die irreduziblen Virasoromodule sind isomorph zu

$$\mathcal{H}_{m'.m} \cong \frac{\ker Q_+^{(m)}}{\mathrm{Im} Q_+^{(p-m)}}\,,\ 1 \leq m' \leq p'-1\,,\ 1 \leq m \leq p-1\,. \tag{5.10'}$$

In diesem speziellen Fall spricht man von *minimalen Modellen.*

Bemerkungen zum Beweis: Die BRST-Invarianz der abgeschirmten Vertexoperartoren folgt aus der Definition der Objekte, wobei der nicht triviale Punkt der Nachweis der folgenden Eigenschaft ist:

$$Q_+^{(m)} V_{(n'n)(m'm)}^{(l'l)} = e^{2\pi i m \alpha_{n',n}\alpha_+} V_{(n'n)(m'm)}^{(l',l-2m)}\,,$$

analog für $Q_-^{(m)}$. Die Beschreibung der irreduziblen Virasoromodule durch die Cohomologie der Fockräume bezüglich der BRST-Ladung beruht essentiell auf der Tatsache, daß das Bild des Tiefstgewichtszustandes $|m', m\rangle$ unter $Q_+^{(m)}$ ein singulärer Zustand in $\mathcal{F}_{m',-m}$ ist, der somit einen irreduziblen Untermodul generiert. Man muß sich durch explizite Rechnung davon überzeugen, daß dieser singuläre Zustand nicht identisch verschwindet, daß also die invarianten Unterräume nicht trivial sind, solange $m' \leq 0$ ist. Das Verschwinden von $Q_+^{(p)}$ im minimalen Fall sieht man am leichtesten ein, indem man mit der Redefinition

$$Q_+^{(m)} = \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \chi_{\alpha_+}(u_{1+k}) \ldots \chi_{\alpha_+}(u_{m+k}) du_1 \ldots du_m\,, \tag{5.4'}$$

wobei $u_{k+m} = u_k$ gesetzt wird, $Q_+^{(p)}$ explizit ausrechnet:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1} \chi_{\alpha_+}(u_{1+k}) \ldots \chi_{\alpha_+}(u_{p+k}) &= \sum_{k=0}^{p-1} (\varepsilon_{\alpha_+\alpha_+})^k \chi_{\alpha_+}(u_1) \ldots \chi_{\alpha_+}(u_p) \\ &= \frac{1 - e^{2\pi i \alpha_+^2 p}}{1 - e^{2\pi i \alpha_+^2}} \chi_{\alpha_+}(u_1) \ldots \chi_{\alpha_+}(u_p) \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

da nach Voraussetzung $\alpha_+^2 = \frac{p'}{p}$ ist. Es wurde übrigens hier nur der Fall behandelt, daß $m', m \geq 0$ waren. Im Fall $m'm < 0$ ist für nicht minimale Modelle $\mathcal{F}_{m',m}$ bereits irreduzibel, siehe dazu die Klassifikation von Feigin und Fuchs [40,41]. Der verbleibende Fall $m', m \leq 0$ folgt durch Anwenden des Dualisierungsfunktors. Allerdings stellen die Felder $V_{(n'n)(m'm)}^{(l'l)}$ mit $l', l, m', m, n', n > 0$ bereits eine abgeschlossene Feldalgebra dar, da die anderen auf den oben definierten BRST-Modulen verschwinden. (Bei minimalen Modellen gilt sogar die schärfere Bedingung, daß $l \not\equiv 0 \mod p$, $l' \not\equiv 0 \mod p'$ sein muß. Dies ist letztendlich die Ursache dafür, daß in diesem Fall die Operatoralgebra sogar endlich erzeugt wird.) Im allgemeinen folgt dies aus dem Verschwinden der Normierungskonstante $N_{(n'n)(m'm)}^{(l'l)} = \langle l', l | \chi_{\alpha_{n'n}}(u=0) Q_-^{(r')} Q_+^{(r)} | m', m\rangle$, die durch das Dotsenko-Fateev-Integral [34,35] gegeben ist,

$$N_{(n'n)(m'm)}^{(l'l)} = \prod_{j'=1}^{r'} \frac{(1 - e^{2\pi i \alpha_-^2 (m'-j')})(1 - e^{2\pi i \alpha_-^2 j'})}{1 - e^{2\pi i \alpha_-^2}} \prod_{j=1}^{r} \frac{(1 - e^{2\pi i \alpha_+^2 (m-j)})(1 - e^{2\pi i \alpha_+^2 j})}{1 - e^{2\pi i \alpha_+^2}}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \quad e^{\pi i\alpha_-^2 r'(r'+1-2m')} e^{\pi i\alpha_+^2 r(r+1-2m)} \alpha_+^{4r'r} \\
&\times \quad \prod_{k'=1}^{r'} \frac{\Gamma(k'\alpha_-^2)}{\Gamma(\alpha_-^2)} \frac{\Gamma(m+(k'-m')\alpha_-^2)\Gamma(n+(k'-n')\alpha_-^2)}{\Gamma(m+n-2r+(k'+r'-m'-n')\alpha_-^2)} \\
&\times \quad \prod_{k=1}^{r'} \frac{\Gamma(k\alpha_+^2-r)}{\Gamma(\alpha_+^2)} \frac{\Gamma(m'-r'+(k-m)\alpha_+^2)\Gamma(n'-r'+(k-n)\alpha_+^2)}{\Gamma(m'+n'-r'+(k+r-m-n)\alpha_+^2)} \,.
\end{aligned}
$$

Diesem expliziten Ausdruck entnimmt man, daß $N^{(l'l)}_{(n'n)(m'm)} \neq 0$ für den nicht minimalen Fall impliziert, daß

$$
\begin{aligned}
|n^{(')} - m^{(')}| + 1 \leq l^{(')} \leq n^{(')} + m^{(')} - 1\,, \\
n^{(')} + m^{(')} + l^{(')} + 1 \equiv 0 \bmod 2
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

sein muß, der Absolutbetrag folgt dabei aus der $su(1,1)$-Invarianz der Drei-Punkt-Funktion motivierten Forderung, die Normierungskonstante solle bei allen Permutationen von $(l'l)$, $(m'm)$ und $(n'n)$ nicht verschwinden. Bei minimalen Modellen geht (5.11) in die stärkere Bedingung

$$
\begin{aligned}
|n^{(')} - m^{(')}| + 1 \leq l^{(')} \leq \min\{n^{(')} + m^{(')} - 1\,,\ 2p^{(')} - n^{(')} - m^{(')} - 1\} \\
n^{(')} + m^{(')} + l^{(')} + 1 \equiv 0 \bmod 2
\end{aligned}
\tag{5.11'}
$$

über. Diese Bedingungen werden als *Fusionsregeln* bezeichnet, da sie festlegen, welche konformen Familien in einer OPE zweier primärer chiraler Felder auftreten können, da alle Matrixelemente letztendlich mittels $su(1,1)$-Invarianz auf die Normierungskonstanten zurückgeführt werden können. Dies soll als Beweisskizze genügen. ■

5.2. Minimale und nicht minimale Modelle

Rationale konforme Feldtheorien (RCFT) sind solche, bei denen sämtliche auftretenden Felder der Operatoralgebra rationale Dimensionen besitzen. Es ist dann notwendigerweise die zentrale Ladung $c \in \mathbb{Q}$ [69,70,71]. In diesem Abschnitt wird nun (auf eine alternative und recht amüsante Weise) gezeigt, daß bei den degenerierten genau die minimalen Modelle RCFTs darstellen, daß es aber auch weitere Modelle gibt, die immerhin noch unendlich viele Felder rationaler Dimensionen enthalten.
Bezeichne im folgenden $\mathcal{O}(c)$ die zu der zentralen Ladung c gehörende Operatoralgebra der degenerierten Felder, genauer die der abgeschirmten Vertexoperatoren, also $\mathcal{O}(c) \equiv \{V^{(l'l)}_{(n'n)(m'm)} \mid n^{(')}, m^{(')}, l^{(')} \in \mathbb{Z}\}$.

Proposition 5.2. Degenerierte Modelle. Sei $c = 1 - 24\alpha_0^2$ die zentrale Ladung einer CFT mit der Operatoralgebra $\mathcal{O}(c)$. Dann klassifiziert sich die Theorie in Abhängigkeit von c wie folgt:

- $\mathcal{O}(c)$ ist eine RCFT $\iff \exists p,q \in \mathbb{Z} - \{0\}$, teilerfremd: $c = 1 - 6\frac{(p-q)^2}{pq} \iff \alpha_0^2 \in \mathbb{Q}, \alpha_0\sqrt{1+\alpha_0^2} \in \mathbb{Q}$
- $\mathcal{O}(c)$ ist eine semi-rationale CFT $\iff \alpha_0^2 \in \mathbb{Q}, \alpha_0\sqrt{1+\alpha_0^2} \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}$
- $\mathcal{O}(c)$ ist eine generisch nicht rationale CFT $\iff \alpha_0^2 \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}$

Beweis: Es sei der Übersichtlichkeit halber $\alpha_0^2 = x$ gesetzt. Somit ist $\alpha_\pm = \sqrt{x} \pm \sqrt{1+x}$. Die Gewichte (5.1) der degenerierten primären Felder lauten dann

$$
h_{n,m} = -x + \frac{1}{4}\left((2x+1)(n^2+m^2) + 2\sqrt{x(1+x)}(n^2-m^2) - 2nm\right)\,. \tag{5.12}
$$

Die Polynome in n, m vor x und $\sqrt{x(1+x)}$ sind linear unabhängig. Sollen also alle auftretenden Dimensionen rational sein, so müssen sowohl x wie auch $\sqrt{x(1+x)}$ rationale Zahlen sein. Es sei also der Anzatz

$$\sqrt{x(1+x)} = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$$

gemacht, r, s teilerfremde ganze Zahlen. Auflösen nach x ergibt

$$x = -\frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{s}\sqrt{4r^2+s^2}\right).$$

Somit kann x dann und nur dann rational sein, wenn $\sqrt{(2r)^2+s^2} \in \mathbb{Z}_+$ ist. Es sind also Lösungen der diophantischen Gleichung

$$(2r)^2 + s^2 = t^2$$

gesucht – und das sind eben gerade alle *pythagoräischen Zahlentripel* $r = abc$, $s = (a^2 - b^2)$, $t = (a^2 + b^2)$, $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$. Da r, s als teilerfremd angenommen wurden, ist $c = 1$; a, b teilerfremd, sind also alle fundamentalen pythagoräischen Zahlentripel die gesuchten Lösungen. Einsetzen in x ergibt für die zentrale Ladung

$$c = 13 + 12\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = 1 + \frac{(a^2-b^2) \pm (a^2+b^2)}{a^2-b^2}.$$

Mit dem Variablenwechsel $p = a + b$, $q = a - b$ geht dies in die bekannte Form der minimalen Serie über, wobei auch hier wieder p, q teilerfremd sein sollen, korrespondierend zu allen strikt teilerfremden fundamentalen pythagoräischen Zahlentripeln, da ein gemeinsamer Teiler die zentrale Ladung nicht ändert,

$$c = 1 - 6\frac{(p-q)^2}{pq}\,,\ p, q \in \mathbb{Z} - \{0\}\,,\ \mathrm{ggT}(p,q) = 1\,. \tag{5.13}$$

Die minimalen Modelle enthalten dann die endlich vielen Felder der durch Einsetzen in (5.12) sofort zu bestimmenden Dimensionen

$$h_{r,s} = \frac{(pr-qs)^2 - (p-q)^2}{4pq}\,,\ 1 \le r \le q-1\,,\ 1 \le s \le p-1\,, \tag{5.13'}$$

Felder mit Dimensionen $h_{r,s}$ für andere Werte von r und s verschwinden auf den BRST-Räumen. Damit sind alle möglichen RCFTs erfaßt, die von degenerierten Modellen herrühren.
Die semi-rationalen Theorien sollen immerhin noch unendlich viele Felder rationaler Dimensionen enthalten. Dies ist dadurch zu erreichen, daß entweder x oder $\sqrt{x(1+x)}$ rational ist, und das Polynom in n, m vor dem jeweils anderen Term verschwindet. Das Polynom vor x lautet $\frac{1}{2}(n^2 + m^2) - 1$ und hat daher nur die einzige Nullstelle $n = m = 1$, so daß diese Möglichkeit ausscheidet. Hingegen hat das Polynom vor $\sqrt{x(1+x)}$, welches $\frac{1}{2}(n^2 - m^2)$ lautet, unendlich viele Nullstellen $n = \pm m$. Für $x \in \mathbb{Q}$ erhalten wir also ebenfalls eine rationale zentrale Ladung c und die rationalen Dimensionen

$$\begin{aligned} h_{n,n} &= x(n^2-1) \\ h_{n,-n} &= x(n^2-1) + n^2\,. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Polynome sind alle anderen Fälle generisch nicht rational, i.e. haben höchstens endlich viele rationale Punkte. ∎
Nach den im ersten Abschnitt gemachten Bemerkungen über die Fusionsregeln ist die Operatoralgebra der Felder der Dimensionen $h_{n,m}$, $n, m \ge 1$ bereits abgeschlossen, alle anderen Felder verschwinden auf den BRST-Räumen. Man erkennt nun leicht aus (5.12), daß für $1 < c < 25$ die Dimensionen im allgemeinen komplex und für $c \ge 25$ für hinreichend große n, m negativ

sind, daß also die zugehörigen Felder unphysikalisch sind. Diese degenerierten Modelle beschreiben also wohl keine physikalisch relevanten CFTs. Es sei noch bemerkt, daß in der hier verwendeten Terminologie der Fall $c = 1$ im Gegensatz zu vielen anderen Autoren als minimales Modell erscheint, da man diese zentrale Ladung für $p = q = 1$ aus (5.13) erhalten kann. Auch schließen die eben gemachten Bemerkungen natürlich keineswegs die Existenz physikalisch sinnvoller Theorien für $c > 1$ aus, sondern besagen lediglich, daß es sich bei solchen nicht um degenerierte Modelle der hier behandelten Art handeln kann.

5.3. Neue Serien von $\mathcal{W}$ Algebren

Alle im vierten Kapitel gefundenen Serien von $\mathcal{W}$-Algebren – außer derjenigen aus Tabelle 4.5 – konnten aus minimalen Modellen heraus interpretiert werden. In diesem Abschnitt wird nun auch den Serien aus Tabelle 4.5 eine Berechtigung gegeben, allerdings im Lichte von semi-rationalen Theorien. Es wird sich dabei herausstellen, daß sich diese Theorien für eine spezielle Serie von c-Werten ungeheuer vereinfachen, und vor allem ihre BRST-Struktur nahezu trivial wird.

Lemma 5.3. Sei $\alpha_0^2 \in \mathbb{Z}_+/2$. Dann sind alle rationalen Dimensionen (5.14) der zu $c = 1 - 24\alpha_0^2$ gehörenden semi-rationalen Operatoralgebra $\mathcal{O}(c)$ ebenfalls aus $\mathbb{Z}_+/2$. Darüberhinaus existieren Felder der Dimensionen $h_{n,n}$, die alle lokal zueinander sind, das heißt, ihre Phasen sind alle $\varepsilon_{\alpha_{n,n}\alpha_{m,m}} = \pm 1$.

Beweis: Die erste Aussage ist nach (5.14) trivial. Bei der zweiten ist der zentrale Punkt der, daß zwei der Felder überhaupt bis auf eine Phase kommutieren. In Wirklichkeit hat man auf den Feldern aus $\mathcal{O}(c)$ Darstellungen von Zopfgruppen [43], was hauptsächlich daran liegt, daß Verkettungen solcher Operatoren mehrdeutig sind, man im allgemeinen Summationen der Form

$$\sum_{l',l} V^{(k'k)}_{(i'i)(l'l)} V^{(l'l)}_{(n'n)(m'm)}$$

für das Produkt abgeschirmter Vertexoperatoren gegebener konformer Dimensionen hat, die $\mathcal{F}_{m'm}$ nach $\mathcal{F}_{k'k}$ abbilden. In dem hier vorliegenden Fall gilt aber

$$\alpha_{m,m} + \alpha_{n,n} = (2 - m - n)\alpha_0 = \alpha_{m+n-1,m+n-1}\ ,$$

so daß die Operatoren in (5.7) gar keine Schirmladungen benötigen, $r = r' = 0$, und auch die Phase in (5.7′) verschwindet. In der Tat sind die “nackten” Operatoren $\chi_{\alpha_{n,n}}(u)$ nach (5.9) bereits BRST-invariant, man hat das bis auf eine Phase kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}_{m,m} & \xrightarrow{\chi_{\alpha_{n,n}}} & \mathcal{F}_{m+n-1,m+n-1} \\
Q_+^{(m)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow Q_+^{(m+n-1)} \\
\mathcal{F}_{m,-m} & \xrightarrow{e^{i\theta}\chi_{\alpha_{n,n}} Q_+^{(n-1)}} & \mathcal{F}_{m+n-1,1-m-n}\ .
\end{array}$$

Dieses garantiert, daß das Parafeld $\chi_{\alpha_{n,n}}(u)$ den BRST-Raum in sich abbildet, genauer

$$\chi_{\alpha_{n,n}}(u)\left(\ker Q^{[m]}\right) \ \subset\ \ker Q^{[m+n-1]}\ .$$

Dabei wurde für die Einschränkung von $Q_+^{(m)}$ auf den Raum $\mathcal{F}_{m,m}$ einfach $Q^{[m]}$ geschrieben. Diese “nackten” Vertexoperatoren sind in der Tat lokal zueinander, was sofort aus den bereits im zweiten Kapitel bestimmten Eigenschaften von Parafeldern, insbesondere (2.69),

$$\varepsilon_{\alpha_{n,n}\alpha_{m,m}} \ =\ e^{2\pi i \alpha_{n,n}\alpha_{m,m}} \ =\ e^{2\pi i(1-n)(1-m)\alpha_0^2}\ ,$$

und Definition 2.2 folgt. ■

Es liegt nun in Anbetracht der allgemeinen Resultate des zweiten Kapitels die Vermutung nahe, daß die OPE zweier solcher Felder rationaler Dimensionen auch wieder nur Felder rationaler Dimensionen enthalten sollte, insbesondere in der Situation des obigen Lemmas, wo Lokalität vorliegt, und daher mit Satz 2.8 eine rigorose Definition der OPE gegeben ist, die sicherstellt, daß alle in der Entwicklung auftretenden Felder ebenfalls wieder lokal sind. Diese Vermutung begründet sich aus den Tatsachen, daß zum einen die konformen Familien zu primären Feldern irrationaler Dimension niemals rationaldimensionale sekundäre Felder enthalten können, da die L_0-Graduierung, die ganzzahlig ist, innerhalb einer solchen konformen Familie respektiert wird, und daß zum anderen die Monodromie-Eigenschaften der aus den konformen Wardidentitäten folgenden Differentialgleichungen [6] vermutlich irreparabel pathologisch würden, falls in ihnen irrationale konforme Gewichte aufträten.
Sieht man einmal davon ab, daß für nicht lokale Felder keine mathematisch konsistente Definition der OPE und daher, Abschnitt 2.6 folgend, auch keine der $\mathcal{N}$-Produkte existiert, so ist nicht auszuschließen, daß man auch aus Feldern irrationaler Dimension rationale bilden kann. Im hier vorliegenden Fall einer semi-rationalen Theorie hätten beispielsweise die Felder $\mathcal{N}(\chi_{\alpha_{p,q}}, \chi_{\alpha_{q,p}})$ die rationalen Dimensionen $h_{p,q} + h_{q,p} = (p^2 + q^2 - 2)\alpha_0^2 + 2(p-q)^2$, sofern sie mathematisch konsistent zu definieren wären. Allerdings wären diese Felder, auch wenn ihre Gewichte aus $\mathbb{Z}_+/2$ stammten, keineswegs lokal.
In der Situation des Lemmas 5.3 können aber die konformen Familien zu den Gewichten $h_{n',n}$, $n' \neq n$, sowieso nicht zu der Algebra der lokalen Felder, die gerade auf der Diagonalen $n' = n$ liegen, beitragen, da die Lokalität garantiert, daß jedes Feld einen Raum mit rationalem Tiefstgewichtszustand in einen ebensolchen derart abbildet, daß sich die Tiefstgewichte um eine ganze (oder halbe) Zahl unterscheiden (Proposition 2.5). Der Hilbertraum hat daher die Struktur

$$\mathcal{H} = \coprod_{n=0}^{\infty} \ker Q^{[n]} .$$

Mit diesem Argument der Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra folgt dann auch, daß in der Situation des Lemmas 5.3 die lokalen Felder ein lokales System

$$\mathcal{V} = \left\{ V^{(ll)}_{(nn)(mm)}(u) = \chi_{\alpha_{n,n}}(u)\big|_{Q^{[m]}} \,\middle|\, l,m,n \geq 1,\ l = m+n-1 \right\}$$

bilden, i.e. eine abgeschlossene, assoziative Algebra bezüglich des Operatorproduktes: Zunächst ist klar, daß der auf einem Tiefstgewichtsmodul wirkende Kommutator zweier solcher Felder, $[\chi_{\alpha_{n,n}}, \chi_{\alpha_{m,m}}]\,|l,l\rangle$, wieder nur auf Tiefstgewichtsmodulen operierende, lokale Felder ergeben kann, die daher ebenfalls "nackte" Vertexoperatoren aus $\mathcal{V}$ sein müssen. Denn sollte ein abgeschirmter Vertexoperator lokal zu den nackten sein, so muß er schon mit einer Linearkombination dieser identisch sein, da die Räume $\ker Q^{[n]}, n \in \mathbb{Z}_+$ bereits vollständig durch Ableitungen und $\mathcal{N}$-Produkte mit dem Virasorofeld aus $\chi_{\alpha_{n,n}}|\mathbf{0}\rangle$ erzeugt werden, und es nicht mehr Felder als Zustände geben kann. In der Tat zeigt die BRST-Invarianz, daß die in (5.7) mit $r = r'$ abgeschirmten Operatoren proportional zu den unabgeschirmten sein müssen. Es gilt nämlich $Q_-^{(r)} Q_+^{(r)} \chi_{\alpha_{n,n}}(u) = e^{4\pi i r \alpha_{n,n}\alpha_0} \chi_{\alpha_{n,n}}(u) Q_-^{(r)} Q_+^{(r)}$ und $\alpha_{n,n}\alpha_0 = 2(1-n)\alpha_0^2 \in \mathbb{Z}$, was bedeutet, daß die Schirmladungen (im ganzen) mit den Parafeldern vertauschen, so daß die symmetrisch, d.h. mit $r = r'$ Ladungen, abgeschirmten Operatoren untereinander und relativ zu den nackten lokal sind.
Damit ist die Abgeschloßenheit der Algebra gezeigt. Die Assoziativität ist unproblematisch, da nach Lemma 5.3 die Phasen ε entweder alle $+1$ oder alle -1 sind, je nach dem α_0^2 ganz- oder halbzahlig ist. Die Lokalität hat somit zu einer sehr starken Vereinfachung der BRST-Struktur geführt, da bereits die Felder ohne Schirmladungen eine vollständige Algebra bilden. In diesem Fall reduzieren

sich auch die Fusionsregeln zu

$$|n-m|+1 \leq l \leq n+m-1\,,$$
$$n+m+l+1 \equiv 0 \bmod 2\,,$$

i.e. in der symbolischen Schreibweise des vierten Kapitels, Gleichung (4.26), der Inhalt an konformen Familien in einer OPE,

$$[h_{n,n}] \times [h_{m,m}] = \sum_{\substack{|n-m|+1\leq l\leq m+n+1 \\ m+n+l+1\equiv 0 \bmod 2}} \mathcal{M}^{(ll)}_{(nn)(mm)}\,[h_{l,l}]\,, \tag{5.15}$$

wobei die $\mathcal{M}^{(ll)}_{(nn)(mm)}$ nicht-negative ganze Zahlen sind, die gewisse Vielfachheiten symbolisieren [80,30,75], hier aber nicht weiter von Belang sind. (Diese symbolische Schreibweise führt zu der sogenannten *Fusionsalgebra*, die sowohl assoziativ wie kommuatativ ist, und wahrscheinlich eine äquivalente Beschreibung von CFTs darstellt, siehe [30,75,80].) Mit ähnlichen Argumenten wie in Abschnitt 4.3, soll nun untersucht werden, ob das lokale System $\mathcal{V}$ abgeschlossene, endlich erzeugte Operatoralgebren enthält, die dann automatisch nach Definition 2.14 $\mathcal{W}$-Algebren darstellen. Dabei ist $\mathcal{V}$ selbst eine unendlich erzeugte $\mathcal{W}$-Algebra, $\mathcal{W}\left(\{(r^2-1)\alpha_0^2|r \in \mathbb{Z}_+\}\right)$.

Satz 5.4. Nicht minimale$\mathcal{W}$Algebren. Sei $\alpha_0^2 \in \mathbb{Z}_+/2$. Dann existieren die unendlich erzeugten $\mathcal{W}$-Algebren

$$\mathcal{V} \;=\; \mathcal{W}\left(2,\left\{(r^2-1)\alpha_0^2|r \in \mathbb{Z}_+ + 2\right\}\right) \;\supset\; \mathcal{W}\left(2,\left\{(r^2-1)\alpha_0^2|r \in 2\mathbb{Z}_+ + 3\right\}\right)$$

sowie ihre abgeschlossenen Unter-$\mathcal{W}$-Algebren

$$\mathcal{W}(2,3\alpha_0^2)\,,$$
$$\mathcal{W}(2,3\alpha_0^2,8\alpha_0^2) \;\supset\; \mathcal{W}(2,8\alpha_0^2)\,,$$
$$\mathcal{W}(2,3\alpha_0^2,8\alpha_0^2,24\alpha_0^2) \;\supset\; \mathcal{W}(2,8\alpha_0^2,24\alpha_0^2)$$

alle für $c = 1-24\alpha_0^2$.

Beweis: Es bleibt die Abgeschlossenheit der Unteralgebren zu zeigen. Die Inklusionen ergeben sich aus der Modulo-Bedingung der Fusionsregeln (5.15), derentwegen die Felder mit $h_{r,r}$ zu ungeradem r bereits eine in sich abgeschlossene Unteralgebra bilden. Die anderen Unteralgebren ergeben sich aus Dimensionsbetrachtungen, da für $\chi_{n,n}$ und $\chi_{m,m}$ aus einer der mutmaßlichen Unter-$\mathcal{W}$-Algebren des Satzes die nach den Fusionsregeln erlaubten Felder $\chi_{l,l}$ höherer Dimensionen den Ausdruck $h_{n,n}+h_{m,m}-h_{l,l} < 1$ werden lassen, also nicht im Kommutator der ersteren beiden auftreten können. Beispielsweise könnte das Fusionieren von $\chi_{3,3}$ mit sich selbst noch das Feld $\chi_{5,5}$ liefern, jedoch ist $h_{5,5} = 24\alpha_0^2 > 2h_{3,3}-1 = 2\cdot 8\alpha_0^2-1$ et cetera. Daher kann auch bei den in der letzten Zeile des Satzes aufgeführten $\mathcal{W}$-Algebren das Feld der Dimension $15\alpha_0^2$ nicht hinzugenommen werden, da $h_{4,4}+h_{5,5}-1 > h_{6,6} = 35\alpha_0^2$ ist, so daß diese Algebra nicht schließt. ∎

Man beachte, daß damit insbesondere alle $\mathcal{W}$-Algebren aus Tabelle 4.5 erklärt werden. Alle hier gemachten Betrachtungen sind übrigens im Sinne der in den ersten beiden Abschnitten eingeführten BRST-invarianten Vertexoperatoren und deren irreduziblen BRST-Virasoromodule zu verstehen, da nur auf letzteren die restlichen Felder rationaler Dimensionen identisch verschwinden. Da hier nicht minimale Modelle vorliegen, hat man nach Feigin und Fuchs [40,41] nur einen singulären Zustand in jedem Tiefstgewichtsmodul $\mathcal{F}_{n,n}$ und keinen in den Tiefstgewichtsmodulen $\mathcal{F}_{n,-n}$, jeweils $n \geq 1$. Dadurch war die BRST-Struktur wesentlich einfacher zu bestimmen, die physikalisch relevanten Module enthielten jeweils genau einen invarianten Untermodul, den man herausteilte, während im minimalen Fall die kurze Sequenz (5.10) zu der nicht trivialen langen Sequenz (5.10′) wurde, die eine unendliche Einbettung von Virasoromodulen ineinander anzeigte. Dieser

Unterschied beruht darauf, daß hier jeder Tiefstgewichtsmodul $\mathcal{F}_{n',n}$, $n', n \geq 1$ zwei und damit unendlich viele singuläre Zustände enthält [40,41].

5.4. Weitere Indizien: Die $\mathcal{W}(2,3/2,4)$

Zunächst stehen die hier aufgestellten Fusionsregeln in völligem Einklang mit der Tatsache, daß für die in Tabelle 4.5 zu $c = 1 - 8\delta$ angegebenen $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren C_{WW}^{W} verschwindet, nicht hingegen für die beiden untersten dort aufgeführten Algebren $\mathcal{W}(2,4)$ bei $c = -11$ und $\mathcal{W}(2,8)$ bei $c = -23$. Bei diesen beiden Algebren ist allerdings $(C_{WW}^{W})^2$ negativ, was an sich im Widerspruch zu Satz 2.13 steht, es sei denn, das zusätzliche Feld ist in Wirklichkeit nicht einfach. Dies scheint eine plausibele Möglichkeit zu sein, wenn man bedenkt, daß beide Fälle Unteralgebren sind: $\mathcal{W}(2,4) \subset \mathcal{W}(2,\frac{3}{2},4)$ und $\mathcal{W}(2,8) \subset \mathcal{W}(2,3,8)$, so daß das Feld der Dimension 4 bzw. 8 eine primäre Linearkombination von $\mathcal{N}$-Produkten sein könnte, in der insbesondere im ersten Falle $\mathcal{N}(W,\partial W)$, im zweiten $\mathcal{N}(W,\partial^2 W)$ und $\mathcal{N}(\mathcal{N}(W,W),L)$ auftreten sollten.
Für die $\mathcal{W}(2,\frac{3}{2},4)$ kann diese Vermutung bewiesen werden. Zunächst stellt man fest, daß diese Algebra die $\mathcal{W}(2,\frac{3}{2})$ als Unteralgebra hat, die nichts anderes als die wohlbekannte Super-Virasoro-Algebra ist [57,9], das Analogon der Virasoro-Algebra für einen Raum mit einer zusätzlichen supersymmetrischen (Grassmann-) Variablen [-13,-6]. Die Vertauschungsregeln dieses neuen, Virasoro-primären, üblicherweise mit G bezeichneten, Feldes lauten

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{c}{3}\left(r^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0}\,, \quad r,s \in \mathbb{Z} + \tfrac{1}{2}\,, \tag{5.16}$$

die dadurch erzeugte Algebra aus L und G ist für alle c konsistent. Sei nun vorausgesetzt, das Feld W der Dimension sei einfach und primär. Man betrachte dann die Jakobi-Identität $[[G,G],W] +$ *zyklisch*. Unter Fortlassen aller Strukturkonstanten und Polynome ergeben sich in Form von konformen Familien notiert die Beiträge (bei dieser Kurznotation wird nicht zwischen Kommutatoren und Antikommutatoren unterschieden)

$$\begin{aligned} [[G,G],W] &= [L,W] &= [W]\,, \\ [[G,W],G] &= [G,G] &= [L]\,, \\ [[W,G],G] &= [G,G] &= [L]\,. \end{aligned}$$

Die erste Zeile folgt aus (5.16) und Primarität von W, die beiden weiteren aus den Eigenschaften der Strukturkonstanten, nach denen im Kommutator eines Feldes halbzahliger Dimension mit einem ganzzahliger nur wieder fermionische auftreten können, welche in der hier betrachteten Algebra allein aus der konformen Familie von G stammen können. Man überzeugt sich sofort davon, daß die erste Zeile nicht verschwindet, so daß diese Jakobi-Identität schlicht unerfüllbar ist.
Man muß also eine der Voraussetzungen an W fallenlassen, um diese Jakobi-Identität doch noch zum Verschwinden bringen zu können. Sei also W nicht mehr als einfach angenommen. Dazu betrachte man die durch L und G generierte $\mathcal{W}$-Algebra. Diese zerfällt in einen fermionischen und einen bosonischen Sektor, die jeweils von halbzahlig bzw. ganzzahlig dimensionalen $\mathcal{N}$-Produkten aufgespannt werden. Der bosonische Sektor stellt dabei eine invariante Unteralgebra dar, da der Kommutator zweier Bosonen wieder nur Bosonen liefert, die allerdings nicht allein von einfachen Feldern generiert wird (das wäre allein L), sondern auch von Feldern, wie $\mathcal{N}(G,\partial G)$. Soll nun im bosonischen Sektor ein primäres Feld W existieren, muß es eine Linearkombination aus quasiprimären Feldern einer Dimension sein derart, daß alle Strukturkonstanten C_{WL}^{X} für bosonische Felder X mit $h(X) < h(W)$ verschwinden. (Am Ende von Abschnitt 3.1 wurde der Fall $h(X) \geq h(W)$ bereits besprochen, allein C_{LW}^{W} ist von Null verschieden.) Durch Abzählen der Felder der gewünschten Dimension $h(W)$ und derjenigen kleinerer Dimension bekommt man die

Anzahl der Variablen, aus denen das primäre Feld zusammengesetz werden könnte, und die Zahl der zu erfüllenden Bedingungen. Ein primäres Feld kann man also offensichtlich nur dann konstruieren, wenn die erstere Anzahl mindestens so groß wie die zweite ist. Man erkennt leicht mit Hilfe der Sätze 3.7 und 3.8, daß im hier vorliegenden Fall die Partitionsfunktion der quasiprimären Felder die Entwicklung

$$\begin{aligned}\Pi^{(L)}_{|\mathbf{0}\rangle}(q)\Pi^{(G)}_{|\mathbf{0}\rangle}q \;=\;& \\ 1 \quad & - q + q^{3/2} + q^2 + q^{7/2} + 2q^4 + q^{9/2} + 2q^{11/2} + 4q^6 \\ & + 2q^{13/2} + q^7 + 5q^{15/2} + 7q^8 + 4q^{17/2} + 4q^9 + 9q^{19/2} + 12q^{10} + \ldots\end{aligned}$$

hat, daß also ohne weiteres primäre Felder der Dimensionen 4 und 6 zu konstruieren sind (für 8 geht es bereits nicht mehr). In der Tat wurde ja in Abschnitt 4.2 auch die $\mathcal{W}(2,4,6)$ konstruiert, und eine ihrer beiden unabhängigen Lösungen mit dem bosonischen Sektor der $\mathcal{W}(2,\frac{3}{2})$ in Verbindung gebracht. Da diese primären Felder nun aus L- und G-Feldern zusammengesetzt sind, sind auch die Jakobi-Identitäten mit L und G trivialerweise erfüllt, da die Super-Virasoro-Algebra für jedes c existiert. Die Auflistung (4.24) der Strukturkonstanten der $\mathcal{W}(2,4,6)$ erzählt einem nun aber, daß für deren ersten Lösungssatz bei $c = -11$ ein Nullzustand der Dimension 6 vorliegen muß, so daß kein primäres Feld V dieser Dimension mehr konstruiert werden kann, währenddessen ein primäres Feld U der Dimension 4 existiert, dessen Strukturkonstante C_{UU}^{V} erfreulicherweise für $c = -11$ verschwindet. Für diesen c-Wert entartet die $\mathcal{W}(2,4,6)$ zu einer $\mathcal{W}(2,4)$, da der bosonische Sektor der Super-Virasoro-Algebra einen singulären Zustand enthält, so daß ein invarianter Untermodul herausgeteilt werden kann, der unter anderem wohl auch einen Zustand vom Gewichte 6 entfernt. Damit ist die Existenz der $\mathcal{W}(2,\frac{3}{2},4)$ für $c = -11$ nachgewiesen.
Es ist übrigens kein Widerspruch, daß in (4.24) die Strukturkonstante C_{UU}^{U} aus der $\mathcal{W}(2,4,6)$ im allgemeinen nicht den selben Wert wie die Strukturkonstante C_{WW}^{W} der $\mathcal{W}(2,4)$ in (4.9′) annimmt. Nur wenn die $\mathcal{W}(2,4,6)$ eine $\mathcal{W}(2,4)$ als Unteralgebra enthält, sollte Übereinstimmung vorliegen, was für $c = -11$, $c = \frac{-11}{14}$ und $c = 1$ der Fall ist.

5.5. Darstellungen der $\mathcal{W}(2,9/2)$

Eine Darstellungstheorie für die $\mathcal{W}$-Algebren existiert bis jetzt nur in Ansätzen und wurde bis jetzt auch nur am Rande erwähnt [78,79,81,82]. Ähnlich wie bei der Virasoro-Algerbra möchte man Tiefstgewichtsdarstellungen studieren, wobei die Gewichte die simultanen Eigenwerte der Tiefstgewichtszustände bezüglich der Cartan-Unteralgebra von $\mathcal{W}$ sind. Bei der Virasoro-Algebra besteht die Cartan-Unteralgebra allein aus L_0, bei den $\mathcal{W}$-Algebren kommen noch die Nullmoden der zusätzlichen Generatoren hinzu. Für fermionische Generatoren tritt hier allerdings eine besondere Situation ein, da man die Wahl zwischen periodischen und anitperiodischen Randbedingungen hat. Jene werden durch Fouriermoden ganzahliger, diese durch eine halbzahliger Indizierung beschrieben. Dadurch zerfällt die Theorie in zwei disjunkte Teile, den *Ramond-Sektor* und den *Neveu-Schwarz-Sektor*, und dadurch gibt es im antiperiodischen Neveu-Schwarz-Sektor – der auch allen Rechnungen des vierten Kapitels zugrunde lag – kein weiteres Element in der Cartan-Unteralgebra, so daß man eine zu derjenigen der Virasoro-Algebra analoge Darstellungstheorie erwartet. Im periodischen Fall hingegen erweitert sich die Cartan-Unteralgebra zunächst um die Nullmoden der fermionsichen Generatoren. Andererseits ist das Gewicht bezüglich eines solchen fermionischen Generators W_0 nicht ganz unabhängig, da $W_0 W_0 = \frac{1}{2}\{W_0, W_0\}$ nach Satz 2.13 eine Linearkombination allein in den Nullmoden bosonischer Felder sein muß, bei Algebren mit nur einem zusätzlichen fermionischen Generator also eine Summe von Monomen in Moden des Virasorofeldes L.

Das Auftreten fermionischer Generatoren legt nahe, für die Vertexoperatorkonstruktion dieser Algebren statt Strömen Fermionen zu verwenden,

$$\{\psi_r^a, \psi_s^b\} = \delta^{ab}\delta_{r+s,0}\,, \; 1 \le a, b \le d\,.$$

Dann ist das Vakuum im Neveu-Schwarz-Sektor nicht degeneriert, dahingegen es im Ramond-Sektor eine Darstellung der Clifford-Algebra der ψ_0^a formt. In dieser Situation reduziert sich also die Cartan-Unteralgebra auf die direkte Summe von L_0 und einer Clifford-Algebra, so daß die Behandlung der Algebren vom Ramond-Typus bis auf die Entartung des Vakuums äquivalent zu derjenigen des Neveu-Schwarz-Typus ist. Insbesondere werden die Tiefstgewichtsdarstellungen weiterhin hinreichend allein durch das konforme L_0-Gewicht h bestimmt.
Als Beispiel diene hier die Super-Virasoro-Algebra $\mathcal{W}(2, \frac{3}{2})$. Auf völlig zum Studium der Virasoro-Algebra analoge Weise [57] erhält man auch hier aus einer Kac-Determinanten degenerierte Modelle und eine minimale Serie

$$\begin{aligned} c &= \frac{3}{2}\left(1 - 2\frac{(p-q)^2}{pq}\right)\,, \\ h_{r,s}(c) &= \frac{(pr-qs)^2 - (p-q)^2}{8pq} + \frac{\varepsilon}{8}\,, \; 1 \le r \le q-1\,, \; 1 \le s \le p-1\,, \end{aligned}$$

mit der zusätzlichen Bedingung $r - s \equiv 2\varepsilon \bmod 2$, wobei $\varepsilon = 0$ im Neveu-Schwarz-Sektor und $\varepsilon = \frac{1}{2}$ im Ramond-Sektor ist. (Der Zusatzterm in ε rührt von der Definition des Virasorofeldes als Produkt $\mathcal{N}(\psi, \partial\psi)$ her. Im Ramond-Sektor muß der Nullmode um die Konstante $\frac{\varepsilon}{16}$ korrigiert werden, um die korrekten Vertauschungsrelationen zu erhalten.)
Nach den obigen Erläuterungen darf man also erwarten, vor allem für fermionische $\mathcal{W}(2, \delta)$-Algebren eine einfache Darstellungstheorie zu erhalten. Die Frage ist nun die, wie man die möglichen Darstellungen zu den meist isolierten diskreten c-Werten, für welche die Algebren existieren, bestimmen könnte. Die im folgenden benutzte Methode von R. Varnhagen [78,79] (dort findet sich auch mehr zur Darstellungstheorie an sich) ist zumindest in der Lage, notwendige Bedingungen abzuleiten, also anzugeben, für welche Gewichte h die Algebren höchstens konsistent sein können.

Bei den expliziten Konstruktionen des vierten Kapitels wurden die Jakobi-Identitäten in der Vakuumdarstellung aufgestellt, was zu Bedingungen führte, die quadratisch in den Strukturkonstanten waren (man erinnere sich, daß diese im wesentlichen durch Zwei- und Drei-Punkt-Vakuumerwartungswerte, (2.51) und (2.52), gegeben sind). Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, ist die Assoziativität der Operatoralgebra in der Vakuumdarstellung gesichert. Es zeigt sich aber nun, daß die Vier-Punkt-Funktionen zwischen allgemeinen Tiefstgewichtszuständen $|h\rangle$, $h \neq 0$, im allgemeinen keineswegs assoziativ sind, d.h. unterschiedliche Wege ihrer Berechnung nach Satz 2.13 zu unterschiedlichen Ergebnissen führen können. Somit ergeben sich notwendige Bedingungen an h durch Gleichsetzen der Ausdrücke. Es ist zu vermuten, daß ähnlich wie bei der Prüfung der Jakobi-Identitäten nur eine endliche Zahl unabhängiger Bedingungen existiert, obgleich es natürlich beliebig viele Vier-Punkt-Funktionen gibt.
Ein rechentechnisches Problem dabei ist, daß bei generischem h alle in den Kommutatoren auftretenden Moden von $\mathcal{N}$-Produkten sehr vorsichtig berechnet werden müssen, die Summationen in den naiven NOPs (2.55) dürfen nicht zu früh abgebrochen werden, was in zum Teil gigantischen Ausdrücken resultiert. Daher bewegt sich das erste nicht triviale Beispiel aus Tabelle 4.5, die $\mathcal{W}(2, \frac{9}{2})$, bereits am absoluten Rande der verfügbaren Computerkapazitäten. Die $\mathcal{W}(2, \frac{3}{2})$ und die $\mathcal{W}(2, 3)$ existieren nämlich für alle c- und h-Werte, alle Vier-Punkt-Funktionen sind trivialerweise assoziativ. Um die auftretenden Ausdrücke klein zu halten, wurden jeweils nur die einfachst denkbaren Vier-Punkt-Funkionen der $\mathcal{W}(2, \frac{9}{2})$ betrachtet, i.e.

$$\begin{aligned} &\langle h|W_{-\frac{1}{2}}W_{-\frac{1}{2}}W_{\frac{1}{2}}W_{\frac{1}{2}}|h\rangle\,, \qquad \mathrm{Neveu-Schwarz-Sektor}\,, \\ &\langle h|W_{-1}W_{-1}W_{1}W_{1}|h\rangle\,, \qquad \mathrm{Ramond-Sektor}\,. \end{aligned}$$

Diese Vier-Punkt-Funktionen involvieren gerade die kleinsten Moden, so daß die Erwartungswerte nicht trivial assoziativ sind. Ihre Evaluation kann auf die zwei verschiedenen Weisen

$$\langle h|W_{-n}W_{-n}W_nW_n|h\rangle = \frac{1}{4}\langle h|\{W_{-n},W_{-n}\}\{W_n,W_n\}|h\rangle = \langle h|W_{-n}\{W_{-n},W_n\}W_n|h\rangle\,,$$

mit $n = \frac{1}{2}$, 1, durchgeführt werden, was auf die folgende Bedingung an h in Abhängigkeit von c führt:

$$Z(n) \equiv \frac{1}{4}\langle h|\,[\{W_{-n},W_{-n}\}\,,\{W_n,W_n\}]\,|h\rangle - \langle h|\,\{W_{-n},[\{W_{-n},W_n\}\,,W_n]\}\,|h\rangle = 0\,. \qquad (5.17)$$

(Analog kann man auch für bosonische $\mathcal{W}$-Algebren aus den Vier-Punkt-Funktionen Bedingungen ableiten, die aber im allgemeinen Fall außer h und c auch C_{WW}^{W} und w involvieren, wobei w der Eigenwert des $\mathcal{W}$-Algebra-Tiefstgewichtszustandes bezüglich der Nullmode des primären Feldes ist, d.h. $W_0|h\rangle = w|h\rangle$. Die einfachsten nicht trivialen Vier-Punkt-Funktionen sind im bosonischen Fall von der Form $\langle h|W_{-m}W_{-n}W_nW_m|h\rangle$, $m \neq n$, für die

$$\begin{aligned} 0 &= Z(m,n) \\ &\equiv (\langle h|[W_{-m},W_{-n}]W_nW_m|h\rangle + \langle h|W_{-n}[W_{-m},W_n]W_m|h\rangle + \langle h|W_{-n}W_n[W_{-m},W_m]|h\rangle) \\ &- (\langle h|W_{-m}[W_{-n},W_n]W_m|h\rangle + \langle h|[W_{-m},W_n][W_{-n},W_m]|h\rangle) \end{aligned} \qquad (5.17')$$

die gesuchte Bedingung darstellt.)
Hier interessiert lediglich der nicht minimale Fall $c = -35$, für den $Z(n)$ als Polynom in h vollständig über $\mathbb{Q}$ faktorisiert (im minimalen Fall beobachtet man ein ganz ähnliches Verhalten [78,79]),

$$\begin{aligned} Z(\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{-25}{20860602624}(28h+41)(14h+13)(10h+11)(5h+7)(3h+4)(2h+3)h\,, \\ Z(1) &= \tfrac{-25}{341780113391616}(56h-135)(40h+59)(40h+51)(28h-25)(24h+35)(8h+9)(8h+7)\,. \end{aligned} \qquad (5.18)$$

Die Nullstellen von $Z(n)$ geben also die höchstens erlaubten Tiefstgewichtsdarstellungen für den jeweiligen Sektor an, wobei hier natürlich, wie schon bemerkt, lediglich eine einzige Vier-Punkt-Funktion pro Sektor untersucht werden konnte, nämlich die einfachste nicht triviale.
Wenn eine $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebra für ein c aus der minimalen Serie existiert, so stellt man fest [78,79], daß die möglichen Tiefstgewichte h, die sich durch das Studium von Vier-Punkt-Funktionen ergeben, ganz bestimmte Werte aus (5.13′) sind. Diese sind dadurch charakterisiert, daß es zu jedem von ihnen einen weiteren, größeren Wert in (5.13′), gibt, der sich um eine halbe oder ganze Zahl von ersterem unterscheidet – wobei dieser Sachverhalt im Zusammenhang mit den modulinvarianten Charakteren von Capelli, Itzykson und Zuber steht [25,16,75]. Aus diesem Grunde wurden auch die Tiefstgewichte in (5.18) dahingehend untersucht, inwiefern sie sich in den Dimensionen (5.1) der degenerierten Modelle wiederfinden lassen. Das Ergebnis ist überraschend.
Die folgende Tabelle stellt den Versuch dar, den Ergebnissen eine Struktur zuzuordnen. Daher wurden die beiden Sektoren einander gegenübergestellt. Analog zu der Situation bei den minimalen Modellen finden sich zu den Tiefstgewichten immer weitere, höhere Gewichte degenerierter Familien, so daß die Differenz halb- oder ganzzahlig ist. Im Unterschied zu den minimalen Modellen ergibt sich allerdings immer eine ganze (unendliche) Serie solcher Werte, deren kleinste Mitglieder jeweils aufgeführt sind. Für die Tatsache, daß alle Gewichte durch rationale anstelle ganzer Zahlen aus (5.1) bzw. (5.14) gewonnen werden müssen, existiert leider noch überhaupt keine Erklärung. Die restlichen vier Werte, die sich nicht in dieses Schema einordnen lassen, sind wohl als Artefakte anzusehen. Bei der Bestimmung der Darstellungen für $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren zu minimalen Modellen und kleineren Werten für δ trat dieses Phänomen ebenfalls auf [78,79]. Diese überzähligen, nicht einzuordnenden Werte verschwanden dort allerdings, wenn man die nächst komplizierteren Vier-Punkt-Funktionen betrachtete (zum Beispiel $n = \frac{3}{2}$ in (5.17)). Leider konnte dies für die $\mathcal{W}(2,\frac{9}{2})$

wegen Speicherplatzproblemen nicht mehr durchgeführt werden.

Tabelle 5.1 Die höchstens erlaubten Darstellungen der $\mathcal{W}(2,9/2)$ für c=−35

Neveu − Schwarz − Sektor			Ramond − Sektor		
$h = -\frac{3}{2}$	$= (0,0)$	$h + \frac{3}{2} = (1,1)$	$h = -\frac{35}{24} = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$		$h + 1 = (\frac{5}{6}, \frac{5}{6})$
		$h + 6 = (2,2)$			$h + 2 = (\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$
		$h + \frac{27}{2} = (3,3)$			$h + 5 = (\frac{11}{6}, \frac{11}{6})$
					$h + 7 = (\frac{13}{6}, \frac{13}{6})$
$h = -\frac{4}{3}$	$= (\frac{2}{6}, \frac{2}{6})$	$h + \frac{1}{2} = (\frac{4}{6}, \frac{4}{6})$	$h = -\frac{9}{8} = (\frac{3}{6}, \frac{3}{6})$		$h + 3 = (\frac{9}{6}, \frac{9}{6})$
		$h + \frac{5}{2} = (\frac{8}{6}, \frac{8}{6})$			$h + 9 = (\frac{15}{6}, \frac{15}{6})$
		$h + 4 = (\frac{10}{6}, \frac{10}{6})$			
		$h + 8 = (\frac{14}{6}, \frac{14}{6})$			
$h = 0$	$= (\frac{6}{6}, \frac{6}{6})$	$h + \frac{9}{2} = (2,2)$	$h = -\frac{59}{40} = (\frac{1}{10}, -\frac{1}{10})$		$h + 2 = (\frac{9}{10}, -\frac{9}{10})$
		$h + 12 = (3,3)$			$h + 3 = (\frac{11}{10}, -\frac{11}{10})$
					$h + 9 = (\frac{19}{10}, -\frac{19}{10})$
$h = -\frac{7}{5}$	$= (\frac{2}{10}, -\frac{2}{10})$	$h + \frac{3}{2} = (\frac{8}{10}, -\frac{8}{10})$	$h = -\frac{51}{40} = (\frac{3}{10}, -\frac{3}{10})$		$h + 1 = (\frac{7}{10}, -\frac{7}{10})$
		$h + \frac{7}{2} = (\frac{12}{10}, -\frac{12}{10})$			$h + 4 = (\frac{13}{10}, -\frac{13}{10})$
		$h + 8 = (\frac{18}{10}, -\frac{18}{10})$			$h + 7 = (\frac{17}{10}, -\frac{17}{10})$
$h = -\frac{11}{10}$	$= (\frac{4}{10}, -\frac{4}{10})$	$h + \frac{1}{2} = (\frac{6}{10}, -\frac{6}{10})$	$h = -\frac{7}{8} = (\frac{5}{10}, -\frac{5}{10})$		$h + 5 = (\frac{15}{10}, -\frac{15}{10})$
		$h + 6 = (\frac{16}{10}, -\frac{16}{10})$			$h + 15 = (\frac{25}{10}, -\frac{25}{10})$
$h = -\frac{13}{14}$	$= ?$		$h = \frac{135}{56} = ?$		
$h = -\frac{41}{28}$	$= ?$		$h = \frac{25}{28} = ?$		

Die vermeintliche Struktur in Tabelle 5.1 scheint zu regelmäßig für einen Zufall zu sein. Die h-Werte ergeben sich, wenn auch auf ungewöhnliche Weise, aus den Formeln für die degenerierten Modelle, so daß wohl ein Zusammenhang mit diesen zu vermuten ist. Die endgültige Klärung dieser Frage muß aber späteren Arbeiten vorbehalten bleiben.

VI

Ausblick Und Dank

Mit dieser Arbeit sollte ein Beitrag zu Klassifikation der $\mathcal{W}$-Algebren geleistet werden. Eigenständige Leistungen sind hier die Analyse des Inhaltes einer $\mathcal{W}$-Algebra an quasiprimären Feldern, sowie die Konstruktion einer Basis in diesen Feldern (drittes Kapitel), als auch die Interpretation einer Serie von $\mathcal{W}$-Algebren, die von zwar degenerierten, nicht jedoch minimalen Modellen, herrührt und daher ein Novum darstellt (fünftes Kapitel). Die Konstruktionen zahlreicher $\mathcal{W}$-Algebren und eine ganze Reihe von allgemeinen Resultaten zur Klassifikation des Spezialfalles der $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren entstanden in Zusammenarbeit mit R. Blumenhagen, A. Kliem, W. Nahm, A. Recknagel und R. Varnhagen. Die Summe der in dieser Gruppe erbrachten Ergebnisse ([9,10,11,47,66,78,79] und die vorliegende Arbeit) stellt eine bereits sehr gründliche und wohl nahezu vollständige Klassifikation aller $\mathcal{W}$-Algebren mit zwei Generatoren dar, obwohl einige Beweise noch strenger geführt werden müßten. Der weitere Weg ist dadurch recht genau vorgezeichnet, mögliche Stationen wären:

- Die Darstellungstheorie dieser $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren bzw. der $\mathcal{W}$-Algebren im allgemeinen muß noch vervollständigt werden. Ein zentrales Ziel wäre hier das Ableiten von Determinantenformeln analog zur Kac-Determinante für die Virasoro- oder Super-Virasoro-Algebra. Vermutungen dazu existieren bereits, zum Beispiel bei Watts [81,82].
- Ein noch weniger gut erforschtes Feld ist das der Super-$\mathcal{W}$-Algebren. Hier sollte ähnlich wie bei den gewöhnlichen $\mathcal{W}$-Algebren zunächst durch explizite Konstruktionen eine größere Menge von Daten produziert werden, aus der dann Schlüsse gezogen werden könnten.
- Ein besseres Verständnis der sogenannten Fusionsalgebren würde nicht nur ermöglichen, Argumente über Fusionsregeln zu strengen Beweisen zu vervollständigen, sondern vielleicht auch die Existenz weiterer $\mathcal{W}$-Algebren mit mehr als zwei Generatoren nachzuweisen.
- Die Nebenklassen-Konstruktionen sind noch lange nicht vollständig ausgeschöpft. Hier ergeben

sich Möglichkeiten, $\mathcal{W}$-Algebren auf indirekte Weise über Partitionsfunktionen nachzuweisen. Erste Rechnungen dieser Art finden sich bei Blumenhagen [9,10].

• Die Existenz einiger $\mathcal{W}$-Algebren für bestimmte irrationale c-Werte harrt noch einer Deutung. Ebenso gibt es noch einen rationalen c-Wert, die weder einer minimalen Serie, noch einem degenerierten Modell im Sinne des fünften Kapitels zugeordnet zu sein scheint, den Wert $c = -\frac{1015}{2}$ für die $\mathcal{W}(2,8)$. Allerdings könnte es sich bei letzterem um einen Artefakt handeln, da bis dato für alle $\mathcal{W}(2,h)$-Algebren mit $h \geq 8$ nur notwendige Bedingungen für ihre Existenz abgeleitet werden konnten.

• Auf eher mathematischem Niveau sind ebenfalls viele Strukturen noch im Dunkeln. So ist zum Beispiel die Frage nach der Vollständigkeit der Charaktere für den Fall der unendlichdimensionalen Lie-Algebren noch unbeantwortet. Auch die Klassifikation der modulinvarianten konformen Charaktere ist bis jetzt nur für Spezialfälle geglückt [16,24,25,63,75].

• Eine Frage haben die neuen Erkenntnisse über $\mathcal{W}$-Algebren leider nicht beantworten helfen: Die nach der Klassifikation der (rationalen) konformen Quantenfeldtheorien mit $c > 1$. Alle bis jetzt gefundenen, nicht für generisches c existierenden $\mathcal{W}$-Algebren sind nur für Werte $c < 1$ konsistent, es wurde bis jetzt keine generisch existierende $\mathcal{W}$-Algebra entdeckt, die nicht in die Casimir-Vermutung oder deren supersymmetrische Verallgemeinerung paßt. (Es sei hier allerdings eine sehr gewagte Vermutung erlaubt: Die im fünften Kapitel konstruierten $\mathcal{W}$-Algebren treten bei den speziellen Werten $c = 1 - 24\frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ auf. Dolan et. al. [31,32] haben andererseits die besondere Rolle von CFTs aufgezeigt, die über eine Vertexoperatorkonstruktion aus Gittern der Dimension $24\frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ zu der zentralen Ladung $c = 24\frac{n}{2}$ gewonnen werden können und modulinvariante Zustandssummen besitzen. Vielleicht gibt es einen tiefen Zusammenhang zwischen degenerierten Modellen für $c < 1$ und nicht degenerierten Theorien für $c > 1$. Um in dieser Richtung Fortschritte erzielen zu können, müßte der Zusammenhang zwischen CFTs und Vertexoperatoralgebren, insbesondere auch für den nicht lokalen Fall, besser verstanden werden.) Die CFTs mit $c > 1$ bleiben also nach wie vor ein offenes Problem.

Am Schluß dieser Arbeit möchte ich mich zum einen für die über eine gute Zusammenarbeit weit hinausgehende Freundschaft bei R. Blumenhagen, A. Kliem, A. Recknagel und R. Varnhagen, zum anderen für die stets exzellente und motivierende Betreuung und Zusammenarbeit bei meinem Diplomvater W. Nahm bedanken. Mein besonderer Dank aber gilt meinen Eltern, nicht nur dafür, mir dies Studium ermöglicht zu haben, sondern auch für die Freude, mit der sie stets meine Faszination für Physik teilten.

VII

Literatur

Die hier angegebene Literatur wurde auch unter dem Gesichtspunkt ausgewählt, dem Leser die Gelegenheit zu geben, sich einen umfassenderen Überblick auf dem Gebiet der CFT, besonders ihres Zusammenhangs mit $\mathcal{W}$-Algebren, zu verschaffen, ohne natürlich einen Anspruch auf Vollständigkeit erheben zu wollen. Negative Nummern beziehen sich auf Bücher und Reprintsammlungen, positive Nummern auf Preprints und Veröffentlichungen. Bei letzteren kann nicht ausgeschlossen werden, daß zitierte Preprints inzwischen veröffentlicht worden sind. Die am Ende mit römischen Ziffern aufgeführten Referenzen sind experimentelle Arbeiten.

[-16] I. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Appl. Math. Vol. **134**, Academic Press (1986)

[-15] J. Glimm, A. Jaffe, *Quantum Physics, A Functional Integral Point of View,* 2^{nd} *edition*, Springer Verlag (1987)

[-14] P. Goddard, D. Olive (Hrsg.), *Kac-Moody and Virasoro Algebras, a Reprint Volume for Physicists*, Adv. Series Math. Phys. Vol. **3**, World Scientific (1988)

[-13] M. Green, J. Schwarz, E. Witten, *Superstring theory I & II*, Cambridge University Press (1987)

[-12] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Pure and Appl. Math. Vol. **80**, Academic Press (1978)

[-11] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer Verlag (1972)

[-10] C. Itzykson, H. Saleur, J.-B. Zuber (Hrsg.), *Conformal Invariance and Applications to Statistical Mechanics*, World Scientific (1988)

[-9] V.G. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras, an Introduction*, Progress in Math. Vol. **44**, Birkhäuser Verlag (1983)

[-8] V.G. Kac (Hrsg.), *Infinit Dimensional Groups with Applications*, Math. Scienc. Research Institute Publ. Vol. **4**, Springer Verlag (1985)

[-7] V.G. Kac, A.K. Raina, *Bombay Lectures on Highest Weight Representations of Infinite*

Dimensional Lie Algebras, Adv. Series Math. Phys. Vol. **2**, World Scientific (1987)

[-6] M. Kaku, *Introduction to Superstrings*, Springer Verlag (1988)

[-5] J. Lepowsky, S. Mandelstam, I.M. Singer (Hrsg.), *Vertex Operators in Mathematics and Physics, Conf. Proc.*, Math. Scienc. Research Institute Publ. Vol. **3**, Springer Verlag (1985)

[-4] W. Nahm, *Conformal Quantum Field Theory in Two Dimensions*, World Scientific (erscheint demnächst)

[-3] A. Pressley, G. Segal, *Loop Groups*, Oxford Math. Monographs, Clarendon Press (1986)

[-2] R.F. Streater, A.S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and all That*, W.A. Benjamin, Inc. (1964)

[-1] B.G. Wybourne, *Classical Groups for Physicists*, John Wiley & Sons (1974)

[0] ΣΟΦΟΚΛΗΣ, *Αντίγονη*, A.C. Pearson, Editio Oxoniensis, Sophoclis Fabulae, Oxford (1957)

[1] L. Alvarez-Gaumé, C. Gomez, G. Sierra, *Topics in Conformal Field Theory*, in L. Brink, *Physics and Mathematics of Strings*, (1990) 16

[2] F.A. Bais, P. Bouwknegt, M. Surridge, K. Schoutens, *Extensions of the Virasoro Algebra Constructed from Kac-Moody Algebras Using Higher Order Casimir Invariants*, Nucl. Phys. **B304** (1988) 348

[3] F.A. Bais, P. Bouwknegt, M. Surridge, K. Schoutens, *Coset Construction for Extended Virasoro Algebras*, Nucl. Phys. **B304** (1988) 371

[4] J. Balog, L. Fehér, P. Forgács, L. O'Raifeartaigh, A. Wipf, *Toda Theory and $\mathcal{W}$-Algebra from a Gauged WZNW Point of View*, Ann. Phys. (N.Y.) **203** (1990) 76

[5] J. Balog, L. Fehér, P. Forgács, L. O'Raifeartaigh, A. Wipf, *Kac-Moody Realization of $\mathcal{W}$-Algebras*, Phys. Lett. **B244** (1990) 435

[6] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, *Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory*, Nucl. Phys. **B241** (1984) 333

[7] D. Bernard, G. Felder, *Fock Representations and BRST Cohomology in SL(2) Current Algebra*, Comm. Math. Phys. **127** (1990) 145

[8] A. Bilal, J.-L. Gervais, *Systematic Construction of Conformal Theories with Higher-Spin Virasoro Symmetries*, Nucl. Phys. **B318** (1989) 579

[9] R. Blumenhagen, *W-Algebren in der konformen Feldtheorie*, Diplomarbeit, Bonn (1991)

[10] R. Blumenhagen, in Vorbereitung

[11] R. Blumenhagen, M. Flohr, A. Kliem, W. Nahm, A. Recknagel, R. Varnhagen, *$\mathcal{W}$-Algebras with two and three Generators*, BONN-HE-90-05 (1990), erscheint in Nucl. Phys. **B**

[12] P. Bouwknegt, *Extended Conformal Algebras from Kac-Moody Algebras*, in *Infinite Dimensional Lie Algebras and Lie Groups*, Proc. CIRM-Luminy Comf. 1988, World Scientific (1989)

[13] P. Bouwknegt, *Extended Conformal Algebras*, Phys. Lett. **B207** (1988) 295

[14] P. Bouwknegt, J. McCarthy, K. Pilch, *On the Free Field Resolution for Coset Conformal Field Theories*, CTP # 1861 / BRX TH-296 / USC-90/07 (1990)

[15] P. Bouwknegt, J. McCarthy, K. Pilch, *Free Field Approach to 2-Dimensional Conformal Field Theories*, CTP # 1898 / BRX TH-310 / USC-90/20 (1990)

[16] P. Bouwknegt, W. Nahm, *Realizations of the Exceptional Modular Invariant $A_1^{(1)}$ Partition Functions*, Phys. Lett. **B184** (1987) 359

[17] P. Bowcock, *Quasi-Primary Fields and Associativity of Chiral Algebras*, EFI 90-54 (1990)

[18] P. Bowcock, P. Goddard, *Virasoro Algebras with Central Charge $c < 1$*, Nucl. Phys. **B285**[FS19] (1987) 651

[19] H.W. Braden, E. Corrigan, P.E. Dorey, R. Sasaki, *Affine Toda Field Theory and Exact S-Matrices*, Nucl. Phys. **B338** (1990) 689

[20] H.W. Braden, E. Corrigan, P.E. Dorey, R. Sasaki, *Aspects of Affine Toda Field Theory*, RRK-90/10 (1990)

[21] D. Buchholz, *Einführung in die Algebraische Quantenfeldtheorie*, Vorlesungsnotizen Univ. Hamburg (1985)

[22] D. Buchholz, G. Mack, X. Todorov, *The Current Algebra on the Circle as a Germ of Local Field Theories*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. Vol. **5B** (1988) 20

[23] D. Buchholz, H. Schulz-Mirbach, *Haag Duality in Conformal Quantum Field Theory*, DESY 90-040 (1990)

[24] A. Cappelli, *Modular invariant partition functions of superconformal theories*, Phys. Lett. **B185** (1987) 82

[25] A. Cappelli, C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Modular invariant partition functions in two dimensions*, Nucl. Phys. **B280**[FS18] (1987) 445, *The A-D-E classification of minimal and $A_1^{(1)}$ conformal invariant theories*, Comm. Math. Phys. **113** (1987) 1

[26] J.L. Cardy, *Conformal Invariance and Statistical Mechanics*, Les Houches, Session XLIX, *Fields, Strings and Critical Phenomena*, Elsevier Science Publishers B.V. (1989)

[27] M. Caselle, K.-S. Narain, *A New Approach to the Construction of Conformal Field Theories*, Nucl. Phys. **B323** (1989) 673

[28] M. Caselle, G. Ponzano, *Analyticity, Modular Invariance and the Classification of Three Operators Fusion Algebras*, Phys. Lett. **B242** (1990) 52

[29] A.H. Díaz, J.M. Figueroa-O'Farrill, *A New Explicit Construction of the W_3 from the Affine Algebra $A_2^{(1)}$*, KUL-TF-90/10 (1990)

[30] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, *Modular Invariance and the Fusion Algebra*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **5B** (1988) 87

[31] L. Dolan, P. Goddard, P. Montague, *Conformal Field Theory of Twisted Vertex Operators*, Nucl. Phys. **B338** (1990) 529

[32] L. Dolan, P. Goddard, P. Montague, *Conformal Field Theory, Triality and the Monster Group*, Phys. Lett. **B236** (1990) 165

[33] S. Doplicher, R. Haag, J.E. Roberts, *Local Observables amd Particle Statistics I & II*, Comm. Math. Phys. **23** (1971) 199, Comm. Math. Phys. **35** (1974) 49

[34] V.S. Dotsenko, V.A. Fateev, *Conformal Algebra and Multipoint Correlation Functions in 2d Statistical Models*, Nucl. Phys. **B249**[FS12] (1984) 312

[35] V.S. Dotsenko, V.A. Fateev, *Four-Point Correlation Functions and the Operator Algebra in 2d Conformal Invariant Theories with Central Charge $c \leq 1$*, Nucl. Phys. **B251**[FS13] (1985) 691

[36] V.A. Fateev, S.L. Lykyanov, *The Models of Two-Dimensional Conformal Quantum Field Theory with Z_n Symmetry*, Int. Jour. Mod. Phys. **A3** (1988) 507

[37] V.A. Fateev, S.L. Lykyanov, *Exactly Soluble Models of Conformal Quantum Field Theory Associated with the Simple Lie Algebra D_n*, Yad. Fiz. **49** (1989) 1491

[38] V.A. Fateev, A.B. Zamolodchikov, *Conformal Quantum Field Theory Models in Two Dimensions Having Z_3 Symmetry*, Nucl. Phys. **B280**[FS18] (1987) 644

[39] B. L. Feigin, D. B. Fuks, *Invariant skew-symmetric differential operators on the line and Verma modules over the Virasoro algebra*, Funkt. Anal. Appl. **16** (1982) 114

[40] B.L. Feigin, D.B. Fuchs, *Verma Modules over the Virasoro Algebra*, Funct. Anal. & Appl. **17** (1983) 241

[41] B.L. Feigin, D.B. Fuchs, *Verma Modules over the Virasoro Algebra*, Lect. Notes Math. **1060** (1984) 230

[42] G. Felder, *BRST Approach to Minimal Models*, Nucl. Phys. **B317** (1989) 215

[43] G. Felder, J. Fröhlich, G. Keller, *Braid Matrices and Structure Constants for Minimal Conformal Models*, Comm. Math. Phys. **124** (1989) 647

[44] J. M. Figueroa-O'Farrill, *On the Homological Construction of Casimir Algebras*, Nucl. Phys. **B343** (1990) 450

[45] J. M. Figueroa-O'Farrill, S. Schrans, *The Spin 6 Extended Conformal Algebra*, Phys. Lett. **B245** (1990) 471

[46] J. M. Figueroa-O'Farrill, S. Schrans, *The Conformal Bootstrap and Super W-Algebras*, KUL-TF-90/16 (1990)

[47] M. Flohr, *W-Algebras and Special Non-Minimal Models*, in Vorbereitung

[48] K. Fredenhagen, *Quantum Field Theory in Low Dimensional Space Time*, FUB-HEP/90-10 (1990), erscheint in *Proc. of the Schladming Winter School 1990*, Springer Verlag

[49] K. Fredenhagen, K.H. Rehren, B. Schroer, *Superselection Sectors with Braid Group Statistics and Exchange Algebras, I: General Theory*, Comm. Math. Phys. **125** (1989) 201

[50] D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker, *Conformal Invariance, Unitary and Critical Exponents in Two Dimensions*, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1575, *Conformal Invariance, Unitarity and Two Dimensional Critical Exponents*, in *Vertex Operators in Mathematics and Physics*, Springer Verlag (1985)

[51] D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker, *Details of the Non-Unitarity proof for Highest Weight Representations of the Virasoro Algebra*, Comm. Math. Phys. **107** (1986) 535,

[52] P. Ginsparg, *Applied Conformal Theory*, Les Houches, Session XLIX, *Fields, Strings and Critical Phenomena*, Elsevier Science Publishers B.V. (1989)

[53] P. Ginsparg, *Curiosities at* $c = 1$, Nucl. Phys. **B295**[FS21] (1988) 153

[54] P. Goddard, *Conformal Symmetry and its Extensions*, DAMTP 88-36 (1988), Swansea, *Mathematical Physics*, (1988)

[55] P. Goddard, *Meromorphic Conformal Field Theory*, in *Infinite Dimensional Lie Algebras and Lie Groups*, Proc. CIRM-Luminy Comf. 1988, World Scientific (1989) 556

[56] P. Goddard, A. Kent, D. Olive, *Virasoro Algebras and Coset Space Models*, Phys. Lett. **152** (1985) 88

[57] P. Goddard, A. Kent, D. Olive, *Unitary Representations of the Virasoro and Super-Virasoro Algebras*, Comm. Math. Phys. **103** (1986) 105

[58] P. Goddard, D. Olive, *Kac-Moody Algebras, Conformal Symmetry and Critical Exponents*, Nucl. Phys. **B257**[FS14] (1985) 226

[59] P. Goddard, D. Olive, *Kac-Moody and Virasoro Algebras in Relation to Quantum Physics*, Int. Jour. Mod. Phys. **A1** (1986) 303

[60] K. Hamada, M. Takao, *Spin 4 Current Algebra*, Phys. Lett. **B209** (1988) 247, *Erratum*, Phys. Lett. **B213** (1988) 564

[61] K. Hornfeck, *On the Central Charge for the W-Algebras*, Phys. Lett. **B252** (1990) 357

[62] K. Hornfeck, *Supersymmetrizing the* W_4 *Algebra*, LAPP-TH-299/90 (1990), erscheint in Phys. Lett. **B**

[63] V.G. Kac, D.H. Peterson, *Infinite-Dimensional Lie Algebras, Theta Functions and Modular Forms*, Adv. Math. **53** (1984) 125

[64] H.G. Kausch, *Extended Conformal Algebras Generated by a Multiplet of Primary Fields*, DAMTP 90-27 / NSF-ITP 90-200 (1990)

[65] H.G. Kausch, G.M.T. Watts, *A Study of W-Algebras using Jacobi Identities*, DAMTP 90-24 (1990), erscheint in Nucl. Phys. **B**

[66] A. Kliem, *Konstruktion von* $\mathcal{W}$*-Algebren*, Diplomarbeit, Bonn, in Vorbereitung

[67] V.G. Knizhnik, A.B. Zamolodchikov, *Current Algebra and Wess-Zumino Model in Two Dimensions*, Nucl. Phys. **B247** (1984) 83

[68] M. Kontsevich, *Rational Conformal Field Theory and Invariants of 3-Dimensional Manifolds*, CPT-88/P.2189

[69] G. Moore, N. Seiberg, *Polynomial Equations for Rational Conformal Field Theories*, Phys. Lett. **B212** (1988) 451

[70] G. Moore, N. Seiberg, *Naturality in Conformal Field Theory*, Nucl. Phys. **B313** (1989) 16

[71] G. Moore, N. Seiberg, *Classical and Quantum Conformal Field Theory*, IASSNS-HEP-88/39 (1988)

[72] W. Nahm, *Quantum Field Theories in One and Two Dimensions*, Duke Math. Jour. **54** (1987) 579

[73] W. Nahm, Proc. Trieste Conf. *Recent Developments in Conformal Field Theories*, Trieste, October

1989, Proc. 3. Regional Conf. on Math. Phys., Islamabad 1989

[74] A. Rocha-Caridi, *On Highest Weight and Fock Space Representations of the Virasoro Algebra*, Proc. Symp. Pure Math. **49**, Part I (1989) 259

[75] A. N. Schellekens, S. Yankielowicz, *Extended Chiral Algebras and Modular Invariant Partition Functions*, Nucl. Phys. **B327** (1989) 673

[76] G. Segal, *Geometric aspects of quantum field theory*, Math. Inst. Univ. Oxford (in Vorbereitung), *The Definition of Conformal Field Theory*, Math. Inst. Univ. Oxford (in Vorbereitung)

[77] G. Segal, G. Wilson, *Loop Groups and Equations of KdV Type*, Math. Inst. Univ. Oxford (1983)

[78] R. Varnhagen, *Darstellungen von $\mathcal{W}$-Algebren*, Diplomarbeit, Bonn, in Vorbereitung

[79] R. Varnhagen, *Representations of $\mathcal{W}$-Algebras*, in Vorbereitung

[80] E. Verlinde, *Fusion Rules and Modular Transformations in 2d Conformal Field Theory*, Nucl. Phys. **B300**[FS22] (1988) 360

[81] G.M.T. Watts, *W-Algebras and Coset Models*, Phys. Lett. **B245** (1990) 65

[82] G.M.T. Watts, *WB Algebra Representation Theory*, Nucl. Phys. **B339** (1990) 177, *Determinant Formulae for Extended Algebras in Two Dimensional Conformal Field Theories*, Nucl. Phys. **B326** (1989) 648

[83] J. Wess, B. Zumino, *Consequences of Anomalous Ward Identities*, Phys. Lett. **B37** (1971) 95

[84] F. Wilczek, *Quantum Mechanics of Fractional-Spin Particles*, Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 957

[85] K.G. Wilson, *Non-Lagrangian Models of Current Algebra*, Phys. Rev. **179** (1969) 1499

[86] E. Witten, *Global Aspects of Current Algebra*, Nucl. Phys. **B223** (1983) 422, *Current Algebra, Baryons, and Quark Confinement*, Nucl. Phys. **B223** (1983) 433

[87] E. Witten, *Quantum Field Theory and the Jones Polynomial*, Comm. Math. Phys. **122** (1989) 351

[88] A.B. Zamolodchikov, *Conformal Symmetry in Two Dimensions: An Explicit Recurrence Formula for the Conformal Partial Wave Amplitude*, Comm. Math. Phys. **96** (1984) 419

[89] A.B. Zamolodchikov, *Infinite Additional Symmetries in Two-Dimensional Conformal Quantum Field Theory*, Theor. Math. Phys. **65** (1985) 1205

[90] A.B. Zamolodchikov, Al.B Zamolodchikov, *Conformal Field Theory and Critical Phenomena in Two-Dimensional Systems*, Sov. Sci. A. Phys. **10** (1989) 269

[91] D.-H. Zhang, *Spin-4 Extended Conformal Algebra*, Phys. Lett. **B232** (1989) 323

[92] W. Zimmermann, *Normal Products and the Short Distance Expansion in the Perturbation Theory of Renormalizable Interactions*, Ann. Phys. **77** (1973) 570

[i] P. Bak et al., *Phase Diagram of Selenium Adsorbed on the Ni(100) Surface: A Physical Realization of the Ashkin-Teller Model*, Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 1539

[ii] J. Campuzano et al., *Au(100)* (1×2)*-to-*(1×1) *Phase Transition: A Physical Realization of the Two-Dimensional Ising Modell*, Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 2684

[iii] D. Clark et al., *Specific-heat anomaly of Au(100)*(1×2) *studied by low energy electron diffraction*, Phys. Rev. **B34** (1986) 4379

[iv] H.K. Kim, M.H. Chan, *Experimental Determination of a Two-Dimensional Liquid-Vapor Critical-Point Exponent*, Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 170

[v] F. Motteler, J. Dash, *Heat Capacity of the Commensurate Phase and Ordering Transition of Para-H_2 monolayers on graphite*, Phys. Rev. **B31** (1985) 346

[vi] P. Piercy, H. Pfnür, *Experimental Verification of Critical Exponents in the Two-Dimensional Four-State Potts Universality Class: Oxygen on Ru(0001)*, Phys. Rev. Lett. **59** (1987) 1124