# Darstellungstheorie von W-Algebren

# und rationale Modelle

# in der konformen Feldtheorie

Diplomarbeit von

**Andreas Honecker**

BONN–IR–92–09

# Inhaltsverzeichnis

# 1. Einleitung

Das Symmetrieprinzip spielt in der Physik eine zentrale Rolle. Die Invarianz unter einer Symmetriegruppe führt z.B. über das Noether-Theorem zu Erhaltungsgrößen, die bei der Integration – oder Lösung – des Problems helfen. So genügen Translations-Invarianz in der Raumzeit und Invarianz unter räumlichen Drehungen vollständig, um das Zweikörper-Problem in der klassischen Mechanik auf eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung zurückzuführen und speziell mit Newton'schem Potential vollständig zu lösen. In relativistischen Theorien nimmt man allgemeiner an, daß die Physik invariant unter der vollen Poincaré-Gruppe sein sollte, die speziell in 4 Dimensionen 10 dimensional ist.

Bereits 1909 hat E. Cunningham [1] [2] bemerkt, daß man in der Elektrodynamik eine zusätzliche Symmetrie findet. Die Maxwellschen Gleichungen ändern sich nämlich unter Raumzeit-Streckungen nicht ! Die Poincaré-Gruppe erweitert um Raumzeit-Streckungen (und noch eine weitere Transformation: Die spezielle konforme Transformation) wird als 'konforme Gruppe' bezeichnet. Die Elektrodynamik ist also konform invariant ! Der Hauptgrund hierfür ist, daß die Wechselwirkung in der Elektrodynamik durch masselose Felder vermittelt wird und somit keine Maßstäbe in der Theorie ausgezeichnet sind. Dadurch erklärt sich die Skaleninvarianz. Insbesondere heißt dies aber auch, daß konform invariante Theorien zwar nicht wechselwirkungsfrei, aber doch masselos sein müssen. Treten in einer Theorie allerdings lediglich 'kleine' Massen auf, so läßt sich diese Theorie evtl. doch wieder als fast konform invariant auffassen (genauer als Störung einer konform invarianten Theorie), so daß auch hier die konforme Symmetrie wichtige Informationen liefern kann.

Auch bei Quantenfeldtheorien – und vor allem bei diesen – erhofft man sich von Symmetriegruppen (oder deren Lie-Algebren) wichtige Hilfestellungen für die Lösung der Theorie. Für allgemeine Dimension ist die konforme Gruppe jedoch nicht groß genug, um eine vollständige Lösung der Theorie zu ermöglichen. In zwei Dimension tritt jedoch ein besonderes Phänomen auf, und zwar drückt sich die konforme Invarianz in einer unendlich-dimensionalen Lie-Algebra aus. Die reicht zwar auch hier i.a. nicht zur Reduzierung der Theorie auf eine in einem gewissen Sinne 'endliche' Theorie aus; jedoch konnten Belavin, Polyakov und Zamolodchikov 1984 zeigen [3], daß es eine Klasse von zweidimensionalen, konform invarianten Feldtheorien gibt, die durch die konforme Symmetrie vollständig bestimmt sind. Diese Feldtheorien werden als 'rationale konforme Feldtheorien' (RCFTs[1]) ) bezeichnet.

Bereits aus der Quantenmechanik ist bekannt, daß sich die Physik unter einer Phasenänderung bzw. Umnormierung der Zustände nicht ändern darf, da sowieso nur normierte Erwartungswerte physikalisch relevant sind. Genaugenommen darf man also nicht 'echte' Darstellungen der Symmetrie-Gruppe betrachten, sondern muß i.a. projektive Darstellungen zulassen. Dies läßt sich jedoch elegant umgehen, indem man statt der Lie-Algebra

[1]) Wir schließen uns hier dem allgemeinen Usus an, gebräuchliche angelsächsische Abkürzungen nicht einzudeutschen. RCFT steht für 'rational conformal field theory'.

(oder der Gruppe) ihre zentrale Erweiterung betrachtet; d.h. man erweitert das Zentrum der Lie-Algebra um ein zusätzliches Element, die sog. 'zentrale Ladung'.

Bei allen irreduziblen Darstellungen der eben erwähnten Klasse rationaler konformer Feldtheorien ist der Eigenwert der zentralen Ladung immer kleiner als 1. Auch diese Theorien haben bereits wichtige physikalische Anwendungen. Sie beschreiben nämlich Systeme der zweidimensionalen statistischen Physik am Phasenübergangspunkt zweiter Ordnung, und mache dieser Systeme sind trotz ihrer Zweidimensionalität auch tatsächlich experimentell zugänglich [4] [5].

Auch die String-Theorie liefert über Reparametrisierungs-Invarianz ihrer zweidimensionalen Weltflächen eine konforme Feldtheorie [6]. Hier ist die obere Schranke für die zentrale Ladung bei den erwähnten Feldtheorien sehr störend, da man je nach Dimension (26 oder 10) eine zentrale Ladung von mindestens neun erwartet. Eine Möglichkeit besteht hier in einer weiteren Vergrößerung der bereits unendlich-dimensionalen Virasoro-Algebra. Angeregt wurde dieses Studium von erweiterten konformen Algebren oder auch $\mathcal{W}$-Algebren[1]) 1986 von A.B. Zamolodchikov [8], der auch die einfachsten Fälle systematisch untersuchte. Feldtheoretisch stellt der Begriff der $\mathcal{W}$-Algebra eine Präzisierung des Begriffes der 'Operator-Produkt-Entwicklung' (OPE) dar.

Auf die Arbeit von Zamolodchikov folgten Studien der $\mathcal{W}$-Algebren, die sich aus affinen Lie-Algebren konstruieren lassen. Ein systematisches Studium der $\mathcal{W}$-Algebren im Sinne von Zamolodchikov wurde dann erst kürzlich u.a. von G.M.T. Watts und H.G. Kausch [9] sowie R. Blumenhagen u.a. [10] wieder aufgenommen. Von großer Bedeutung waren dabei die von W. Nahm bewiesenen Strukturtheoreme [11]. Für die Interpretation im Sinne einer Feldtheorie ist jedoch auch die Kenntnis der Höchstgewichtsdarstellungen dieser Algebren von Bedeutung. Mit dieser Fragestellung hat sich der Autor zusammen mit anderen unter Zuhilfenahme einiger Beispiele im Rahmen dieser Arbeit beschäftigt.

Für Feldtheorien, die Teilchen beschreiben sollen, hat sich ein weiteres Symmetrieprinzip als grundlegend herausgestellt: Die Supersymmetrie, die Bosonen und Fermionen zueinander in Beziehung setzt. Von physikalischem Interesse sind somit insbesondere $\mathcal{W}$-Algebren mit Supersymmetrie, die also eine Super-Virasoro-Unteralgebra enthalten. Im Rahmen dieser Arbeit wird am Rande auf ($N = 1$) Super-$\mathcal{W}$-Algebren eingegangen. Für Anwendungen in der String-Theorie benötigt man allerdings $N = 2$ Supersymmetrie. Diese physikalisch wichtigeren $N = 2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebren werden aus technischen Gründen späteren Studien vorbehalten bleiben.

Nicht zuletzt gibt es auch Erklärungsversuche für Hochtemperatur-Supraleitung, die sich zweidimensionaler konformer Feldtheorien bedienen. Auch bei der Erklärung des Quanten-Hall-Effekts könnte die konforme Feldtheorie eine Rolle spielen [12].

Zu den $\mathcal{W}$-Algebren, die in dieser Arbeit behandelt werden, gibt es auch klassische Analoga, d.h. Algebren von Funktionen mit einem Äquivalent zur Poisson-Klammer. Diese

[1]) Der Begriff der $\mathcal{W}$-Algebra ist vermutlich auf <u>W</u>igner zurückzuführen. Dieser betrachtete Operator-Algebren mit $SU(2)$-Symmetrie [7].

klassischen Algebren stellen einerseits über Pseudodifferentialoperatoren einen Zusammenhang mit der KP-Hierarchie her (hier hat der Lax-Formalismus wichtige Fortschritte ermöglicht), andererseits treten die gleichen Algebren als Erhaltungsgrößen klassischer Toda-Feldtheorien auf. Die in dieser Arbeit behandelten $\mathcal{W}$-Algebren lassen sich z.T. als quantisierte Versionen dieser Algebren auffassen (vgl. z.B. [13] [14] [15]).

Mag der Physiker –trotz experimenteller Zugänglichkeit– zweidimensionale konforme Feldtheorien aufgrund der offensichtlich zu kleinen Raumzeit-Dimension und der fehlenden Masse mehr als 'Lehrbaukasten' betrachten, so erwecken diese doch auch zunehmend das Interesse von Mathematikern. Am Beispiel der dualen Strings hatte W. Nahm bereits 1976 die Bedeutung der Modulgruppe aufgezeigt [16], was dann im Rahmen der konformen Feldtheorien 1986 von Cardy diskutiert wurde [17]. Ferner kann man über topologische Quanten-Feldtheorien Invarianten von 3-Mannigfaltigkeiten konstruieren (vgl. [18]). In beiden Fällen sind noch viele Fragen offen, so daß auch hier die Klassifikation aller rationalen konformen Feldtheorien von Bedeutung ist. Diese Arbeit wird sich zwangsläufig hauptsächlich mit mathematischen Strukturen beschäftigen. Deswegen wird auf eine weitere Diskussion möglicher Anwendungen in der Mathmatik verzichtet, sondern mehr mit Blick auf die oben geschilderten möglichen Anwendungen in der Physik vorgegangen.

In den folgenden Kapiteln dieser Arbeit werden zuerst einige der bereits erwähnten Begriffe präzisiert –damit also Bekanntes wiederholt–, wobei der Kürze wegen weder Vollständigkeit noch absolute Genauigkeit möglich ist. Die ersten Kapitel sind somit einer Diskussion von konformer Symmetrie und Quantenfeldtheorien, insbesondere mit ebendieser Symmetrie gewidmet. Als nächstes werden $\mathcal{W}$-Algebren mit deutlichem Schwerpunkt auf ihren Höchgewichtsdarstellungen diskutiert. Am Ende der Arbeit wird ein kurzer Ausblick auf spezielle $\mathcal{W}$-Algebren –insbesondere die supersymmetrischen– gegeben.

Ein Großteil der in dieser Arbeit vorgestellten neuen Ergebnisse wurde bereits in [19] und [20] veröffentlicht. Es sei dem interessierten Leser empfohlen, diese Arbeiten zur Ergänzung hinzuzuziehen.

# 2. Grundlegende Begriffe der konformen Feldtheorie

## 2.1. Grundlegende Begriffe der Quantenfeldtheorie

In diesem Kapitel sollen einige grundlegende Begriffe der Quantenfeldtheorie (QFT) diskutiert werden, wobei allerdings keine erschöpfende Diskussion im Sinne von z.B. Haag-Kastler oder Doplicher-Haag-Roberts [21] (man vergleiche z.B. [22]) möglich ist, sondern lediglich für den weiteren Verlauf wichtige Ergebnisse vorgestellt werden können, und diese hier auch stark vereinfacht werden müssen.

In Quantenfeldtheorien verwendet man häufig ein aus der Quantenmechanik wohlbekanntes Konzept: Man betrachtet Operatoren über einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dabei wird die physikalische Raumzeit durch eine $(d+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ mit Minkowskischer 'Metrik' modelliert. Die Operatoren der Feldtheorie sind dabei von der Raumzeit abhängige, operatorwertige Distributionen. Physikalisch sinnvoll sind lediglich 'lokale' Felder, d.h. solche Distributionen, die (grob gesprochen) nur von einem Punkt der Raumzeit abhängen. Die Zustände des Systems werden durch Strahlen in $\mathcal{H}$ beschrieben; der Zustandsraum ist also genaugenommen ein projektiver Hilbertraum $\mathcal{PH}$. Meßprozesse beschreibt man dann durch das Anwenden der operatorwertigen Distributionen auf die Zustände, Überintegration mit einer Testfunktion und anschließende Skalarprodukt-Bildung mit einem weiteren Zustand, wobei geeignet normiert wird.

Operatoren in linearen Räumen haben eine Vektorraum-Struktur und lassen auch die Verknüpfung zu; bilden also eine Algebra $\mathcal{A}$. Diese Algebra-Struktur ist fundamental, nicht jedoch die Hilbertraum-Struktur (insbesondere die Vollständigkeit ist lediglich bequem). Man benötigt aber ein Äquivalent zu Erwartungswerten, das durch eine Norm gegeben ist, sowie eine Adjunktion. Dies motiviert die Forderung, daß die Operatoren der Quantenfeldtheorie eine $C^*$-Algebra bilden (näheres zu diesen siehe z.B. [23]). Ein Axiomensystem der QFT studiert deswegen $C^*$-Algebren $\mathcal{A}(\mathcal{O})$, die Raumzeit-Gebieten $\mathcal{O}$ zugeordnet sind, mit zugehörigen Darstellungen, unter denen die Vakuum-Darstellung $\pi_0$ ausgezeichnet ist. Interessiert man sich insbesondere für Darstellungen $\pi_\rho := \pi_0\rho$, die durch Endomorphismen $\rho$ gegeben sind, so kann man die Fusion von Darstellungen über $\pi_{\rho_1}\times\pi_{\rho_2} := \pi_0\rho_1\rho_2$ einführen. In diesem axiomatischen Rahmen spielen also Darstellungen eine zentrale Rolle. Es ist jedoch nicht wirklich klar, ob dieser allgemeine Rahmen auch die konforme Feldtheorie enthält [24]. Ferner kann man $C^*$-Algebren nach Gelfand-Naimark-Segal [25] durch beschränkte lineare Operatoren in einem Hilbertraum darstellen, so daß im folgenden die Hilbertraum-Formulierung betrachtet werden soll.

Physikalisch interessante Operatoren haben meist die Eigenschaft, daß ihr Produkt bei kleinen Abständen singulär wird. Wilson [26] hat deswegen vorgeschlagen, das Produkt zweier Operatoren $A(x)$ und $B(y)$ für kleine Abstände $x-y$ nach ihren Singularitäten zu entwickeln:

$$A(x)B(y) \sim \sum_N C_N(x-y)O_N(y) \tag{2.1.1}$$

wobei die $O_N$ reguläre Operatoren sind; die numerischen Koeffizienten $C_N(x-y)$ dagegen für $x \to y$ singulär werden. Dieses Konzept hat in der vierdimensionalen QFT zu einer Reihe von Erfolgen geführt; in der zweidimensionalen konformen QFT ist es dagegen von zentraler Bedeutung.

Zwar ermöglicht (2.1.1) eine Zurückführung vieler Erwartungswerte auf andere; allgemeine Aussagen über die QFT sind mit den bisher eingeführten Mitteln aber nicht möglich. Normalerweise kennt man Raumzeit-Symmetrien, die die Physik nicht ändern. Mathematisch wird eine solche Symmetrie durch eine Gruppe oder Algebra beschrieben. Das Fundamentalbeispiel hierfür ist die Poincaré-Gruppe, die Invarianz-Gruppe der relativistischen Physik. Es ist bequem, die Operator-Algebra $\mathcal{A}$ um die Symmetrie-Algebra zu erweitern. Man fordert also, daß die Symmetrie-Algebra eine Unteralgebra der Operator-Algebra ist. Um die Raumzeit-Symmetrien in der Theorie ausdrücken zu können, müssen sowohl der Hilbertraum $\mathcal{H}$ als auch die Operator-Algebra $\mathcal{A}$ eine Darstellung der Symmetrie-Algebra tragen. Dies wird als 'Kovarianz' der Theorie bezeichnet. Eine einfache Realisierung solcher Darstellungen findet man z.B. in der Quantenmechanik, wo unitäre Operatoren $U$ die Symmetrie-Gruppe einerseits auf dem Hilbertraum, andererseits durch Adjunktion auf den Operatoren darstellen. Man fordert ferner, daß sich sowohl $\mathcal{H}$ wie auch $\mathcal{A}$ in irreduzible Darstellungen der Symmetrie-Algebra zerlegen lassen:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i \\ \mathcal{A} &= \bigoplus_{j \in J} \mathcal{A}_j \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Die $\mathcal{H}_i$ und $\mathcal{A}_j$ sind dabei irreduzible (Höchstgewichts-) Darstellungen der Symmetrie-Algebra.
Da Zustände durch Elemente von $\mathcal{PH}$ beschrieben werden, müßte man genaugenommen die Symmetrie-Algebra in $\mathcal{PH}$ darstellen. Man wählt jedoch den äquivalenten (aber technisch einfacheren) Weg, die Symmetrie-Algebra zentral zu erweitern und dann diese zentrale Erweiterung in $\mathcal{H}$ darzustellen.
Invarianz der Erwartungswerte unter Darstellungen der Symmetrie-Algebra liefern weitere Einschränkungen an diese. Für allgemeines $\mathcal{M}$ und allgemeine Symmetrie-Gruppe ist leider auch hierdurch eine Zurückführung aller Erwartungswerte auf endlich viele freie Parameter nicht möglich. Dies gelingt allerdings im Spezialfall von zwei Dimensionen und konformer Symmetrie für eine große Klasse von Theorien, wie wir später sehen werden.

Dazu wird zuerst im folgenden Kapitel die konforme Symmetrie eingeführt. Im Kapitel 2.3 werden dann die hier beschriebenen Konzepte für die konforme Quantenfeldtheorie realisiert und in Kapitel 2.4 werden ausgehend von der Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra erste Einschränkungen an eine Klasse konformer QFTs hergeleitet. Um diese Einschränkungen auf eine größere Klasse von zweidimensionalen konformen QFT auszuweiten, bedarf es erweiterter konformer Algebren. Diese werden in den beiden Kapiteln 3.2 und 3.3 vorgestellt. Der Rest der Arbeit widmet sich dann der Darstellungstheorie von einigen speziellen erweiterten konformen Algebren.

## 2.2. Die konforme Gruppe und die Virasoro-Algebra

In diesem Kapitel soll die konforme Gruppe und insbesondere die Virasoro-Algebra eingeführt werden. Es wird ein Standard-Zugang vorgestellt, wie er z.B. in [28] nachzulesen ist.

Zuerst wollen wir den allgemeinen Fall einer $d = (p+q)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{p,q}$ mit einer 'metrischen' Bilinearform auf dem Tangentialraum $\mathcal{TM}_x$ $g(x)_{\mu,\nu} = g(x)(e_\mu, e_\nu)$ und Signatur $(p,q)$ betrachten. Unter einem Diffeomorphismus von $\mathcal{M}$ transformiert sich die Bilinearform $g(x)$ wie folgt:

$$g'(x')_{\mu,\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g(x)_{\alpha,\beta} \tag{2.2.1}$$

Die konforme Gruppe ist nun als die Gruppe derjenigen Transformationen definiert, die diese Bilinearform bis auf einen positiven Faktor invariant läßt. Folglich gilt für konforme Transformationen:

$$\begin{aligned} x &\mapsto x' \\ g(x) &\mapsto g'(x') = \Omega(x) g(x) \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Die konformen Transformationen erhalten insbesondere den Winkel zwischen zwei Vektoren $v$ und $w$, denn er ist als $\frac{g(x)(v,w)}{\sqrt{g(x)(v,v)g(x)(w,w)}}$ definiert. Diese Eigenschaft der Winkeltreue begründet auch den Namen 'konform'. Man beachte, daß das semidirekte Produkt der Translations-Gruppe und Lorentz-Gruppe $SO(p,q)$ –die Poincaré-Gruppe– immer (2.2.2) mit $\Omega(x) = 1$ erfüllt und somit zur konformen Gruppe gehört. Nun betrachtet man $\mathrm{d}s^2 = g(x)_{\mu,\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$ und infinitesimale Transformationen $x_\mu \mapsto x_\mu + \epsilon_\mu$ [1]). Wir nehmen nun an, daß $g(x)_{\mu,\nu}$ proportional zu der Standard-Bilinearform $\eta_{\mu,\nu}$ im $\mathbb{R}^{p,q}$ ist. Aus (2.2.2) folgt damit, daß nur solche $\epsilon_\mu$ konforme Transformationen beschreiben können, die folgender Gleichung genügen:

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d}(\partial \cdot \epsilon)\eta_{\mu,\nu} \tag{2.2.3}$$

wobei gilt $x \cdot y = x^\mu \eta_{\mu,\nu} x^\nu$. Mit diesem Umweg über die Lie-Algebra der konformen Gruppe kann man für $d > 2$ zeigen, daß genau die folgenden Transformationen konform sind:

$$\begin{aligned} x &\mapsto x' = x + a\ , &\quad a \in \mathbb{R}^{p,q} \\ x &\mapsto x' = Rx\ , &\quad R \in SO(p,q) \\ x &\mapsto x' = \lambda x\ , &\quad \lambda \in \mathbb{R} \\ x &\mapsto x' = \frac{x + (x\cdot x)b}{1 + 2b\cdot x + (b\cdot b)(x \cdot x)}\ , &\quad b \in \mathbb{R}^{p,q} \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Bei den Transformationen handelt es sich um Translationen, Rotationen, Dilatationen und spezielle konforme Transformationen. Man beachte, daß die globale Definition der speziellen konformen Transformationen nur dann möglich ist, wenn der $\mathbb{R}^{p,q}$ im Unendlichen

[1]) Genaugenommen müßte dies durch Vektorfelder beschrieben werden.

kompaktifiziert wird. Spezielle konforme Transformationen lassen sich durch Konjugation einer Translation um $b$ mit der Inversion $x \mapsto \frac{x}{x \cdot x}$ erzeugen. Da die Dimension von $SO(p,q)$ durch $\frac{d(d-1)}{2}$ gegeben ist und in (2.2.4) $d+2$ weitere Generatoren eingehen, ist die Dimension der konformen Gruppe $\frac{d(d+1)+4}{2}$.

In $d = 2$ ist die Situation gänzlich anders. Wir betrachten hier nur den euklidischen Fall $g(x)_{\mu,\nu} = \delta_{\mu,\nu}$. Damit spezialisiert (2.2.3) zu den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\partial_1 \epsilon_1 = \partial_2 \epsilon_2 \ , \qquad \partial_1 \epsilon_2 = -\partial_2 \epsilon_1 \tag{2.2.5}$$

Es ist nun natürlich, zu $\epsilon(z) = \epsilon_1 + i\epsilon_2$ und $\overline{\epsilon}(\overline{z}) = \epsilon_1 - i\epsilon_2$ in komplexen Koordinaten $z = x_1 + ix_2$ und $\overline{z} = x_1 - ix_2$ überzugehen. Es ist eine wohlbekannte Tatsache, daß damit die konformen Transformationen mit den holomorphen und anti-holomorphen Transformationen zusammenfallen:

$$z \mapsto f(z) \ , \qquad \overline{z} \mapsto \overline{f}(\overline{z}) \tag{2.2.6}$$

Bei $z$ und $\overline{z}$ handelt es sich übrigens um die sog. 'chiralen' Koordinaten. Sie sind beide gleichberechtigt und bis auf das Vorzeichen auch gleich zu behandeln. Wir werden uns deshalb von jetzt an der Einfachheit halber auf den links-chiralen Anteil $z$ mit Transformationen $f(z)$ einschränken. In der infinetisemalen Form von (2.2.6) können wir eine Basis $\epsilon_n(z) = z^{n+1}$ einführen:

$$z \mapsto z + \epsilon_n(z) \tag{2.2.6}$$

Die zugehörigen Generatoren sind

$$l_n = z^{n+1}\partial_z \tag{2.2.7}$$

Dies führt einen auf die Diffeomorphismen des Kreises $S_1$ oder die unendlich-dimensionale 'de-Witt-Algebra' mit Vertauschungs-Relationen:

$$[l_m, l_n] = (n-m)l_{m+n} \tag{2.2.8}$$

Es ist übrigens kein Zufall, daß wir auf die Diffeomorphismen von $S_1$ geführt wurden; hätten wir nämlich zuerst den Raum kompaktifiziert, so wären wir automatisch auf diese Diffeomorphismen gekommen. Die Kompaktifizierung ist genaugenommen unumgänglich, da sich die Generatoren (2.2.7) in der komplexen Ebene nicht zu einer Gruppe aufintegrieren lassen, wie man gleich am Beispiel der Möbius-Transformationen sehen wird.

Die de-Witt-Algebra (2.2.8) hat eine Unteralgebra, die aus $l_{-1}, l_0$ und $l_1$ besteht. Diese Unteralgebra kann man zu den Möbius-Transformationen in der Riemannschen Sphäre $\overline{\mathbb{C}}$ aufintegrieren:

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \ , \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C} \qquad \text{mit} \qquad ad-bc=1 \tag{2.2.9}$$

Diese Transformationen heißen auch 'rationale konforme Transformationen'. Sie verallgemeinern die in (2.2.4) vorgestellten Translationen, Rotationen, Dilatationen und speziellen konformen Transformationen auf $d = 2$. Man rechnet leicht nach, daß (2.2.9) eine Darstellung von $PSL(2, \mathbb{C})$ ist.

Wie bereits erwähnt, sind jedoch ausschließlich projektive Darstellungen dieser Algebra physikalisch relevant. Stattdessen kann man auch lineare Darstellungen der zentralen Erweiterung dieser Algebra betrachten.

Wir wollen nun zeigen, daß die de-Witt-Algebra eine eindeutige zentrale Erweiterung besitzt, die Virasoro-Algebra mit Generatoren $L_n$ und den Vertauschungs-Relationen:

$$[L_m, L_n] = (n-m)L_{m+n} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0} \tag{2.2.10}$$

wobei wir das zentrale Element $c$ genannt haben. $c$ wird auch 'zentrale Ladung' genannt. Zum Beweis gehen wir nach [27] wie folgt vor: Wir setzen als allgemeine zentrale Erweiterung an:

$$[L^0_m, L^0_n] = (n-m)L^0_{m+n} + a^0(m,n) \tag{2.2.11}$$

Nun geht man als erstes zu den Generatoren $L_0 := \frac{1}{2}[L^0_{-1}, L^0_1]$ und $L_n := \frac{1}{n}[L^0_0, L^0_n]$ über. Die neue zentrale Erweiterung erfüllt dann $a(0,n) = a(-1,1) = 0$. Die Jacobi-Identität $[L_0, [L_m, L_n]] + zykl. = 0$ liefert die Bedingung $(n+m)\ a(n,m) = 0$, d.h. es gilt $a(n,m) = \delta_{n+m,0}\ a(n,-n)$. Aus der Jacobi-Identität $[L_1, [L_{n-1}, L_{-n}]] + zykl. = 0$ erhält man ferner die Rekursions-Relation $(n-2)\ a(n,-n) = (n+1)\ a(n-1,-n+1)$. Diese besitzt nur die Lösung $a(m,n) = \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0}$, wobei der Faktor $\frac{1}{12}$ Konvention ist.

Die Virasoro-Algebra besitzt genau wie die de-Witt-Algebra eine Unteralgebra mit Basis $L_{-1}$, $L_0$ und $L_1$. Diese Unteralgebra kann mit der Lie-Algebra von $SU(1,1)$ identifiziert werden. Deswegen nennt man Invarianz unter ihr auch '$SU(1,1)$-Invarianz'.

Da $c$ im Zentrum der Algebra liegt, kommutiert es mit allen Elementen der Algebra und wird deswegen in irreduziblen Darstellungen nach dem Schur'schen Lemma durch ein Vielfaches der Identität dargestellt. Da wir im folgenden nur mit irreduziblen Darstellungen der Virasoro-Algebra arbeiten werden, werden wir den Eigenwert von $c$ in diesen Darstellungen ebenfalls mit $c$ bezeichnen. Wird der Operator $c$ also mit einer Zahl gleich gesetzt, so ist dies in diesem Sinn zu lesen.

Dieses Kapitel stellt die Strukturen der konformen Quantenfeldtheorie kurz zusammen. Eine ausführlichere Übersicht findet man z.B. in [28], dem wir auch weitgehend folgen werden. Wie in Kapitel 2.2 werden wir uns auch hier wieder auf den chiralen Anteil beschränken. Der links-chirale Anteil der Operator-Algebra $\mathcal{F}$ muß dann genaugenommen um einen gewöhnlich isomorphen Anteil $\overline{\mathcal{F}} \cong \mathcal{F}$ zu $\mathcal{A} = \mathcal{F} \oplus \overline{\mathcal{F}}$ ergänzt werden.

Bildet man die komplexe Ebene über die Exponentialfunktion auf den Zylinder ab –d.h. auf eine zweidimensionale Raumzeit $\mathcal{M}$ mit kompaktifiziertem Raum–, so kann $L_0$ mit dem Hamilton-Operator und $L_{-1}$ mit dem Impuls identifiziert werden. Dies zeigt, daß die $SU(1,1)$-Unteralgebra der Virasoro-Algebra eine wichtige Rolle in der konformen Feldtheorie spielt.

Nach Kapitel 2.1 muß die konforme Algebra in der Operator-Algebra $\mathcal{F}$ enthalten sein. Dazu definieren wir zu der Virasoro-Algebra ein lokales Feld $L(z)$ durch:

$$L(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{n-2} L_n \tag{2.3.1}$$

Dieses Feld wird auch 'Energie-Impuls-Tensor' genannt. Als Motivation für diese Bezeichnung betracht man die OPE (2.1.1) des Energie-Impuls-Tensors mit sich:

$$L(z)L(w) = \frac{2L(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial L(w)}{(z-w)} + \frac{c}{2(z-w)^4} + reg. \tag{2.3.2}$$

Dabei steht '$reg.$' als Abkürzung für alle Terme, die für $z \to w$ regulär sind. Das Produkt von zwei lokalen Operatoren $A(z)$ und $B(w)$ in $\mathcal{F}$ ist wie folgt definiert:

$$A(z)B(w) = \begin{cases} A(z)B(w) & \text{für } \mid z \mid > \mid w \mid \\ B(w)A(z) & \text{für } \mid z \mid < \mid w \mid \end{cases} \tag{2.3.3}$$

Diese Ordnungsvorschrift wird als 'Radialordnung' bezeichnet. Nun kann auf (2.3.2) der Cauchy'sche Integralsatz angewandt werden. Man wendet auf (2.3.2) zuerst $\frac{1}{2\pi i}\oint_w z^m \mathrm{d}z$ an und integriert anschließend über $\frac{1}{2\pi i}\oint_0 w^n \mathrm{d}w$. Dies liefert die Virasoro-Algebra (2.2.10) und zeigt damit, daß diese OPE tatsächlich sinnvoll ist.

Berechnet man für ein freies Boson oder ein freies Fermion den Energie-Impuls-Tensor aus dem Propagator, so erhält man ein lokales Feld $T(z)$, das die OPE (2.3.2) mit $c = 1$ bzw. $c = \frac{1}{2}$ erfüllt. Dies motiviert die Bezeichnung von $L(z)$ als Energie-Impuls-Tensor.

Die Operator-Algebra $\mathcal{F}$ enthält außer $L(z)$ weitere lokale Felder. Nach Kapitel 2.1 operiert die konforme Algebra auf den Feldern. Transformiert sich ein Feld $\phi(z)$ unter einer meromorphen Transformation $z \mapsto f(z)$ nach

$$\phi(z) \mapsto \left(\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right)^{d(\phi)} \phi(f(z)) \tag{2.3.4}$$

so nennt man $\phi(z)$ 'primär'. Der Exponent $d(\phi)$ wird als 'konforme Dimension' bezeichnet. Gilt (2.3.4) nur für rationale konforme Transformationen, so heißt $\phi(z)$ 'quasiprimär'. Nach (2.3.4) kann man außer für quasiprimäre Felder auch für ihre Ableitungen die konforme Dimension einführen. Für ein Feld $\phi(z)$ mit Dimension $d(\phi)$ gilt dann $d(\partial\phi) = d(\phi) + 1$.

Fordert man, daß $\mathcal{F}$ durch quasiprimäre Felder und ihre Ableitungen aufgespannt wird, so führt die Darstellung der rationalen konformen Transformationen in $\mathcal{F}$ zu einer natürlichen Graduierung bezüglich der konformen Dimension. Insbesondere folgt aus der Lokalitäts-Forderung, daß alle konformen Dimensionen aus $\frac{\mathbb{Z}}{2}$ sein müssen.

Konforme Transformationen werden durch $L(z)$ vermittelt. Deswegen muß sich (2.3.4) auch durch die OPE mit $L(z)$ beschreiben lassen. Für ein primäres Feld $\phi(z)$ liefert (2.3.4):

$$L(z)\phi(w) = \frac{d(\phi)}{(z-w)^2}\phi(w) + \frac{\partial\phi(w)}{(z-w)} + reg. \tag{2.3.5}$$

Man stellt durch Vergleich mit (2.3.2) fest, daß insbesondere $L(z)$ nicht primär, sondern lediglich quasiprimär ist. Wendet man auf (2.3.5) $\frac{1}{2\pi i}\oint_w z^m \mathrm{d}z$ an, so erhält man:

$$[L_m, \phi(w)] = w^{-m}\big((w\frac{\partial}{\partial w} - (m-1)d(\phi)\big)\phi(w) \tag{2.3.6}$$

Für quasiprimäre Felder gilt (2.3.6) nur für $m \in \{-1, 0, 1\}$.

Man definiert in Analogie zu (2.3.1) die Fourier-Entwicklung eines links-chiralen Feldes $\phi(z)$ mit Dimension $d(\phi)$ als:

$$\phi(z) =: \sum_{n-d(\phi)\in\mathbb{Z}} z^{n-d(\phi)}\phi_n \tag{2.3.7}$$

Die Fourier-Komponenten $\phi_n$ werden 'Moden' von $\phi$ genannt. Nun kann man auf (2.3.6) $\frac{1}{2\pi i}\oint_0 w^n \mathrm{d}w$ anwenden. Damit erhält man für ein primäres Feld $\phi(w)$:

$$[L_m, \phi_n] = (n - (d(\phi) - 1)m)\phi_{n+m} \tag{2.3.8}$$

Für ein quasiprimäres Feld gilt (2.3.8) wieder nur für $m \in \{-1, 0, 1\}$.

Bis jetzt haben wir über den regulären Anteil der OPE keine Aussage gemacht. Im allgemeinen treten hier Felder höherer Dimension auf, die als 'normalgeordnete Produkte' bezeichnet werden. Diese kann man auf Moden-Ebene für zwei bosonische Felder $\phi$, $\chi$ wie folgt definieren:

$$N(\phi,\chi)_n := \sum_{k<d(\chi)} \phi_{n-k}\chi_k + \sum_{k\geq d(\chi)} \chi_k\phi_{n-k} \tag{2.3.9}$$

Die Wahl der Summationsgrenze ist willkürlich, denn unterschiedliche Wahlen unterscheiden sich nur durch Ableitungen lokaler Felder. Die Wahl in (2.3.9) wird sich jedoch in späteren Kapiteln als bequem herausstellen.

Bis jetzt wurde lediglich die Feld-Algebra $\mathcal{F}$ einer konformen Feldtheorie in zwei Dimensionen diskutiert. Über den Hilbertraum $\mathcal{H}$ der Theorie ist jedoch auch einiges zu sagen. Es ist eine natürliche Annahme, daß $\mathcal{H}$ einen Zustand $|\,v\rangle$ enthält, der invariant unter Translationen in der Raumzeit (d.h. im konformen Fall $SU(1,1)$-invariant) ist. Dieser Zustand heißt 'Vakuum'. Fordert man die Regularität von $\phi(z)\,|\,v\rangle$ am Ursprung, so folgt:

$$\phi_n\,|\,v\rangle = 0 \qquad \forall\; n < d(\phi) \tag{2.3.10}$$

Mit $\phi = L$ heißt dies insbesondere, daß $L_{-1}$, $L_0$ und $L_1$ das Vakuum annihilieren; ist also gerade die eben geforderte $SU(1,1)$-Invarianz.

Den Hilbertraum $\mathcal{H}$ baut man nun nach Art eines Fockraumes aus dem Vakuum auf. Dies liefert durch

$$\phi \mapsto \phi(0)\,|\,v\rangle \qquad \forall \phi \in \mathcal{F} \tag{2.3.11}$$

eine surjektive Abbildung von $\mathcal{F} \to \mathcal{H}$. Es ist nun eine bequeme, aber nicht allzu große Einschränkung, sich auf solche konforme Feldtheorien zu beschränken, in denen (2.3.11) injektiv ist. Dann hat man einen Isomorphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{H}$. Insbesondere gilt dann in (2.1.2) $\mathcal{F}_i \cong \mathcal{H}_i$.

Inzwischen haben wir zwar den Hilbertraum der konformen Feldtheorie eingeführt. Die Einführung von Meßgrößen, d.h. von Erwartungswerten steht jedoch noch aus. Dazu führt man eine hermitesche Sesquilinearform $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ ein, die oBdA. auf $\langle v\,|\,v\rangle = 1$ normiert werden kann. Diese Bemerkungen sowie die folgenden gelten für Feldtheorien. In der statistischen Mechanik benötigt man zur Beschreibung der Übergangswahrscheinlichkeiten ebenfalls eine Sesquilinearform auf $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, allerdings kann diese durchaus allgemeinere Eigenschaften besitzen. Für eine Feldtheorie kann diese Sesquilinearform formal wie folgt definiert werden:

Man definiert eine Involution auf der Algebra $\mathcal{F}$. Dann werden (durch den Isomorphismus (2.3.11)) mit der Notation $|\,v\rangle^{+} = \langle v\,|$ die Elemente von $\mathcal{H}$ in den Dualraum $\mathcal{H}^*$ von $\mathcal{H}$ abgebildet. Die duale Paarung von $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}^*$ liefert nun auf natürliche Weise eine Sesquilinearform auf $\mathcal{H}$. Diese ist insbesondere kontravariant bezüglich der auf $\mathcal{F}$ definierten Involution. Die Elemente von $\mathcal{H}$ kann man z.B. als einlaufende Zustände interpretieren, die Elemente von $\mathcal{H}^*$ als Streuzustände und das über sie definierte Skalarprodukt als Streu-Wahrscheinlichkeit. Leider ist dem Autor jedoch kein allgemeines Argument für die Existenz einer Involution auf $\mathcal{F}$ (bei chiralen Theorien) bekannt, und somit ist die Konsistenz dieser Konstruktion im Einzelfall überprüfungsbedürftig.

Als letztes im Rahmen dieser allgemeinen Betrachtungen wollen wir auf einen wichtigen Punkt hinweisen: Man glaubt allgemein, daß konforme Feldtheorien modular invariant sind. Für Theorien, die über ein Funktional-Integral definiert sind, ist dies offensichtlich. Leicht einsehen läßt sich dies auch für konforme Feldtheorien auf dem Torus. Sei $\tau$ der modulare Parameter des Torus. Dann dürfen sich die Meßgrößen der Theorie (wie z.B. die Zustandssumme) unter den Reparametrisierungs-Transformationen

$$\begin{aligned} T: &\qquad \tau \mapsto \tau + 1 \\ S: &\qquad \tau \mapsto -\frac{1}{\tau} \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

nicht ändern. Diese beiden Relationen generieren die sog. 'Modulgruppe'. Die Verallgemeinerung auf andere konforme Feldtheorien ist ebenfalls plausibel, denn die durch (2.3.12) generierte Gruppe ist gegeben durch:

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\,, \qquad a,b,c,d \in \mathbb{Z} \qquad \text{mit} \qquad ad - bc = 1 \tag{2.3.13}$$

Somit ist die Modulgruppe eine Untergruppe der rationalen konformen Transformationen (2.2.9); allerdings kann man $\tau$ nicht direkt mit $z$ identifizieren. Die Bedeutung des Parameters $\tau$ und damit die Definition der Operation der Modulgruppe ist eine durchaus nicht-triviale Frage, die wohl am allgemeinsten für Mehrpunktfunktionen konformer Feldtheorien in [29] diskutiert wurde.

Die Modulinvarianz ist ein schlagkräftiges Hilfsmittel beim Beweis allgemeiner Aussagen über konforme Feldtheorien (vgl. z.B. [17]); auch in dieser Arbeit wird sie dafür eingesetzt. Man kann von der OPE einer konformen Feldtheorie auf die sog. 'Fusionsalgebra' abstrahieren. Diese beschränkt sich auf Aussagen welche konformen Familien primärer Felder in der OPE aneinander koppeln [1]). Die Fusionsalgebra ist durch modulare Invarianz fast völlig festgelegt. Kennt man die Darstellung von $S$, so kann man über die Formel von E. Verlinde die Fusionskonstanten berechnen [30]. Weitere Anwendungen der Modulgruppe finden sich bei der Berechnung von Charakteren (die später eingeführt werden) – man vergleiche z.B. die Arbeiten von S.D. Mathur u.a. [31].

Die Modulgruppe spielt in dieser Arbeit allerdings nur eine untergeordnete Rolle, weswegen wir auch weitestgehend auf die Angabe von Formeln verzichtet haben. So wird im nächsten Kapitel die Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra diskutiert, ohne dabei allerdings auf die Modulgruppe explizit Bezug zu nehmen.

[1]) Die konforme Familie eines Feldes $\phi$ besteht aus allen NOPs von $\phi$ mit $L$ und deren Ableitungen.

Die konforme Symmetrie wird durch die Virasoro-Algebra ausgedrückt. Demzufolge ist man an (irreduziblen) Darstellungen dieser Algebra interessiert. Dieses Kapitel soll einen kurzen Überblick über die Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra geben. Eine ausführliche, auch mathematisch detaillierte Diskussion findet man z.B. in [32].

Zuerst definiert man eine 'Höchstgewichtsdarstellung' (HGD) der Virasoro-Algebra. Eine HGD der Virasoro-Algebra ist eine Darstellung in einem Vektorraum $V$, die einen nicht-trivialen Vektor $|h\rangle$, den 'Höchstgewichtsvektor', besitzt, so daß für $h, c \in \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften gelten:

$$\begin{aligned} C\,|h\rangle &= c\,|h\rangle \\ L_0\,|h\rangle &= h\,|h\rangle \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

wobei wir der Deutlichkeit halber das zentrale Element mit '$C$' bezeichnet haben. Ferner muß $V$ durch Vektoren der folgenden Form aufgespannt werden:

$$L_{i_n}...L_{i_1}\,|h\rangle \qquad \text{mit} \quad 0 < i_1 \leq ... \leq i_n \tag{2.4.2}$$

Insbesondere folgt aus (2.4.1) und (2.4.2):

$$L_n\,|h\rangle = 0 \qquad \forall n < 0 \tag{2.4.3}$$

Sind alle Zustände der Form (2.4.2) linear unabhängig, so heißt diese HGD 'Verma-Darstellung' und wird mit $M(c,h)$ bezeichnet.

Die Existenz einer Verma-Darstellung kann man durch Standard-Lie-Algebra-Techniken sicherstellen. Dazu betrachtet man die universelle Einhüllende $U$ der Virasoro-Algebra. Dann konstruiert man in $U$ das Links-Ideal $I(c,h)$, das von den Elementen $\{L_n\ ,\ \ n < 0; L_0 - h\mathbb{1}\ ; C - c\mathbb{1}\ \}$ ($\mathbb{1}$ sei das Einheitslement in $U$) erzeugt wird, und definiert $M(c,h) := U/I(c,h)$. Die Virasoro-Algebra operiert durch Links-Multiplikation auf $M(c,h)$ und zwar so, daß das Bild der $\mathbb{1}$ aus $U$ in $M(c,h)$ mit dem Vektor $|h\rangle$ identifiziert werden kann. Dieser Vektor $|h\rangle$ hat automatisch die Eigenschaften (2.4.1) und (2.4.3); die lineare Unabhängigkeit der Zustände der Form (2.4.2) wird durch das Poincaré-Birkhoff-Witt-Theorem sichergestellt.

Im allgemeinen ist die Verma-Darstellung nicht vollständig reduzibel. In Kapitel 2.1 wurde jedoch dargelegt, daß wir an irreduziblen Darstellungen interessiert sind. Diese werden wir nun aus $M(c,h)$ konstruieren.

Auf $M(c,h)$ kann man nun eine eindeutige kontravariante hermitesche Form $(\cdot,\cdot)$ dadurch einführen, daß man definiert:

$$(|h\rangle, |h\rangle) := 1 \tag{2.4.4a}$$

$$(|x\rangle, C\,|y\rangle) = (C\,|x\rangle, |y\rangle) \qquad \forall\, |x\rangle, |y\rangle \in M(c,h) \tag{2.4.4b}$$

$$(|x\rangle, L_n\,|y\rangle) = (L_{-n}\,|x\rangle, |y\rangle) \qquad \forall\, |x\rangle, |y\rangle \in M(c,h)\ , \forall n \in \mathbb{Z} \tag{2.4.4c}$$

(2.4.4b) und (2.4.4c) bedeuten dabei die Kontravarianz bezüglich der durch $C^+ := C$ und $L_n^+ := L_{-n}$ auf der Virasoro-Algebra definierten Involution. Daß dann durch (2.4.4a) eine eindeutige Sesquilinearform auf $M(c,h)$ definiert wird, macht man sich leicht in der Basis (2.4.2) klar. Man schreibt abkürzend auch $\langle x \,|\, y \rangle := (|\, x\rangle \,, |\, y\rangle \,)$.

Nun definiert man $J(c,h) := \{|\, x\rangle \in M(c,h) \mid \forall \,|\, y\rangle \in M(c,h) : \langle y \,|\, x\rangle = 0\}$. Bei $J(c,h)$ handelt es sich aufgrund der Kontravarianz (2.4.4b) und (2.4.4c) um einen invarianten Unterraum von $M(c,h)$; in der Tat handelt es sich um den maximalen invarianten Unterraum von $M(c,h)$. Dann wird mit $V(c,h) := M(c,h)/J(c,h)$ eine HGD der Virasoro-Algebra zu $h, c$ definiert, die keine invarianten Unterräume besitzt, also irreduzibel ist. $V(c,h)$ heißt 'Verma-Modul'.

Darstellungen, in denen die Form $\langle x \,|\, x\rangle$ positiv definit ist, bezeichnet man als 'unitär'.

$M(c,h)$ läßt sich bezüglich $L_0$ graduieren, d.h. es gilt:

$$M(c,h) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+} M(c,h)_{h+k} \tag{2.4.5}$$

wobei $M(c,h)_{h+k}$ der $L_0$-Eigenraum mit Eigenwert $h+k$ ist. Offensichtlich sind die Basis-Elemente (2.4.2) von $M(c,h)_{h+k}$ solche, bei denen die Summe der Indizes $\sum i_n = k$ ist.

Bis jetzt haben wir weder konstruktiv die Existenz der Virasoro-Algebra (2.2.10) gezeigt, noch irgendwelche HGDs explizit konstruiert. Dies soll nun nach einer in [33] vorgetragenen Idee geschehen. Dazu betrachten wir die Heisenberg-Algebra mit Generatoren $\mathbb{1}$ und $j_n$ (d.h. einem Spin 1-Feld $j$, das auch als 'Strom' bezeichnet wird), sowie den folgenden Vertauschungs-Relationen:

$$[j_m, j_n] = n\delta_{m+n,0}\mathbb{1} \tag{2.4.6}$$

Nun definieren wir für $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} L_0 &:= \frac{1}{2}N(j,j)_0 - \alpha_0^2 \\ L_k &:= \frac{1}{2}N(j,j)_k + \sqrt{2}\alpha_0(\partial j)_k \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Man rechnet explizit nach, daß die Generatoren (2.4.7) die Virasoro-Algebra (2.2.10) mit zentraler Ladung

$$c = 1 - 24\alpha_0^2 \tag{2.4.8a}$$

erfüllen. Man kann für die Heisenberg-Algebra leicht eine Fockraum-Darstellung mit kontravarianter, positiv definiter Bilinearform angeben. Diese enthält einem Vektor $|\, h\rangle$, der $j_0 \,|\, h\rangle = \mu \,|\, h\rangle$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ erfüllt. Auf diese Weise erhält man eine HGD der Virasoro-Algebra mit $h = \frac{\mu^2}{2} - \alpha_0^2$, die eine kontravariante Form besitzt. Diese Darstellung ist genau dann unitär, wenn $\alpha_0 \in i\mathbb{R}$ gilt. Dann ist bereits $M(c,h)$ irreduzibel. Betrachtet man ferner Tensorprodukte von Darstellungen, so sieht man, daß die meisten Darstellungen für $c > 1$ und $h \geq 0$ unitär sind (in der Tat sind sie es alle).

Die Darstellungen mit $c \leq 1$ sind erheblich schwieriger zu behandeln. Hier ist es das große Verdienst von Kac, die kontravariante Form durch die Kac'sche Determinanten-Formel genauer beschrieben zu haben. Die kontravariante Form (2.4.4) verschwindet auf $M(c,h)_{h+k} \times M(c,h)_{h+l}$ für $k \neq l$. Auf $M(c,h)_{h+k} \times M(c,h)_{h+k}$ kann die kontravariante Form durch eine quadratische Matrix beschrieben werden. Für die Determinante $\det_k(c,h)$ dieser Matrix gab Kac eine explizite Formel an [34].

Man definiert die folgenden Hilfsgrößen ($\alpha_0$ wie oben):

$$\alpha_\pm = \alpha_0 \pm \sqrt{1+\alpha_0^2} \tag{2.4.8b}$$

$$h_{c;r,s} = \frac{1}{4}\big((\alpha_- r + \alpha_+ s)^2 - (\alpha_- + \alpha_+)^2\big) \tag{2.4.8c}$$

Dann gilt für die Determinante $\det_n(c,h)$:

$$\det_n(c,h) = K \prod_{\substack{r,s\in\mathbb{Z}_+ \\ 1\leq rs\leq n}} (h - h_{c;r,s})^{p(n-rs)} \tag{2.4.9}$$

Dabei ist $K$ eine positive Normierungs-Konstante und $p(k)$ die Zahl der Partitionen von $k$. Die Darstellungen für $h = h_{c;r,s}$ heißen 'degeneriert', da in ihnen Nullzustände (d.h. Zustände, die auf allen einschließlich sich selbst orthogonal sind) existieren. Der Beweis von (2.4.9) ist etwas länglich [35]. Zuerst zeigt man, daß $\det_n(c,h)$ einen Faktor der Form (2.4.9) haben muß, und dann ermittelt man die Ordnung in $h$, wodurch man (2.4.9) bis auf die Konstante $K$ gezeigt hat. Schließlich muß noch $K$ bestimmt werden.

Der Physiker ist insbesondere an solchen Darstellungen interessiert, die in der Vakuum-Darstellung (d.h. $h = 0$) nicht-triviale Nullzustände besitzen. Solche Darstellungen heißen 'minimal'. Um diese genauer zu untersuchen, definiert man $k := \alpha_+$. Dann kann man $\alpha_- = -\frac{1}{k}$ und $\alpha_0 = \frac{1}{2}(k - \frac{1}{k})$ schreiben. Nun sucht man nach Nullstellen der Determinante (2.4.9), d.h. nach Lösungen von $h_{c;r,s} = 0$ nach (2.4.8c). Man überzeugt sich leicht davon, daß es genau dann solche Lösungen gibt, wenn $k^2 = \frac{s+1}{r+1}$ oder $k^2 = \frac{s-1}{r-1}$ ist. $k^2$ muß also eine rationale positive Zahl sein, damit nicht-triviale Nullzustände in der Vakuum-Darstellung existieren. Man schreibt nun $k^2 = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden $p, q \in \mathbb{Z}_+$ und erhält durch Einsetzen in (2.4.8) für die minimalen Darstellungen der Virasoro-Algebra:

$$c_{p,q} = 1 - 6\frac{(p-q)^2}{pq} \tag{2.4.10a}$$

$$h_{p,q;r,s} = \frac{(pr-qs)^2 - (p-q)^2}{4pq}\,, \quad 1 \leq r \leq q-1\,, \;\; 1 \leq s \leq p-1\,. \tag{2.4.10b}$$

Die Einschränkungen an den Index-Bereich in (2.4.10b) ergeben sich durch die Forderung, daß $\det_n(c_{p,q},\cdot)$ eine Nullstelle für $n = (p-1)(q-1)$ haben soll.

Eine wichtige Beobachtung ist, daß die unitären Darstellungen der Virasoro-Algebra für $c < 1$ durch (2.4.10) mit $q = p+1$ gegeben sind. Daß dies eine notwendige Bedingung ist, leitet man aus der Tatsache ab, daß $c$ und alle $h_{c;r,s}$ nach (2.4.8) positiv (oder Null) sein müssen. Um die Unitarität dieser Darstellungen jedoch zu beweisen, benötigt man die Sugawara- [36] und Goddard-Kent-Olive-Konstruktion [37]. Diese werden wir im folgenden andeuten, auf Beweise dabei jedoch verzichten.

Die Sugawara-Konstruktion ist die nicht-abelsche Verallgemeinerung der Konstruktion (2.4.7) (ohne die Deformation $\alpha_0$). Dazu konstruiert man zu einer reduktiven Lie-Algebra $g$ die zentrale Erweiterung ihrer Loop-Algebra (die auch 'Kac-Moody-Algebra' genannt wird), indem man Ströme $j^a$ mit den folgenden Vertauschungsrelationen einführt:

$$[j^a_m, j^b_n] = i \sum_c f^{ab}_c j^c_{m+n} + \frac{k}{2}\, n\, \delta^{a,b} \delta_{m+n,0} \mathbb{1} \tag{2.4.11}$$

wobei die $f^{ab}_c$ die Strukturkonstanten der Lie-Algebra $g$ sind. $k$ heißt 'Level'. Dieser ist in jeder irreduziblen Darstellung ganzzahlig und nach oben beschränkt. Den Darstellungsraum der Kac-Moody-Algebra zu Level $k$ werden wir auch als '$g_k$' bezeichnen. Nun definiert man:

$$L^g_n := \frac{1}{(k + cox_g)} \sum_{a=1}^{\dim(g)} \frac{1}{2} N(j^a, j^a)_n \tag{2.4.12a}$$

Die duale Coxeter-Zahl von $g$ wurde dabei als $cox_g$ bezeichnet. Da in (2.4.12a) implizit der Casimir-Operator zweiter Ordnung von $g$ eingesetzt wurde, bezeichnet man diese Konstruktion auch als 'Casimir-Konstruktion'. Die Generatoren (2.4.12a) erfüllen die Virasoro-Algebra mit zentraler Ladung:

$$c_{g,k} = \frac{k \dim(g)}{k + cox_g} \tag{2.4.12b}$$

Für $g = A_l$ gilt z.B. $\dim(g) = l^2 + 2l$ und $cox_g = l + 1$. Damit sieht man explizit, daß die zentrale Ladung nach (2.4.12b) immer $c \geq 1$ erfüllt. Dies gilt für alle einfachen Lie-Algebren.

Um mit Hilfe der Sugawara-Konstruktion auf $c < 1$ zu kommen, benötigt man zusätzlich die Goddard-Kent-Olive-Konstruktion. Besitzt eine Lie-Algebra $H$ eine Unteralgebra $h$, so kann man auf $H/h$ unter Verwendung von $L^H$ und $L^h$ ebenfalls eine Virasoro-Algebra definieren:

$$L^{H/h}_n := L^H_n - L^h_n \tag{2.4.13a}$$

Diese Generatoren erfüllen die Virasoro-Algebra (2.2.10) mit folgender zentraler Ladung:

$$c_{H/h} = c_{H,k_H} - c_{h,k_h} \tag{2.4.13b}$$

Auf diese Weise kann man durch Differenzbildung der zentralen Ladungen auch $c < 1$ erhalten. Da diese Konstruktion den Quotienten zweier Lie-Algebren bildet, heißt sie auch 'Coset-Konstruktion'.

Betrachtet man nun die Lie-Algebra $g = A_1$ mit Kac-Moody-Algebren zu $H := g \oplus g$ und $h := g$ sowie Darstellungsräumen $g_k \otimes g_1$ bzw. $g_{k+1}$, so kann man $h$ in $H$ diagonal einbetten.

Die durch (2.4.13) definierten Virasoro-Algebren liefern dann eine explizite Konstruktion für die unitäre minimale Serie der Virasoro-Algebra über das Coset:

$$\frac{g_k \otimes g_1}{g_{k+1}} \tag{2.4.14}$$

In dieser Konstruktion ist (analog wie bei der Konstruktion (2.4.7)) die Unitarität der Darstellung explizit nachprüfbar.

Nun soll etwas näher darauf eingegangen werden, warum die in diesem Kapitel geschilderten Konstruktionen für den Physiker interessant sind. Offensichtlich bauen alle hier explizit angegeben Realisierungen der Virasoro-Algebra auf Strömen auf. Damit ist die Virasoro-Algebra durch eine freie Feldtheorie realisiert. Die Bedeutung der Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra ist jedoch noch weitreichender.

In der Feldtheorie ist Unitarität Ausdruck der Wahrscheinlichkeits-Erhaltung und somit unabdingbar. In der statistischen Mechanik dagegen spielt Unitarität eine vergleichsweise untergeordnete Rolle. Dort drückt sich Unitarität als Reflexions-Positivität aus, d.h. durch eine hermitesche Transfer-Matrix. Jedes primäre Feld $\phi(z)$ einer konformen Feldtheorie liefert über $|\,h\rangle := \phi(0)\,|\,v\rangle$ eine HGD der Virasoro-Algebra mit $h = d(\phi)$. Die Feldtheorie ist genau dann unitär, wenn alle diese HGDs unitär sind. Für $c < 1$ muß die zentrale Ladung einer unitären Theorie folglich (2.4.10a) mit $q = p + 1$ erfüllen, und auch die konformen Dimensionen der primären Felder müssen nach (2.4.10b) parametrisiert sein. Damit besitzt eine unitäre konforme Feldtheorie für $c < 1$ nur endlich viele primäre Felder und wird auf diese Weise handhabbar. Auf jeden Fall gilt für solche Feldtheorien die Parametrisierung nach (2.4.10).

Für nicht-unitäre Theorien ist der Zusammenhang nicht ganz so trivial. Hier ist die Forderung der Isomorphie von Zustands- und Feld-Raum von zentraler Bedeutung. Er wurde von Belavin, Polyakov und Zamolodchikov genutzt, um aus der Existenz von Nullzuständen in der Vakuum-Darstellung Differentialgleichungen für die Korrelatoren herzuleiten und auf diese Weise die Feldtheorie zu untersuchen [3]. In diesem Kapitel wurde gezeigt, daß die Forderung des Verschwindens von Nullzuständen in der Vakuum-Darstellung auch in jeder HGD die zentrale Ladung auf die minimale Serie und die zugehörigen $L_0$-Eigenwerte auf eine endliche Menge einschränkt. Damit ist auch hier für die konforme Feldtheorie nicht nur die zentrale Ladung, sondern insbesondere auch der Feldgehalt auf eine endliche Menge festgelegt.

Viele der durch (2.4.8) gegebenen HGDs liefern $h \notin \frac{\mathbb{Z}}{2}$. Die zugehörigen Felder sind in $\mathcal{F}$ also nicht lokal. Dennoch sind auch sie interessant, da sie als chirale Anteile von lokalen Feldern in der nicht-chiralen Feld-Algebra $\mathcal{A}$ interpretiert werden können.

In diesem Kapitel wurde gezeigt, daß man mit Hilfe der Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra einige konforme Feldtheorien mit $c < 1$ klassifizieren kann. Dies ist für $c > 1$ dagegen nicht möglich. Hier verspricht man sich von erweiterten Symmetrie-Algebren, den $\mathcal{W}$-Algebren, wichtige Hilfestellungen. Diese werden im nächten Kapitel eingeführt.

# 3. $\mathcal{W}$-Algebren

## 3.1. Der Begriff der $\mathcal{W}$-Algebra

In diesem Kapitel werden wir grundlegende Ergebnisse über $\mathcal{W}$-Algebren präsentieren. Das Gesamtkonzept und die Hauptsätze gehen auf W. Nahm zurück [27]. Beweise und detailliertere Diskussionen sind in [27] zu finden. Einige Details findet man z.B. auch in [10].

Sei $\mathcal{F}$ die Algebra lokaler chiraler Felder einer konformen Feldtheorie, die in zweidimensionaler Raumzeit definiert ist (mit kompaktifiziertem Raum). Um aus $\mathcal{F}$ eine $\mathcal{W}$-Algebra zu machen, braucht man außer der Ableitung zwei Produkte. Eines soll die Struktur einer Lie-Klammer tragen, und das andere soll ein nicht-triviales (anti-) kommutatives Produkt ergeben: Das 'normalgeordnete Produkt' (NOP). Man führt in $\mathcal{F}$ somit einen graduierten Kommutator ein. Dazu definiert man für zwei lokale Felder $\phi$ und $\chi$:

$$\epsilon_{\phi\chi} = \begin{cases} -1, & \text{wenn } \phi \text{ und } \chi \text{ Fermionen sind} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Dann fordert man für den graduierten Kommutator $[\phi, \chi]_\pm$ der Felder $\phi$ und $\chi$ die folgende Eigenschaft:

$$[\phi, \chi]_\pm = -\epsilon_{\phi\chi}[\chi, \phi]_\pm \tag{3.1.2}$$

Man beachte, daß für $\phi$ oder $\chi$ bosonisch, der bisher betrachtete übliche Kommutator $[\phi, \chi]$ tatsächlich der Gleichung (3.1.2) genügt.

Lokalität und Invarianz unter rationalen konformen Transformationen stellen bereits erhebliche Einschränkungen an den graduierten Kommutator (3.1.2) dar. So ist der Kommutator zweier lokaler chiraler Felder bis auf einige 'Strukturkonstanten' fast völlig durch ihre konforme Dimension bestimmt. Es ist somit möglich, eine allgemeine Formel für den Kommutator zweier lokaler quasiprimärer Felder herzuleiten, die (2.2.10) und (2.3.8) als Spezialfälle einschließt.

**Theorem (W. Nahm) :** Sei $\{\phi_i \mid i \in I\}$ eine Menge nicht-derivativer Felder mit halbzahligen oder ganzen konformen Dimensionen $d(\phi_i) = d(i)$, die zusammen mit ihren Ableitungen $\mathcal{F}$ aufspannen. Seien die folgenden Konstanten definiert:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \langle v \mid \phi_{i,-d(i)}\phi_{j,d(j)} \mid v \rangle\,, \\ C_{ijk} &= \langle v \mid \phi_{k,-d(k)}\phi_{i,d(k)-d(j)}\phi_{j,d(j)} \mid v \rangle\,. \end{aligned} \tag{3.1.3a}$$

Dann hat die Lie-Algebra der Fourier-Komponenten der links-chiralen Felder die Form

$$[\phi_{i,m}, \phi_{j,n}]_\pm = \sum_{k\in I} C_{ij}^k\, p_{ijk}(m,n)\phi_{k,m+n} + d_{ij}\,\delta_{n,-m}\binom{n+d(i)-1}{2d(i)-1} \tag{3.1.3b}$$

mit $C_{ij}^{l} d_{lk} = C_{ijk}$ und $\binom{a}{n} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{a-i}{i+1}$. Führt man die Abkürzung $h(ijk) = d(i) + d(j) - d(k)$ ein, so sind die universellen Polynome $p_{ijk}$ gegeben durch

$$p_{ijk}(m,n) = \sum_{\substack{r,s\in\mathbb{Z}_+ \\ r+s=h(ijk)-1}} c_{r,s}^{ijk} \binom{m+d(i)-1}{r} \binom{n+d(j)-1}{s} \tag{3.1.3c}$$

mit

$$c_{r,s}^{ijk} = (-1)^r \frac{(2d(k)-1)!}{(d(i)+d(j)+d(k)-2)!} \prod_{t=0}^{s-1} (2d(i)-2-r-t) \prod_{u=0}^{r-1} (2d(j)-2-s-u)\,. \tag{3.1.3d}$$

Die universellen Polynome haben die folgende Symmetrie-Eigenschaft:

$$p_{ijk}(-m,-n) = (-1)^{(h(ijk)-1)} p_{ijk}(m,n) \tag{3.1.3e}$$

Die $C_{ijk}$ sind invariant unter geraden Permutationen ihrer Indizes und ändern sich bei ungeraden um den Faktor $(-1)^{([d(i)+\frac{1}{2}]+[d(j)+\frac{1}{2}]+[d(k)+\frac{1}{2}])}$.

Es ist wünschenswert, eine (anit-) Involution $\phi \mapsto \phi^+$ auf den quasiprimären Feldern zu haben. Wir definieren also:

$$\phi_n^+ = (-1)^{[d(\phi)+\frac{1}{2}]} \phi_{-n} \tag{3.1.4a}$$

Wie jede Involution auf den quasiprimären Feldern, läßt sich diese Involution zu einer Involution auf ganz $\mathcal{F}$ ausdehnen. Die Existenz einer solchen Involution impliziert, daß die Strukturkonstanten $d_{ij}$ und $C_{ijk}$ reell sind. Manchmal wird eine bestimmte Basiswahl allerdings imaginäres $C_{jjj}$ für ein Feld $\phi_j$ ergeben. Dann kann man stattdessen $\tilde{\phi}_j := i\phi_j$ wählen. Dieses Feld genügt dann

$$\tilde{\phi}_n^+ = -(-1)^{[d(\tilde{\phi})+\frac{1}{2}]} \tilde{\phi}_{-n} \tag{3.1.4b}$$

und die Strukturkonstante $\tilde{C}_{jjj}$ ist reell. In der Tat kann man auf diese Weise für alle in dieser Arbeit vorgestellten $\mathcal{W}$-Algebren eine (anti-) Involution definieren. Allerdings kann die Verwendung einer solchen Involution für die Konstruktion zu Inkonsistenzen führen, so daß man sie hierfür nicht verwenden sollte, sondern lediglich schwächere Eigenschaften, wie in Kapitel 3.3 vorgestellt.

Außer der eben eingeführten Lie-Klammer-Struktur lassen $\mathcal{W}$-Algebren eine weitere wichtige Operation zu. Und zwar kann in der Algebra das normalgeordnete Produkt zweier Felder gebildet werden. Normalerweise definiert man als Verallgemeinerung von (2.3.9) das normalgeordnete Produkt zweier chiraler Felder $\phi, \chi$ unter Verwendung ihrer Fourier-Komponenten als Verallgemeinerung der Definition (2.3.9) aus Kapitel 2.3 wie folgt:

$$N(\phi,\chi)_n := \epsilon_{\phi\chi} \sum_{k<d(\chi)} \phi_{n-k}\chi_k + \sum_{k\geq d(\chi)} \chi_k \phi_{n-k} \tag{3.1.5}$$

Dabei ist $\epsilon_{\phi\chi}$ durch (3.1.1) definiert.

In dieser Form tritt es in der OPE von $\phi$ und $\chi$ auf, aber es ist kein nicht-derivatives Feld, so daß man z.B. Gleichung (3.1.3) nicht verwenden kann, um den Kommutator mit den anderen Feldern zu bestimmen. Damit sich das NOP unter rationalen konformen Transformationen 'brav' verhält, sind bei dem in (3.1.5) definierten $N(\phi,\chi)$ einige Korrekturen anzubringen.

**Definition und Lemma (W. Nahm):** Unter obigen Annahmen und Verwendung obiger Notation definiert man das normalgeordnete Produkt zweier chiraler Felder durch:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\phi_j,\partial^n\phi_i) := &\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\binom{2(d(i)+d(j)+n-1)}{r}^{-1}\binom{2d(i)+n-1}{r}\\ &\times\partial^r N(\phi_j,\partial^{n-r}\phi_i)\\ &-(-1)^n\sum_{\{k:h(ijk)\geq 1\}}C_{ij}^k\binom{h(ijk)+n-1}{n}\binom{2(d(i)+d(j)+n-1)}{n}^{-1}\\ &\times\binom{2d(i)+n-1}{h(ijk)+n}\binom{\sigma(ijk)-1}{h(ijk)-1}^{-1}\frac{\partial^{h(ijk)+n}\phi_k}{(\sigma(ijk)+n)(h(ijk)-1)!}\end{aligned}\qquad(3.1.6)$$

mit $\sigma(ijk)=d(i)+d(j)+d(k)-1\,.$

Dieses Feld ist quasiprimär und hat konforme Dimension $d(i)+d(j)+n\,.$

Die Operation der Normalordnung ist (anti-) kommutativ – d.h. $\mathcal{N}(\phi,\chi)=\mathcal{N}(\chi,\phi)$, wenn eines der beiden Felder $\phi,\chi$ ein Boson ist, und $\mathcal{N}(\phi,\chi)=-\mathcal{N}(\chi,\phi)$ für zwei Fermionen –, aber nicht assoziativ. Es erfüllt $\mathcal{N}(\phi,\partial\chi)=-\mathcal{N}(\partial\phi,\chi)\,.$

Zum Beweis von Formel (3.1.6) (und (3.1.3)) wendet man den Cauchy'schen Integralsatz auf die OPE der Felder $\phi_i(z)$ und $\phi_j(w)$ an:

$$\phi_i(z)\phi_j(w)=\sum_{k\in J}C_{ij}^k\sum_r\frac{1}{(z-w)^{h(ijk)-r}}\frac{a_{ijk}^r}{r!}\partial^r\phi_k(w)\qquad(3.1.7)$$

wobei die Felder $\phi_k$ sowohl im Kommutator auftretende Felder sind als auch quasiprimäre normalgeordnete Produkte. Die $a_{ijk}^r$ sind geeignete Konstanten. Auf die OPE (3.1.7) kann man allerdings nur dann den Cauchy'schen Integralsatz anwenden, wenn über ganze Potenzen in $z$ und $w$ integriert wird. Insbesondere kann man (3.1.6) nur unter der Voraussetzung herleiten, daß bei dem rechten Feld $\phi_i$ ausschließlich ganze Potenzen von $z$ in der Fourier-Entwicklung auftreten.

Die Formel (3.1.6) sieht kompliziert aus, aber sie vereinfacht stark, wenn man nur normalgeordnete Produkte von quasiprimären Feldern mit Ableitungen von $L$ betrachtet.

Da alle Felder, die in den Kommutatoren einer $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebra auftreten, in dieser Form geschrieben werden können, ist die vereinfachte Form von (3.1.6) recht nützlich:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}(\phi_j,\partial^n L) = &\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\binom{2(d(j)+n+1)}{r}^{-1}\binom{n+3}{r}\partial^r N(\phi_j,\partial^{n-r}L) \\
&-(-1)^n\binom{2(d(j)+n+1)}{n}^{-1}\frac{(n+1)(n+3)}{2(2d(j)+1+n)}\partial^{n+2}\phi_j
\end{aligned}
\tag{3.1.8}
$$

Zur Herleitung von Formel (3.1.8) bemerkt man zuerst, daß ausschließlich Felder $\phi_k$ mit $\mid d(\phi_j)-d(\phi_k)\mid\leq 1$ in der letzten Summe von (3.1.6) auftreten können. Durch Vergleich von (3.1.3) und (2.3.8) kann man nun die verbleibenden Strukturkonstanten $C_{ij}^k$ ablesen.

Bis jetzt ist der Feldgehalt von $\mathcal{F}$ in jedem Fall unendlich. Deswegen unterscheidet man zwischen zusammengesetzten und nicht-zusammengesetzten 'einfachen' Feldern. Wir wollen dies nun genauer definieren. Kann ausgehend von Feldern $\{\phi_i\}_{i\in I}$ eine Basis für $\mathcal{F}$ mit den Operationen Normalordnung und Ableitung aufgebaut werden, so sagt man, daß die Felder $\phi_i$ die Feld-Algebra $\mathcal{F}$ generieren. Sind alle Felder $\phi_i$ quasiprimär und zueinander orthogonal (bezüglich der durch die $d$-Matrixelemente (3.1.3a) definierten Bilinearform), so bezeichnet man diese Felder als 'einfach'. Im folgenden wird eine Algebra $\mathcal{F}$ lokaler chiraler Felder, die von einfachen Feldern $\{\phi_1,\ \dots\ ,\ \phi_n\}$ generiert wird, als $\mathcal{W}(d(\phi_1),...,d(\phi_n))$ bezeichnet. Wenn wir zudem annehmen, daß $\phi_1$ der Generator der Virasoro-Algebra mit konformer Dimension 2 ist, werden wir von einer $\mathcal{W}(2,d(\phi_2),...,d(\phi_n))$-Algebra sprechen.

Man sollte beachten, daß diese Definition einfacher Felder bedeutet, daß einfache Felder entweder primär oder gleich dem Energie-Impuls-Operator $L$ sind. Somit sind im Fall einer $\mathcal{W}(2,d(\phi_2),...,d(\phi_n))$-Algebra die Felder $\phi_2,\ \dots\ ,\ \phi_n$ primär.

Die Kommutatoren normalgeordneter Produkte sind vollständig durch die Kommutatoren der einfachen Felder, aus denen sie aufgebaut sind, festgelegt. Das bedeutet, daß die gesamte Lie-Algebra-Struktur der $\mathcal{W}$-Algebra bereits durch die Vertauschungsrelationen der einfachen in ihr enthaltenen Felder festgelegt ist.

Analog zu Lie-Algebren fordert man auch für $\mathcal{W}$-Algebren die Gültigkeit der Jacobi-Identität. Bei der Jacobi-Identität muß allerdings berücksichtigt werden, daß $\mathcal{W}$-Algebren i.a. einen graduierten Kommutator besitzen. Enthält die Theorie Fermionen, so ist dies durch geeignete Vorzeichen in der Jacobi-Identität zu berücksichtigen. Man fordert:

$$
\epsilon_{\phi_i,\phi_k}[[\phi_{i,r},\phi_{j,s}]_\pm,\phi_{k,t}]_\pm+\epsilon_{\phi_j,\phi_i}[[\phi_{j,s},\phi_{k,t}]_\pm,\phi_{i,r}]_\pm+\epsilon_{\phi_k,\phi_j}[[\phi_{k,t},\phi_{i,r}]_\pm,\phi_{j,s}]_\pm=0 \tag{3.1.9}
$$

Setzt man nun in diese Jacobi-Identität die Kommutator-Formel (3.1.3) ein, so erhält man auf der rechten Seite eine Summe über Felder $X_l$, mit Koeffizienten, die polynomial von den Indizes $r,s,t$ und über die Strukturkonstanten von den Feldern $\phi_i$, $\phi_j$, $\phi_k$ und $X_l$ abhängt. Eine wichtige Beobachtung ist nun, daß der Faktor vor den Feldern $X_l$ mit gleicher Dimension für geeignete $r, s, t$ (aber jeweils unendlich viele) proportional zu der Assoziativitätsbedingung für folgende Korrelatoren ist:

$$\langle v \mid X_{l',-r-s-t}\phi_{i,r}\phi_{j,s}\phi_{k,t} \mid v\rangle \tag{3.1.10}$$

wobei die Menge der Felder $X_{l'}$ gleich der Menge der Felder $X_l$ ist. Diese Unterscheidung ist notwendig, da zu dem Faktor vor $X_l$ alle Felder der gleichen Dimension beitragen. Um die Äquivalenz der Jacobi-Identität mit der Assoziativität von (3.1.10) zu zeigen, berechnet man

$$\begin{aligned} 0 =& \langle v \mid X_{l',-r-s-t}\phi_{i,r}[\phi_{j,s},\phi_{k,t}]_\pm \mid v\rangle \\ & -\langle v \mid X_{l',-r-s-t}[\phi_{i,r},\phi_{j,s}]_\pm\phi_{k,t} \mid v\rangle \\ & -\epsilon_{\phi_i,\phi_j}\langle v \mid X_{l',-r-s-t}\phi_{j,s}[\phi_{i,r},\phi_{k,t}]_\pm \mid v\rangle \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

für $r < 0$ und $s < 0$. Nach dem Einsetzen dieser Kommutatoren ist ein weiterer Kommutatorschritt erforderlich, um die Dreipunktfunktionen auf die Strukturkonstanten (3.1.3a) multipliziert mit universellen Polynomen zurückzuführen. Da die Koeffizienten in der Jacobi-Identität polynomial in den Indizes sind, genügt die Assoziativität dieser Vierpunktfunktionen, um das Verschwinden der Jacobi-Koeffizienten für alle $r, s, t$ sicherzustellen. Die Jacobi-Identitäten sind also äquivalent zu der Assoziativität aller Vierpunktfunktionen.

Unter Verwendung der bis jetzt vorgestellten Aussagen geht man bei der Konstruktion einer $\mathcal{W}$-Algebra mit vorgegebenen einfachen primären Feldern $\{\phi_i\}$ wie folgt vor:

- Zuerst ermittelt man alle linear unabhängigen NOPs, die in den Kommutatoren der einfachen Felder auftreten können. Dies kann nach einem von M. Flohr beschriebenen Algorithmus durchgeführt werden [38]. Er basiert auf der folgenden Beobachtung. Sei $\psi$ ein quasiprimäres Feld der Dimension $\delta$. Dann verschwindet die quasiprimäre Projektion von $\partial\psi = [L_1, \psi]$ und führt somit zu einer Gleichung zwischen den quasiprimären NOPs der Dimension $\delta + 1$. Solche Gleichungen werden nun ausgewertet, um die Menge aller möglichen NOPs mit Dimension $\delta + 1$ zu einer Basis zu reduzieren. Formal wird dies beschrieben, indem man jedem quasiprimären Feld der Dimension $\delta$ eine farbige Partition $p(\delta)$ zuordnet (wobei Bosonen und Fermionen geeignet zu berücksichtigen sind). Die o.g. Gleichung läßt sich dann in Partitionen $p(\delta + 1)$ ausdrücken. Der Haupt-Schritt des Basis-Algorithmus besteht nun darin, für jedes $p(\delta)$ jeweils ein beliebiges $p(\delta + 1)$ zu streichen, das durch Addition einer 1 zu irgendeinem Element von $p(\delta)$ erzeugt werden kann.
- Dann berechnet man die Struktur-Konstanten, die in diesen Kommmutatoren auftreten. In diesem Stadium bleiben die Strukturkonstanten, die drei einfache Felder aneinander koppeln, freie Parameter.
- Als letztes muß die Gültigkeit der Jacobi-Identität überprüft werden. Man kann zeigen, daß die Überprüfung von Jacobi-Identitäten mit drei einfachen Feldern hinreichend ist, wobei man auch den Energie-Impuls-Operator nicht betrachten muß [39]. Man vermutet ferner, daß die Überprüfung der Koeffizienten vor den einfachen Feldern (mit Ausnahme von $L$) hinreichend ist. Bewiesen ist jedoch nur, daß die Überprüfung der Koeffizienten vor allen primären Feldern ausreicht [39].

Der hier beschriebene Algorithmus wurde von R. Blumenhagen u.a. [10] für ein oder zwei zusätzliche einfache Felder mit Dimensionen bis zu acht durchgeführt und später von A. Kliem bis zur Dimension 10 vorangetrieben [40], wobei allerdings als Vereinfachung nur der Fall verschwindender Selbstkopplung untersucht wurde. Die wesentlichen Ergebnisse sollen im folgenden Kapitel vorgestellt werden.

Bis jetzt gelten alle Formeln unabhängig von der Wahl der Normierung der einfachen Felder. Man benötigt lediglich, daß die $d$-Matrix der einfachen Felder symmetrisch ist. Wir wollen diese Freiheit in der Normierung nutzen und uns nun auf die folgende Normierung der einfachen Felder $\{\phi_i\}$ festlegen:

$$d_{\phi_i \phi_j} = \delta_{i,j} \frac{c}{d(\phi_i)} \tag{3.1.12}$$

Da $d_{LL} = \frac{c}{2}$ gilt, ist diese Normierung zusammen mit Gleichung (3.1.3a) konsistent mit der auch sonst häufig gewählten Normierung $\langle v \,|\, v \rangle = 1$.

Abschließend soll noch der Fall diskutiert werden, daß die Abbildung $\phi_j \mapsto -\phi_j$ ein Automorphismus der Algebra ist. Zuerst ist es wichtig festzustellen, daß dieser Automorphismus ein äußerer und kein innerer (d.h. von der Algebra selbst erzeugter) Automorphismus ist. Äußere Automorphismen führen nämlich zu neuen Möglichkeiten; so kann man in dem Fall des hier diskutierten Automorphismus statt periodischer Randbedingungen auch antiperiodische Randbedingungen für das Feld $\phi_j$ fordern, d.h. $\phi_j(e^{2\pi i} z) = -\phi_j(z)$. In der Fourier-Entwicklung dieses Feldes treten nun halbzahlige Potenzen auf:

$$\phi_j(z) = \sum_{n - d(\phi_j) \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} z^{n - d(\phi_j)} \phi_{j,n} \tag{3.1.13}$$

Ist das Feld $\phi_j$ fermionisch, so führt dies auf den 'Ramond'-Sektor der Algebra. Im Falle eines bosonischen Feldes spricht man von einem 'Twist'. Eine ausführlichere Diskussion dieser Situation findet man in [41] oder aber auch z.B. in [42]. Man beachte allerdings, daß es nun keinen Sinn mehr macht, die Vakuum-Darstellung der Algebra zu betrachten, da z.B. (3.1.3a) nicht mehr gilt.

Ferner sei daran erinnert, daß Formel (3.1.6) genau dann nicht gilt, wenn es sich bei $\phi_j$ um ein Fermion im Ramond-Sektor oder um ein getwistetes Boson handelt.

In diesem Kapitel sollen die $\mathcal{W}$-Algebren vorgestellt werden, deren Darstellungstheorie später genauer untersucht wird. Wir werden uns dabei auf die Präsentation von Ergebnissen zur Existenz von $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren beschränken; die teilweise auch bekannten Aussagen zu deren Interpretation werden vorerst nicht wiedergeben.

Bereits 1985 hatte A.B. Zamolodchikov die Virasoro-Algebra um Felder mit Dimension bis zu drei erweitert [8] und so das Studium von $\mathcal{W}$-Algebren initiiert. Insbesondere die $\mathcal{W}(2,\frac{5}{2})$ und die $\mathcal{W}(2,3)$ sind also bereits seit langem bekannt. Zamolodchikov hat diese Algebren mit Hilfe des 'konformen Boostraps' untersucht, der eine Kreuzungs-Symmetrie der Vierpunkt-Funktionen sicherstellt [3]. Mit der gleichen Methode haben K. Hamada u.a. [43] und D.H. Zhang [44] die Spin 4 Algebra untersucht. Schließlich wurde sie von J.M. Figueroa-O'Farrill u.a. [45] auch auf den Spin 6 Fall angewandt. Algebren, bei denen das zusätzliche Feld kleine Dimension besitzt, wurden auch von P. Bouwknegt [46] untersucht.

Kürzlich haben R. Blumenhagen u.a. [10] sowie H.G. Kausch u.a. [9] viele neue $\mathcal{W}$-Algebren unter Verwendung der in Kapitel 3.1 erläuterten Methode konstruiert. Mit dieser algebraischen Methode wurden von A. Kliem [40] weitere Algebren konstruiert, die hier jedoch nicht weiter untersucht werden sollen. Zwar sind bei dieser Methode mehr Strukturkonstanten zu berechnen und auch die Form der normalgeordneten Produkte ist komplizierter als beim konformen Bootstrap. Dennoch besitzt sie nicht nur den Vorteil, daß dieser Algorithmus geradlinig und auf einem Computer implementierbar ist. Sie führt auch direkt zu einer Lie-Algebra-Struktur und eignet sich deswegen besonders für die Definition und das Studium von Höchstgewichtsdarstellungen.

Die Wahl einer Basis in $\mathcal{F}$ ist auf unterschiedliche Weise möglich und führt auch zu unterschiedlichen expliziten Ergebnissen für die Strukturkonstanten. Eindeutig sind jedoch die Werte der zentralen Ladung, für die eine $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebra existiert, sowie ihre Selbstkopplungskonstante. Eine mögliche Feldbasis sowie die zugehörigen relevanten Kopplungskonstanten wurden in [10] angegeben. In dieser Arbeit werden diese Ergebnisse verwendet; aus Platzgründen und aufgrund der geschilderten Mehrdeutigkeit wird hier jedoch auf eine Wiedergabe verzichtet (Man beachte, daß die Definitionen (3.18) in [10] der Felder $D5$ und $D6$ mit Dimension 12 ausgetauscht werden sollten, damit die Bezeichnungen mit den Kopplungskonstanten im Anhang der Referenz übereinstimmen).

Die im letzten Kapitel angeführten Symmetrie-Argumente zeigen, daß die Selbstkopplungskonstanten verschwinden müssen, wenn das zusätzliche einfache Feld keine gerade ganzzahlige Dimension besitzt. Man beobachtet deswegen vornehmlich Algebren, die verschwindende Selbstkopplung besitzen. Die folgende Tabelle enthält die Werte der zentralen Ladung, für die $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren mit $\frac{5}{2}\leq\delta\leq 8$ und verschwindender Selbstkopplung existieren:

| $\delta$ | *Algebra existiert mit $C_{WW}^W = 0$ für folgende Werte von c:* |
|---|---|
| $\frac{5}{2}$ | $-\frac{13}{14}$ |
| 3 | generisch, außer für $c = -\frac{22}{5}$ |
| $\frac{7}{2}$ | $\frac{21}{22}, -\frac{19}{6}, -\frac{161}{8}$ |
| 4 | $86 \pm 60\sqrt{2}$ |
| $\frac{9}{2}$ | $\frac{25}{26}, -\frac{7}{20}, -\frac{125}{22}, -\frac{279}{10}, -35$ |
| 5 | $\frac{6}{7}, -7, -\frac{350}{11}, 134 \pm 60\sqrt{5}$ |
| $\frac{11}{2}$ | $-\frac{217}{26}$ |
| 6 | $-\frac{516}{13}, -47, 194 \pm 112\sqrt{2}$ |
| $\frac{13}{2}$ | $\frac{9}{34}, -\frac{611}{14}, -\frac{111}{10}$ |
| 7 | $-\frac{25}{2}$ |
| $\frac{15}{2}$ | $\frac{25}{28}, -\frac{11}{38}, -\frac{39}{10}, -\frac{473}{34}, -\frac{825}{16}, -59$ |
| 8 | $-\frac{944}{17}$ |

Die $\mathcal{W}(2,4)$ ist für generisches $c$ konsistent. Ihre Selbstkopplungskonstante ist gegeben durch:

$$\left(C_{WW}^W\right)^2 = \frac{54(c+24)(c^2-172c+196)}{(5c+22)(7c+68)(2c-1)} \tag{3.2.1}$$

Die $\mathcal{W}(2,4)$ existiert nicht für $c \in \{-24, -\frac{22}{5}, -\frac{68}{7}, \frac{1}{2}\}$, also nicht für rationale Werte der zentralen Ladung und verschwindende Selbstkopplungskonstante.

Die $\mathcal{W}(2,6)$ existiert außer den in obiger Tabelle angegeben Werten der zentralen Ladung auch für generische zentrale Ladung mit nicht verschwindender Selbstkopplung. Die korrekte Selbstkopplungskonstante ist gegeben durch:

$$\left(C_{WW}^W\right)^2 = \frac{400(c^2-388c+4)(c+2)(c+47)^2(13c+516)^2}{3(5c+22)(7c+68)(2c-1)(5c+3)(3c+46)(3c+286)(11c+232)} \tag{3.2.2}$$

Für $c \in \{-2, -\frac{22}{5}, -\frac{68}{7}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, -\frac{46}{3}, -\frac{286}{3}, -\frac{232}{11}\}$ existiert die $\mathcal{W}(2,6)$ nicht.

Die $\mathcal{W}(2,8)$ existiert zwar nicht generisch, außer für $c = -\frac{944}{17}$ und verschwindende Selbstkopplung ist sie aber auch für die folgenden rationalen Werte der zentralen Ladung mit Selbstkopplung ungleich Null konsistent:

$$c \in \left\{\frac{21}{22}, -\frac{224}{65}, -\frac{1015}{2}, -23, -\frac{712}{7}, -\frac{3164}{23}\right\} \tag{3.2.3a}$$

Schließlich existiert die $\mathcal{W}(2,8)$ auch für folgende irrationale Werte der zentralen Ladung mit nicht verschwindender Selbstkopplungskonstante:

$$c = 350 \pm 252\sqrt{2} \tag{3.2.3b}$$

Es sei ferner darauf hingewiesen, daß außer den durch Lie-Algebren gegebenen $\mathcal{W}$-Algebren auch einige Beispiele mit drei Generatoren bekannt sind [10][9][40]. Diese Algebren sollen jedoch im folgenden nicht weiter diskutiert werden; häufig genügt bereits die Kenntnis ihrer expliziten Form auch für Aussagen über ihre Darstellungstheorie. Dies gilt z.B. für die $\mathcal{W}(2,4,6)$, die als bosonischer Sektor der Super-Virasoro-Algebra interpretiert werden kann [47]. Man kann deswegen erwarten, daß sich die Darstellungstheorie dieser $\mathcal{W}(2,4,6)$ auf die bekannte Darstellungstheorie der Super-Virasoro-Algebra zurückführen läßt.

In diesem Kapitel werden Grundbegriffe der Höchstgewichtsdarstellungen (HGDs) von $\mathcal{W}$-Algebren im allgemeinen und $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren im besonderen eingeführt. Die zuerst diskutierten Eigenschaften sind wohlbekannt. Bei $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren gibt es nur zwei einfache Felder. Das eine ist natürlich der Energie-Impuls Operator $L$. Das zweite Feld werden wir '$W$' nennen.

Wir wollen nun Höchstgewichtsdarstellungen von $\mathcal{W}$-Algebren definieren und uns dabei an der Darstellungstheorie von Lie-Algebren orientieren, insbesondere auch der in Kapitel 2.4 vorgestellten Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra. Man will die Graduierung (2.4.5) eines Verma-Moduls respektieren. Deswegen muß $L_0$ diagonal dargestellt werden, und somit können lediglich die Nullmoden von Feldern Eigenvektoren besitzen. Die Unteralgebra der Nullmoden wird im folgenden 'horizontale Unteralgebra' genannt. Eine maximale abelsche (bzgl. des normalen Kommutators, nicht des graduierten (3.1.2)) Unteralgebra (hier muß wieder Abgeschlossenheit bzgl. des graduierten Kommutators gelten) in der horizontalen Unteralgebra einer $\mathcal{W}$-Algebra werden wir 'Cartan-Unteralgebra' nennen. Diese Definition wäre für halbeinfache Lie-Algebren verträglich mit der üblichen Definition. Jede irreduzible Darstellung einer abelschen Algebra, insbesondere auch eine treue, ist bekanntlich eindimensional. Ein geeigneter Basis-Vektor für eine irreduzible Darstellung der Cartan-Unteralgebra wird 'Höchstgewichtsvektor' genannt. Es ist wichtig zu bemerken, daß die Eigenwerte der Nullmoden zusammengesetzter Felder bereits durch die der einfachen Felder bestimmt sind. Wir werden deswegen ausschließlich Eigenwertgleichungen für einfache Felder betrachten.

Diese allgemeine Betrachtung wird nun für $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren genauer ausgeführt. Sowohl für eine bosonische als auch für den Ramond-Sektor einer fermionischen $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebra wird die Cartan Unteralgebra von $L_0$ und $W_0$ generiert. Deswegen fordert man für eine Höchstgewichtsdarstellung, daß der Darstellungsraum einen Höchstgewichtsvektor $|h,w\rangle$ mit den folgenden Eigenschaften enthält:

$$L_0 \, |h,w\rangle = h \, |h,w\rangle \tag{3.3.1a}$$

$$W_0 \, |h,w\rangle = w \, |h,w\rangle \tag{3.3.1b}$$

$$L_n \, |h,w\rangle = 0 \quad \forall \, n < 0 \tag{3.3.1c}$$

$$W_n \, |h,w\rangle = 0 \quad \forall \, n < 0 \tag{3.3.1d}$$

Um den $L_0$-Eigenwert als Energie zu interpretieren zu können, fordert man $h \in \mathbb{R}$. Wie wir sehen werden ist es sinnvoll, für den $W_0$-Eigenwert $w \in \mathbb{C}$ zuzulassen.

Da negative Moden den Höchstgewichtsvektor annihilieren, sollte man genaugenommen von einer 'Tiefstgewichtsdarstellung' sprechen; normalerweise ist eine 'Höchstgewichtsdarstellung' nämlich durch das Verschwinden positiver Moden auf dem Höchstgewichtsvektor definiert. Aufgrund der Involution (3.1.4) kann man jedoch diese Feinheit ignorieren. Die hier gewählte Konvention hat den Vorteil, daß das Spektrum von $L_0$ nach unten beschränkt ist. Dies ist eine Eigenschaft, die jeder 'gute' Hamilton-Operator haben sollte.

Die Anwendung positiver Moden auf den Höchstgewichtsvektor führt zu neuen Zuständen, die vorerst allerdings nicht alle linear unabhängig sein müssen. Teilt man aus dem durch diese Zustände aufgespannten Vektorraum die linearen Abhängigkeiten und den maximalen echten Unter-Modul heraus, so führt dies auf einen Vektorraum, der im folgenden als $\mathcal{W}$-Algebra-Verma-Module $V(c,h,w)$ bezeichnet wird. Diese Bezeichnung verallgemeinert die Definition des Virasoro-Verma-Moduls $V(c,h)$. In der Sprechweise der Fusions-Algebren ist dies äquivalent dazu, konforme Familien mit der ganzen $\mathcal{W}$-Algebra und nicht nur mit der Virasoro-Algebra aufzubauen. So werden unterschiedliche Virasoro-Familien zusammengefaßt, und es besteht die Möglichkeit, daß Fusions-Algebren endlich werden, die unendlich viele Virasoro-Familien involvieren.

Nach Definition ist die Darstellung in $V(c,h,w)$ irreduzibel.

Der $\mathcal{W}$-Algebra-Verma-Modul ist $L_0$-graduiert; er kann analog (2.4.5) in eine direkte Summe von $L_0$-Eigenräumen zerlegt werden. Die Differenz zwischen dem $L_0$-Eigenwert und $h$ wird als 'Level' des Zustandes bezeichnet. Der Level berechnet sich als Summe der Indizes aller Moden, die auf den Höchstgewichtsvektor angewandt wurden.

Wir wollen uns nun dem fermionischen Fall zuwenden. In der Vakuum-Darstellung muß man nach Kapitel 3.1 die Moden eine fermionischen Feldes aus $\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ wählen. Da für eine fermionische $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebra die Abbildung $W \mapsto -W$ ein Automorphismus der Algebra ist (er ist offensichtlich auch der einzige Automorphismus), kann man in einer allgemeinen HGD die Indizes aus $\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ oder $\mathbb{Z}$ wählen. Die Wahl von periodischen Randbedingungen ergibt den Neveu-Schwarz-Sektor der Algebra, wohingegen anti-periodische Randbedigungen zum Ramond-Sektor führen. Wir weisen nochmals darauf hin, daß für eine irreduzible Darstellung einer $\mathcal{W}$-Algebra im Ramond-Sektor angenommen werden darf, daß auch $W_0$ ebenfalls (3.3.1b) erfüllt, obwohl der Antikommutator von $W_0$ mit sich nicht trivial ist.

Die Darstellung einer $\mathcal{W}$-Algebra muß den Kommutator respektieren. Deswegen ist der Kommutator (3.1.3b) in der Darstellung gleich dem folgenden Ausdruck:

$$[\phi_m, \chi_n]_\pm = \phi_m \chi_n - \epsilon_{\phi\chi} \chi_n \phi_m \tag{3.3.2}$$

Die Notation ist hier genaugenommen nicht sauber, da die lineare Darstellungs-Abbildung nicht explizit angegeben wurde.

Wendet man diese Formel bei einer fermionischen $\mathcal{W}$-Algebra im Ramond-Sektor auf $W_0^2$ an, so erhält man:

$$\begin{aligned} w^2 \mid h,w\rangle = W_0^2 \mid h,w\rangle &= \frac{1}{2}[W_0,W_0]_+ \mid h,w\rangle \\ &= f(c,h) \mid h,w\rangle \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Auf der rechten Seite steht kein $W$ mehr, da der Antikommutator eines fermionischen Feldes keine Fermionen enthalten kann. Für festes $c$ ist $f(c,h)$ ein Polynom in $h$ der Ordnung

$\delta - \frac{1}{2}$. Insbesondere gehören zwar sowohl $L_0$ als auch $W_0$ zu der Cartan-Unteralgebra. Da jedoch $w$ nach (3.3.3) durch $h$ bestimmt ist, ist eine HGD praktisch bereits durch den $L_0$-Eigenwert bestimmt.

Der erste Zugang zu dem Studium der HGDs von $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren basiert auf dem Isomorphismus (2.3.11) zwischen dem Raum der Zustände und dem Raum der Felder. Man erinnere sich, daß die Surjektivität der Abbildung der Felder auf die Zustände durch die Definition des Zustandsraumes sichergestellt ist; deren Injektivität dagegen eine Forderung ist. Dieser Isomorphismus wurde bereits von BPZ benutzt, um die Frage der Rationalität einer konformen Feldtheorie auf das Studium der Nullzustände im Virasoro-Verma-Modul zu reduzieren [3]. Eine mögliche Auswertung dieses Isomorphismus im Fall der $\mathcal{W}$-Algebren soll nun diskutiert werden. Eine sehr ausführliche Diskussion dieses Sachverhalts für den Fall der Virasoro-Algebra wurde von Feigin u.a. durchgeführt [48]. Dieser Referenz kann man für den Fall der Virasoro-Algebra auch entnehmen, wie die Frage der Irreduzibilität einer Darstellung mit der Existenz von Nullfeldern zusammenhängt. Wir haben in Kapitel 2.4 gezeigt, daß man HGDs der Virasoro-Algebra über die universelle Einhüllende der Algebra konstruieren kann. Das Ideal der Nullfelder führt dabei zu einem invarianten Unterraum und muß herausgeteilt werden. Leider lassen sich derartige Beobachtungen nicht notwendig auf die hier diskutierten $\mathcal{W}$-Algebren übertragen. Dennoch wurden in [48] auch $\mathcal{W}$-Algebren diskutiert, allerdings weicht das Verständnis einer $\mathcal{W}$-Algebra von dem unseren ab [1]).

An Nullfeldern, die ausschließlich aus dem Energie-Impuls-Tensor aufgebaut sind, ist man aus zwei Gründen nicht interessiert. Einerseits treten solche Nullfelder nur in Virasoro-minimalen Modellen auf. Diese kann man allgemein behandeln (vgl. Kapitel 4.2) und es ist deswegen bei ihnen nicht unbedingt erforderlich, Nullfelder explizit zu studieren. Andererseits kann man anhand solcher Nullfelder $w$ nicht festlegen. Man ist aber an Einschränkungen nicht nur für $h$ sondern auch für $w$ existiert. Nicht zuletzt führen solche Nullfelder meist entweder zur Inkonsistenz der Algebra oder besitzen eine hohe konforme Dimension.

Die nächsteinfachen Nullfelder enthalten genau einmal das Feld $W$. Ist der führende Term $\mathcal{N}(W,\partial^n L)$, so erhält man z.B. eine Bedingung des folgenden Typs:

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathcal{N}(W,\partial^n L)_0 - \sum_Y \alpha_Y Y_0)\,|h,w\rangle \\ &= w\ p(h)\,|h,w\rangle \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

$Y$ steht hierbei für andere Felder, die genau ein $W$ enthalten. Es kann vorkommen, daß das Polynom $p(h)$ identisch Null ist. Aus (3.3.4) folgt außer für die Nullstellen von $p(h)$ $w = 0$. Da der Grad von $p(h)$ ferner durch $\frac{n+2}{2}$ beschränkt ist, folgt daß es außer in dem erwähnten Trivialfall maximal $[\frac{n+2}{2}]$ HGDs mit $w \neq 0$ gibt.

[1]) Die in [48] explizit diskutieren $\mathcal{W}$-Algebren enthalten einfache Nullfelder, die nach unserem Verständnis weggelassen werden müßten.

Die kompliziertesten Nullfelder, die im Rahmen dieser Arbeit untersucht wurden, sind quadratisch in dem zusätzlichen einfachen Feld; also vom Typ $\mathcal{N}(W, \partial^n W)$ [1]). Solche Felder mußten z.B. für die $\mathcal{W}(2,8)$ bereits für die Konstruktion der Algebra betrachtet werden. So haben R. Blumenhagen u.a. [49] [40] gezeigt, daß man für alle rationalen $c$-Werte, bei denen die $\mathcal{W}(2,8)$ konsistent ist, $\mathcal{N}(W,W)$ als Linearkombination von Feldern, die höchstens ein $W$ enthalten, ausdrücken kann. Dies wurde gezeigt, indem die $d$-Matrix aller quasiprimären Felder mit konformer Dimension 16 ausgewertet wurde.

In diesem Fall erhält man eine quadratische Beziehung mit polynomialen Koeffizienten in $h$ für festes $c$, indem man folgenden Ausdruck betrachtet.

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathcal{N}(W, \partial^n W)_0 - \sum_X \alpha_X X_0) \, |h, w\rangle \\ &= (\kappa w^2 + p_1(h) w + p_2(h)) \, |h, w\rangle \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Die $p_i$ sind für festes $c$ Polynome in $h$. Die Felder $X$ sind dabei im ungünstigsten Fall ebenfalls quadratisch in $W$. Die Konstante $\kappa$ hängt nur von der Dimension des Feldes $W$ und von $n$ ab, wenn alle Felder $X$ linear in $W$ sind; andernfalls gehen in $\kappa$ auch die Koeffizienten $\alpha_X$ ein. Bezeichnet man die höchste Dimension aller $X$ mit $\gamma$ (das hier gleich $2\delta + n$ ist), so ist der Grad von $p_1$ durch $\frac{\gamma-\delta}{2}$ beschränkt, und der Grad von $p_2$ wird $\frac{\gamma}{2}$ nicht überschreiten. Da Gleichung (3.3.5) eine quadratische Gleichung in $w$ ist, kann die zugehörige $\mathcal{W}$-Algebra höchstens zwei Zweige von Darstellungen besitzen, die jeweils $h$ als freien Parameter haben.

Wenn man zwei Nullfelder hat oder aber auch wenn man Produkte eines Nullfeldes mit anderen Feldern betrachtet und dann von Null verschiedene Moden einsetzt, kann man weitere Relationen finden, die evtl. die relevanten $h$-Werte auf eine endliche Menge einschränken. Wie dies im Einzelfall aussieht, soll später am Beispiel der $\mathcal{W}(2,3)$ im Detail vorgeführt werden.

Da dieser Zugang auf dem Isomorphismus zwischen Feld- und Zustands-Raum aufbaut, findet man mit ihm die physikalisch relevanten HGDs. In ihm kann man jedoch nicht ausschließen, daß auch die Definition von weiteren, nicht vollständig reduziblen HGDs möglich ist.

Der zweite Zugang beruht auf einer tiefer liegenden Beobachtung. So hat R. Varnhagen bemerkt, daß Vierpunkt-Korrelatoren zwischen Höchstgewichten nicht assoziativ sein müssen, selbst wenn die Algebra die Jacobi-Identität erfüllt [50]. Dazu ist äquivalent, daß die Überprüfung der Jacobi-Identität einer konsistenten $\mathcal{W}$-Algebra in einer HGD anstelle der Vakuum-Darstellung zu nicht-trivialen Ergebnissen führt. Dies führt zu Einschränkungen der Höchstgewichte, mit denen man überhaupt konsistente Darstellungen der $\mathcal{W}$-Algebra definieren kann, und bedeutet deswegen deutlich mehr als die Ergebnisse, die man durch das Studium von Nullfeldern erzielen kann.

[1]) Man beachte, daß bei bosonischen $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren $\mathcal{N}(W, \partial^n W)$ für ungerades $n$ und für fermionische Algebren für gerades $n$ trivial verschwindet. Die Untersuchung solcher Felder führt lediglich zu trivialen Ergebnissen.

Es ist dabei wichtig, daß man den Kommutator sowohl nach der abstrakten Formel (3.1.3b) ausdrückt, wie auch die Darstellungseigenschaft (3.3.2) einsetzt; d.h. man muß auch tatsächlich überprüfen, ob die Darstellung den Kommutator korrekt abbildet. Es ist nämlich leicht einzusehen, daß man nur triviale Ergebnisse erhält, wenn man sich auf einen der beiden Ausdrücke für den Kommutator beschränkt.

Um dieses Programm durchführbar zu machen, benötigt man allerdings weitere Strukturen in den HGDs.

Der $\mathcal{W}$-Algebra-Verma-Modul kann unter Verwendung der Involution (3.1.4a) mit einer (anti)-hermitschen Sesquilinear-Form ausgestattet werden. Unter Verwendung der Dirac-Notation $|\,h,w\rangle^+ = \langle h,w\,|$ erhält man für quasiprimäre $\phi_i$ mit Hilfe der Involution (3.1.4a):

$$\begin{aligned}\langle h,w\,|\ L_n &= 0 \quad \forall\, n>0\\ \langle h,w\,|\ W_n &= 0 \quad \forall\, n>0\\ \langle h,w\,|\ \phi_{1,n_1}...\phi_{k,n_k}\,|\,h,w\rangle &= \prod_{i=1}^{k}(-1)^{[d(\phi_i)+\frac{1}{2}]}\ \overline{\langle h,w\,|\ \phi_{k,-n_k}...\phi_{1,-n_1}\,|\,h,w\rangle}\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Da man mit der Involution folgern kann, daß alle Strukturkonstanten $d_{ij}$ und $C_{ijk}$ reell sein sollten, haben R. Blumenhagen u.a. ursprünglich einen Teil der interessantesten Algebren als nicht konsistent angesehen [10]. Auch für $w$ würde man unerwünschte zusätzliche Einschränkungen erhalten. Deswegen geben wir schwächere Forderungen an, die zu vergleichbaren Formeln führen.

Anstelle über den dualen $\mathcal{W}$-Algebra-Verma-Modul eine Sesquilinearform auf dem $\mathcal{W}$-Algebra-Verma-Modul zu definieren, werden wir uns auf das Studium der zu $|\,h,w\rangle$ dualen Linearform beschränken. Diese Linearform werden wir $\langle h,w\,|$ nennen. Definitionsgemäß operiert $\langle h,w\,|$ wie folgt auf dem $\mathcal{W}$-Algebra-Verma-Modul:

$$\langle h,w\,|\,h,w\rangle = 1 \tag{3.3.7a}$$

$$\langle h,w\,|\,s\rangle = 0 \quad \text{sonst} \tag{3.3.7b}$$

für alle Zustände $|\,s\rangle$ mit $L_0$-Eigenwerten größer als $h$.

Da die horizontale Unteralgebra $L_0$-Eigenräume invariant läßt, und $\langle h,w\,|$ nur auf dem $L_0$-Eigenraum mit Eigenwert $h$ nicht verschwindet, gelten die folgenden Gleichungen:

$$\langle h,w\,|\ L_0 = h\langle h,w\,| \tag{3.3.7c}$$

$$\langle h,w\,|\ W_0 = w\langle h,w\,| \tag{3.3.7d}$$

Die Linearform ist so definiert, daß eine Korrelationsfunktion nur dann nicht verschwindet, wenn die Summe der Indizes Null ist. Ferner folgt aus der Höchstgewichtseigenschaft, daß Monome in den Moden angewandt auf den Höchstgewichtsvektor verschwinden, wenn die Summe der Indizes negativ ist. Aus diesen beiden Bemerkungen folgen die Eigenschaften:

$$\langle h,w\,|\ L_n = 0 \qquad \forall\, n>0 \tag{3.3.7e}$$

$$\langle h, w \mid W_n = 0 \quad \forall\, n > 0 \tag{3.3.7f}$$

Für die Herleitung einer letzten Gleichung nehmen wir an, daß die folgende Beziehung gilt:

$$\langle h, w \mid \phi_{1,n_1}\phi_{2,n_2}...\phi_{k,n_k} \mid h, w\rangle = \langle h, w \mid [..[[\phi_{1,n_1}, \phi_{2,n_2}]_\pm ... \phi_{k,n_k}]_\pm \mid h, w\rangle$$

Dann kann man mit der Kommutator-Formel (3.1.3b) $\langle h, w \mid \phi_{1,n_1}...\phi_{k,n_k} \mid h, w\rangle$ und $\langle h, w \mid \phi_{k,-n_k}...\phi_{1,-n_1} \mid h, w\rangle$ berechnen. Aus der Symmetrie-Eigenschaft (3.1.3e) der universellen Polynome und der Symmetrie des zentralen Terms in (3.1.3b) folgert man:

$$\langle h, w \mid \phi_{1,n_1}...\phi_{k,n_k} \mid h, w\rangle = \prod_{i=1}^{k}(-1)^{[d(\phi_i)+\frac{1}{2}]} \langle h, w \mid \phi_{k,-n_k}...\phi_{1,-n_1} \mid h, w\rangle \tag{3.3.7g}$$

Durch Vergleich von (3.3.7g) und (3.3.6) schließt man, daß solche Korrelatoren reell sein müssen, wenn eine Involution existiert. Insbesondere müssen also auch die Strukturkonstanten reell sein; dies ist in der Tat auch bereits ausreichend, um die Existenz einer Involution sicherzustellen.

Da i.a. bei Beginn der Rechnung die Existenz einer Involution noch nicht sichergestellt ist, empfiehlt es sich, nur die immer gültigen Gleichungen (3.3.7a) – (3.3.7g) zu verwenden. Auf die Verwendung einer Involution in expliziten Rechnungen sollte man verzichten.

Offensichtlich gelten ähnliche Bemerkungen für die Vakuum-Darstellung. Eine Folgerung ist, daß die $d$-Matrix immer symmetrisch sein muß.

Die allgemeine graduierte Jacobi-Identität (3.1.9) für eine $\mathcal{W}$-Algebra spezialisiert für drei Moden des Feldes $W$ zu:

$$0 = [[W_k, W_l]_\pm, W_m] + zykl. \tag{3.3.8}$$

Ein Dreipunkt-Korrelator ist nur dann verschieden von Null, wenn $m = -(k+l)$ gilt, und dies ist nur für eine bosonische Algebra möglich (oder für eine fermionische Algebra im Ramond-Sektor). Seien $r, s > 0$ dann folgt aus (3.3.8) in einem Dreipunkt-Korrelator:

$$\begin{aligned} 0 = &\langle h, w \mid [W_{-r}, W_{-s}]_\pm W_{r+s} \mid h, w\rangle \\ &- \langle h, w \mid W_{-s}[W_{r+s}, W_{-r}]_\pm \mid h, w\rangle \\ &- \langle h, w \mid W_{-r}[W_{-s}, W_{r+s}]_\pm \mid h, w\rangle \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Für einen Vierpunkt-Korrelator erhält man mit der Notation $k = -n$, $l = -m$ nach Mutiplikation mit $W_n$ von links unter der Annahme $n, m > 0$ (für eine bosonische Algebra sollte auch $n \neq m$ sein):

$$\begin{aligned} 0 =&\langle h, w \mid [[W_{-n}, W_{-m}]_\pm, W_m] W_n \mid h, w\rangle + zykl. \\ =&+ \langle h, w \mid [W_{-n}, W_{-m}]_\pm W_m W_n \mid h, w\rangle \\ &- \langle h, w \mid W_{-m}[W_m, W_{-n}]_\pm W_n \mid h, w\rangle \\ &+ \langle h, w \mid [W_m, W_{-n}]_\pm W_{-m} W_n \mid h, w\rangle \\ &- \langle h, w \mid W_{-n}[W_{-m}, W_m]_\pm W_n \mid h, w\rangle \\ &+ \langle h, w \mid [W_{-m}, W_m]_\pm W_{-n} W_n \mid h, w\rangle \end{aligned} \tag{3.3.10a}$$

wobei der äußere Kommutator nach (3.3.2) eingesetzt wurde. Für die praktische Rechnung ist dieser Ausdruck ausreichend. Um den Zusammenhang zu einer Assoziativitätsbedingung deutlicher zu zeigen, wollen wir diesen Ausdruck jedoch noch etwas umformen:

$$\begin{aligned}
0 =& \langle h,w \mid \; [[W_{-n},W_{-m}]_\pm,W_m]W_n \; | h,w\rangle \; + zykl. \\
=& + \langle h,w \mid \; W_{-n}W_{-m}[W_m,W_n]_\pm \; | h,w\rangle \\
& - \langle h,w \mid \; W_{-n}[W_n,W_{-m}]_\pm W_m \; | h,w\rangle \\
& + \langle h,w \mid \; W_{-n}W_m[W_n,W_{-m}]_\pm \; | h,w\rangle \\
& - \langle h,w \mid \; W_{-n}[W_{-m},W_m]_\pm W_n \; | h,w\rangle \\
& + \langle h,w \mid \; [W_{-n},W_n]_\pm W_{-m}W_m \; | h,w\rangle
\end{aligned} \tag{3.3.10b}$$

Dabei wurde in (3.3.10a) die Beziehung (3.3.7g) sowie $[W_{-k},W_k]_\pm \; | h,w\rangle \; = W_{-k}W_k \; | h,w\rangle$ eingesetzt.

Damit ist klar, was für Höchstgewichtsdarstellungen von $\mathcal{W}$-Algebren überprüft werden sollte. Zuerst schreibt man eine Jacobi-Identität von der Form (3.3.9) oder (3.3.10) mit festen Indizes hin. Nun verwendet man zur Berechnung der verbleibenden Kommutatoren die Kommutator-Formel (3.1.3b). Dann müssen die quasiprimären normalgeordneten Produkte nach Formel (3.1.8) ausgerechnet und die Strukturkonstanten eingesetzt werden. Schließlich verwendet man die Vorschriften (2.2.10) und (2.3.8), um die $L$'s und $W$'s auszukommutieren. Bei dieser Prozedur ist es möglich, daß Korrelatoren übrig bleiben, die $W$-Moden enthalten. Dann muß man die Kommutator-Formel (3.1.3b) erneut einsetzen und die beschriebene Prozedur wiederholen. Am Ende erhält man im günstigen Fall eine nicht-triviale Bedingung für die Existenz von HGDs.

Natürlich sollte man idealer Weise mit allgemeinen Indizes rechnen, aber in der Praxis ist dies äußerst schwierig, da die Summationsgrenzen der normalgeordneten Produkte von den Indizes abhängen. Der allgemeine Ausdruck wäre ein Polynom in den Indizes, und deswegen ist eine hinreichend große Anzahl verschiedener fester Kombinationen der Indizes auch hinreichend. Den Grad der allgemeinen Lösung kann man anhand des Grades der universellen Polynome (3.1.3c) abschätzen. Bei den expliziten Rechnungen wurden mit Indizes $m$ und $n$ größer als 3 (oder 4 für die $\mathcal{W}(2,8)$) nie neue Bedingungen gefunden. Man beobachtet also, daß erheblich weniger Korrelatoren für ein vollständiges Studium benötigt werden, als der polynomiale Grad des generischen Ausdrucks ist.

Vergleicht man die Definitionen (3.3.1) und (2.3.10), so stellt man fest, daß auf dem Vakuum mehr Moden verschwinden als auf einem Höchstgewichtsvektor – auch dann, wenn $h$ und $w$ Null sind. Die expliziten Rechnungen zeigen jedoch, daß alle möglichen Bedingungen trivial erfüllt sind, wenn $h = w = 0$ gilt. Dies sollte auch so sein, denn man möchte den Höchstgewichtsvektor $| \, 0,0\rangle$ mit dem Vakuum $| \, v\rangle$ identifizieren. Die expliziten Ergebnisse zeigen, daß $|0,0\rangle$ tatsächlich immer die in (2.3.10) für $|v\rangle$ geforderten Eigenschaften hat.

# 4. Ergebnisse zu Darstellungen von $\mathcal{W}$-Algebren

## 4.1. Ein einfaches Beispiel: Die $\mathcal{W}(2,3)$

In diesem Kapitel soll die im letzten Kapitel geschilderte Nullfeld-Methode an einem einfachen, gut bekannten Beispiel demonstriert werden: Der $\mathcal{W}(2,3)$. Die $\mathcal{W}(2,3)$ ist nach der Formel (3.1.3) gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (n-m)L_{m+n} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n,-m} \\
[L_m, W_n] &= (n-2m)W_{m+n} \\
[W_m, W_n] &= C_{WW}^{L} p_{332}(m,n)L_{m+n} + C_{WW}^{\Lambda} p_{334}(m,n)\Lambda_{m+n} + \frac{c}{3}\binom{n+2}{5}\delta_{n,-m}
\end{aligned}
\tag{4.1.1}
$$

mit

$$\Lambda = \mathcal{N}(L,L) = N(L,L) - \frac{3}{10}\partial^2 L \tag{4.1.2a}$$

$$C_{WW}^{L} = 2, \qquad C_{WW}^{\Lambda} = \frac{32}{5c+22} \tag{4.1.2b}$$

$$p_{334}(m,n) = \frac{n-m}{2}, \qquad p_{332}(m,n) = \frac{n-m}{60}(2m^2 - mn + 2n^2 - 8) \tag{4.1.2c}$$

Für diese Algebra stellt bereits die spezielle Form der universellen Polynome sicher, daß der Term vor $W$ in der Jacobi-Identität (3.1.9) dreier einfacher Felder für alle Werte der zentralen Ladung verschwindet.

Diese Algebra wurde bereits 1985 von A.B. Zamolodchikov [8] konstruiert und seitdem ausführlich untersucht. Die $\mathcal{W}(2,3)$ ist nach der $\mathcal{W}(2,\frac{5}{2})$ das einfachste Beispiel einer $\mathcal{W}$-Algebra, die nicht linear in den Feldern schließt (wenn man sie nicht als unendlich erzeugt betrachten will), sondern auch unendlich viele normalgeordnete Produkte in den einfachen Feldern involviert. Der Kommutator von $\Lambda$ mit sich enthält nämlich Felder der Dimension 6 und in deren Kommutatoren tauchen wiederum Felder bis zur Dimension 10 auf. So erhält man schließlich Felder beliebig hoher Dimension.

Auch ist über die Darstellungstheorie und damit die rationalen Modelle der $\mathcal{W}(2,3)$ einiges bekannt (vgl. z.B. [51]). Insbesondere kennt man auch Coset-Konstruktionen für die $\mathcal{W}(2,3)$, die z.B. $su(3)$ [52] [53], aber auch allgemeinere affine Lie-Algebren verwenden [54]. Deswegen ist die Jacobi-Identität (3.3.10) in jeder Höchstgewichtsdarstellung erfüllt. Das folgende Beispiel soll zeigen, daß auch hier das Studium von Nullfeldern interessante Ergebnisse liefert.

So sind im Fall $c = \frac{4}{5}$ die Felder

$$\begin{aligned} & \mathcal{A} := \mathcal{N}(W,W) - \frac{95}{117}\mathcal{N}(\Lambda, L) + \frac{11}{6}\mathcal{N}(L, \partial^2 L) \\ \text{und} \qquad & \mathcal{B} := \mathcal{N}(W, \partial^2 L) - \frac{315}{1196}\mathcal{N}(\mathcal{N}(W,L),L) \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Nullfelder. Nun kann man z.B. im Neveu-Schwarz-Sektor für $c = \frac{4}{5}$ folgende Zustände berechnen:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 \mid h,w\rangle &= -\frac{1}{585}((95h-7)(5h-2)h - 585w^2) \mid h,w\rangle \\ \mathcal{B}_0 \mid h,w\rangle &= -\frac{7}{1196}(15h-1)(3h-2)w \mid h,w\rangle \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Offensichtlich gilt $\mathcal{B}_0 \mid h,w\rangle = 0$ nur für entweder $w = 0$ oder $h = \frac{1}{15}$ oder $h = \frac{2}{3}$. Für den Fall $w = 0$ verschwindet zusätzlich $\mathcal{A}_0 \mid h,w\rangle$ genau dann, wenn $h = 0$, $h = \frac{7}{95}$ oder $h = \frac{2}{5}$. Für die beiden $h$-Werte, wo bereits $\mathcal{B}_0 \mid h,w\rangle$ verschwindet, wird nun durch die Bedingung $\mathcal{A}_0 \mid h,w\rangle = 0$ der Wert von $w^2$ festgelegt. Folglich verschwinden die Felder $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ nur in Höchstgewichtsdarstellungen der $\mathcal{W}(2,3)$ bei $c = \frac{4}{5}$ zu nicht mehr als fünf $h$-Werten. Dadurch ist natürlich noch nicht sichergestellt, daß in diesen Höchstgewichtsdarstellungen alle Nullfelder trivial operieren. In der Tat gehört $h = \frac{7}{95}$ nicht zu dem rationalen Modell der $\mathcal{W}(2,3)$ bei $c = \frac{4}{5}$. Davon kann man sich z.B. überzeugen, indem man

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{-1}\mathcal{B}_1 \mid h,w\rangle &= \frac{49}{836793360}(1170(225h^2-160h+14)(90h-71)w^2 \\ &\quad + (80h+3)(27h-7)^2(5h-2)^2 h) \mid h,w\rangle \\ \mathcal{B}_{-2}\mathcal{B}_2 \mid h,w\rangle &= \frac{49}{209198340}(585(20250h^3+6075h^2-2605h-5734)w^2 \\ &\quad + 2(72900h^4+610605h^3-570491h^2+38684h-2184)(5h-2)h) \mid h,w\rangle \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

berechnet und feststellt, daß die Ergebnisse für $h = \frac{7}{95}$ und $w = 0$ nicht verschwinden, was sie aber für alle anderen Darstellungen tun. Insbesondere erkennt man an (4.1.4) und (4.1.5), daß bereits die Kenntnis eines einzigen Nullfeldes ($\mathcal{B}$) ausreicht, um die beiden Eigenwerte von $W_0$ und $L_0$ korrekt festzulegen.

An Gleichung (4.1.1) liest man ab, daß sich die Struktur der $\mathcal{W}(2,3)$ nicht ändert, wenn man $W$ durch $-W$ ersetzt. Es ist also möglich $W(e^{2\pi i}z) = -W(z)$, d.h. antiperiodische Randbedingungen, zu fordern (wie in Kapitel 3.1 geschildert). Dies impliziert, daß die Moden des Feldes $W$ halbzahlig werden. Die so getwistete Algebra enthält nun nur noch Nullmoden eines einzigen Feldes (des Energie-Impuls-Tensors), und man kann dessen Eigenwert bereits durch das Studium eines Nullfeldes auf endliche viele Werte einschränken. Man beachte, daß diese Argumentation bei der $\mathcal{W}(2,3)$ unabhängig von der zentralen Ladung gilt.

Da für den Fall $c = \frac{4}{5}$ die Berechnung des Anteils $N(W,W)$ von $\mathcal{A}$ Probleme bereitet, soll dies durch das Studium des Feldes $\mathcal{B}$ geschehen. Um das Problem auf eine Eigenwert-Gleichung für $L_0$ zu reduzieren, muß man nun das Produkt zweier Moden von $\mathcal{B}$ betrachten, wobei die Summe der Indizes verschwinden muß. Man berechnet z.B.:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{-\frac{1}{2}}\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}\ |h,w\rangle &= p_1(h)(40h-1)^2(8h-1)\ |h,w\rangle \\ \mathcal{B}_{-\frac{3}{2}}\mathcal{B}_{\frac{3}{2}}\ |h,w\rangle &= p_2(h)(40h-1)(8h-1)\ |h,w\rangle \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

wobei $p_1$ und $p_2$ zwei Polynome in $h$ sind, deren größter gemeinsamer Teiler 1 ist. Somit sind die physikalisch relevanten Darstellungen der $\mathcal{W}(2,3)$ bei $c=\frac{4}{5}$ im getwisteten Sektor für $h \in \{\frac{1}{40}, \frac{1}{8}\}$ zu suchen.

Der hier diskutierte Fall der getwisteten $\mathcal{W}(2,3)$ bei $c=\frac{4}{5}$ läßt sich als chiraler Anteil des Drei-Zustands-Potts-Modells mit getwisteten Randbedingungen interpretieren, welches bereits 1986 von J.L. Cardy untersucht wurde [55]. Eine numerische Verifikation des Feldgehaltes bei periodischen bzw. zyklischen Randbedingungen findet man in den Areiten von G.v. Gehlen u.a. (vgl. z.B. [56]). Für eine Diskussion dieses Modells in einem allgemeinen Rahmen sei auf den Artikel von A.B. und Al.B. Zamolodchikov [57] verwiesen. Das Drei-Zustands-Potts-Modell ist ein Spezialfall der $\mathbb{Z}_3$-Parafermionen, die in [58] untersucht wurden. Diese parafermionischen Modelle basieren allerdings ausschließlich auf dem ungetwisteten Sektor der $\mathcal{W}(2,3)$, so daß die Darstellungen des getwisteten Sektors zu zusätzlichen Feldern korrespondieren.

Durch das Studium von Nullfeldern lassen sich praktisch alle Darstellungen der $\mathcal{W}(2,3)$ untersuchen. Beschränkt man sich auf Felder mit maximaler Dimension 7, so findet man je mindestens zwei Nullfelder für $c=\frac{4}{5}$, $c=-2$, $c=-23$ und $c=-\frac{114}{7}$. In allen Fällen führt im getwisteten Sektor bereits die Betrachtung eines der beiden Felder zu endlich vielen $h$-Werten, während man sonst auch mit zwei Nullfeldern $h$ nicht unbedingt auf eine endliche Menge einschränken kann. Außer für $c=\frac{4}{5}$ findet man auch für $c=-23$ und $c=-\frac{114}{7}$ rationale Theorien. Die möglichen $h$-Werte für beide Sektoren sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

<table>
<tr><th colspan="7">$\mathcal{W}(2,3)$</th></tr>
<tr><th colspan="2">$c=\frac{4}{5}$</th><th colspan="2">$c=-23$</th><th colspan="2">$c=-\frac{114}{7}$</th><th>$c=-2$</th></tr>
<tr><th>normal</th><th>getwistet</th><th>normal</th><th>getwistet</th><th>normal</th><th>getwistet</th><th>getwistet</th></tr>
<tr><td>$0$<br>$\frac{2}{3}$<br>$\frac{2}{5}$<br>$\frac{1}{15}$</td><td>$\frac{1}{8}$<br>$\frac{1}{40}$</td><td>$0$<br>$-\frac{1}{2}$<br>$-\frac{3}{4}$<br>$-\frac{7}{8}$<br>$-1$</td><td>$-\frac{31}{32}$<br>$-\frac{23}{32}$<br>$-\frac{15}{16}$</td><td>$0$<br>$-\frac{3}{7}$<br>$-\frac{4}{7}$<br>$-\frac{5}{7}$</td><td>$-\frac{5}{8}$<br>$-\frac{19}{56}$<br>$-\frac{39}{56}$</td><td>$-\frac{3}{32}$<br>$\frac{5}{32}$</td></tr>
</table>

Wir haben hier bereits die $h$-Werte des getwisteten Sektors für $c=-2$ mit aufgeführt. Im ungetwisteten Sektor konnte jedoch keines der Wertepaare $(h,w)$, die folgende Relation erfüllen, ausgeschlossen werden:

$$w^2 = \frac{2}{27}(8h+1)h^2 \tag{4.1.7}$$

In der Tat gehört $c = -2$ auch nicht zur minimalen Serie der $\mathcal{W}(2,3)$.

Die minimale Serie der $\mathcal{W}(2,3)$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} c_{p,q} &= 2\big(1 - 12\frac{(p-q)^2}{pq}\big) \\ h_{p,q;r_1,s_1,r_2,s_2} &= \frac{3(q(r_1+r_2) - p(s_1+s_2))^2 + (q(r_1-r_2) - p(s_1-s_2))^2}{12pq} + \frac{c_{p,q} - 2}{24} \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

wobei $p > 2$, $q > p$ und $p$ und $q$ teilerfremd sein müssen. Die $r_i$ und $s_i$ müssen die Bedingungen $r_1 + r_2 < p$ und $s_1 + s_2 < q$ erfüllen. Die Parametrisierung des $c$-Wertes findet man z.B. in [59] oder auch in [60]. Die $h$-Werte werden i.a. jedoch nur für den unitären Fall (d.h. $q = p + 1$) angegeben (vgl. z.B. [58]).

In der Tat lassen sich für $c \in \{-23, -\frac{114}{7}, \frac{4}{5}\}$ die Höchstgewichtsdarstellungen im ungetwisteten Sektor nach (4.1.8) parametrisieren. Dies ist insbesondere auch ein Hinweis darauf, daß die Formel für die $h$-Werte korrekt auf den nicht-unitären Fall verallgemeinert wurde. Die getwisteten Darstellungen dagegen sind nicht durch (4.1.8) erfaßt, und selbst ihre korrekte Parametrisierung ist derzeit noch eine offene Frage. Man darf aber erwarten, daß sich z.B. die Coset-Konstruktionen für die $\mathcal{W}(2,3)$ so modifizieren lassen, daß auch der getwistete Sektor mit erfaßt wird.

Zwar gilt $c_{2,3} = -2$, aber hier ist $p$ nicht größer als 2 und es gibt somit kein minimales Modell der $\mathcal{W}(2,3)$ zu diesem $c$-Wert. Auf eine mögliche Interpretation dieses Modells werden wir im Kapitel 4.4 eingehen.

Viele der in Kapitel 3.2 angegebenen $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren lassen sich als Unteralgebren der Feld-Algebra Virasoro-minimaler Modelle interpretieren. Vom Algebra-Standpunkt aus findet man diese Diskussion angewandt auf $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren in [10]. In diesem Fall läßt sich die Darstellungstheorie der $\mathcal{W}$-Algebra auf die Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra zurückspielen. Für $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren geht diese Diskussion auf R. Varnhagen zurück [50]. In diesem Kapitel sollen diese Erkenntnisse kurz zusammengefaßt und z.T. auch auf den bosonischen und insbesondere den getwisteten Fall verallgemeinert werden.

Zuerst wollen wir jedoch kurz die Situation wiederholen, in der Virasoro-minimale Modelle zu $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren führen. Besitzt ein minimales Modell ein primäres Feld mit halb- oder ganzzahliger konformer Dimension und schließt die OPE dieses Feldes mit sich in seiner eigenen konformen Familie und der des Energie-Impuls-Operators, so ist es möglich, daß dieses Feld zusammen mit dem Energie-Impuls-Operator eine $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebra generiert[1]). Hinweise auf die Existenz einer solchen lokalen chiralen Unteralgebra der Feld-Algebra kann man z.B. aus der Betrachtung der Fusionsregeln erhalten. Eine ausführliche Diskussion vom Standpunkt der modular invarianten Zustandssummen findet man in der Arbeit von A.N. Schellekens u.a. [61].

Da die konforme Familie eines primären Feldes eine Darstellung der Virasoro-Algebra liefert, ist jedes primäre Feld des minimalen Modells ein Kandidat für einen Höchstgewichtsvektor in der Darstellung der ganzen $\mathcal{W}$-Algebra. Die zentrale Ladung, die Dimension des einfachen Feldes sowie alle Werte von $h$ müssen sich in diesem Fall nach (2.4.10) mit geeigneten $p,q$'s parametrisieren lassen; insbesondere erhält man auf diese Weise nur endlich viele HGDs. Im folgenden werden wir immer $p$ gerade und $q$ ungerade wählen, was für alle Virasoro-minimalen Modelle möglich ist, die $\mathcal{W}$-Algebren enthalten und hier diskutiert werden.

In allen Fällen, wo man eine $\mathcal{W}$-Algebra durch ein Virasoro-minimales Modell ausdrücken kann, lassen sich die Charaktere der $\mathcal{W}$-Algebra als endliche Summe von Virasoro-Charakteren darstellen. Da man das modulare Transformationsverhalten der Charaktere der Virasoro-Algebra kennt, kann man daraus das Verhalten der $\mathcal{W}$-Algebra-Charaktere ableiten. Somit ist die Darstellungs-Matrix der Modultransformation $S$ bekannt, und man kann auch die Fusionskonstanten nach der Formel von E. Verlinde bestimmen [30]. Dies wurde von R. Varnhagen in [50] für den fermionischen Fall bis einschließlich zur Berechnung der Fusions-Regeln im Neveu-Schwarz-Sektor durchgeführt und in [19] weiter verallgemeinert.

Es sei hier an die Definition des Charakters $\chi_h$ für eine HGD der Virasoro-Algebra erinnert:

$$\chi_h(\tau) := \mathrm{tr}_{V(c,h)}\left(e^{2\pi i(L_0-\frac{c}{24})\tau}\right) \tag{4.2.1}$$

[1]) Beispiele dafür, daß außer dem Energie-Impuls-Operator auch tatsächlich das Feld selbst auftreten kann, findet man bei den bosonischen Algebren in der $(D_{\frac{q}{2}+1}, E_6)$-Serie.

wobei $V(c,h)$ der Verma-Modul der Virasoro-Algebra ist. Den Charakter $\chi_h^W$ für eine HGD einer $\mathcal{W}$-Algebra definiert man ganz analog unter Verwendung der $\mathcal{W}$-Algebra-Verma-Moduls $V(c,h,w)$ als:

$$\chi_h^W(\tau) := \mathrm{tr}_{V(c,h,w)}\left(e^{2\pi i(L_0-\frac{c}{24})\tau}\right) \tag{4.2.2}$$

In den Fällen, wo $h$ als $h_{p,q;r,s}$ geschrieben werden kann, werden wir abkürzend auch $h_{r,s}$ und $\chi_{r,s}$ anstelle von $\chi_h$ schreiben (analog für $\chi_h^W$). Kann der Charakter einer $\mathcal{W}$-Algebra als Summe von Virasoro-Charakteren geschrieben werden, so muß aufgrund der obigen Definitionen der $h$-Wert für eine HGD der $\mathcal{W}$-Algebra der kleinste der $h$-Werte der Virasoro-HGDs sein.

Der oben angedeutete Zusammenhang zwischen Virasoro-minimalen Modellen und $\mathcal{W}$-Algebren läßt sich auch durch Betrachtung der A-D-E-Klassifikation modular invarianter Zustandssummen von A. Cappelli u.a. [62] herstellen. Dies soll im Rest dieses Kapitels insbesondere mit Blick auf die Darstellungstheorie näher ausgeführt werden. Hinweise auf den möglichen Feldgehalt der $\mathcal{W}$-Algebra liefert der Summand mit der Vakuum-Darstellung in der Zustandssumme; die anderen Summanden in der Zustandssumme führen zu Charakteren von HGDs dieser $\mathcal{W}$-Algebra.

Der einfachste Fall wird durch die Proposition in Kapitel 4 von [10] beschrieben. Diese $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren stehen in engem Zusammenhang mit der $(A_{q-1}, D_{2n})$-Serie, wobei $n$ eine ganze oder halbe positive Zahl ist. Sie erfüllen $\delta = (q-2)(n-1)$ und mit $p = 4n-2$ ist ihre zentrale Ladung durch (2.4.10a) gegeben. In diesem Fall sind die Charaktere für die HGDs der $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebra gegeben durch:

$$\begin{array}{lllll}
\text{Sektor 1}: & \chi_{i,j}^W = \chi_{i,j} + \chi_{q-i,j}\ , & 1 \le i \le \frac{q}{2}\ , & 1 \le j < \frac{p}{2}\ , & i,j \in \mathbb{Z}\ , j \text{ ungerade} \\
 & \chi_{i,\frac{p}{2}}^W = \chi_{i,\frac{p}{2}} \qquad , & 1 \le i \le \frac{q}{2}\ , & i \in \mathbb{Z}\ , \frac{p}{2} \text{ ungerade} & \\
\text{Sektor 2}: & \chi_{i,j}^W = \chi_{i,j} + \chi_{q-i,j}\ , & 1 \le i \le \frac{q}{2}\ , & 1 \le j < \frac{p}{2}\ , & i,j \in \mathbb{Z}\ , j \text{ gerade} \\
 & \chi_{i,\frac{p}{2}}^W = \chi_{i,\frac{p}{2}} \qquad , & 1 \le i \le \frac{q}{2}\ , & i \in \mathbb{Z}\ , \frac{p}{2} \text{ gerade} &
\end{array} \tag{4.2.3}$$

Man erhält für die HGDs der $\mathcal{W}$-Algebra $L_0$-Eigenwerte $h_{i,j}^W$, die sich durch die Virasoro-$h$-Werte wie folgt ausdrücken lassen:

$$h_{i,j}^W = h_{i,j}\ , \quad 1 \le i \le \frac{q}{2}\ , \quad 1 \le j \le \frac{p}{2}\ , \quad i,j \in \mathbb{Z} \tag{4.2.4}$$

Auch hier liefert wieder $j$ ungerade den Sektor 1 und $j$ gerade den Sektor 2. Im fermionischen Fall handelt es sich bei dem Sektor 1 um den Neveu-Schwarz-Sektor, und der Sektor 2 ist der Ramond-Sektor. Ist das zusätzliche Feld ein Boson, so ist der Sektor 1 der übliche Sektor der Algebra und der Sektor 2 der getwistete Sektor. Zwei Beispiele für solche Modelle wurden bereits im letzten Kapitel diskutiert. Und zwar liefert $q = 5$ und $n = 2$ die $\mathcal{W}(2,3)$ bei $c = \frac{4}{5}$. Mit $q = 3$ und $n = 4$ erhält man die $\mathcal{W}(2,3)$ mit $c = -\frac{114}{7}$. Das Transformationsverhalten bosonischer Algebren unter der Modulgruppe unterscheidet sich deutlich von dem der fermionischen Algebren. Der Grund hierfür liegt darin, daß man unterschiedliche Randbedingungen im bosonischen bzw. fermionischen Fall stellen muß, um eine modular invariante Zustanssumme zu erhalten.

Es ist wohlbekannt, daß der normale Sektor einer bosonischen Algebra invariant unter $S$ und $T$, also der vollen Modulgruppe ist. Am Beispiel der $\mathcal{W}(2,3)$ bei $c=\frac{4}{5}$ überzeugt man sich ferner leicht davon, daß der getwistete Sektor invariant unter $T^2$ und $TST$ ist (im fermionischen Fall verknüpft $TST$ die beiden Sektoren). Ferner liefert die Transformation $S$ angewandt auf Charaktere des getwisteten Sektors Virasoro-Charaktere, die Summanden im normalen Sektor der $\mathcal{W}$-Algebra sind. Aufgrund des abweichenden Vorzeichens lassen sich diese Charaktere allerdings nicht mehr als Charaktere der $\mathcal{W}$-Algebra interpretieren. Mit Hilfe der Modultransformationen kann man aus den Charakteren des getwisteten Sektors die diagonale Zustandssumme des Virasoro-minimalen Modells rekonstruieren (dazu betrachtet man den Orbit eines getwisteten Charakters unter der Modulgruppe). Die diagonale Zustandssumme läßt sich aber nicht mehr durch die Charaktere (4.2.3) ausdrücken; besitzt also in diesem Sinn keine $\mathcal{W}$-Symmetrie. Insbesondere führen die getwisteten Charaktere also zu keiner neuen modular invarianten Zustandssumme. [1])

Die $(D_{\frac{q}{2}+1},E_6)$-Serie enthält fermionische $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren mit $\delta=\frac{q-4}{2}$ und $c=1-\frac{(12-q)^2}{2q}$. Die Charaktere der HGDs sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}\mathrm{Neveu-Schwarz-Sektor:}\quad \chi_i^W &= \chi_{i,1}+\chi_{i,5}+\chi_{i,7}+\chi_{i,11}\ ,\ 1\le i\le\frac{q-1}{2}\\ \mathrm{Ramond-Sektor:}\quad \chi_i^W &= \chi_{i,4}+\chi_{i,8}\ ,\ 1\le i\le\frac{q-1}{2}\end{aligned}\tag{4.2.5}$$

Folglich müssen die $L_0$-Eigenwerte $h^W$ in den HGDs der $\mathcal{W}$-Algebra gegeben sein durch:

$$\begin{aligned}\mathrm{Neveu-Schwarz-Sektor:}\quad h_i^W &= \min(h_{i,1},h_{i,5})\ ,\ 1\le i\le\frac{q-1}{2}\\ \mathrm{Ramond-Sektor:}\quad h_i^W &= h_{i,4}\ ,\ 1\le i\le\frac{q-1}{2}\end{aligned}\tag{4.2.6}$$

Bei $c=-\frac{224}{65}$ kann die $\mathcal{W}(2,8)$ als Mitglied der $(A_{q-1},E_8)$-Serie interpretiert werden. Diese Serie besteht aus $\mathcal{W}(2,q-5)$-Algebren mit $c=1-\frac{(30-q)^2}{5q}$, wobei $q$ und 30 teilerfremd sein müssen. Die Charaktere der HGDs dieser Modelle sind durch eine der folgenden Linear-Kombinationen von vier Virasoro-Charakteren gegeben:

$$\begin{aligned}\chi_{i,1}^W &= \chi_{i,1}+\chi_{i,11}+\chi_{i,19}+\chi_{i,29}\ ,\ 1\le i\le\frac{q-1}{2}\\ \chi_{i,2}^W &= \chi_{i,7}+\chi_{i,13}+\chi_{i,17}+\chi_{i,23}\ ,\ 1\le i\le\frac{q-1}{2}\end{aligned}\tag{4.2.7}$$

[1]) Damit man sowohl die beiden Sektoren der $\mathcal{W}$-Algebra als Darstellung der Modulgruppe auffassen kann und auch die diagonale Zustandssumme über Charaktere der $\mathcal{W}$-Algebra schreiben kann, muß man (4.2.3) durch Differenzen von Virasoro-Charakteren ergänzen; auch wenn sich dies nicht im Sinn von (4.2.2) interpretieren läßt. Am elegantesten formuliert man dies, indem man die $\mathcal{W}$-Symmetrie um eine $\mathcal{S}_2$-Symmetrie erweitert, die als Vertauschung der Charaktere in den Summen operiert. Die Charaktere (4.2.3) stellen dann den symmetrischen oder ungeladenen Anteil dar.

Folglich müssen die Werte von $h^W$ der HGDs der $\mathcal{W}$-Algebra gegeben sein durch:

$$
\begin{aligned}
h^W_{i,1} &= \min(h_{i,1}, h_{i,11}) \ , \ 1 \leq i \leq \frac{q-1}{2} \\
h^W_{i,2} &= \min(h_{i,7}, h_{i,13}) \ , \ 1 \leq i \leq \frac{q-1}{2}
\end{aligned}
\tag{4.2.8}
$$

Schließlich kann die $\mathcal{W}(2,8)$ bei $c = \frac{21}{22}$ als bosonischer Sektor der $\mathcal{W}(2,\frac{7}{2})$ interpretiert werden (vgl. auch [10] und [50]). Die $\mathcal{W}(2,\frac{7}{2})$ mit $c = \frac{21}{22}$ ist ein Mitglied der $(D_{\frac{q}{2}+1}, E_6)$-Serie mit $p = 12$ und $q = 11$. Die Charaktere der HGDs einer $\mathcal{W}$-Algebra, die als bosonischer Sektor einer fermionischen Algebra in der $(D_{\frac{q}{2}+1}, E_6)$-Serie interpretiert werden kann, ist durch einen der folgenden drei Ausdrücke gegeben:

$$
\begin{aligned}
\chi^W_{i,1} &= \chi_{i,1} + \chi_{i,7} \ , \ 1 \leq i \leq \frac{q-1}{2} \\
\chi^W_{i,2} &= \chi_{i,4} + \chi_{i,8} \ , \ 1 \leq i \leq \frac{q-1}{2} \\
\chi^W_{i,3} &= \chi_{i,5} + \chi_{i,11} \ , \ 1 \leq i \leq \frac{q-1}{2}
\end{aligned}
\tag{4.2.9}
$$

Die verschiedenen Charaktere ergeben sich durch Darstellungen der zugehörigen fermionischen $\mathcal{W}$-Algebra im Ramond- und Neveu-Schwarz-Sektor. Der Neveu-Schwarz-Sektor zerfällt in $\chi^W_{i,1}$ und $\chi^W_{i,3}$. Damit folgt für die zugehörigen Werte von $h^W$:

$$
\begin{aligned}
h^W_{i,1} &= \min(h_{i,1}, h_{i,7}) \ , \ 1 \leq i \leq \frac{q-1}{2} \\
h^W_{i,2} &= h_{i,4} \qquad\qquad\quad , \ 1 \leq i \leq \frac{q-1}{2} \\
h^W_{i,3} &= \min(h_{i,5}, h_{i,11}) \ , \ 1 \leq i \leq \frac{q-1}{2}
\end{aligned}
\tag{4.2.10}
$$

Die meisten der HGDs fermionischer $\mathcal{W}$-Algebren und viele der HGDs von bosonischen Algebren lassen sich durch die in diesem Kapitel vorgestellte Argumentation erklären. Für die generisch existenten Algebren sind die in diesem Kapitel diskutierten Modelle für feste zentrale Ladung in einem Kontinuum von HGDs (mit $h$ als Parameter) eingebettet. In allen anderen Fällen, die durch die Argumentation in diesem Kapitel abgedeckt sind, stellt man fest, daß die einzigen zugelassenen $h$-Werte die hier angegebenen sind. D.h. für alle isolierten $c$-Werte, die durch (2.4.10a) parametrisiert werden können, schränkt die Jacobi-Identität (3.3.10) die $h$-Werte auf die in diesem Kapitel angegebenen ein.

Eine ausführliche Diskussion insbesondere des fermionischen Falls ist in [50] nachzulesen. Obwohl dort die Formeln für die $S$-Matrix und die Fusionsregeln eigentlich für den fermionischen Fall abgeleitet wurden, lassen sie sich ohne Änderung auf den bosonischen Fall übertragen.

## 4.3. Konkrete Ergebnisse zu Darstellungen von $\mathcal{W}$-Algebren

In diesem Kapitel werden die beiden in Kapitel 3.3 dargestellten Algorithmen auf die in Kapitel 3.2 vorgestellten $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren angewandt. Zuerst überprüft man natürlich die Jacobi-Identität und später ergänzt man diese Ergebnisse ggfs., indem man Nullfelder untersucht.

Die meisten Rechnungen wurden mit Computern durchgeführt. Dazu wurden die algebraischen Manipulations-Programme REDUCE und MATHEMATICA™ eingesetzt. Da in REDUCE die Anwendung von Regeln nicht zu kontrollieren ist, erreichen bei der Berechnung von Korrelatoren Zwischenergebnisse schnell eine nicht mehr handhabbare Größe. In MATHEMATICA™ ist die Anwendung der Regeln zwar sehr gut zu steuern; dafür benötigen die zahlreichen Ersetzungen, die bei der Berechnung von Korrelatoren notwendig sind, bereits bei einfachen Ausdrücken eine nicht mehr vertretbare Zeit. Deswegen wurde vom Autor für das Auskommutieren von Korrelatoren und die Berechnung quasiprimärer normalgeordneter Produkte ein spezielles C-Programm geschrieben. Meist ist die Rechenzeit für Korrelatoren bereits auf einem einfachen IBM-XT286 deutlich geringer als ein vergleichbares in REDUCE geschriebenes Programm auf einem IBM-3084 Großrechner.

Bei der Überprüfung von Jacobi-Identitäten (die wir als zweiten Zugang zum Studium von HGDs von $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren beschrieben haben) ist es sehr angenehm, den folgenden Ausdruck

$$d_{W_{-n}W_n}(c,h,w) := \langle h,w \mid \; [W_{-n},W_n]_\pm \mid h,w\rangle$$

einmal für allgemeine $n$ zu berechnen und ihn dann für alle Zweipunktfunktionen $\langle h,w \mid W_{-n}W_n \mid h,w\rangle$ mit $n > 0$ einzusetzen. Dies verkürzt das Auskommutieren von (3.3.9) oder (3.3.10) um einen Schritt. Unter einem 'Schritt' verstehen wir dabei das Einsetzen der Kommutator-Formel, Berechnen der Moden und anschließendes Auskommutieren derselben unter Verwendung von (2.2.10) und (2.3.8).

Ergebnisse zu Virasoro-minimalen Fällen werden wir in diesem Kapitel meist nicht wiedergeben. Die $h$-Werte, die man mit einem Computer erhält, sind genau diejenigen, die in Kapitel 4.2 vorausgesagt wurden. In einigen Fällen gibt es jedoch auch interessante Ergebnisse zu Virasoro-minimalen Modellen, die dann doch explizit erwähnt werden. Im übrigen kann man die Virasoro-minimalen $c$-Werte, für die $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren existieren, aus Kapitel 3.2 entnehmen. Eine ausführliche Darstellung der Ergebnisse für fermionische Algebren sowie der größte Teil der Ergebnisse zu den bosonischen Algebren wurde in [19] publiziert.

### Fermionische $\mathcal{W}$-Algebren

Die meisten fermionischen $\mathcal{W}$-Algebren sind in einer der in Kapitel 4.2 diskutierten Serien enthalten. Deswegen werden wir über fermionische $\mathcal{W}$-Algebren hier nicht mehr viel sagen. Da alle hier diskutierten fermionischen $\mathcal{W}$-Algebren nur für isolierte Werte von $c$ existieren, genügt bereits das Studium der Jacobi-Identität, um die richtigen rationalen Modelle zu finden.

Die $\mathcal{W}(2, \frac{5}{2})$ ist die einfachste $\mathcal{W}(2, \delta)$-Algebra, bei der die zentrale Ladung Einschränkungen unterliegt: Sie existiert nur für den Wert $c = -\frac{13}{14}$. An diesem Beispiel hat R. Varnhagen [50] zuerst die Nicht-Assoziativität von Vierpunktfunktionen gezeigt. Da das einzige normalgeordnete Produkt, das für die Darstellungen der $\mathcal{W}(2, \frac{5}{2})$ berechnet werden muß, das bereits im Zusammenhang mit der $\mathcal{W}(2, 3)$ eingeführte Feld $\Lambda$ ist (man vergleiche (4.1.2a)), können in diesem Beispiel im Prinzip alle Rechnungen 'von Hand' ausgeführt werden. Deswegen soll an diesem Beispiel demonstriert werden, zu welchen Ergebnissen Jacobi-Identitäten führen können. Die ursprüngliche von R. Varnhagen diskutierte Assoziativitätsbedingung ist äquivalent zu einer Jacobi-Identität der folgenden Form:

$$0 = \langle h, w \mid \, [[W_{-n}, W_{-m}]_+, X_{m+n}] \mid h, w\rangle \, + zykl. \tag{4.3.1}$$

mit $X_{m+n} = [W_m, W_n]_+$. Die gleichen Ergebnisse erhält man aber auch aus einer Jacobi-Identität der Form (3.3.10). Um dies zu zeigen, berechnet man im Neveu-Schwarz-Sektor:

$$\langle h, w \mid \, W_{-\frac{1}{2}}[[W_{-\frac{1}{2}}, W_{\frac{1}{2}}]_\pm, W_{\frac{1}{2}}] \mid h, w\rangle \, + zykl. = -\frac{4}{81}(14h+1)(7h-1)h \tag{4.3.2}$$

Im Ramond-Sektor setzt man ganzzahlige Indizes ein und erhält:

$$\langle h, w \mid \, W_{-1}[[W_{-1}, W_1]_\pm, W_1] \mid h, w\rangle \, + zykl. = -\frac{1}{20736}(112h+5)(112h-27)(16h-13) \tag{4.3.3}$$

Die $\mathcal{W}(2, \frac{5}{2})$ läßt also im Neveu-Schwarz-Sektor nur HGDs für $h = 0, \frac{1}{7}, -\frac{1}{14}$ und im Ramond-Sektor für $h = \frac{13}{16}, -\frac{5}{112}, \frac{27}{112}$ zu. Dies entspricht auch tatsächlich den $h$-Werten, die man nach Kapitel 4.2 erwartet. Leider ist dieses Beispiel etwas untypisch, da nicht immer die Betrachtung nur einer Vierpunktfunktion genügt, sondern man auch bei fermionischen Algebren meist mehr als eine Vierpunktfunktion betrachten muß.

Durch die Überprüfung der Assoziativität von Vierpunktfunktionen hatte M. Flohr bereits die Darstellungen der $\mathcal{W}(2, \frac{9}{2})$ bei $c = -35$ studiert [38]. Diese Untersuchungen wurden in [19] durch die Berechnung weiterer Vierpunktfunktionen fortgeführt. Diese Algebra ist besonders interessant, da sie zu einer Serie von $\mathcal{W}$-Algebren gehört, die zwar nicht im Rahmen von Virasoro-minimalen Modellen verstanden werden können, bei denen aber die Beziehung $c = 1 - 8\delta$ gilt. Hierzu gehört auch die $\mathcal{W}(2, \frac{15}{2})$ bei $c = -59$. Zwar werden wir hier zwar nicht die möglichen Höchstgewichtsdarstellungen angeben, jedoch findet man in Kapitel 4.4 Formeln, die die expliziten Ergebnisse reproduzieren.

Ferner verdienen die $\mathcal{W}(2, \frac{7}{2})$ bei $c = \frac{21}{22}$, die $\mathcal{W}(2, \frac{9}{2})$ mit $c = \frac{25}{26}$, die $\mathcal{W}(2, \frac{9}{2})$ für $c = \frac{9}{34}$ sowie die $\mathcal{W}(2, \frac{15}{2})$ mit $c = -\frac{11}{38}$ eine Erwähnung, da sie die einzigen explizit bekannten fermionischen $\mathcal{W}$-Algebren sind, die zwar zu einem Virasoro-minimalen Modell gehören, aber nicht in der $(A_{q-1}, D_{2n})$-Serie enthalten sind. Speziell das Modell der $\mathcal{W}(2, \frac{7}{2})$ bei $c = \frac{21}{22}$ wurde bereits früh von R. Varnhagen untersucht [50].

### Bosonische $\mathcal{W}$-Algebren

Wir wollen nun zuerst eine bereits bei der $\mathcal{W}(2,3)$ gemachte Beobachtung auf bosonische $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren verallgemeinern. Dies bezieht sich auf die in Kapitel 3.1 bereits angedeutete Möglichkeit eines Twists des zusätzlichen bosonischen Feldes. Verschwindet bei einer bosonischen $\mathcal{W}$-Algebra die Selbstkopplung, so ist die Abbildung $W \mapsto -W$ der einzige nicht-triviale Automorphismus der Algebra; ist $C_{WW}^{W} \neq 0$, so besitzt die Algebra nur den trivialen Automorphismus (außer für $\delta = 2$). Will man die Darstellungen vollständig erfassen, so muß man bei einer bosonischen Algebra mit verschwindender Selbstkopplung somit auch diesen getwisteten Sektor betrachten. Dies werden wir im folgenden auch für den Virasoro-minimalen Fall tun.

### $\mathcal{W}(2,4)$

Zuerst überprüft man, ob die $\mathcal{W}(2,4)$ beliebige HGDs zuläßt, d.h. ob die Jacobi-Identitäten in allen HGDs der $\mathcal{W}(2,4)$ erfüllt sind. Berechnung von (3.3.10) mit verschiedenen Kombinationen von Indizes liefert zuerst scheinbar nicht-triviale Ausdrücke, die aber alle trivial werden, sobald man die Beziehung (3.2.1) zwischen $c$ und der Selbstkopplungskonstanten $C_{WW}^{W}$ einsetzt. Die $\mathcal{W}(2,4)$ scheint also beliebige HGDs zuzulassen – genau wie die $\mathcal{W}(2,3)$.

Nun sucht man nach $c$-Werten, für die man Nullfelder konstruieren kann. Man stellt fest, daß das Nullfeld kleinster Dimension $\mathcal{N}(W,W)$ enthält. Dieses Nullfeld konstruiert man, indem man die $d$-Matrix aller Felder der Dimension 8 berechnet. Bei Dimension 8 gibt es außer $\mathcal{N}(W,W)$ fünf weitere quasiprimäre Felder. Die Determinante dieser Matrix zeigt, daß für $c = 1$, $c = -11$, $c = -76$, $c = -\frac{444}{11}$ und $c = -\frac{11}{14}$ genau ein solches Nullfeld existiert. Die explizite Form des Nullfeldes ist durch den Kern der $d$-Matrix gegeben. Außer für $c = -76$ kann man ein weiteres Nullfeld mit $\mathcal{N}(W, \partial^2 W)$ konstruieren. Für $c = 1$ ist ferner das Feld $\mathcal{N}(W, \partial^3 L) - \frac{48}{25}\mathcal{N}(\mathcal{N}(W,L), \partial L)$ ein Nullfeld.

Nach (3.3.5) liefern diese Nullfelder (mit Ausnahme des Feldes der Dimension 9) zwei in $w$ quadratische Gleichungen, so daß man $w^2$ eliminieren, $w$ bestimmen und es dann in beide Gleichungen einsetzen kann. Dies schränkt die Menge der relevanten HGDs für $c = -11$, $c = -\frac{444}{11}$ und $c = -\frac{11}{14}$ auf eine endliche Menge ein: Man erhält endlich viele rationale Werte von $h$, die Höchstgewichtsdarstellungen charakterisieren, in denen die Nullfelder tatsächlich verschwinden. Natürlich schließt dies nicht aus, daß man für diese drei $c$-Werte auch HGDs der $\mathcal{W}(2,4)$ definieren kann, in denen die jeweiligen Nullfelder nicht verschwinden. Die folgende Tabelle enthält die $h$-Werte, bei denen die Nullfelder verschwinden:

| $\mathcal{W}(2,4)$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $c=-11$ | | $c=-\frac{444}{11}$ | | $c=-\frac{11}{14}$ | |
| $h$ | $w\ \ {C_{WW}^{W}}^{-1}$ | $h$ | $w\ \ {C_{WW}^{W}}^{-1}$ | $h$ | $w\ \ {C_{WW}^{W}}^{-1}$ |
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $0$ | $\frac{11}{1222}$ | $-\frac{9}{11}$ | $-\frac{13905}{641861}$ | $\frac{11}{14}$ | $0$ |
| $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{47}{1012}$ | $-\frac{10}{11}$ | $\frac{834300}{18613969}$ | $\frac{11}{16}$ | $-\frac{9945}{10304}$ |
| $-\frac{3}{8}$ | $\frac{611}{8096}$ | $-\frac{12}{11}$ | $\frac{250290}{19897691}$ | $-\frac{3}{112}$ | $\frac{1989}{113344}$ |
| $\frac{3}{2}$ | $-\frac{1833}{44}$ | $-\frac{14}{11}$ | $-\frac{1752030}{52457549}$ | $\frac{13}{112}$ | $\frac{13005}{113344}$ |
| $-\frac{11}{24}$ | $\frac{47}{864}$ | $-\frac{15}{11}$ | $-\frac{6859800}{577033039}$ | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{49725}{3542}$ |
| $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{611}{6831}$ | $-\frac{16}{11}$ | $\frac{23175}{2280763}$ | $\frac{2}{7}$ | $-\frac{1989}{7084}$ |
| $-\frac{1}{8}$ | $\frac{1833}{8096}$ | $-\frac{17}{11}$ | $\frac{50985}{52457549}$ | $-\frac{1}{14}$ | $-\frac{153}{7084}$ |
| $\frac{1}{6}$ | $-\frac{3055}{2484}$ | $-\frac{18}{11}$ | $\frac{13905}{52457549}$ | $\frac{3}{7}$ | $-\frac{765}{644}$ |
| $\frac{13}{24}$ | $-\frac{130331}{9504}$ | $-\frac{19}{11}$ | $\frac{55620}{577033039}$ | | |

In dieser Tabelle wurde auch $c = -\frac{11}{14}$ mit aufgeführt, obwohl es sich um ein Virasoro-minimales Modell handelt, das zur $(D_{\frac{q}{2}+1}, E_6)$-Serie gehört, da seine Existenz vor dem Studium der Nullfelder nicht offensichtlich war. Die Bedingungen, die wir studiert haben, lassen für diesen Wert der zentralen Ladung auch eine HGD mit $h = \frac{3}{14}$ zu, aber dieser Wert ist nicht in obiger Tabelle enthalten, da es sich offensichtlich um ein Artefakt handelt, das bei dem Studium weiterer Bedingungen verschwinden würde.

Bei $c = 1$ verschwinden die drei oben angeführten Nullfelder, wenn $w$ und $h$ die folgende Beziehung erfüllen:

$$w = -\frac{\sqrt{3}(4h-1)h}{18\sqrt{2}} \tag{4.3.4}$$

Für $c = -76$ konnte nur ein Nullfeld gefunden und untersucht werden. Es impliziert, daß $h$ und $w$ eine der beiden folgenden Relationen erfüllen müssen:

$$w = \frac{\sqrt{88247}(103h+307)h}{352988\sqrt{39}} \tag{4.3.5a}$$

$$w = \frac{\sqrt{88247}(103h^2+665h+1074)}{352988\sqrt{39}} \tag{4.3.5b}$$

Die Tatsache, daß die Relationen zwischen $h$ und $w$ sowohl für $c = 1$ als auch $c = -76$ generisch eine ‘schöne’ Form haben (dies gilt nicht für die Ergebnisse einer einzelnen Bedingung bei den anderen $c$-Werten !), läßt vermuten, daß die Modelle der $\mathcal{W}(2,4)$ bei diesen beiden Werten der zentralen Ladung zwar degeneriert, aber nicht rational sind.

Für die Darstellungen der $\mathcal{W}(2,4)$ kennt man auch eine Determinanten-Formel [63], anhand derer allgemeine Aussagen über minimale Modelle der $\mathcal{W}(2,4)$ möglich sind. Dies wird ausführlich in einem gesonderten Kapitel behandelt.

## $\mathcal{W}(2,5)$

Da bei der $\mathcal{W}(2,5)$ die Selbstkopplung $C_{WW}^{W}$ verschwindet, kann die Jacobi-Identität (3.3.10) für den Vierpunkt-Korrelator in einem Schritt berechnet werden. Das Ergebnis ist nicht-trivial. Wenn $w$ in diesem Ausdruck auftritt, kann es nur quadratisch auftreten, da für verschwindende Selbstkopplungskonstante der Kommutator zweier $W$-Moden keine $W$'s enthält. Bei dem Ergebnis handelt es sich also um einen linearen Ausdruck in $w^2$ mit polynomialen Koeffizienten in $h$ (bei festem $c$). Man kann $w^2$ leicht aus zwei solchen zu verschiedenen Indizes gehörenden Ausdrücken eliminieren. So kann man die HGDs bestimmen, die im Falle der $\mathcal{W}(2,5)$ existieren.

Zuerst soll die $\mathcal{W}(2,5)$ bei $c = -\frac{350}{11}$ und $c = \frac{6}{7}$ betrachtet werden. Zwar gehören diese beiden Modelle zur $(A_{q-1}, D_{2n})$-Serie; sie lassen aber auch einen Twist zu. Für beide Sektoren der Algebra erhält man folgende mögliche $h$-Werte:

| $\mathcal{W}(2,5)$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c = -\frac{350}{11}$ | | | $c = \frac{6}{7}$ | | | $c = -7$ |
| *normal* | | *getwistet* | *normal* | | *getwistet* | *getwistet* |
| $h$ | $w^2$ | $h$ | $h$ | $w^2$ | $h$ | $h$ |
| $0$ | $0$ | $-\frac{9}{8}$ | $0$ | $0$ | $\frac{1}{56}$ | $-\frac{7}{48}$ |
| $-\frac{8}{11}$ | $0$ | $-\frac{35}{88}$ | $\frac{1}{7}$ | $0$ | $\frac{5}{56}$ | $-\frac{5}{16}$ |
| $-\frac{13}{11}$ | $0$ | $-\frac{87}{88}$ | $\frac{5}{7}$ | $0$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{16}$ |
| $-\frac{15}{11}$ | $0$ | $-\frac{115}{88}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3128}{25515}$ | | |
| $-\frac{14}{11}$ | $0$ | $-\frac{119}{88}$ | $\frac{10}{21}$ | $\frac{34}{586845}$ | | |
| $-\frac{10}{11}$ | $\frac{20}{1372019}$ | | $\frac{1}{21}$ | $\frac{2}{9976365}$ | | |

Diese $h$-Werte erhält man z.B. aus der Überprüfung von Jacobi-Identitäten. Im getwisteten Sektor genügt auch die Betrachtung des einfachsten Nullfeldes, da nur der $L_0$-Eigenwert festgelegt werden muß. Dies führt zu den gleichen Ergebnissen, die man auch aus den Jacobi-Identitäten erhält. Die Darstellungen für $c = -\frac{350}{11}$ und $c = \frac{6}{7}$ stimmen mit den in Kapitel 4.2 für die $(A_{q-1}, D_{2n})$-Serie vorausgesagten überein.

Die Tabelle enthält auch bereits die Darstellungen der $\mathcal{W}(2,5)$ bei $c = -7$ im getwisteten Sektor. Im 'normalen' Sektor konnte anhand der Jacobi-Identität keine HGD ausgeschlossen werden, in der folgende Beziehung gilt:

$$w^2 = -\frac{(4h+1)^2(3h+1)h^2}{500} \tag{4.3.6}$$

Man kann auch bei $c = -7$ explizit Nullfelder konstruieren, die entweder $\mathcal{N}(W,W)$ oder $\mathcal{N}(W,\partial^2 W)$ enthalten. Hier gibt es sogar ein besonders einfaches Nullfeld: $\mathcal{N}(W,\partial L)$ verschwindet in der Vakuum-Darstellung der $\mathcal{W}(2,5)$ bei $c = -7$. Die Bedingungen, die man aus diesen drei Nullfeldern herleiten kann, sind alle zusammen genau dann erfüllt, wenn (4.3.6) gilt.

Für $c = 134 \pm 60\sqrt{5}$ konnten keine Einschränkungen aus der Jacobi-Identität abgeleitet werden. Für diese Werte der zentralen Ladung scheinen alle HGDs zugelassen zu sein.

Bei der $\mathcal{W}(2,5)$ ist auch die Berechnung des Dreipunkt-Korrelators (3.3.9) sinnvoll. Für $c = -\frac{350}{11}$ und $w^2 \neq 0$ führt dies zu der Bedingung, daß $h = -\frac{10}{11}$ gelten muß. Das ist zwar nicht trivial erfüllt, aber in den Ergebnissen enthalten, die man aus dem Studium von (3.3.10) gewinnt.

### $\mathcal{W}$(2,6)

Im Fall der $\mathcal{W}(2,6)$ liefert die Berechnung der Jacobi-Identität (3.3.10) zuerst Bedingungen für generisches $c$, die aber trivial werden, sobald man die korrekte Selbstkopplungskonstante (3.2.2) einsetzt. Für die irrationalen Werte der zentralen Ladung, bei denen $C_{WW}^{W}$ verschwindet, muß man auch den Wert von $c$ einsetzen, bevor die Bedingungen trivial werden. Somit sollte die $\mathcal{W}(2,6)$ genau wie auch die $\mathcal{W}(2,3)$ und die $\mathcal{W}(2,4)$ beliebige HGDs für generisches $c$ zulassen.

Erstaunlicherweise liefert die Jacobi-Identität Bedingungen an die möglichen Darstellungen für die beiden rationalen Werte der zentralen Ladung, wo $C_{WW}^{W}$ verschwindet (wie in Kapitel 3.2 erwähnt ist die $\mathcal{W}(2,6)$ für $c = -2$ inkonsistent). Obwohl wir die HGDs bei $c = -\frac{516}{13}$ bereits in dem allgemeinen Rahmen von Kapitel 4.2 diskutiert haben, führen wir sie dennoch hier auf. Auch läßt die $\mathcal{W}(2,6)$ bei $c = -\frac{516}{13}$ einen Twist zu und ist auch deswegen interessant. Bei $c = -47$ liefert die Jacobi-Identität ebenfalls Einschränkungen und auch hier ist ein Twist möglich. Die möglichen HGDs sind durch die $h$- (und $w^2$-) Werte der folgenden Tabelle gegeben:

| $\mathcal{W}(2,6)$ $\quad C_{WW}^{W} = 0$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $c = -\frac{516}{13}$ | | | $c = -47$ | | |
| *normal* | | *getwistet* | *normal* | | *getwistet* |
| $h$ | $w^2$ | $h$ | $h$ | $w^2$ | $h$ |
| $0$ | $0$ | $-\frac{11}{8}$ | $0$ | $0$ | $-\frac{95}{48}$ |
| $-\frac{10}{13}$ | $0$ | $-\frac{43}{104}$ | $-2$ | $0$ | $-\frac{71}{48}$ |
| $-\frac{17}{13}$ | $0$ | $-\frac{111}{104}$ | $-\frac{5}{3}$ | $0$ | $-\frac{63}{32}$ |
| $-\frac{21}{13}$ | $0$ | $-\frac{155}{104}$ | $-\frac{15}{8}$ | $0$ | $-\frac{55}{32}$ |
| $-\frac{22}{13}$ | $0$ | $-\frac{171}{104}$ | $-\frac{23}{12}$ | $0$ | $-\frac{29}{16}$ |
| $-\frac{20}{13}$ | $0$ | $-\frac{175}{104}$ | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{5}{15022464}$ | |
| $-\frac{15}{13}$ | $-\frac{7}{7366034}$ | | $-\frac{5}{4}$ | $-\frac{5}{3755616}$ | |

Bei diesen Werten der zentralen Ladung führt im getwisteten Sektor auch eine Untersuchung des einfachsten Nullfeldes zu den gleichen Ergebnissen.

Bei der $\mathcal{W}(2,6)$ wurden auch für nicht-verschwindende Selbstkopplung die Bedingungen untersucht, die von der Präsenz von Nullfeldern herrühren. Unter Verwendung von

$\mathcal{N}(W,W)$ und $\mathcal{N}(W,\partial^2 W)$ kann man je genau zwei Nullfelder konstruieren, wenn $c$ die Werte $c=-17$, $c=-\frac{306}{55}$ und $c=-\frac{590}{9}$ annimmt. Die Forderung, daß sie auch in den HGDs verschwinden sollen, schränkt die zugelassenen HGDs in all diesen Fallen auf endliche Mengen ein. Für $c=-\frac{1420}{17}$ findet man zwar ein Nullfeld, das $\mathcal{N}(W,W)$ enthält, aber $\mathcal{N}(W,\partial^2 W)$ hat eine nicht-triviale primäre Projektion (führt insbesondere also zu keinem Nullfeld). Trotzdem ist es möglich, aus $\mathcal{N}(W,\partial^4 W)$ und allen 28 anderen Feldern der Dimension 16 ein weiteres Nullfeld zu konstruieren. Diese beiden Nullfelder schränken wiederum die Darstellungen, in denen diese Felder ebenfalls Nullfelder sind, auf eine endliche Menge ein.

Die rationalen $h$-Werte, die zu diesen vier minimalen Modellen gehören, werden in der folgenden Tabelle angegeben. Es ist anzunehmen, daß die irrationalen Lösungen der explizit untersuchten Bedingungen verschwinden, wenn man mehr Bedingungen untersucht.

| $\mathcal{W}(2,6)$ $\quad C_{WW}^{W} \neq 0$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c=-17$ | | $c=-\frac{306}{55}$ | | $c=-\frac{590}{9}$ | | $c=-\frac{1420}{17}$ | | |
| $0$ | $-\frac{17}{28}$ | $0$ | $\frac{5}{11}$ | $0$ | $-\frac{19}{9}$ | $0$ | $-\frac{49}{17}$ | $-\frac{59}{17}$ |
| $0$ | $-\frac{3}{7}$ | $-\frac{13}{55}$ | $\frac{17}{11}$ | $-\frac{73}{27}$ | $-\frac{17}{9}$ | $-\frac{27}{17}$ | $-\frac{50}{17}$ | $-\frac{60}{17}$ |
| $-\frac{3}{4}$ | $-\frac{5}{28}$ | $-\frac{8}{55}$ | $\frac{7}{5}$ | $-\frac{64}{27}$ | $-\frac{13}{9}$ | $-\frac{30}{17}$ | $-\frac{52}{17}$ | |
| $-\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{7}$ | $-\frac{3}{55}$ | | $-\frac{55}{27}$ | $-\frac{8}{3}$ | $-\frac{37}{17}$ | $-\frac{53}{17}$ | |
| $-\frac{5}{12}$ | $\frac{15}{28}$ | $\frac{7}{55}$ | | $-\frac{25}{9}$ | $-\frac{7}{3}$ | $-\frac{39}{17}$ | $-\frac{55}{17}$ | |
| $\frac{9}{4}$ | | $-\frac{3}{11}$ | | $-\frac{23}{9}$ | | $-\frac{46}{17}$ | $-\frac{57}{17}$ | |
| $-\frac{5}{7}$ | | $\frac{4}{11}$ | | $-\frac{20}{9}$ | | $-\frac{48}{17}$ | $-\frac{58}{17}$ | |

Für $c=-17$, $c=-\frac{306}{55}$, $c=-\frac{590}{9}$ und $c=-\frac{1420}{17}$ wurden auch die Werte von $w$ selbst bestimmt. Auf eine Wiedergabe wird jedoch aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Außer in der Vakuum-Darstellung verschwindet $w$ nur für $h=\frac{17}{11}$ und $c=-\frac{306}{55}$. Insbesondere bei $c=-17$ gibt es zwei HGDs mit $h=0$, aber nur bei einer der beiden gilt auch $w=0$.

Obwohl das Modell bei $c=-\frac{306}{55}$ Virasoro-minimal ist, haben wir es dennoch in dieser Tabelle aufgeführt, da das Studium von Nullfeldern nötig war, um seine Existenz zu zeigen. Dieses Modell gehört zur $(A_{q-1},E_8)$-Serie.

Auch für $c=-\frac{1242}{5}$ kann man unter Verwendung von $\mathcal{N}(W,W)$ ein Nullfeld konstruieren. Dieses Feld verschwindet in allen HGDs, die einer der beiden folgenden Relationen genügen:

$$w=-\frac{11\sqrt{436412491110865}(65725h^2+1323915h+6665504)h}{26184749466651900\sqrt{209}} \tag{4.3.7a}$$

$$w=-\frac{\sqrt{436412491110865}(144595h^3+4554174h^2+47823641h+167439222)}{5236949893330380\sqrt{209}} \tag{4.3.7b}$$

Man findet weder ein weiteres Nullfeld bei Dimension 14 mit $\mathcal{N}(W, \partial^2 W)$ noch eines mit Dimension 16, das $\mathcal{N}(W, \partial^4 W)$ enthält. Da ferner die Nullfeld-Bedingung mit $\mathcal{N}(W, W)$ im Gegensatz zu den Nullfeld-Bedingungen bei anderen Werten der zentralen Ladung ein rationales Polynom als Lösung besitzt, hat die $\mathcal{W}(2, 6)$ bei $c = -\frac{1242}{5}$ wahrscheinlich kein minimales Modell [1]).

Genau wie bei der $\mathcal{W}(2, 4)$ kann man auch für die $\mathcal{W}(2, 6)$ durch Betrachtung der Lie-Algebra $G_2$ eine minimale Serie herleiten. Wendet man die allgemeinen von J.M. Figueroa-O'Farrill [65] für Casimir-Algebren angegebenen Formeln auf die $G_2$ an, so erhält man die folgende Parametrisierung der minimalen Serie der $\mathcal{W}(2, 6)$:

$$c_{p,q} = -\frac{2(12p - 7q)(7p - 4q)}{pq} \tag{4.3.8}$$

Man beobachtet, daß in der Tat für alle oben angegebenen $c$-Werte mit rationalen Modellen, $c$ nach (4.3.8) parametrisiert werden kann. Allerdings gibt es auch für den nicht-minimalen Wert $c = -\frac{1242}{5}$ eine solche Parametrisierung. Wahrscheinlich kann ein solches degeneriertes, aber nicht minimales Modell auf die gleiche Weise erklärt werden, wie dies auch z.B. bei der $\mathcal{W}(2, 4)$ und $c = 1$ gilt (vgl. Kapitel 4.5).

### $\mathcal{W}(2,7)$

Die $\mathcal{W}(2, 7)$ ist nur für $c = -\frac{25}{2}$ konsistent. Daher kann man leicht (3.3.10) für festes $c$ berechnen, und dadurch die Berechnung vereinfachen. Für die HGDs der $\mathcal{W}(2, 7)$ bei $c = -\frac{25}{2}$ findet man die folgende Bedingung:

$$w^2 = \frac{(2h + 1)^2(16h + 5)^2(16h + 9)h^2}{4167450} \tag{4.3.9}$$

Dies deutet an, daß die $\mathcal{W}(2, 7)$ zwei möglicherweise isomorphe Zweige von Darstellungen besitzt, die beide unendlich viele HGDs enthalten.

Im getwisteten Sektor der $\mathcal{W}(2, 7)$ schränkt (3.3.10) die möglichen HGDs auf vier Werte von $h$ ein:

$$h \in \{-\frac{35}{64}, -\frac{27}{64}, -\frac{11}{64}, \frac{13}{64}\} \tag{4.3.10}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man auch aus der Betrachtung des Nullfeldes $\mathcal{N}(W, \partial L)$. Die einfache Struktur dieses Nullfeldes macht die Rechnungen besonders einfach. So überzeugt man sich ebenfalls leicht davon, daß $\mathcal{N}(W, \partial L)_{-1}\mathcal{N}(W, \partial L)_1 \mid h, w\rangle$ außer für $h = 0$ nur dann verschwindet, wenn (4.3.9) gilt.

### $\mathcal{W}(2,8)$

---

[1]) Nach den neuesten Arbeiten von E. Frenkel u.a. [64] kann diese Vermutung als gesichert gelten.

Für $c=-\frac{944}{17}$ ist die $\mathcal{W}(2,8)$ konsistent und besitzt eine verschwindende Selbstkopplungskonstante. Hier kann die gleiche Prozedur wie bei $\mathcal{W}(2,4)$ – $\mathcal{W}(2,7)$ zur Überprüfung der Jacobi-Identität angewandt werden. Aufgrund der verschwindenden Selbstkopplungskonstanten ist bei $c=-\frac{944}{17}$ auch ein Twist möglich, so daß wir für diesen Wert der zentralen Ladung die möglichen Darstellungen angeben werden, obwohl es sich um ein Virasoro-minimales Modell handelt.

Darüber hinaus ist die $\mathcal{W}(2,8)$ auch für mehrere isolierte Werte der zentralen Ladung konsistent, bei denen sie eine nicht-verschwindende Selbstkopplung besitzt. In diesen Fällen ist das Ergebnis einer Jacobi-Identität (3.3.10) ein kubisches Polynom in $w$. Da nun sukzessive $w^3$, $w^2$ und schließlich $w$ eliminiert werden müssen, sind diese Bedingungen einerseits etwas komplizierter als die bisher studierten; andererseits benötigt man jetzt auch mehr Bedingungen. Dafür führt diese Eliminationsprozedur i.a. direkt auf die Werte von $w$ und nicht nur auf die von $w^2$.

Bei sechs Werten der zentralen Ladung, für die die $\mathcal{W}(2,8)$ konsistent ist, führt das Studium der Jacobi-Identität auf endlich viele HGDs. Außer $c=-\frac{944}{17}$ sind zwei weitere $c$-Werte Virasoro-minimal: $c=-\frac{224}{65}$ und $c=\frac{21}{22}$. Die Daten dieser Modelle werden deswegen hier nicht angegeben. Bei diesen Modellen verschwindet $C_{WW}^{W}$ nicht; sie gehören zur $(D_{\frac{q}{2}+1},E_6)$- bzw. zur $(A_{q-1},E_8)$-Serie. Dennoch ist nach Kapitel 4.2 die Struktur dieser beiden Modelle vergleichbar mit denen aus der $(A_{q-1},D_{2n})$-Serie.

Die möglichen $h$-Werte bei $c=-\frac{944}{17}$ im normalen und getwisteten Sektor sowie die für die verbleibenden drei Modelle sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

| $\mathcal{W}(2,8)$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c=-\frac{944}{17}$ | | $c=-23$ | | $c=-\frac{712}{7}$ | | $c=-\frac{3164}{23}$ | | |
| *normal* | *getwistet* | *normal* | | *normal* | | *normal* | | |
| $0$ | $-\frac{319}{136}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{29}{7}$ | $0$ | $-\frac{112}{23}$ | $-\frac{130}{23}$ |
| $-\frac{14}{17}$ | $-\frac{315}{136}$ | $0$ | $-\frac{7}{32}$ | $-4$ | $-\frac{30}{7}$ | $-\frac{54}{23}$ | $-\frac{116}{23}$ | $-\frac{131}{23}$ |
| $-\frac{25}{17}$ | $-\frac{299}{136}$ | $-1$ | $\frac{1}{8}$ | $-\frac{19}{5}$ | $-\frac{108}{35}$ | $-\frac{67}{23}$ | $-\frac{118}{23}$ | $-\frac{132}{23}$ |
| $-\frac{33}{17}$ | $-\frac{287}{136}$ | $-\frac{15}{16}$ | $\frac{17}{32}$ | $-\frac{21}{5}$ | $-\frac{122}{35}$ | $-\frac{81}{23}$ | $-\frac{119}{23}$ | $-\frac{133}{23}$ |
| $-\frac{38}{17}$ | $-\frac{235}{136}$ | $-\frac{3}{4}$ | $3$ | $-\frac{17}{7}$ | $-\frac{127}{35}$ | $-\frac{91}{23}$ | $-\frac{120}{23}$ | |
| $-\frac{40}{17}$ | $-\frac{159}{136}$ | $-\frac{7}{16}$ | | $-\frac{23}{7}$ | $-\frac{148}{35}$ | $-\frac{94}{23}$ | $-\frac{122}{23}$ | |
| $-\frac{39}{17}$ | $-\frac{59}{136}$ | $-\frac{31}{32}$ | | $-\frac{24}{7}$ | | $-\frac{98}{23}$ | $-\frac{124}{23}$ | |
| $-\frac{35}{17}$ | $-\frac{15}{8}$ | $-\frac{7}{8}$ | | $-\frac{26}{7}$ | | $-\frac{103}{23}$ | $-\frac{125}{23}$ | |
| $-\frac{28}{17}$ | | $-\frac{23}{32}$ | | $-\frac{27}{7}$ | | $-\frac{111}{23}$ | $-\frac{129}{23}$ | |

Es ist kein Versehen, daß bei $c=-23$ der Wert $h=0$ zweimal aufgeführt wurde. Es gibt tatsächlich zwei HGDs mit $h=0$, von denen eine verschwindendes $w$ besitzt und die andere $w\neq 0$ erfüllt. Auf diese Beobachtung werden wir im nächsten Kapitel zurückkommen.

Die Werte von $w$ wurden hier nicht angegeben, da sie meist sehr große Zahlen sind und meist Wurzeln enthalten oder gar imaginär sind. Obwohl sie ausgerechnet wurden, wird aus den gleichen Gründen auch auf die Angabe einer Berechnungsvorschrift verzichtet. Man bemerke jedoch, daß für den ungetwisteten Sektor bei $c = -\frac{944}{17}$ $w$ nur für $h = \frac{28}{17}$ von Null verschieden ist. Ferner gibt es für $h = 0$ immer eine HGD, bei der auch $w = 0$ gilt. Bei den verbleibenden drei Werten der zentralen Ladung ist sonst immer $w \neq 0$.

Im getwisteten Sektor der $\mathcal{W}(2,8)$ bei $c = -\frac{944}{17}$ kann man auch durch das Studium des einfachsten Nullfeldes, das hier $\mathcal{N}(W,L)$ ist, die o.a. HGDs herleiten.

In der Basis von $\mathcal{F}$, die wir hier verwendet haben, ist die Selbskopplungskonstante $C_{WW}^{W}$ imaginär für die oben aufgeführten $c$-Werte mit Ausnahme von $c = -\frac{944}{17}$. Deswegen sollte man bei diesen drei Werten der zentralen Ladung $W$ durch $iW$ ersetzten. Dann kann man auch durch $(iW)_j^+ = -(iW)_{-j}$ eine konsistente Involution definieren.

Bei $c = -\frac{1015}{2}$ müssen $h$ und $w$ eine der beiden folgenden Beziehungen erfüllen:

$$w = \frac{\sqrt{391391}(938816h^3+58511028h^2+1215416554h+8414752437)h}{67248090\sqrt{19246721816706711}} \tag{4.3.11a}$$

$$w = \frac{\sqrt{391391}(20653952h^4+1766242840h^3+56646740674h^2+807540438431h+4317513425295)}{1479457980\sqrt{19246721816706711}} \tag{4.3.11b}$$

Man darf wohl annehmen, daß es tatsächlich zwei kontinuierliche nicht-isomorphe Zweige von Darstellungen der $\mathcal{W}(2,8)$ bei $c = -\frac{1015}{2}$ gibt, die durch (4.3.11a) bzw. durch (4.3.11b) gegeben sind. Da wir nach Kapitel 3.3 wissen, daß hier ein Nullfeld existiert, das $\mathcal{N}(W,W)$ enthält [40] [49], ist dies auch das Maximum an Darstellungen, die unter diesem Gesichtspunkt in Frage kommen.

Für $c = 350 \pm 252\sqrt{2}$ konnten keine Einschränkungen der HGDs gefunden werden. Also scheinen für diese beiden Werte der zentralen Ladung alle HGDs zugelassen zu sein. Dies ist ganz analog zu den irrationalen $c$-Werten, bei denen die $\mathcal{W}(2,4)$, $\mathcal{W}(2,5)$ und $\mathcal{W}(2,6)$ konsistent sind, obwohl bei diesen Algebren $C_{WW}^{W}$ verschwindet.

Zuerst sollen $\mathcal{W}$-Algebren betrachtet werden, die für generisches $c$ existieren und rationale Modelle eingebettet in kontinuierliche Familien nicht-rationaler Modelle enthalten.

Sowohl endlichdimensionale Lie-Algebren als auch die Virasoro-Algebra haben HGDs zu beliebigen Höchstgewichten, die im allgemeinen natürlich nicht irreduzibel sind. Dies gilt offensichtlich nicht für alle $\mathcal{W}$-Algebren. Diese Beobachtung zeigt einmal mehr, daß man $\mathcal{W}$-Algebren nicht als Lie-Algebren betrachten sollte (vgl. z.B. A. Bilal [59]). Falls aber eine $\mathcal{W}$-Algebra zu einer Lie-Algebra in Beziehung gebracht werden kann, erwartet man weder Einschränkungen für die Werte der zentralen Ladung noch für die Werte von $h$. Demzufolge war die Herleitung von Konsistenzbedingungen für die HGDs einer $\mathcal{W}$-Algebra nur dann möglich, wenn der Wert der zentralen Ladung isoliert war, nicht aber für die generisch existierenden $\mathcal{W}$-Algebren $\mathcal{W}(2,3)$, $\mathcal{W}(2,4)$ und $\mathcal{W}(2,6)$. P. Bouwknegt hatte bereits seit längerem vermutet [46], daß die $\mathcal{W}(2,4)$ und $\mathcal{W}(2,6)$ zu affinen Lie-Algebren in Beziehung stehen. Außerdem war eine klassische Version der $\mathcal{W}(2,6)$ von J. Balog u.a. [13] konstruiert worden. Kürzlich haben H.G. Kausch and G.M.T. Watts gezeigt, daß man die Quanten-Algebren $\mathcal{W}(2,4)$ und $\mathcal{W}(2,6)$ tatsächlich mit Hilfe der affinen Lie-Algebren $B_2$ bzw. $G_2$ konstruieren kann. Wenn für eine $\mathcal{W}$-Algebra solch eine explizite Konstruktion aus einer Lie-Algebra möglich ist, kann man auch die universelle Einhüllende der Lie-Algebra verwenden, um –genau wie bei der Virasoro-Algebra (vgl. Kapitel 2.4)– beliebige HGDs für die $\mathcal{W}$-Algebra zu konstruieren. Trotzdem sollte man nicht vergessen, daß diese $\mathcal{W}$-Algebren bei speziellen diskreten $c$-Werten besondere Eigenschaften besitzen. Dies ist ein Quanten-Effekt, den die klassischen Versionen nicht zeigen. Insbesondere gibt es bei der $\mathcal{W}(2,6)$ zwei $c$-Werte mit verschwindendem $C_{WW}^{W}$, bei denen nur endlich viele HGDs existieren.

Allgemeiner wird jedoch gelten, daß sowohl die $\mathcal{W}(2,4)$ wie auch die $\mathcal{W}(2,6)$ minimale Serien besitzen, wofür diese beiden RCFTs die einfachsten Beispiele sind. Im Falle der $\mathcal{W}(2,6)$ haben wir dies bereits in Kapitel 4.3 angedeutet und mit (4.3.8) eine mögliche Parametrisierung der HGDs angegeben. Für den Fall der $\mathcal{W}(2,4)$ findet man eine ausführliche Diskussion in Kapitel 4.5. Das Studium von Nullfeldern ermöglichte es, einige dieser minimalen Modelle explizit zu konstruieren.

Bei der $\mathcal{W}(2,4)$ haben wir gesehen, daß $c=-11$, $c=-\frac{11}{14}$ und $c=-\frac{444}{11}$ zu minimalen Modellen führen, wohingegen die Modelle bei $c=1$ und $c=-76$ höchstwahrscheinlich lediglich degeneriert sind. Bei $c=1$ kennt man eine Freifeld-Konstruktion unter Verwendung eines freien Bosons und weiß deswegen viel über dieses Modell, das im Rahmen dieser Arbeit unerwähnt bleiben muß (vgl. [9]).

Bei der $\mathcal{W}(2,6)$ sind die Darstellungen bei $c=-17$, $c=-\frac{306}{55}$, $c=-\frac{590}{9}$ und $c=-\frac{1420}{17}$ diejenigen minimalen Modelle, für die wir explizit die einfachsten Nullfelder konstruieren konnten. Die HGDs bei $c=-\frac{1242}{5}$ scheinen dagegen zu einem degenerierten aber nicht minimalen Modell der $\mathcal{W}(2,6)$ zu gehören.

In den Fällen, wo eine $\mathcal{W}$-Algebra für irrationale Werte der zentralen Ladung existiert, konnten keine Bedingungen an die HGDs hergeleitet werden. Dies gilt für die $\mathcal{W}(2,4)$ bei $c = 86 \pm 60\sqrt{2}$, die $\mathcal{W}(2,5)$ bei $c = 134 \pm 60\sqrt{5}$, die $\mathcal{W}(2,6)$ bei $c = 194 \pm 112\sqrt{6}$ und sogar die $\mathcal{W}(2,8)$ bei $c = 350 \pm 252\sqrt{2}$, obwohl hier die Selbstkopplungskonstante im Unterschied zu den drei anderen Fällen nicht verschwindet. Dies ist in scharfem Gegensatz zu den isolierten rationalen Werten von $c$, bei denen immer mindestens eine Bedingung hergeleitet werden konnte. Dennoch ist dieses Ergebnis nicht unerwartet, da C. Vafa [66] und G. Anderson u.a. [67] gezeigt haben, daß bei RCFTs die $c$-Werte und konforme Dimensionen rationale Werte annehmen sollten.

In zwei Fällen findet man Feldtheorien, die zu degenerierten aber offensichtlich nicht rationalen Modellen von $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren gehören und in enger Verbindung zu dem in Kapitel 4.2 diskutierten Virasoro-minimalen Fall stehen.

Bei der $\mathcal{W}(2,3)$ und $c = -2$, der $\mathcal{W}(2,5)$ und $c = -7$ sowie der $\mathcal{W}(2,7)$ und $c = -\frac{25}{2}$ ergibt die Glg. (2.4.10) immer noch die korrekte Parametrisierung, aber mit $p = 1$. Diese Beobachtung läßt sich auf andere Virasoro-degenerierte Modelle mit $2 \leq q \in \mathbb{Z}$ verallgemeinern, da H.G. Kausch [68] gezeigt hat, daß für die $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren in dieser sogenannten '$(1,q)$-Serie' eine Freifeld-Konstruktion möglich ist, wobei –unter Verwendung der Notation von (2.4.10)– $\delta = h_{1,q;1,3}$ gilt. Für diese $\mathcal{W}$-Algebren kann man aufgrund dieser explizit möglichen Konstruktion genau wie bei den generisch existierenden Algebren ein Kontinuum von HGDs erwarten. Diese Erwartung wird durch die expliziten Rechnungen, die sowohl auf Jacobi-Identitäten wie auch auf Nullfeldern basieren, bestärkt. Zwar läßt also die $(1,q)$-Serie unendlich viele Darstellungen zu; im Unterschied zu den generisch existierenden Algebren haben die Algebren dieser Serie nur einen freien Parameter $h$ pro Zweig anstelle von zwei freien Parametern.
$h$ nimmt für $w = 0$ genau die Werte an, die zu Virasoro-degenerierten Darstellungen gehören, wodurch die Linear-Faktoren in (4.3.6) und (4.3.9) motiviert werden. Zur Parametrisierung der HGDs im getwisteten Sektor dieser Algebren nach (2.4.10) benötigt man allerdings rationale Indizes, so daß eine Erklärung dieser HGDs noch aussteht.

Es gibt drei weitere Beispiele von $\mathcal{W}(2,\delta)$-Modellen, die zwar degeneriert aber offensichtlich nicht rational sind. Bei diesen ist lediglich eine Linearkombination von $\mathcal{N}(W,W)$ und den anderen Feldern mit Dimension $2\delta$ ein Nullfeld. Zu diesen degenerierten Modellen gehört die $\mathcal{W}(2,4)$ bei $c = -76$, die $\mathcal{W}(2,6)$ mit $c = -\frac{1242}{5}$ und $\mathcal{W}(2,8)$ bei $c = -\frac{1015}{2}$. Auch hier gibt es jeweils wieder zwei Zweige von Darstellungen, die beide $h$ als freien Parameter besitzen ($w$ ist ein Polynom in $h$). Da hier allerdings $C_{WW}^{W}$ ungleich Null ist, sind die Formeln für die beiden Zweige verschieden. Einer der beiden Zweige enthält nicht einmal die Vakuum-Darstellung und somit können die beiden Zweige nicht zueinander isomorph sein. Vermutlich läßt sich diese Beobachtung zu einer Serie von $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren mit $\delta$ gerade fortsetzen, aber bis jetzt ist noch nicht einmal eine Parametrisierung für $c$ bekannt.

Kommen wir nun zu den rationalen Modellen unter den Darstellung von $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren. Für deren Klassifikation gibt es ein gutes Kriterium. Sei $h_{min}$ der kleinste mögliche $h$-Wert und definiere

$$\tilde{c} := c - 24h_{min} \tag{4.4.1}$$

Es gilt immer $\tilde{c} > 0$, da $\tilde{c}$ das asymptotische Verhalten der Dimensionen der $L_0$-Eigenräume beschreibt, wie wir später ausführen werden [1]).

Die Berechnung von $\tilde{c}$ für alle explizit untersuchten endlichen HGD-Mengen zu festem $c$ liefert eine Klasse von $\mathcal{W}$-Algebren mit $\tilde{c} < 1$. Dies sind genau diejenigen $\mathcal{W}$-Algebren, die zu Virasoro-minimalen Modellen gehören. $\tilde{c}$ hat die Form $\tilde{c} = 1 - \frac{6}{n}$ und liegt deswegen meist in der Nähe von 1.

Eine weitere Gruppe von HGDs von $\mathcal{W}$-Algebren ergibt $\tilde{c} = 1$. Abgesehen von den gut bekannten unitären Modellen (vgl. P. Ginsparg [70] und E.B. Kiritsis [71]) gehören zu dieser Gruppe genau diejenigen $\mathcal{W}$-Algebren, die für $c = 1 - 8\delta$ oder $c = 1 - 3\delta$ existieren. Die Mitglieder dieser Serie lassen endlich viele HGDs zu, wobei $h$ nach (2.4.8) mit rationalem $r$ und $s$ parametrisiert werden kann. Zu dieser Familie gehört die $\mathcal{W}(2,3)$ bei $c = -23$, die $\mathcal{W}(2,4)$ mit $c = -11$, die $\mathcal{W}(2,\frac{9}{2})$ bei $c = -35$, die $\mathcal{W}(2,6)$ mit $c = -47$ und $c = -17$, die $\mathcal{W}(2,\frac{15}{2})$ bei $c = -59$ und schließlich auch die $\mathcal{W}(2,8)$ bei $c = -23$. Um dies genauer zu diskutieren, sollen zwei Spezialfälle von (2.4.8) betrachtet werden:

$$h_{c;r,r} = r^2\alpha_0^2 - \alpha_0^2 \tag{4.4.2a}$$
$$h_{c;r,-r} = r^2\alpha_0^2 + r^2 - \alpha_0^2 \tag{4.4.2b}$$

Sei $m := 2\alpha_0^2$. Mit dieser Definition erhält man aus (4.4.2):

$$h_{c;\frac{n}{2m},\frac{n}{2m}} = \frac{n^2}{8m} - \frac{m}{2} \tag{4.4.3a}$$
$$h_{c;\frac{n}{2m+4},-\frac{n}{2m+4}} = \frac{n^2}{8m+16} - \frac{m}{2} \tag{4.4.3b}$$

Nun stellt man fest, daß die expliziten Rechnungen für die $(1-8\delta)$-Serie die $h$-Werte aus Glg. (4.4.3) liefern, mit $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leq m$ und $n = 2m$. Bei den fermionischen Algebren liefert gerades $n$ den Neveu-Schwarz-Sektor und ungerades $n$ die HGDs im Ramond-Sektor der Algebren. Im bosonischen Fall führt gerades $n$ auf den normalen Sektor der Algebra; ungerades $n$ dagegen auf den getwisteten Sektor. Dies unterstreicht die Analogie zwischen dem Ramond-Sektor eines Fermions und einem getwisteten Boson.

Für die bosonische $(1-3\delta)$-Serie liefert (4.4.3) mit $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leq 2m$ oder $n = 4m$ die richtigen $h$-Werte.

Die Algebren mit $c = 1 - 3\delta$ wollen wir noch etwas genauer betrachten. Hier fällt auf, daß auch der isolierte Wert $h_{2,2}$ zu ihren HGDs gehört. Im Fall der $\mathcal{W}(2,8)$ deutet die HGD mit $h = 3 = h_{2,2}$ an, daß es bei $c = -23$ auch eine $\mathcal{W}(2,3,8)$ gibt, die sowohl die $\mathcal{W}(2,3)$ wie auch die $\mathcal{W}(2,8)$ als Unteralgebra besitzt. Deswegen sind bei diesem Wert der zentralen Ladung HGDs der $\mathcal{W}(2,3)$ auch HGDs der $\mathcal{W}(2,8)$ und man erhält den Höchstgewichtsvektor zu $h = 3$, indem man den Generator mit konformer Dimension 3

[1]) Im Rahmen der statistischen Mechanik kann man $\tilde{c}$ auch als freie Energie interpretieren. Vgl. dazu auch [69].

auf das Vakuum anwendet. Das gleiche gilt für die $\mathcal{W}(2,4)$ bei $c=-11$ und die Super-Virasoro-Algebra. Einerseits ist der bosonische Sektor der Super-Virasoro-Algebra eine $\mathcal{W}(2,4,6)$ [47], und man darf vermuten, daß die $\mathcal{W}(2,4)$ hier eine Unteralgebra darstellt. Andererseits gehört auch hier $c=-11$ zur $(1-8\delta)$-Serie mit $\delta=\frac{3}{2}$. Schließlich ist es auffällig, daß die Mitglieder der $(1-3\delta)$-Serie zwei HGDs mit $h=0$ besitzen.

Hier ist die Parametrisierung der $h$-Werte mit rationalen Indizes pure Phänomenologie. M. Flohr hat diese Algebren ausführlich studiert [72]. Er konnte zeigen, daß die Charaktere der Darstellungen dieser $\mathcal{W}$-Algebren durch Jacobi-Riemann-Theta-Funktionen ausgedrückt werden können [1]). Ferner bilden diese Charaktere eine endlich-dimensionale unitäre projektive Darstellung der Modulgruppe und führen zu 'anständigen' Fusionsregeln. Dies erklärt die rationalen Indizes, die oben verwendet wurden. Ferner tauchen in diesem systematischeren Zugang die HGDs zu $h_{2,2}$ und die beiden HGDs mit $h=0$ auf ganz natürliche Weise auf.

Die meisten beobachteten minimalen Modelle der $\mathcal{W}(2,4)$ und $\mathcal{W}(2,6)$ haben $\tilde{c}>1$, insbesondere die $\mathcal{W}(2,4)$ bei $c=-\frac{444}{11}$, die $\mathcal{W}(2,6)$ mit $c=-\frac{590}{9}$ und $c=-\frac{1420}{17}$. Bis jetzt verbleiben zwei weitere Beispiele mit $\tilde{c}>1$, die in keines der obigen Muster passen, nämlich die $\mathcal{W}(2,8)$ bei $c=-\frac{712}{7}$ und $c=-\frac{3164}{23}$. Das zweite Modell kann offensichtlich durch Mitglieder der minimalen Serien der $\mathcal{W}(2,4)$ und $\mathcal{W}(2,6)$ zu einer Serie fortgesetzt werden. Eine erste Motivation ist die Beobachtung der Analogie, daß die $\mathcal{W}(2,4)$ bei $c=-\frac{444}{11}$, die $\mathcal{W}(2,6)$ bei $c=-\frac{1420}{17}$ und die $\mathcal{W}(2,8)$ bei $c=-\frac{3164}{23}$ jeweils genau $n-1$ HGDs besitzen, wenn man $c$ als $c=\frac{m}{n}$ mit teilerfremden $m,n\in\mathbb{Z}$ schreibt.

Eine bessere Motivation für die Zusammenfassung dieser drei Modelle liefert die Betrachtung von $\tilde{c}$ und $T^N$. Da $T$ diagonal auf den Charakteren operiert, genügt die Kenntnis der $h$-Werte in den HGDs, um sowohl $T^N$ als auch die Spur $\mathrm{tr}(T^N)$ zu berechnen. Sei wie oben die Zahl der HGDs in den Modellen mit $n-1$ bezeichnet. Man berechnet damit:

| *Algebra* | $c$ | $\tilde{c}$ | $n$ | $T^n$ | $\mathrm{tr}(T^N)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{W}(2,4)$ | $-\frac{444}{11}$ | $\frac{12}{11}$ | 11 | $-\mathbb{1}$ | $-e^{2\pi i\frac{N}{2}}$ |
| $\mathcal{W}(2,6)$ | $-\frac{1420}{17}$ | $\frac{20}{17}$ | 17 | $e^{2\pi i\frac{1}{6}}\mathbb{1}$ | $-e^{2\pi i\frac{5N}{6}}$ |
| $\mathcal{W}(2,8)$ | $-\frac{3164}{23}$ | $\frac{28}{23}$ | 23 | $e^{2\pi i\frac{5}{6}}\mathbb{1}$ | $-e^{2\pi i\frac{N}{6}}$ |

Die Ausdrücke für $\mathrm{tr}(T^N)$ gelten genau dann nicht, wenn $N$ ein Vielfaches von $n$ ist. Dieses 'schöne' Verhalten von $T$ legt nahe, daß man eigentlich die Modelle, die zu diesen drei RCFTs gehören, finden müßte. Die Modulgruppe kann bekanntlich durch die Relationen $S^2=(ST)^3=\mathbb{1}$ charakterisiert werden. Da wir nun auch eine zusätzliche Beziehung für $T$ selbst gefunden haben, gehören diese HGDs höchstwahrscheinlich zu einer (wahrscheinlich projektiven) Darstellung einer endlichen Untergruppe der Modulgruppe. Für die $\mathcal{W}(2,4)$

[1]) Diese sind definiert als $\Theta_{\lambda,k}(\tau,0,0)=\sum_{r\in\mathbb{Z}}e^{2\pi i\tau\frac{(2kr-\lambda)^2}{4k}}$, wobei $\lambda$ in enger Beziehung zu den $n$ in (4.4.3) steht und der Modulus $k$ durch $m$ ausgedrückt werden kann.

und $\tilde{c} = \frac{12}{11}$ dürfte die relevante Gruppe $\Gamma_{11}$ sein. Da außerdem die Werte von $\tilde{c}$ durch die konforme Dimension $\delta$ und

$$\tilde{c} = \frac{4(\delta - 1)}{3\delta - 1} \tag{4.4.4}$$

parametrisiert werden können, ist die Annahme plausibel, daß eine ganze Serie von $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren mit $\delta$ gerade und $\tilde{c}$ durch (4.4.4) gegeben existiert.

Man beachte, daß auch die $\mathcal{W}(2,2)$ mit $\tilde{c} = \frac{4}{5}$ existiert, denn man kann sie konstruieren, indem man das Tensorprodukt zweier Virasoro-minimaler Modelle mit $\tilde{c} = \frac{2}{5}$ betrachtet. Hier gilt wenigstens $T^5 = e^{2\pi i \frac{5}{6}} \mathbb{1}$ . $\mathrm{tr}(T^N)$ verhält sich jedoch geringfügig anders; die Phase ist genau wie oben, der Betrag ist jedoch nicht immer 1. Trotzdem besitzt auch die $\mathcal{W}(2,2)$ zwei Nullfelder mit Dimension $2\delta$ und $3\delta - 2$ – genau wie die anderen Mitglieder dieser Serie. Es könnte somit sein, daß auch diese $\mathcal{W}$-Algebra zu der durch (4.4.4) gegeben Serie gezählt werden sollte.

Nun verbleibt noch ein rationales Modell mit $\tilde{c} > 1$, das in keine der bisher diskutierten Serien paßt. Die HGDs der $\mathcal{W}(2,8)$ bei $c = -\frac{712}{7}$ führen zu $\tilde{c} = \frac{8}{7}$. Weiß man, daß auch $\mathbb{Z}_5$-symmetrische Modelle $c = \frac{8}{7}$ besitzen, so kann man vermuten, daß eine Beziehung zwischen der $\mathcal{W}(2,8)$ bei $c = -\frac{712}{7}$ und diesem $\mathbb{Z}_5$-symmetrischen Modell besteht, wobei die Grundzustands-Energie um $h_{min} = -\frac{30}{7}$ verschoben ist [1]). Mit dieser Annahme kann man neun der von uns gefunden $h$-Werte mit primären Feldern in einem $\mathbb{Z}_5$-parafermionischen Modell identifizieren (vgl. V.A. Fateev u.a. [74]). Betrachtet man nun die Einschränkung $\tilde{T}$ von $T$ zu den verbleibenden sechs Darstellungen, so erhält man:

$$\tilde{T}^7 = e^{2\pi i \frac{1}{3}} \mathbb{1} \tag{4.4.5a}$$

$$\mathrm{tr}(\tilde{T}^N) = -e^{2\pi i \frac{2}{3} N} \tag{4.4.5b}$$

(4.4.5b) gilt für alle $N$, die nicht Vielfache von 7 sind. Hier ist es vergleichsweise einfach, ein Modell zu finden, das die verbleibenden $h$-Werte liefert. Es handelt sich schlichtweg um ein Tensor-Produkt zweier identischer Virasoro-minimaler Modelle mit $p = 2$ und $q = 7$.

Das parafermionische Modell liefert eine 15-dimensionale Darstellung der ganzen Modulgruppe mit 'guten' Fusionsregeln. Das Tensor-Produkt der Virasoro-minimalen Modelle ergibt eine 9-dimensionale Darstellung. Insgesamt erhält man also eine 24-dimensionale Darstellung der Modulgruppe. Auf dieser Darstellung kann man in natürlicher Weise eine Darstellung von $\mathcal{S}_2$ definieren, die mit der Darstellung der Modulgruppe kommutiert. Folglich handelt es sich bei den unter $\mathcal{S}_2$ symmetrischen bzw. antisymmetrischen Räumen um invariante Unterräume. Der 15-dimensionale symmetrische Raum (oder auch 'ungeladene' Raum) ergibt das hier diskutierte Modell; es ist nicht identisch mit dem ursprünglichen parafermionischen Modell. Da für Virasoro-minimale Modelle sowie für parafermionische Modelle Charaktere und die $S$-Matrix bekannt sind, könnn sie nun auch für das rationale

---

[1]) In der Tat geht diese Vermutung auf die Präsentation der Ergebnisse in [73] zurück, wo Anwendungen von $\mathbb{Z}_5$-Parafermionen in der statistischen Mechanik diskutiert werden.

Modell der $\mathcal{W}(2,8)$ angegeben werden. Die Darstellung von $S_2$ bestimmt einige der Charaktere $\chi^W$ eindeutig als Linearkombination der parafermionsichen und Virasoro-minimalen Charaktere. Die verbleibenden Linearkombinationen müssen durch explizite Berechnung der Dimensionen der ersten Levels des Verma-Moduls $V(c,h,w)$ bestimmt werden. Gleichzeitig dient eine solche Berechnung auch der Überprüfung der hier vorgestellten Konstruktion. Ausgedrückt durch die Zustandssumme $Z^P$ des parafermionischen Modells und die Zustandssumme $Z^L$ des Virasoro-minimalen Modells führt das neue Modell auf eine Zustandssumme der Form:

$$Z = \frac{1}{2}\left(Z^P + (Z^L)^2\right) \tag{4.4.6}$$

Ferner erhält man für dieses Modell eine triviale Ladungs-Konjugations-Matrix, und es gilt $S = S^+ = S^{-1}$. Nach der bekannten Formel von E. Verlinde [30] kann man aus der $S$-Matrix nun die Fusionskonstanten $N_{i,j}^k$ berechnen. Für die $\mathcal{W}(2,8)$ bei $c = -\frac{712}{7}$ erhält man für die $N_{i,j}^k$ ganze Zahlen im Bereich zwischen 1 und 8. Die Fusionsalgebra besitzt einen nicht-trivialen Automorphismus $\sigma$. Er kommutiert zwar mit $S$ und $T^5$, nicht aber mit $T$ und läßt somit die Zustandssumme (4.4.6) nicht invariant. Dennoch kann man ihn zur Konstruktion eines statistischen Modells mit einer Verwerfungslinie benutzen (vgl. z.B. [75]). Die expliziten Ausdrücke für die Charaktere, $S$-Matrix und Fusionskonstanten dieses Modells kann man in [19] nachlesen.

Da $\mathbb{Z}_5$-symmetrische Modelle spezielle minimale Modelle der $\mathcal{W}(2,3,4,5)$ sind, sollte es für $c = -\frac{712}{7}$ eine Zusammenhang zwischen $\mathcal{W}(2,8)$ und $\mathcal{W}(2,3,4,5)$ geben. Es ist bemerkenswert, daß die Darstellung der $\mathcal{W}(2,3,4,5)$ bei $\tilde{c} = \frac{8}{7}$ unitär ist.

Offensichtlich liefert die Klassifikation der HGDs von $\mathcal{W}$-Algebren nach ihrem Wert von $\tilde{c}$ auf natürliche Weise Familien, die dieselbe Struktur tragen. Um die Bedeutung von $\tilde{c}$ zu unterstreichen, soll für es hier eine obere und untere Schranke im Falle semirationaler Theorien angegeben werden. Eine konforme Feldtheorie wird 'semirational' genannt, wenn $S$ Charaktere in endliche Summen von Charakteren transformiert. Selbstverständlich sind alle rationalen Theorien semirational. Da man annehmen darf, daß die Vakuum-Darstellung für jede $\mathcal{W}$-Algebra existiert, gilt $h_{min} \leq 0$. Somit ist $c \leq \tilde{c}$ und jede obere Schranke für $\tilde{c}$ ist auch eine obere Schranke für $c$.

**Proposition:** Für jede Algebra $\mathcal{W}(d(\phi_1),...,d(\phi_k),d(\psi_1),...,d(\psi_l))$, die von $k$ bosonischen und $l$ fermionischen Feldern generiert wird und zu einer semirationalen Theorie gehört, gilt die folgende Ungleichung:

$$0 < \tilde{c} < k + \frac{l}{2} \tag{4.4.7}$$

oder $c = 0$ und $h = 0$.

Der Beweis verwendet ein ähnliches Argument wie Cardy es in [17] zur Abschätzung des Feldgehaltes einer konformen Feldtheorie angewandt hat. Er beruht auf der Anwendung der Modultransformation $S$ auf die Charaktere und einer asymptotischen Abschätzung derselben für $\tau \to i\infty$. Man drückt einerseits den transformierten Charakter als endliche

Summe aller Charaktere aus und schätzt den transformierten Charakter aber auch direkt ab. Der Vergleich des asymptotischen Verhaltens liefert die Behauptung. Eine ausführliche, auf W. Nahm zurückgehende Darstellung für den rein bosonischen Fall findet man in [19]. Für die Verallgemeinerung auf Fermionen stellt man zuerst fest, daß das Bild von $S$ immer im Neveu-Schwarz-Sektor liegt. Die Zahl der Zustände mit Level $n$ im Verma-Modul eines Bosons können nach oben durch die Zahl $p(n)$ der Partitionen von $n$ abgeschätzt werden. Bei der Abschätzung der Charaktere erhält man somit einen Faktor:

$$P(q) := \sum_{n=1}^{\infty} p(n) q^n = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)} = \frac{q^{\frac{1}{24}}}{\eta(\tau)} \tag{4.4.8}$$

Die Zahl der Zustände im Verma-Moduls eines Fermions mit Level $n$ werde als $p_F(n)$ bezeichnet. Dies liefert bei der Abschätzung der Charaktere einen Faktor:

$$P_F(q) := \sum_{n=\frac{1}{2}}^{\infty} p_F(n) q^n = \prod_{n \in \mathbb{Z}_+ + \frac{1}{2}} (1+q^n) = q^{\frac{1}{48}} \frac{\eta^2(\tau)}{\eta(\frac{\tau}{2})\eta(2\tau)} \tag{4.4.9}$$

Nun verwendet man das bekannte Transformationsverhalten von $\eta(\tau)$ unter $S$:

$$\eta(-\frac{1}{\tau}) = \sqrt{-i\tau}\,\eta(\tau) \tag{4.4.10}$$

Für $\tau \to i\infty$ gilt $q = e^{2\pi i \tau} \to 0$ und $S(q) \to 1$. Der dominante Faktor in (4.4.8) ist dabei $q^{\frac{1}{24}}$; in (4.4.9) dagegen $q^{\frac{1}{48}}$. Dies liefert die Behauptung auch für den fermionischen Fall.

Für unitäre Darstellungen gilt $h_{min} = 0$, womit aus (4.4.7) folgt:

$$0 < c < k + \frac{l}{2} \tag{4.4.11}$$

Im Fall einer $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebra folgt aus dieser Proposition, daß rationale Theorien nur für solche Werte der zentralen Ladung existieren können, bei denen für $\delta$ ganz

$$c \leq \tilde{c} < 2 \tag{4.4.12a}$$

und im fermionischen Fall

$$c \leq \tilde{c} < \frac{3}{2} \tag{4.4.12b}$$

gilt. Tatsächlich beobachtet man, daß $0 < \tilde{c} < 2$ für unsere rationalen Theorien gilt und die isolierten rationalen Werte von $c$ immer $c < 2$ genügen (sie erfüllen sogar immer $c < 1$).

H.G. Kausch und G.M.T. Watts [63] haben für die $\mathcal{W}(2,4)$ eine Freifeld-Konstruktion unter Verwendung der $B_2$ durchgeführt. Besonders wichtig ist bei diesen Ergebnissen die Determinanten-Formel.

Die $B_2$ besitzt vier positive Wurzeln, von denen zwei einfach sind (zu Lie-Algebren vgl. z.B. [76]). Seien $\alpha_1$ und $\alpha_2$ die einfachen positiven Wurzeln. Dann ist durch:

$$\begin{aligned}\alpha_1 \cdot \alpha_1 &= 1\\ \alpha_2 \cdot \alpha_2 &= 2\\ \alpha_1 \cdot \alpha_2 &= -1\end{aligned} \tag{4.5.1}$$

das Skalarprodukt auf dem Wurzelgitter der $B_2$ definiert. Die $B_2$ besitzt zwei weitere positive Wurzeln, die in unserer Basis wie folgt gegeben sind:

$$\begin{aligned}\alpha_3 &:= \alpha_1 + \alpha_2\\ \alpha_4 &:= 2\alpha_1 + \alpha_2\end{aligned} \tag{4.5.2}$$

Das System der positiven Wurzeln ist dann $\Delta^+ := \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ und das System der Wurzeln ist gegeben durch $\Delta := \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, -\alpha_4\}$. Kausch und Watts führen nun einen weiteren Parameter $a$ ein, der später die zentrale Ladung ergeben soll. Nun werden der Weyl-Vektor $\rho$ sowie weitere Hilfsvektoren wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\rho &:= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+} \alpha = 2\alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_2\\ \rho^\vee &:= \sum_{\alpha\in\Delta^+} \frac{\alpha}{\alpha\cdot\alpha} = 3\alpha_1 + 2\alpha_2\\ \rho^* &:= a\rho - \frac{1}{a}\rho^\vee\end{aligned} \tag{4.5.3}$$

Nun führen Kausch und Watts zwei freie Ströme $j_1$ und $j_2$ ein. Mit $J := \alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2$ definiert man dann in Analogie zu (2.4.7):

$$L := \frac{1}{2}N(J,J) + \rho^* \cdot \partial J \tag{4.5.4}$$

Dies führt auf eine Virasoro-Algebra mit folgender zentraler Ladung (vgl. (2.4.8a)):

$$c = 2 - 12\rho^* \cdot \rho^* = 86 - 30a^2 - \frac{60}{a^2} \tag{4.5.5}$$

Mit

$$j_i \,|\, h, w\rangle =: \nu_i \,|\, h, w\rangle \tag{4.5.6}$$

und $\nu := \nu_1\alpha_1 + \nu_2\alpha_2$ erhält man für den $L_0$-Eigenwert $h$:

$$h = \frac{1}{2}\nu\cdot\nu - \nu\cdot\rho^* \tag{4.5.7}$$

Der weitaus schwierigere Teil ist nun die Konstruktion des Feldes $W$ und seiner Eigenwerte. Dies wurde in [63] durchgeführt. Hier genügt jedoch die Tatsache, daß dies möglich ist, und die Determinanten-Formel für den Level $N$:

$$D_N = \prod_{\alpha\in\Delta}\prod_{\substack{n,m\in\mathbb{Z}_+\\ nm\leq N}} d(\nu,\alpha,n,m,a)^{P_2(N-nm)} \tag{4.5.8a}$$

Mit

$$d(\nu,\alpha,n,m,a) := (\nu-\rho^*)\cdot\alpha + \frac{n}{a} - ma\frac{\alpha\cdot\alpha}{2} \tag{4.5.8b}$$

und $P_2(k)$ die Anzahl der Partitionen von $k$ in zwei verschiedene Farben.

Bei dieser Freifeld-Konstruktion sind nun zwei Dinge zu beobachten. Erstens ist die so konstruierte $\mathcal{W}(2,4)$ invariant unter der Transformation $a^2 \mapsto \frac{2}{a^2}$; insbesondere ändert sich die zentrale Ladung (4.5.5) unter dieser Transformation nicht. Zweitens ist die Vakuum-Darstellung gegeben durch $\nu = 0$.

In Kapitel 4.3 haben wir die Existenz rationaler Modelle dadurch gezeigt, daß wir Nullfelder untersucht haben. Ein solches Nullfeld existiert genau dann, wenn die Determinante in der Vakuum-Darstellung eine nicht-triviale Nullstelle besitzt. Es kann zwar genügen, die Existenz eines Nullzustandes zu zeigen. Sicherer ist es jedoch, zwei unabhängige nicht-triviale Nullzustände zu betrachten. Im folgenden wird gezeigt, daß dies praktisch keinen Mehraufwand bedeutet.

Zuerst wollen wir uns jedoch davon überzeugen, daß die Determinanten-Formel in der Vakuum-Darstellung generisch genau die erwarteten Nullzustände vorhersagt. Eine kurze Rechnung zeigt, daß in der Vakuumdarstellung genau folgende Linearfaktoren der Determinante unabhängig von dem Wert von $a$ verschwinden:

$$\begin{aligned} d(0,-\alpha_1,1,1,a) = d(0,-\alpha_2,1,1,a) = 0\\ d(0,-\alpha_3,2,3,a) = d(0,-\alpha_4,3,2,a) = 0 \end{aligned} \tag{4.5.9}$$

Man findet also je zwei nicht-triviale Nullzustände für die Level $N = 1$ und $N = 6$. Die generischen Nullzustände $L_1\,|v\rangle$, $W_1\,|v\rangle$, $W_2\,|v\rangle$ und $W_3\,|v\rangle$ führen zu folgendem Faktor in den Charakteren:

$$(1-q)^2(1-q^2)(1-q^3) = 1 - 2q + q^3 + q^4 - 2q^6 + q^7 \tag{4.5.10}$$

In der Tat ergeben also beide Rechnungen die gleichen generischen Nullzustände.

Verschwindet $d(0,\alpha,n,m,a)$ nicht generisch, so kann man es nach $a^2$ auflösen. Für alle Determinanten-Faktoren außer denen, die (4.5.9) erfüllen, verschwindet der Linearfaktor $d(0,\alpha,n,m,a)$ für den folgenden Wert von $a^2$:

$$a^2 = \frac{\rho^\vee\cdot\alpha + n}{\rho\cdot\alpha + \frac{m\alpha\cdot\alpha}{2}} \tag{4.5.11}$$

Durch Einsetzen der Wurzeln überzeugt man sich davon, daß es genau dann $m, n \in \mathbb{Z}_+$ gibt, so daß $d(0, \alpha, n, m, a)$ verschwindet, wenn $\alpha \in \{\alpha_2, \alpha_4, -\alpha_2, -\alpha_4\}$ und $a^2$ eine positive rationale Zahl ist, oder wenn $\alpha \in \{\alpha_1, \alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_3\}$ und $a^2$ das Doppelte einer positiven rationalen Zahl ist. Da sich $c$ unter $a^2 \mapsto \frac{2}{a^2}$ nicht ändert, folgt für diejenigen $c$ die Existenz von Nullzuständen, bei denen $c$ nach (4.5.5) durch $a^2 = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden $p, q \in \mathbb{Z}_+$ gegeben ist. Man beachte, daß der Level $N = nm$, bei dem die Nullstelle auftritt, außer von $p$ und $q$ auch von der Wurzel $\alpha$ abhängt. Einsetzen von $a^2 = \frac{p}{q}$ in (4.5.5) liefert als Parametrisierung von $c$ für die minimale Serie der $\mathcal{W}(2,4)$ [1]):

$$c_{p,q} = -\frac{2(5p-6q)(3p-5q)}{pq} \qquad p, q \in \mathbb{Z}_+, \text{teilerfremd} \tag{4.5.12}$$

Die drei in Kapitel 4.3 angegebenen rationalen Modelle der $\mathcal{W}(2,4)$ besitzen in der Tat eine solche Parametrisierung; und zwar gilt $c_{5,6} = c_{12,5} = -11$, $c_{6,11} = c_{11,3} = -\frac{444}{11}$ und $c_{8,7} = c_{7,4} = -\frac{11}{14}$. Allerdings besitzen auch die beiden degenerierten Modelle bei $c = 1$ und $c = -76$ eine Parametrisierung nach (4.5.12). Dies zeigt, daß die kleinen Werte von $p$ und $q$ etwas mehr Aufmerksamkeit verdienen.

Bekanntlich gibt es für Level $N \leq 3$ außer für die generischen Nullzustände (4.5.9) nur Nullzustände für $c = 0$, d.h. für $a^2 = \frac{6}{5}$ oder $a^2 = \frac{5}{3}$. Man stellt aber fest, daß (4.5.11) zusätzliche Lösungen besitzt für $a^2 = \frac{p}{q}$ und

$$(p,q) \in \{(2,1),(1,1),(3,2),(4,3),(2,3),(3,1),(1,2),(4,5),(4,1),(5,2)\} \tag{4.5.13a}$$

insbesondere also auch für $c_{3,2} = c_{4,3} = 1$. Hier liegt offensichtlich eine Nullstelle zu hoher Ordnung vor, so daß man diese Wertepaare $(p, q)$ nicht in (4.5.12) einsetzen darf.

Bei dem Level $N = 4$ besitzt die $\mathcal{W}(2,4)$ außer für $c = 0$ nur für $c = -\frac{22}{5}$ einen Nullzustand. Man findet jedoch auch Lösungen von (4.5.11) auf Level $N = 4$ für

$$(p,q) \in \{(8,5),(5,4),(2,5),(6,7),(5,1),(7,3)\} \tag{4.5.13b}$$

Man beachte, daß die $\mathcal{W}(2,4)$ für $c_{2,3} = c_{3,1} = -24$, $c_{6,7} = c_{7,3} = -\frac{68}{7}$ und $c_{8,5} = c_{5,4} = \frac{1}{2}$ inkonsistent ist. Somit bedarf lediglich die Nullstelle bei $c_{2,5} = c_{5,1} = -76$ einer Erklärung. In Kapitel 4.3 wurde argumentiert, daß $c = -76$ nicht zur minimalen Serie (4.5.12) der $\mathcal{W}(2,4)$ gehören sollte; demzufolge darf eine solche Parametrisierung nicht zugelassen sein.

Insgesamt haben wir festgestellt, daß man genau für diejenigen $a^2$-Werte zuviele Nullstellen findet, für die $a^2 = \frac{p}{q}$ oder $\frac{2}{a^2} = \frac{p}{q}$ mit $p \leq 2$ oder $q \leq 2$ gilt. Man wird also zu (4.5.12) ergänzen müssen, daß sich $c_{p,q}$ nicht schreiben lassen darf als $c_{p,q} = c_{p',q'}$ mit $p' \leq 2$ oder $q' \leq 2$ (diese Einschränkung wird durch ähnliche Untersuchungen bei höheren Leveln gestützt).

Nun gilt es noch, die $L_0$-Eigenwerte in den HGDs der rationalen Modelle zu bestimmen. Die zu den oben konstruierten Nullzuständen gehörenden Nullfelder sollten auch

---

[1]) Man beachte den Zusatz weiter unten, daß sich $c_{p,q}$ nicht schreiben lassen darf als $c_{p,q} = c_{p',q'}$ mit $p' \leq 2$ oder $q' \leq 2$.

in diesen Höchstgewichtsdarstellungen verschwinden. Ist $d(0,\alpha,m,n,a)$ der erste Faktor in der Determinante, der in der Vakuum-Darstellung verschwindet, so wird man solche $\nu$ suchen, die $d(\nu,\alpha,r,s,a)=0$ für $r\leq m$ und $s\leq n$ erfüllen. Dann verschwindet der Vakuum-Nullzustand nämlich entweder selbst in der HGD oder er baut auf einem Nullzustand auf.

Im allgemeinen findet man die Nullzustände kleinster Energie bei den Wurzel $\alpha_3$ und $\alpha_4$. Genauer gilt mit $a^2=\frac{p}{q}$:

$$\begin{aligned} d(0,\alpha_4,q-2,p-3,a) = 0 &= d(0,\alpha_3,2q-3,p-2,a) \\ &= d(0,\alpha_3,q-3,\frac{p}{2}-2,a) \end{aligned} \tag{4.5.14}$$

Sei die Parametrisierung $p,q$ nun so gewählt, daß $p$ ungerade ist. Dann ist der Nullzustand kleinster Energie durch die Wurzel $\alpha_4$ gegeben. Nun wird man für die HGDs forden, daß es $1\leq r_1\leq q-2$ und $1\leq s_1\leq p-3$ gibt, so daß

$$d(\nu,\alpha_4,r_1,s_1,a)=0 \tag{4.5.15}$$

gilt. Diese Gleichung kann man nach $\nu_1$ auflösen. Man findet:

$$d(\nu,\alpha_4,r_1,s_1,a)=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \nu_1=\frac{p(r_1+2)-q(s_1+3)}{aq} \tag{4.5.16}$$

In der Vakuum-Darstellung findet man den Nullzustand nächst kleinerer Energie bei $\alpha_2$ für den gleichen Wert von $a$. Sei wie für (4.5.14) $a^2=\frac{p}{q}$. Dann gilt:

$$d(0,\alpha_2,q-1,p-1,a)=0 \tag{4.5.17}$$

Da dieser Zustand auch in den HGDs verschwinden soll, fordert man die Existenz von $1\leq r_2\leq q-1$, $1\leq s_2\leq p-1$, so daß

$$d(\nu,\alpha_2,r_2,s_2,a)=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \nu_2=\frac{\nu_1}{2}+\frac{p(r_2+1)-q(s_2+1)}{2aq} \tag{4.5.18}$$

gilt, wobei wir die Bedingung bereits nach $\nu_2$ aufgelöst haben. Setzt man nun (4.5.16) und (4.5.18) in (4.5.7) ein, so erhält man:

$$h_{p,q;r_1,s_1,r_2,s_2}=\frac{(r_1p-s_1q)^2+(r_2p-s_2q)^2}{4pq}+\frac{c_{p,q}-2}{24} \tag{4.5.19a}$$

Diese Formel hat eine sehr einfache Struktur, liefert aber dafür die Vakuum-Darstellung bei $h_{p,q;q-2,p-3,q-1,p-1}=0$. Man stellt fest, daß die HGDs der drei in Kapitel 4.3 angegebenen minimalen Modelle eine Parametrisierung nach (4.5.19a) besitzen. Man beobachtet ferner, daß man für die Parameter $r_2=r_1+1,r_1+2,...$ und $s_2=s_1+2,s_1+4,...$ die tatsächlich auftretenden HGDs je genau zweimal erhält. Der Übersichtlichkeit halber fassen wir diese Bedingungen an die Indizes für (4.5.19a) nochmals zusammen:

$$\begin{array}{rrcl} & 1 \leq r_1 \leq q-2 & \text{und} & 1 \leq s_1 \leq p-3 \\ & 1 \leq r_2 \leq q-1 & \text{und} & 1 \leq s_2 \leq p-1 \\ \text{und} & r_2 = r_1 + r & \text{mit} & 0 < r \in \mathbb{Z}_+ \\ \text{und} & s_2 = s_1 + 2s & \text{mit} & 0 < s \in \mathbb{Z}_+ \end{array} \tag{4.5.19b}$$

In [19] wurde eine andere Formel für die $h$-Werte angegeben, die aus der Betrachtung anderer Nullzustände folgt. Diese Wahlmöglichkeit bei der Herleitung einer Formel für die $h$-Werte ist auch der Grund, warum mit (4.5.19b) zusätzliche Bedingungen an die Indizes gefordert werden mußten.

Die $h$-Werte haben eine (4.5.19b) berücksichtigende Symmetrie:

$$h_{p,q;r_1,s_1,r_2,s_2} = h_{p,q;q-r_2,p-s_2,q-r_1,p-s_1} \tag{4.5.20}$$

Dies erklärt einerseits, warum die $h$-Werte genau je zweimal vorkommen. Andererseits darf man aufgrund (4.5.20) erwarten, daß die Fusionsalgebra in den durch (4.5.19) gegebenen Modellen tatsächlich schließt. Aus der Annahme daß (4.5.19) die korrekte Parametrisierung für alle minimalen Modelle der $\mathcal{W}(2,4)$ ist, folgt, daß in (4.5.12) notwendig $p, q > 2$ gelten muß, damit das zugehörige Modell einen nicht-leeren Feldgehalt besitzt.

Besonders interessant sind die unitären Darstellungen der $\mathcal{W}(2,4)$. In diesen muß $c > 0$ gelten und man erhält aus (4.5.12) als mögliche Parameter $\frac{6}{5} < \frac{p}{q} < \frac{5}{3}$. Nun sollten auch alle Werte von $h \geq 0$ sein. Überprüft man dies anhand von (4.5.19) für alle möglichen $p, q$'s mit $q \leq 13$, so findet man fast immer auch negative Werte von $h$. Lediglich das Modell bei $c_{7,5} = \frac{8}{7}$ ist unitär. Nach Umdefinition der Algebra könnte man evtl. auch das Ising-Modell bei $c_{5,4} = \frac{1}{2}$ als ein unitäres minimales Modell der $\mathcal{W}(2,4)$ deuten. Bei $c = \frac{8}{7}$ findet man die $\mathbb{Z}_5$-Parafermionen wieder, die bereits in Kapitel 4.4 in Verbindung mit der $\mathcal{W}(2,8)$ erwähnt wurden; sie ergeben genau die Hälfte der HGDs der $\mathcal{W}(2,4)$. Offensichtlich besitzt die $\mathcal{W}(2,4)$ also keine unitäre minimale Serie; lediglich einzelne unitäre Modelle scheinen zu existieren.

Wie wir gesehen haben, ist bei der Interpretation von Nullstellen der Determinante (4.5.8) als Hinweis auf Nullzustände Vorsicht angebracht. Die in diesem Kapitel hergeleiteten Parametrisierungen (4.5.12) und (4.5.19a) sind somit nur notwendige Bedingungen an die HGDs, damit sie zur minimalen Serie der $\mathcal{W}(2,4)$ gehören können. Wir haben zwar argumentiert, daß (4.5.12) und (4.5.19a) mit (4.5.19b) auch hinreichend sein sollten; um dies zu beweisen, bedarf es jedoch nicht nur einer Vertiefung des hier durchgeführten Studiums sondern auch einer sorgfältigen Überprüfung der Determinanten-Formel (4.5.8).
Charakterfomeln, Fusionsregeln u.ä. sind zwar für die $\mathcal{W}(2,4)$ noch nicht bekannt, lassen sich aber vielleicht durch weitere Auswertung des hier gewählten Zugangs bestimmen.

Es sei darauf hingewiesen, daß die neuen Ergebnisse von E. Frenkel u.a. [64] sowohl die hier präsentierten Ergebnisse stützen (leicht verifizieren kann man z.B. die Formel (4.5.12)), als auch durch Formeln für die Charaktere eine Perspektive für die Bestimmung der Fusionsalgebren eröffnen.

# 5. Super-$\mathcal{W}$-Algebren

## 5.1. Eine wichtige $\mathcal{W}$-Algebra: Die Super-Virasoro-Algebra

Dieses Kapitel ist der Super-Virasoro-Algebra – genauer der $N = 1$-Super-Virasoro-Algebra – gewidmet. Diese Algebra ist seit langem gut bekannt [37], und sie besitzt auch eine geometrische Interpretation [77] als Verallgemeinerung der konformen Transformationen auf Super-Räume. Wir wollen sie jedoch hier einfach als eine besondere $\mathcal{W}$-Algebra betrachten. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß sich nicht nur die Super-Virasoro-Algebra sondern auch erweiterte superkonforme Algebren mit Hilfe von Super-Räumen elegant kovariant formulieren lassen [78].

Erweitert man die Virasoro-Algebra (2.2.10) um ein einfaches primäres Feld der Dimension $\frac{3}{2}$, so erhält man die Super-Virasoro-Algebra (in unserer Sprechweise die $\mathcal{W}(2, \frac{3}{2})$) mit folgenden Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (n-m)L_{m+n} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0} \\ [L_m, G_n] &= (n - \tfrac{1}{2}m)G_{m+n} \\ [G_m, G_n]_+ &= 2L_{m+n} + \frac{c}{3}(m^2 - \tfrac{1}{4})\delta_{m+n,0} \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Da die Kopplungskonstanten nicht von der zentralen Ladung abhängen, ist die Jacobi-Identität (3.1.9) unabhängig von dem Wert der zentralen Ladung. Man überzeugt sich ferner leicht davon, daß in ihr alle Terme verschwinden.

Es ist durchaus bemerkenswert, daß im Rahmen des hier behandelten allgemeinen Begriffsapparates von $\mathcal{W}$-Algebren alle Vertauschungsrelationen für das Feld $G$ automatisch die übliche Form annehmen, wenn man nur fordert, daß es sich bei $G$ um ein primäres Feld der Dimension $\frac{3}{2}$ handeln soll. Da diese Algebra linear in den Feldern schließt, handelt es sich bei ihr um eine echte Super-Lie-Algebra. Um eine echte Lie-Algebra handelt es sich im Gegensatz zur Virasoro-Algebra allerdings nicht, da der Kommutator (5.1.1) graduiert ist und die Algebra somit auch eine graduierte Jacobi-Identität (3.1.9) erfüllt.

Die Darstellungstheorie der Super-Virasoro-Algebra läßt sich auf die gleiche Weise wie die der Virasoro-Algebra behandeln. Mit Hilfe einer verallgemeinerten Determinanten-Formel für den Neveu-Schwarz-Sektor nach Kac konnte H. Eichenherr zeigen [79], daß degenerierte Darstellungen der Super-Virasoro-Algebra gegeben sind durch:

$$\begin{aligned} c &= \frac{3}{2}\big(1 - 16{\alpha_0}^2\big) \\ \alpha_\pm &= \alpha_0 \pm \sqrt{{\alpha_0}^2 + \tfrac{1}{2}} \\ h_{r,s} &= \frac{1}{4}\big((r\alpha_- + s\alpha_+)^2 - (\alpha_- + \alpha_+)^2\big) \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

Aus der Determinantenformel lassen sich dann auch die minimalen Modelle der Super-Virasoro-Algebra bestimmen; dies wurde in obiger Quelle für den Neveu-Schwarz-Sektor durchgeführt. Ferner haben Goddard, Kent und Olive für die unitäre minimale Serie eine Freifeld-Konstruktion unter Verwendung freier Fermionen einschließlich einer Coset-Konstruktion durchgeführt (man vergleiche die in Kapitel 2.4 skizzierte Konstruktion für die Virasoro-Algebra) und haben auf diese Weise die folgenden Formeln für den Fall $q = p + 1$ auch im Ramond-Sektor bewiesen [37]:

$$
\begin{aligned}
c_{p,q} &= \frac{3}{2}\Big(1 - \frac{2(p-q)^2}{pq}\Big) \quad \text{mit} \begin{cases} p,q \in \mathbb{Z}_+, & p,q \quad \text{teilerfremd und} \quad p+q \in 2\mathbb{Z}_+ \\ p,q \in 2\mathbb{Z}_+, & \frac{p}{2},\frac{q}{2} \quad \text{teilerfremd und} \quad \frac{p}{2}+\frac{q}{2} \notin 2\mathbb{Z}_+ \end{cases} \\
h_{p,q;r,s} &= \frac{(pr-qs)^2-(p-q)^2}{8pq} + \frac{1-(-1)^{r+s}}{32} \qquad 1 \le r \le q-1 \ , \ 1 \le s \le p-1
\end{aligned}
\tag{5.1.3}
$$

Für den allgemeinen Fall vergleiche man auch [80] sowie [81] [82].

Mit $r+s$ gerade erhält man Darstellungen im Neveu-Schwarz-Sektor und $r+s$ ungerade liefert solche im Ramond-Sektor.

Die Teilbarkeitseigenschaften in (5.1.3) stellen sicher, daß man kleinstmögliche $p,q \in \mathbb{Z}_+$ mit $p+q \in 2\mathbb{Z}_+$ wählt. Die Eigenschaft, daß $p+q$ gerade ist, ist erforderlich, damit die Fusionsalgebra im Neveu-Schwarz-Sektor schließt [79].

Im nächsten Kapitel wollen wir zeigen, daß sich nicht nur die Darstellungstheorie der Super-Virasoro-Algebra auf ähnlich Weise wie die der Virasoro-Algebra behandeln läßt, sondern auch supersymmetrische $\mathcal{W}$-Algebren analog zu den bisher diskutierten konformen Algebren untersucht werden können.

$\mathcal{SW}$-Algebren sind als $\mathcal{W}$-Algebren deswegen ausgezeichnet, weil sie eine nicht-triviale Unteralgebra besitzen, bei der man nicht nur weiß, was 'primär' bezüglich dieser Unteralgebra bedeutet, sondern die Operation der Unteralgebra auf der gesamten Algebra weitgehend bekannt ist. Um dies näher zu erläutern, fassen wir einige allgemeine Resultate über $\mathcal{SW}$-Algebren kurz zusammmen:

Man charakterisiert ein super-primäres Feld dadurch, daß seine Vertauschungs-Relationen genau wie bei einem primären Feld (vgl. (2.3.8)) mit der Symmetrie-Algebra möglichst einfach sein sollten. Für den Kommutator mit $L$ ergibt das die Eigenschaften eines primären Feldes, und für den Kommutator mit dem Fermion $G$ heißt dies, daß auf der rechten Seite nur ein anderes Feld –der 'Superpartner'– auftreten darf:

$$\begin{aligned} [G_n, \phi_m]_\pm &= C^{\psi}_{G\phi} p_{\frac{3}{2},d,d+\frac{1}{2}}(n,m)\ \psi_{n+m} = C^{\psi}_{G\phi}\psi_{n+m} \\ [G_n, \psi_k]_\pm &= C^{\phi}_{G\psi} p_{\frac{3}{2},d+\frac{1}{2},d}(n,k)\ \phi_{n+k} = \frac{C^{\phi}_{G\psi}}{2d}(k-(2d-1)n)\phi_{n+k} \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Häufig werden die beiden Superpartner, die sich in ihrer konformen Dimension nur um $\frac{1}{2}$ unterscheiden, mit Hilfe des Grassmann-Formalismus zusammengefaßt. Dies führt über eine Verallgemeinerung der OPE genau auf die gleichen Ergebnisse wie unser Zugang [77]. Unser Zugang läßt sich jedoch vielleicht auch auf andere $\mathcal{W}$-Algebren verallgemeinern. $d$ bezeichnet hier die Dimension des kleineren Feldes des Feldpaares $\{\phi, \psi\}$. Als Kurzschreibweise werden wir schreiben:

$$\mathcal{SW}(d_1, d_2, d_3, ...) := \mathcal{W}(d_1, d_1+\tfrac{1}{2}, d_2, d_2+\tfrac{1}{2}, d_3, d_3+\tfrac{1}{2}, ...) \tag{5.2.2}$$

Die Jacobi-Identitäten, die nur eines der zusätzlichen Felder und zwei $G$'s enthalten, lassen sich relativ einfach allgemein überprüfen. Außer der trivialen Beziehung:

$$C^{\psi_i}_{G\phi_i} = \frac{2d_i+1}{2d_i}(-1)^{2d_i+1} C^{\phi_i}_{G\psi_i} \tag{5.2.3}$$

führen sie zu folgender Aussage über die Kopplungskonstante $C^{\psi_i}_{G\phi_i}$:

$$\left(C^{\psi_i}_{G\phi_i}\right)^2 = (-1)^{2d_i+1}(2d_i+1) \tag{5.2.4}$$

Jacobi-Identitäten mit nur noch einem $G$ sind schwieriger zu behandeln. Immerhin kann man durch Einsetzen bestimmter Indizes zeigen, daß Kopplungskonstanten, in denen zwei Felder durch ihre Superpartner ersetzt sind, bestimmte Relationen erfüllen müssen, wie z.B.:

$$\left(C^{\phi_k}_{\psi_i\phi_j}\right)^2 = (2d_k)^2 \frac{(-1)^{2d_i+2d_k}(2d_k+1)}{2d_i+1}\left(C^{\psi_k}_{\phi_i\phi_j}\right)^2 \tag{5.2.5}$$

In der Sprechweise einer $\mathcal{W}$-Algebra besitzt eine Algebra $\mathcal{SW}(\frac{3}{2}, d)$ insgesamt vier Felder ($G$, $L$ und zwei zusätzliche Felder $\phi$ und $\psi$). Beschränkt man sich auf das Nachprüfen von Jacobi-Identitäten, die nur $\phi$ und $\psi$ enthalten, so müssen immerhin vier Jacobi-Identitäten überprüft werden. Eine $\mathcal{SW}$-Algebra mit drei Generatoren besitzt als $\mathcal{W}$-Algebra aufgefaßt sechs Felder, d.h. außer $L$ und $G$ noch vier weitere. Ohne Berücksichtigung der Felder $L$ und $G$ ergeben sich daraus 20 Jacobi-Identitäten mit je mindestens zwei primären Feldern (außer $L$ und $G$) auf der rechten Seite. Zudem wächst der Feldgehalt bei hoher Dimension nicht unbeträchtlich. Dennoch haben $\mathcal{SW}$-Algebren den Vorteil, daß bei ihnen Phänomene, die bei normalen $\mathcal{W}$-Algebren erst bei höherer Dimension auftreten, bei ihnen bereits bei vergleichsweise kleiner Dimension studiert werden können. So hat die größte bekannte, generisch existierende $\mathcal{SW}$-Algebra mit zwei Generatoren ein zusätzliches Super-Primäres Feld der Dimension 2, während auch eine $\mathcal{W}(2,6)$ noch generisch existiert. Folglich existiert bereits die $\mathcal{SW}(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ nur für diskrete $c$-Werte mit nicht verschwindender Selbstkopplung, während etwas vergleichbares bei $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren erst für $\delta \geq 8$ auftritt. Insgesamt wurden unter Mitwirkung des Autors [20] folgende $\mathcal{SW}(\frac{3}{2}, d)$-Algebren untersucht (Die Algebren mit $d \leq \frac{7}{2}$ wurden bereits von J.M. Figueroa-O'Farrill u.a. konstruiert [83]):

| $d$ | *c bei Selbstkopplung Null* | *c bei Selbstkopplung ungleich Null* |
|---|---|---|
| $\frac{3}{2}$ | generisch | generisch |
| 2 | $-\frac{6}{5}$ | generisch |
| $\frac{5}{2}$ | $-\frac{5}{2}, \frac{10}{7}$ | |
| 3 | $-\frac{45}{2}, -\frac{27}{7}, \frac{5}{4}$ | |
| $\frac{7}{2}$ | | $-\frac{17}{11}, \frac{7}{5}$ |
| 4 | $-\frac{20}{3}$ | $-\frac{185}{4}, -13, -\frac{21}{2}, -\frac{120}{13}$ |
| $\frac{9}{2}$ | $-\frac{69}{2}, -\frac{81}{10}, \frac{4}{11}$ | |
| 5 | $-\frac{105}{11}$ | |
| $\frac{11}{2}$ | $-\frac{5}{13}$ | $-\frac{705}{8}, -\frac{155}{19}, \frac{11}{40}, \frac{10}{7}$ |
| 6 | $-\frac{162}{13}, -\frac{93}{2}, \frac{27}{20}$ | $-\frac{2241}{20}, -18, -\frac{33}{2}$ |
| $\frac{13}{2}$ | $-\frac{195}{14}$ | |
| 7 | $-\frac{77}{5}, -\frac{13}{8}$ | |

Die Tabelle enthält exakt die Werte der zentralen Ladung, für die diese Algebren existieren. Für $\mathcal{SW}(\frac{3}{2}, d_1, d_2)$-Algebren ergibt sich folgendes Bild:

| $d_1$ | $d_2$ | *Algebra existiert für:* |
|---|---|---|
| $\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $c$ generisch und drei freie Kopplungskonstanten |
| $\frac{3}{2}$ | 2 | Zwei Lösungen mit $c$ generisch und je einer freien Kopplungskonstanten |
| $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | Drei Lösungen für $c$ generisch, mit festgelegten Kopplungskonstanten |
| 2 | 2 | Nur für $c = \frac{3}{2}$ mit einer freien Kopplungskonstanten |
| 2 | $\frac{5}{2}$ | Nur für $c = -15$ und $c = \frac{39}{2}$ bei festen Kopplungskonstanten |
| $\frac{5}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | Keine Lösung |
| $\frac{5}{2}$ | $\frac{7}{2}$ | Nur für $c = \frac{13}{6}$ und keinem freien Parameter |

Die $\mathcal{SW}(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2)$ wurde bereits von R. Blumenhagen unter Verwendung einer explizit kovarianten Formulierung konstruiert. Auch zur $\mathcal{SW}(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2})$ gab es bereits frühere Ergebnisse [84]. Ansonsten beobachtet man bei $\mathcal{SW}(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, d)$-Algebren eine Struktur, die häufig als 'Tensorprodukt'[1]) bezeichnet wird, vom Standpunkt der Algebra aus jedoch eine direkte Summe ist (vgl. auch [42]). In diesen Fällen gilt $\mathcal{SW}(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, d) \cong \mathcal{SW}(\frac{3}{2}) \oplus \mathcal{SW}(\frac{3}{2}, d)$. Insbesondere gilt auch (vgl. [83]) $\mathcal{SW}(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \cong \mathcal{SW}(\frac{3}{2}) \oplus \mathcal{SW}(\frac{3}{2}) \oplus \mathcal{SW}(\frac{3}{2})$

Näheres zu $\mathcal{SW}$-Algebren kann man auch der Diplomarbeit von W. Eholzer entnehmen [85].

Darstellungen von Super-$\mathcal{W}$-Algebren können im Prinzip mit genau den gleichen Methoden studiert werden, wie sie in dieser Arbeit vorgestellt werden. Dennoch stellt man im Detail zahlreiche Unterschiede fest. So genügt z.B. bereits teilweise das Studium von Dreipunktfunktion, um alle relevanten Bedingungen zu finden (z.B. im Fall des Neveu-Schwarz-Sektors der $\mathcal{SW}(\frac{3}{2}, 4)$).

Der Ramond-Sektor der Super-$\mathcal{W}$-Algebren ist schwieriger zu behandeln, da hier nicht nur die Dimension der horizontalen Unteralgebra etwa doppelt so groß ist, sondern auch die Formel (3.1.6) für normalgeordnete Produkte nicht mehr in allen Fällen gilt. Kritisch ist hauptsächlich das normalgeordenete Produkt von zwei Fermionen, wenn man ansonsten Bosonen in normalgeordneten Produkten immer nach außen schreibt. Dieses Problem läßt sich lösen, indem man den Kommutator von $G$ mit einem Fermion einer um ein halb kleineren Dimension als die des fraglichen normalgeordneten Produktes betrachtet. Tritt auf der rechten Seite das problematische normalgeordnete Produkt auf, so kann man die Gleichung nach ihm auflösen und auf diese Weise seine Berechnung vermeiden.

Ferner ist im Ramond-Sektor von $\mathcal{SW}(\frac{3}{2}, d)$-Algebren die horizontale Unteralgebra größer als bei $\mathcal{W}(2, \delta)$-Algebren; die Cartan-Unteralgebra besitzt dagegen eine vergleichbare Größe. Um dies genauer zu diskutieren, sei im folgenden $\xi$ das Fermion und $\chi$ das Boson unter den zusätzlichen einfachen Feldern. Dann gehören zwar $L_0$ und $\chi_0$ zur Cartan-Unteralgebra; in der Regel jedoch nicht $G_0$ und $\xi_0$. Man findet nämlich meist zu beiden Feldern ein aus $L$

[1]) Diese Bezeichnung ist auf dem Niveau der zugehörigen Feldtheorien, d.h. den Darstellungen der Symmetrie-Algebra, motiviert.

und $\xi$ aufgebautes Boson, mit dessen Nullmode $G_0$ oder $\xi_0$ nicht kommutieren. Dieses Problem läßt sich teilweise umgehen, indem man Fermionen immer nur paarweise betrachtet. Übrig bleiben dann evtl. noch $G_0^2$, $\xi_0^2$ und $\xi_0 G_0$ ($G_0 \xi_0$ kann mit Hilfe des Antikommutators in $\xi_0 G_0$ plus Nullmoden von Bosonen überführt werden). $G_0^2$ und $\xi_0^2$ können mit Hilfe des Antikommutators eliminiert werden:

$$\begin{aligned} G_0 G_0 &= \tfrac{1}{2}[G_0, G_0]_+ = L_0 - \frac{c}{24} \\ \xi_0 \xi_0 &= \tfrac{1}{2}[\xi_0, \xi_0]_+ \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Es verbleibt lediglich der Ausdruck $\langle h, w \mid \xi_0 G_0 \mid h, w \rangle$, der als neue Unbekannte betrachtet und als solche eliminiert werden muß.

Man beobachtet dabei in groben Zügen die gleichen Phänomene wie bei Darstellungen von $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren. Man findet Verallgemeinerungen der von $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren bekannten Serien:

- Viele $\mathcal{SW}$-Algebren bei diskreten $c$-Werten lassen sich im Rahmen der ADE-Klassifikation von A. Cappelli u.a. der super-konformen Theorien verstehen [62]. Hier können die Werte von $c$ und $h$ durch Einsetzen geeigneter Indizes aus (5.1.3) bestimmt werden.
- Man findet ferner $\mathcal{SW}$-Algebren, bei denen sich $c$ nach (5.1.3) als $c = c_{1,s}$ parametrisieren läßt. Auch hier wird vermutlich eine den $\mathcal{W}$-Algebren vergleichbare Interpretation nach [68] möglich sein.
- Schließlich gibt es auch 'Parabolische' $\mathcal{SW}$-Algebren, bei denen die effektive zentrale Ladung $\tilde{c} = \frac{3}{2}$ ist und die tatsächliche zentrale Ladung sich als Differenz eines Vielfachen der Dimension des zusätzlichen Feldes und $\frac{3}{2}$ ergibt. Zu dieser Serie liegen bereits einige Ergebnisse von M. Flohr auch zum Fall der $\mathcal{SW}$-Algebren vor [72]. Da es sich hier um degenerierte Modelle der Super-Virasoro-Algebra handelt, lassen sich die Werte von $h$ anhand von (5.1.2) mit rationalen Indizes berechnen.

Es ist auffallend, daß Super-$\mathcal{W}$-Algebren nicht für singuläre irrationale Werte der zentralen Ladung existieren.

Ferner trifft man auch bei $\mathcal{SW}$-Algebren auf exzeptionelle rationale Modelle. Dies gilt z.B. für $\mathcal{SW}(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ bei $c = -\frac{17}{11}$ und für $\mathcal{SW}(\frac{3}{2}, 4)$ bei den beiden Werten der zentralen Ladung $c = -\frac{120}{13}$ und $c = -\frac{185}{4}$. Als neues Phänomen ist zu beobachten, daß die Darstellungen einiger $\mathcal{SW}$-Algebren sowohl einen kontinuierlichen als auch einen diskreten Zweig haben. Dies gilt für $\mathcal{SW}(\frac{3}{2}, 2)$ bei $c = \frac{3}{2}$ und $c = -\frac{39}{4}$, sowie für $\mathcal{SW}(\frac{3}{2}, 4)$ bei $c = -13$. Näheres zu Darstellungen von Super-$\mathcal{W}$-Algebren ist in der Diplomarbeit von R. Hübel zu finden [86].

Man kann zusammenfassend sagen, daß ein gutes Verständnis von $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren weitgehend auf $\mathcal{SW}$-Algebren mit zwei Generatoren übertragbar sein wird. Man darf also hoffen, daß sich Resultate über Darstellungen von $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren mit geringen technischen Schwierigkeiten auch auf $\mathcal{SW}$-Algebren anwenden lassen.

# 6. Zusammenfassung und Ausblick

Durch explizite Untersuchung der Darstellungen von $\mathcal{W}$-Algebren konnte gezeigt werden, daß viele der neuen in [10] und [9] entdeckten $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren zu rationalen Feldtheorien gehören. Aufgrund der expliziten Ergebnisse ist zu vermuten, daß die verbleibenden Theorien nicht rational sind.

Im Fall rationaler Theorien wurden notwendige Bedigungen an die HGDs hergeleitet, so daß sie auf eine endliche Menge eingeschränkt werden konnten. Höchstwahrscheinlich gibt es keine weiteren Bedingungen, so daß alle diese möglichen HGDs auch tatsächlich existieren. Diese Vermutung ist dadurch motiviert, daß in allen Fällen, in denen Erklärungen möglich sind, die expliziten Ergebnisse mit der Erwartung übereinstimmen. Dies kann nicht nur als Kontrolle unserer Algorithmen sondern auch der theoretischen Argumente gewertet werden, bei denen häufig exakte Begründungen noch ausstehen.

Ferner genügen unsere Listen von $h$-Werten strengen Konsistenzbedingungen, die aus modularer Invarianz folgen. Nach der von S.D. Mathur u.a. beschriebenen Methode [31] können hier aus Charakter-Anfängen die vollständigen Charaktere rekonstruiert werden. Mit dieser Methode wurden kürzlich erste Fortschritte in der Interpretation der letzten offenen Serie rationaler Modelle bei Darstellungen von $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren mit Hilfe von Darstellungen der Modulgruppe gemacht. Sie stützen die Vermutung, daß die $\mathcal{W}(2,4)$ bei $c=-\frac{444}{11}$ tatsächlich mit $\Gamma_{11}$ zusammenhängt [85].

Für $\mathcal{W}$-Algebren mit isolierter zentraler Erweiterung $c$ haben wir Jacobi-Identitäten in Vierpunkt-Korrelatoren studiert. Im Prinzip könnten auch Drei- und Fünfpunkt-Korrelatoren zu weiteren Einschränkungen führen. An einigen Beispielen wurde jedoch verifiziert, daß dies nicht der Fall ist. Auch führt in diesen Fällen das Studium von Nullfeldern – soweit es durchgeführt wurde– zu den gleichen Ergebnissen wie die Jacobi-Identitäten in Vierpunkt-Korrelatoren.

Für generisch existierende Algebren wie die $\mathcal{W}(2,3)$, $\mathcal{W}(2,4)$ und $\mathcal{W}(2,6)$ müssen andere Methoden angewandt werden. Hier sind interessante RCFTs in einem Kontinuum von $c$-Werten verborgen. Um hier die physikalisch relevanten HGDs zu finden, wurde gefordert, daß Nullfelder in allen Darstellungen verschwinden. Es wurde ferner gezeigt, daß sich diese Methoden auch eignen, um die minimalen Serien dieser Algebren anhand ihrer Determinanten-Formeln zu studieren. Dennoch gibt es bei den rationalen Modellen dieser Algebren viele offene Fragen, bei deren Klärung die hier diskutierten Beispiele hilfreich sein könnten.

Für die bosonischen $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren, die für $C_{WW}^{W}=0$ existieren, wurde auf die Möglichkeit eines Twists des Bosons hingewiesen. In diesen Fällen wurden auch die Darstellungen im getwisteten Sektor der Algebra bestimmt. Die vollständige Dikussion dieser Beobachtung bei der $\mathcal{W}(2,3)$ sowie mögliche Anwendungen sind hier offene Fragen.

Leider schließen die rationalen Modelle unserer $\mathcal{W}(2,\delta)$–Algebren keine neuen unitären ein. Trotzdem führen sie zu neuen Universalitätsklassen von Phasenübergängen zweiter

Ordnung in der statistischen Mechanik. Außerdem steht die vollständige Klassifikation aller RCFTs noch aus, und Beispiele für neue Phänomene sind auch für diese grundlegende Frage sicher hilfreich.

Die Struktur eines Teils der neuen RCFT war so unerwartet, daß zuerst explizite Computer-Rechnungen notwendig waren, bevor ein konzeptuelles Verständnis dieser Modelle versucht werden konnte. Nun ist zumindest eine gute Klassifikation der meisten HGDs möglich. Für einige insbesondere auch rationale Modelle ist das Verständnis allerdings noch recht rudimentär. Zu den offenen Fragen gehört die Bestimmung der Charaktere der $\mathcal{W}(2,4)$ bei $\tilde{c} = \frac{12}{11}$, der $\mathcal{W}(2,6)$ bei $\tilde{c} = \frac{20}{17}$ und der $\mathcal{W}(2,8)$ bei $\tilde{c} = \frac{28}{23}$ und deren Darstellungen vom Standpunkt der Modulgruppe aus. Ungeklärt ist auch die Interpretation der meisten nicht-rationalen Theorien.

In Bezug auf Anwendungen nicht nur in der statistischen Physik, sondern auch in String-Feld-Theorien konnte gezeigt werden, daß sich die bei $\mathcal{W}$-Algebren eingesetzten Methoden auch auf $N = 1$ erweiterte superkonforme Algebren übertragen lassen und auch dort zu analogen Ergebnissen führen. Dies gibt Anlaß zu der Hoffnung, daß sich auch die im Rahmen von String-Theorien interessanten $N = 2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebren auf vergleichbare Weise untersuchen lassen. Nicht zuletzt sei darauf hingewiesen, daß sich bei $\mathcal{W}$-Algebren erzielte Resultate häufig auch auf $\mathcal{SW}$-Algebren übertragbar sind. Ein gutes Verständnis von $\mathcal{W}$-Algebren wird sich somit auch für die entsprechenden superkonformen Algebren als nützlich erweisen.

Auch wenn man mit den hier präsentierten Ergebnissen einer Klassifikation aller $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren und ihrer Darstellungen deutlich näher gekommen sein dürfte, zeigen die vielen offenen Fragen selbst in diesem einfachen Spezialfall, daß noch viel zu tun ist, bis alle RCFTs klassifiziert sind. Das Studium von $\mathcal{W}$-Algebren (und auch den verschiedenen Super-$\mathcal{W}$-Algebren) wird auf diesem Weg sicher ein wichtiges Hilfsmittel sein.

**Danksagung**

Die meisten neuen Erkenntnisse, die in dieser Arbeit vorgestellt werden, sind in Gemeinschaftsarbeit in der Arbeitsgruppe von Herrn Prof. Nahm am Physikalischen Institut der Universität Bonn entstanden, so daß oft eine genaue Zuordnung zu einem einzelnen gar nicht möglich ist. Allerdings habe ich mich bemüht, Schwerpunkte dort zu setzen, wo eine deutliche Eigenleistung erkennbar war.

Ich möchte allen Mitgliedern der Nahmschen Arbeitsgruppe – R. Blumenhagen, W. Eholzer, M. Flohr, R. Hübel, J. Kellendonk, A. Kliem, St. Mallwitz, M. Terhoeven, A. Recknagel, M. Rösgen und R. Varnhagen – ganz herzlich für ihre ständige Diskussionsbereitschaft und die ausgezeichnete Atmosphäre danken. Danken möchte der Autor auch dem Max-Planck-Institut für Mathematik, ohne deren Computer diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre und dort insbesondere S. Maurmann für seine geduldige Mithilfe in Computerfragen.

Ganz besonderer Dank gilt jedoch dem Betreuer dieser Diplomarbeit, W. Nahm, dessen geduldige Unterstützung von grundlegender Bedeutung war.

## Quellenverzeichnis


[1] H. Bateman, E. Cunningham, *The Conformal Transformations of a Space of Four Dimensions and the Generalization of the Lorentz-Einstein Principle* Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 7 (1909)

[2] E. Cunningham *The Principle of Relativity in Electrodynamics and an Extension Thereof* Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 8 (1910) S. 77

[3] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov *Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory* Nucl. Phys. **B241** (1984) S. 333

[4] J.C. Campuzano, M.S. Foster, G. Jennings, R.F. Willis *Au*(110) $(1 \times 2)$*-to-*$(1 \times 1)$ *Phase Transition: A Physical Realization of the Two-Dimensional Ising Model*, Physical Rev. Lett. 54 (1985) S. 2684

[5] P. Piercy, H. Pfnür, *Experimental Verification of Critical Exponents in the Two-Dimensional Four State Potts Universality Class: Oxygen on Ru*(0001) Physical Rev. Lett. 59 (1987) S. 1124

[6] M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, Vol. 1,2 Cambridge University Press (1987)

[7] L.C. Biedenharn, J.D. Louck, *The Racah-Wigner Algebra in Quantum Theory* Encyclopedia of Mathematics Vol. 9 (1980)

[8] A.B. Zamolodchikov *Infinite Additional Symmetries in Two-Dimensional Conformal Quantum Field Theory*, Theor. Math. Phys. 65 (1986) S. 1205

[9] H.G. Kausch, G.M.T. Watts, *A Study of $\mathcal{W}$-Algebras Using Jacobi Identities* Nucl. Phys. **B354** (1991) S. 740

[10] R. Blumenhagen, M. Flohr, A. Kliem, W. Nahm, A. Recknagel, R. Varnhagen *$\mathcal{W}$-Algebras with Two and Three Generators*, Nucl. Phys. **B361** (1991) S. 255

[11] W. Nahm, *Chiral Algebras of Two-Dimensional Chiral Field Theories and Their Normal Ordered Products* , Proceedings Trieste Conference on Recent Developments in Conformal Field Theories, ICTP, Trieste (1989) S. 81

[12] J. Fröhlich, T. Kerler, *Universality in Quantum Hall Systems* Preprint ETH-TH/90-26 (1990)

[13] J. Balog, L. Fehér, L. O'Raifeartaigh, P. Forgács, A. Wipf *Toda Theory and $\mathcal{W}$-Algebra from a Gauged WZNW Point of View* Ann. Phys. 203 (1990) S. 76

[14] J. Balog, L. Fehér, P. Forgács, L. O'Raifeartaigh, A. Wipf *Kac-Moody Realization of $\mathcal{W}$-Algebras* Phys. Lett. **B244** (1990) S. 435

[15] A. Bilal, J.L. Gervais *Systematic Construction of Conformal Theories with Higher-Spin Virasoro Symmetries*, Nucl. Phys. **B318** (1989) S. 579

[16] W. Nahm, *Mass Sepctra of Dual Strings* Nucl. Phys. **B114** (1976) S. 174

[17] J.L. Cardy, *Operator Content of Two-Dimensional Conformally Invariant Theories* Nucl. Phys. **B270** (1986) S. 186

[18] E. Witten, *Quantum Field Theory and the Jones Polynomial* Comm. Math. Phys. 121 (1989) S. 351

[19] W. Eholzer, M. Flohr, A. Honecker, R. Hübel, W. Nahm, R. Varnhagen *Representations of $\mathcal{W}$-Algebras with Two Generators and New Rational Models* Preprint BONN-HE-91-22 (1991), wird in Nucl. Phys. **B** publiziert

[20] R. Blumenhagen, W. Eholzer, A. Honecker, R. Hübel *New N=1 Extended Superconformal Algebras with Two and Three Generators* Preprint BONN-HE-92-02 (1992)

[21] S. Doplicher, R. Haag, J.E. Roberts, *Local Observables and Particle Statistics I , II* Comm. Math. Phys. 23 (1971) S. 199, Comm. Math. Phys. 35 (1974) S. 49

[22] D. Buchholz, *Einführung in die Algebraische Quantenfeldtheorie* Vorlesungsnotizen Hamburg (1985)

[23] O. Bratteli, D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics* Springer (1979)

[24] J. Fuchs, *Algebraic Conformal Field Theory*, Preprint NIKHEF-H/91-26 (1991)

[25] I.M. Gelfand, M.A. Naimark *On the Embedding of Normed Rings into the Ring of Operators in Hilbert Space* Mathem. Sbornik 12 (1943) S. 197

[26] K.G. Wilson, *Non-Lagrangian Models of Current Algebra* Physical Rev. Vol. 179,5 (1969) S. 1499

[27] W. Nahm, *Conformal Quantum Field Theories in Two Dimensions* World Scientific, to be published

[28] P. Ginsparg, *Applied Conformal Field Theory* Conference Les Houches 'Fields, Strings and Critical Phenomena' (1990)

[29] W. Nahm, *A Proof of Modular Invariance* Proceedings Trieste Conference on Topological Methods in Quantum Field Theories ICTP, Trieste (1990) S. 75

[30] E. Verlinde *Fusion Rules and Modular Transformations in 2D Conformal Field Theory* Nucl. Phys. **B300** (1988) S. 360

[31] S.D. Mathur, S. Mukhi, A. Sen *On the Classification of Rational Conformal Field Theories* Phys. Lett. **B213** (1988) S. 303

[32] V.G. Kac, A.K. Raina, *Bombay Lectures on Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras* World Scientific (1987)

[33] A. Chodos, C.B. Thorn, *Making the Massless String Massive* Nucl. Phys. **B72** (1974) S. 509

[34] V.G. Kac *Contravariant Form for the Infinite-Dimensional Lie Algebras and Superalgebras* Lecture Notes in Physics 94 (1979) S. 441

[35] B.L. Feigin, D.B. Fuchs, *Invariant Skew-Symmetric Differential Operators on the*

*Line and Verma Modules over the Virasoro Algebra*
Funct. Anal. Appl. 16 (1982) S. 241
[36] H. Sugawara, *A Field Theory of Currents*
Physical Rev. Vol. 170,5 (1968) S. 1659
[37] P. Goddard, A. Kent, D. Olive
*Unitary Representations of the Virasoro and Super-Virasoro Algebras*
Comm. Math. Phys. 103 (1986) S. 105
[38] M. Flohr, *$\mathcal{W}$-Algebren, Quasiprimäre Felder und Nicht-Minimale Modelle*
Diplomarbeit BONN-IR-91-30
[39] W. Nahm, Private Mitteilung
[40] A. Kliem, *Konstruktion von $\mathcal{W}$-Algebren*
Diplomarbeit BONN-IR-91-46
[41] A. Schwimmer, N. Seiberg
*Comments on the N=2,3,4 Superconformal Algebras in Two Dimensions*
Phys. Lett. **B184** (1987) S. 191
[42] M. Terhoeven, *$\mathcal{W}$-Algebren in Gepner-Modellen*
Diplomarbeit BONN 1992
[43] K. Hamada, M. Takao, *Spin-4 Current Algebra*
Phys. Lett. **B209** (1988) S. 247
Erratum, Phys. Lett. **B213** (1988) S. 564
[44] D.H. Zhang, *Spin-4 Extended Conformal Algebra*
Phys. Lett. **B232** (1989) S. 323
[45] J.M. Figueroa-O'Farrill, S. Schrans, *The Spin 6 Extended Conformal Algebra*
Phys. Lett. **B245** (1990) S. 471
[46] P. Bouwknegt, *Extended Conformal Algebras*, Phys. Lett. **B207** (1988) S. 295
[47] P. Bouwknegt, *Extended Conformal Algebras from Kac-Moody Algebras*
Proceedings of the meeting 'Infinite dimensional Lie algebras and Groups'
CIRM, Luminy, Marseille (1988) S. 527
[48] B.L. Feigin, T. Nakanishi, H. Ooguri, *The Annihilating Ideals of Minimal Models*
Preprint RIMS-837 (1991)
[49] R. Blumenhagen, M. Flohr, A. Kliem, A. Recknagel, R. Varnhagen
*$\mathcal{W}$(2,8) and Beyond*, in Vorbereitung
[50] R. Varnhagen, *Characters and Representations of New Fermionic $\mathcal{W}$-Algebras*
Phys. Lett. **B275** (1992) S. 87
[51] L.J. Romans, *Realisations of Classical and Quantum $\mathcal{W}_3$ Symmetry*
Nucl. Phys. **B352** (1991) S. 829
[52] F.A. Bais, P. Bouwknegt, M. Surridge, K. Schoutens
*Extensions of the Virasoro Algebra Constructed form Kac-Moody Algebras Using Higher Order Casimir Invariants*, Nucl. Phys. **B304** (1988) S. 348
[53] F.A. Bais, P. Bouwknegt, M. Surridge, K. Schoutens
*Coset Construction for Extended Virasoro Algebras*
Nucl. Phys. **B304** (1988) S. 371
[54] A. Deckmyn, S. Schrans, *$\mathcal{W}_3$ Constructions on Affine Lie Algebras*
Preprint KUL-TF-91/33 (1991)

[55] J.L. Cardy, *Effect of Boundary Conditions on the Operator Content of Two-Dimensional Conformally Invariant Theories*
Nucl. Phys. **B275** (1986) S. 200
[56] G.v. Gehlen, V. Rittenberg
*Operator Content of the Three-States Potts Quantum Chain*
Preprint BONN-HE-86-03 (1986)
[57] A.B. Zamolodchikov, Al.B. Zamolodchikov
*Conformal Field Theory and Critical Phenomena in Two-Dimensional Systems*
Physics Rev. Vol. 10,4 (1989) S. 269
[58] V.A. Fateev, A.B. Zamolodchikov
*Conformal Quantum Field Theory Models in Two Dimensions Having $\mathbb{Z}_3$ Symmetry*, Nucl. Phys. **B280** (1987) S. 644
[59] A. Bilal, *Introduction to $\mathcal{W}$-Algebras*, Preprint CERN-TH.6083/91 (1991)
[60] G.M.T. Watts, *Determinant Formulae for extended Algebras in Two-Dimensional Conformal Field Theory*, Nucl. Phys. **B326** (1989) S. 648
[61] A.N. Schellekens, S. Yankielowicz
*Extended Chiral Algebras and Modular Invariant Partition Functions*
Nucl. Phys. **B327** (1989) S. 673
[62] A. Cappelli, C. Itzykson, J.B. Zuber
*The A-D-E Classification of Minimal and $A_1^{(1)}$ Conformal Invariant Theories*
Comm. Math. Phys. 113 (1987) S. 1
[63] H.G. Kausch, G.M.T. Watts
*Quantum Toda Theory and the Casimir Algebra of $B_2$ and $C_2$*
Preprint DAMTP 91-24 (1991)
[64] E. Frenkel, V. Kac, M. Wakimoto
*Characters and Fusion Rules for $\mathcal{W}$-Algebras via Quantized Drinfeld-Sokolov Reductions*
Preprint RIMS-861 (1992)
[65] J.M. Figueroa-O'Farrill, *On the Homological Construction of Casimir Algebras*
Nucl. Phys. **B343** (1990) S. 450
[66] C. Vafa, *Toward Classification of Conformal Theories*
Phys. Lett. **B206** (1988) S. 421
[67] G. Anderson, G. Moore, *Rationality in Conformal Field Theory*
Comm. Math. Phys. 117 (1988) S. 441
[68] H.G. Kausch
*Extended Conformal Algebras Generated by a Multiplet of Primary Fields*
Phys. Lett. **B259** (1991) S. 448
[69] G. Schütz
*Quantengruppen und konforme Invarianz – Anwendungen in statistischer Mechanik*
Doktorarbeit BONN-IR-91-45
[70] P. Ginsparg, *Curiosities at c=1*, Nucl. Phys. **B295** (1988) S. 153
[71] E.B. Kiritsis, *Proof of the Completeness of the Classification of Rational Conformal Theories with c=1*, Phys. Lett. **B217** (1989) S. 427
[72] M. Flohr, *$\mathcal{W}$-Algebras, New Rational Models and Completeness of the $c = 1$ Classification*
Preprint BONN-HE-92-08 (1992)

[73] L. Kaldenbach, *Die Thermische Störung der $\mathbb{Z}_5$-Quantenkette mit Fateev-Zamolodchikov-Symmetrie*, Diplomarbeit BONN-IR-91-44

[74] V.A. Fateev, A.B. Zamolodchikov
*Nonlocal (parafermion) Currents in Two-Dimensional Conformal Quantum Field Theory and Self-Dual Critical Points in $\mathbb{Z}_n$-Symmetric Statistical Systems*
Soviet Physics JETP 62 (1985) S. 215

[75] T. Vescan, V. Rittenberg, G. von Gehlen
*Anisotropic Phase Transition in the Asymmetric Three-States Clock Model*
J. Phys. **A19** (1986) S. 1957

[76] M.A. Naimark, A.I. Štern, *Theory of Group Representations*
Springer (1980)

[77] P.C. West, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*
World Scientific (1986)

[78] R. Blumenhagen, *Covariant Construction of $N = 1$ Super $\mathcal{W}$-Algebras*
Preprint BONN-HE-91-20 (1991), wird in Nucl. Phys. **B** publiziert

[79] H. Eichenherr, *Minimal Operator Algebras in Superconformal Quantum Field Theory*
Phys. Lett. **B151** (1985) S. 26

[80] M.A. Bershadsky, V.G. Knizhnik, M.G. Teitelman
*Superconformal Symmetry in Two Dimensions*
Phys. Lett. **B151** (1985) S. 31

[81] G. Mussardo, G. Sotkov, M. Stanishkov
*Ramond Sector of Supersymmetric Minimal Models*
Phys. Lett. **B195** (1987) S. 397,

[82] G. Mussardo, G. Sotkov, M. Stanishkov
*Fine Structure of Supersymmetric Operator Product Expansion Algebras*
Nucl. Phys. **B305** (1988) S. 69

[83] J.M. Figueroa-O'Farrill, S. Schrans, *The Conformal Bootstrap and Super $\mathcal{W}$-Algebras*
Int. Jour. of Mod. Phys. **A7** (1992) S. 591

[84] K. Hornfeck
*Realization for the $\mathcal{SW}(\frac{7}{2})$-Algebra and the Minimal Supersymmetric Extension of $\mathcal{WA}_3$*
Preprint London, King's College 91.08.26

[85] W. Eholzer
*Exzeptionelle und Supersymmetrische $\mathcal{W}$-Algebren in Konformer Quantenfeldtheorie*
Diplomarbeit BONN-IR-92-10

[86] R. Hübel, *Darstellungstheorie von $\mathcal{W}$- und Super-$\mathcal{W}$-Algebren*
Diplomarbeit BONN-IR-92-11