# Contents

# List of Figures

# 1 Einleitung

Seit der Arbeit [1] ist bekannt, daß ein enger Zusammenhang zwischen statistischen Modellen am kritischen Punkt und konformer Quantenfeldtheorie [2, 3, 4, 5, 6] besteht. Eine grundlegende Analyse der Implikationen der konformen Struktur in zwei Dimensionen [7, 8, 9] wurde daraufhin von Belavin, Polyakov und Zamolodchikov [10] durchgeführt. Der oben angesprochene Zusammenhang kann effektiv mit Hilfe von Graphen und deren Pfadräumen untersucht werden. Diese traten erstmals in der Beschreibung von Konfigurationsräumen integrabler Modelle, den sogenannten ABF-Modellen, durch Andrews, Baxter und Forrester in [11] auf. Nachfolgend wurden die auftretenden kritischen Parameter durch Huse [12] angegeben und deren kritische Exponenten und die auftretenden Scaling-Dimensionen berechnet. Die kritischen Exponenten entsprechen denen der Friedan-Qiu-Shenker (FQS)-Serie unitärer minimaler Modelle [13, 14]. Seither besteht das Bestreben, eine Virasoro-Algebra-Darstellung auf diesen Pfadräumen zu konstruieren, um das Auftreten dieser Algebra, die eine fundamentale Rolle in der zweidimensionalen konformen Quantenfeldtheorie (CFT) spielt, besser verstehen zu können. Dies ist besonders interessant im Hinblick darauf, daß die Charaktere von minimalen Modellen in der Berechnung von lokalen Zustandswahrscheinlichkeiten (der FB-Modelle [17] (s.u.)) auch außerhalb des kritischen Bereichs auftreten [18]. Eine weitere interessante Frage ist dann der Zusammenhang zwischen der Virasoro-Algebra und der Temperley-Lieb-Jones-Algebra [15, 16], die eine herausragende Rolle in den statistischen Modellen über Graphen spielt [19].
Ausgehend von [11] wurden weitere neue Modelle definiert [17, 24]. In [17] wurden die ABF-Modelle von Forrester und Baxter so erweitert, daß sie auch nichtunitäres kritisches Verhalten zeigen. Diese Modelle sind die oben genannten FB-Modelle. Hierbei treten auch die $(2, q)$-Modelle auf, die in dieser Arbeit untersucht werden. In [24] wurde die Klasse der Modelle über Coxeter-Graphen von den $A$-Graphen [11, 17] auf die $A$-$D$-$E$-Graphen, die den einfach geschnürten Lie-Algebren entsprechen, ausgedehnt. Dies erfolgt parallel zur Klassifikation der modular invarianten Zustandssummen [20, 21, 22, 23]. Die Analyse dieser Modelle wurde und wird intensiv betrieben [19, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31]. Die Motivation für diese Untersuchungen ist eine Vertiefung der Verknüpfung statistischer Modelle mit der konformen Quantenfeldtheorie, um eine Korrespondenz zwischen den beiden Gebieten herzustellen.

Es gibt zwei Wege, um zu der angestrebten Korrespondenz zu gelangen. Man kann von der Seite der konformen Quantenfeldtheorie oder von der Seite der statistischen Mechanik ausgehen, um zu der anderen zu gelangen. Auf dem Weg, der von der statistischen Seite ausgeht, wurden schon einige Fortschritte erzielt (siehe [32] und dort angegebene Referenzen). In [32] selbst wird ein doppelter Limes vorgeschlagen, um Virasoro-Generatoren aus Temperley-Lieb-Jones-Operatoren zu erhalten. Eine weitere Vorgehensweise wurde in [33, 34, 35] entwickelt.

In dieser Arbeit ist die konforme Quantenfeldtheorie der Ausgangspunkt für die Konstruktion von Darstellungungen der Virasoro-Algebra auf den Pfadräumen. Die Konstruktionen erfolgen allerdings nicht direkt über den Coxeter $A$-Graphen, sondern über sogenannte Fusions-Graphen $\mathcal{A}$, die in natürlicher Weise in den $(2, q$ ungerade) Modellen auftreten [36]. Diese Graphen sind etwas komplizierter als die der Coxeter $A$-Graphen, aber dennoch existieren, wie man mit K-theoretischen Mitteln zeigen kann, Pfadalgebren- und somit auch Pfadraumisomorphismen für die beiden Typen von Graphen [36]. Weitere Graphen treten bei der Umschreibung von Charakterformeln auf [37].

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut: In den ersten Kapiteln werden die notwendigen

Begriffe und Strukturen für die folgende Analyse bereitgestellt. Das erste Kapitel beinhaltet die wichtigsten Fakten über die Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra, die bei der Konstruktion der Darstellungen dieser Algebra auf dem Pfadraum benötigt werden. Kapitel 2 wiederholt kurz die relevanten Definitionen für Graphen und deren Pfadräume. Die folgenden beiden Kapitel 3 und 4 zeigen, in welcher Weise Graphen und deren Pfadräume in der CFT bzw. in der statistischen Mechanik verwendet werden. Kapitel 5 liefert dann die Beziehung zwischen den zwei vorangegangenen Kapiteln. Kapitel 6 beinhaltet die genaue Analyse der Struktur des Verma-Modul-Quotienten $V(c,h)$ einerseits und des Pfadraums andererseits. Als Ergebnis dieser Analyse wird dann der Begriff der zulässigen Pfadraum-Darstellung eingeführt. Konstruktionen für solche Darstellungen werden in Kapitel 7 angegeben. Die Berechnungen, die ausgehend von diesen Konstruktionen durchgeführt wurden, implizieren für die $(2,q)$-Modelle eine Aufspaltung des Verma-Modul-Quotienten $V(c,h)$ in seine positiv- bzw. negativ-definiten Unterräume bezüglich der Shapovalov-Form sowie die dazugehörigen Signaturcharakterformeln. Diese werden in Kapitel 8 angegeben. Kapitel 9 wendet sich dann der Betrachtung der Struktur von Virasoro-Algebra-Darstellungen auf den Pfadräumen zu, die zulässigen Darstellungen entsprechen. Zu diesem Zweck wird eine Teilcheninterpretation entwickelt, die zu einer Aufspaltung der Viraso-Algebra-Generatoren $L_n$ selbst in Schiebe- $(\widehat{L}_n)$ und Erzeugungs-Operatoren $(C_n)$ führt. Die Aussagen aus Kapitel 8 können mit diesen Operatoren umformuliert werden und erklären auf diese Weise den „Grad" der Nichtunitarität der untersuchten $(2,q)$-Modelle.

Die Hauptergebnisse dieser Arbeit sind in [38] zusammengefaßt.

# 2 Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra

In diesem ersten Kapitel werden die wichtigsten Fakten der Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra zusammengetragen. Diese sind fundamental für die spätere Analyse des Zusammenhangs zwischen CFT und statistischer Mechanik und für die Konstruktion von Pfadraumdarstellungen.

## 2.1 Virasoro-Verma-Moduln

**Definition:** Die Virasoro-Algebra $Vir$ ist die komplexe Lie Algebra, die durch $L_n, n \in \mathbb{Z}$ und $C$ erzeugt wird, und in der folgende Relationen gelten:

$$
\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (n-m)L_{n+m} + \delta_{n+m,0}\frac{1}{12}C(n^3-n) &(2.1)\\
[L_n, C] &= 0. &(2.2)
\end{aligned}
$$

Diese Algebra erhält durch die $ad$-Operation von $L_0$ eine Graduierung:

$$
Vir = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n. \tag{2.3}
$$

**Bemerkung:** $Vir$ ist die universelle zentrale Erweiterung von $Lie(\mathrm{Diff}(S_1))$, der Lie-Algebra der Diffeomorphismen von $S_1$ mit der Basis $-z^n\frac{\partial}{\partial z}$, wobei $z = e^{i\phi}$ ist.
Es ist nützlich, diese Algebra in ihre positiven, negativen und Cartan- Unteralgebren aufzuspalten.
**Definition:**

$$
\eta^+ = \bigoplus_{n>0}\mathbb{C}L_n, \quad \eta^- = \bigoplus_{n<0}\mathbb{C}L_n, \quad \eta^0 = \mathbb{C}L_0 \oplus \mathbb{C}C. \tag{2.4}
$$

Mit dieser Aufspaltung kann man eine Niedrigstgewichts-Darstellung definieren:
**Definition:** Eine Niedrigstgewichts-Darstellung $(W, c, h)$ von $Vir$ zum Gewicht $(c, h)$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum $W$ mit einem Vektor $\mu$, so daß

$$
\begin{aligned}
L_0\mu &= h\mu, \qquad C\mu = c\mu &(2.5)\\
\eta^-\mu &= 0 \qquad \text{und} &(2.6)\\
W &= U(\eta^+)\mu. &(2.7)
\end{aligned}
$$

Der Vektor $\mu$ einer Niedrigstgewichs-Darstellung $(W, c, h)$ wird auch Vakuumvektor genannt und manchmal mit $\mathbf{1}$ oder $|h\rangle$ bezeichnet.
**Definition:** Eine Niedriegstgewichts-Darstellung mit Gewicht $(c, h)$ heißt Verma-Modul $M(c, h)$, falls

$$
L_{n_1}\cdots L_{n_m}\mu, \text{ mit } n_1 \geq \ldots \geq n_m \geq 1. \tag{2.8}
$$

eine Basis bilden.
Eine Standardkonstruktion für einen Verma-Modul erfolgt mittels Quotientenbildung in der universellen Einhüllenden:

$$
M(c, h) = U(Vir)/I(c, h)\ , \tag{2.9}
$$

wobei $I(c, h)$ das Linksideal ist, welches durch $\{\eta^-\mathbf{1}, L_0 - h\mathbf{1}, C - c\mathbf{1}\}$ erzeugt wird. Die geforderte lineare Unabhängigkeit der Vektoren (2.8) wird dann durch das Poincaré-Birkhoff-Witt-Theorem garantiert.

Man kann den Verma-Modul $M(c,h)$ auch durch eine universelle Eigenschaft einführen: Der Verma-Modul ist das universelle Objekt mit der Eigenschaft, daß zu jeder Niedrigstgewichts-Darstellung $(W,c,h)$ ein surjektiver $Vir$-Modul-Homomorphismus:

$$\pi : M(c,h) \longrightarrow W \tag{2.10}$$

existiert, so daß der Verma-Modul bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist und sich der Name $M(c,h)$ rechtfertigt. Daß der oben definierte Verma-Modul die universelle Eigenschaft besitzt, sieht man daran, daß die Vektoren der Form (2.8) für jede Niedrigstgewichts-Darstellung $(W,c,h)$ ein Erzeugendensystem bilden.

Zu einer gegebenen Darstellung $(\rho, V)$ von $\eta^0$ sei die zugehörige Niedrigstgewichts-Darstellung wie folgt definiert:

$$U(Vir) \otimes_{U(\eta^- \oplus \eta^0)} V, \tag{2.11}$$

wobei $\eta^0$ vermittels $\rho$ operiert und $\eta^- V := 0$ ist; $\eta^-$ annihiliert also. Fundamental in der Analyse der Darstellungstheorie von $Vir$ ist der Begriff eines singulären Vektors.

**Definition:** Ein Vektor $v$ heißt singulär, falls $\eta^- v = 0$.

Die Bedeutung der singulären Vektoren besteht darin, daß der auf einem singulären Vektor basierende Verma-Modul ein Unter-Verma-Modul ist, da $\eta^-$ in diesem Fall per definitionem annihiliert.

Die Klassifikation der Verma-Moduln selbst erfolgt über eine Betrachtung der jeweiligen Untermoduln. Allgemein gilt:

**Lemma:** [41] Sei $V$ eine Darstellung einer Lie-Algebra $G$, die sich als direkte Summe von Eigenräumen unter der Operation einer Unteralgebra $H$ von $G$ schreiben läßt

$$V = \bigoplus_{\lambda \in H^*} V_\lambda \tag{2.12}$$

$$V_\lambda = \{v \in V | h(v) = \lambda(h)v \text{ für alle } h \in H\}, \tag{2.13}$$

dann gilt für jede Unterdarstellung U:

$$U = \bigoplus_{\lambda \in H^*} (U \cap V_\lambda). \tag{2.14}$$

Das obige Lemma garantiert also, daß sich jede Unterdarstellung von $Vir$ in Eigenräume von $L_0$ zerlegen läßt. Die entsprechende Zerlegung des Verma-Moduls ist:

$$M(c,h) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} V_n. \tag{2.15}$$

Der Verma-Modul $M(c,h)$ besitzt folgende Eigenschaften:

1) $dim(V_n) = p(n)$, wobei $p(n) :=$ die Anzahl der Partitionen von $n$ ist.

2) $M(c,h)$ ist unzerlegbar, da $dim(V_0) = 1$.
D.h. falls $M(c,h) = V \oplus W => M(c,h) = V$ oder $M(c,h) = W$, da entweder $V_0 \subset V$ oder $V_0 \subset W$, also $M(c,h) \subset V$ oder $M(c,h) \subset W$.

3) In $M(c,h)$ liegt ein eindeutiger echter maximaler Untermodul $J(c,h)$, da die Summe zweier echter Untermoduln $U_1, U_2$ wieder ein echter Untermodul ist ($V_0 \cap U_1 = \emptyset$ und $V_0 \cap U_2 = \emptyset$). Dementsprechend existiert ein eindeutiger irreduzibler Quotientenmodul $V(c,h)$

$$V(c,h) = M(c,h)/J(c,h). \tag{2.16}$$

## 2.2 Die Shapovalov-Form

Zu dem Verma-Modul $M(c,h)$ kann man in kanonischer Weise eine hermite'sche Form assoziieren, welche bezüglich der $L_0$ -Graduierung orthogonal ist. Dazu betrachtet man die folgende anti-lineare Anti-Involution:

$$\begin{aligned} \omega : Vir &\longrightarrow Vir \\ L_n &\longrightarrow L_{-n} \\ C &\longrightarrow C. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Nun kann man die oben genannte Form wie folgt definieren:

**Definition und Lemma:** (Shapovalov-Form) Auf $M(c,h)$ wird durch

$$\begin{aligned} \langle \mu, \mu \rangle_S &:= 1 \\ \langle L_{n_1} \cdots L_{n_r} \mu, L_{m_1} \cdots L_{m_t} \mu \rangle_S &:= \langle \mu, \omega(L_{n_1} \cdots L_{n_r}) L_{m_1} \cdots L_{m_t} \mu \rangle_S \end{aligned} \tag{2.18}$$

eine Form definiert. Diese Form wird Shapovalov-Form genannt.
Diese Form ist hermite'sch und ist darüber hinaus orthogonal bezüglich der Graduierung, da die Differenz der Grade von zwei Elementen ($P, Q \in U(Vir)$) unterschiedlichen Grads ungleich Null ist und somit $\omega(P)Q\mu = 0$ oder $\omega(Q)P\mu = 0$ ist. Weiterhin gilt:

$$\langle \omega(Q)P\mu, \mu \rangle_S := \langle \mu, \omega(\omega(Q)P)\mu \rangle_S = \langle \mu, \omega(P)Q\mu \rangle_S \tag{2.19}$$

Weiterhin gilt für den maximalen Untermodul $J(c,h)$:

$$J(c,h) = rad\langle \ , \ \rangle_S. \tag{2.20}$$

Hierbei ist $rad\langle \ , \ \rangle_S := \{v \in M(c,h) | \langle v, w \rangle_S = 0 \text{ für alle } w \in M(c,h)\}$ das Radikal von $\langle \ , \ \rangle_S$.

**Beweis:** Sei $R := rad\langle \ , \ \rangle_S$

i) $R$ ist ein Untermodul: Sei $v \in R, v = Q\mu, Q \in U(Vir)$, dann gilt für alle $w \in M(c,h), w = Q'\mu, Q' \in U(Vir)$ und für alle $P \in U(Vir)$:

$$\langle w, Pv \rangle_S = \langle Q'\mu, PQ\mu \rangle_S = \langle \omega(P)Q'\mu, Q\mu \rangle_S = \langle \omega(P)Q'\mu, v \rangle_S = 0, \tag{2.21}$$

da $v \in R$.

ii) Für jeden echten Untermodul $U$ von $M(c,h)$ gilt: $U \subset R$. Denn sei $v \in U, v = Q\mu, Q \in U(Vir)$, dann gilt für alle $w \in M(c,h), w = P\mu, P \in U(Vir)$

$$\langle v, w \rangle_S = \langle P\mu, Q\mu \rangle_S = \langle \mu, \underbrace{\omega(P)Q\mu}_{\subset U} \rangle_S = 0, \tag{2.22}$$

da $\mu \notin U$, da U echter Untermodul ist.

## 2.3 Untermoduln und die Kac-Determinantenformel

Aus den obigen Überlegungen folgt nun:

**Lemma:** $M(c,h)$ ist genau dann irreduzibel, wenn $det_n\langle\ ,\ \rangle_S := det\langle\ ,\ \rangle_S|_{V_n} \neq 0$, für alle $n \in I\!N_0$.

Nun bleibt also „nur“ noch die Determinante auf den endlich dimensionalen Unterräumen der Graduierung zu berechnen. Für diese Determinanten existiert eine von Kac (1978) [39] vermutete Formel, die später von Feigin und Fuchs (1982) [40] bewiesen werden konnte.

**Theorem:** (Kac-Determinantenformel)

$$det_n\langle\ ,\ \rangle_S(c,h) = K \prod_{1\leq r,s\leq n; r,s\in I\!N} (h - h_{r,s})^{p(n-rs)}, \tag{2.23}$$

wobei K eine positive Konstante (siehe [41]) ist, $p(n)$ wieder die Anzahl der Partitionen von $n$ bezeichnet und

$$h_{r,s}(c) = \frac{1}{48}[(13-c)(r^2+s^2) + \sqrt{(c-1)(c-25)}(r^2-s^2) - 24rs - 2 + 2c]. \tag{2.24}$$

Die Wahl der Quadratwurzel ist irrelevant, da die Wahl der negativen Wurzel nur eine Vertauschung von r und s bewirkt.

Von dieser Formel ausgehend konnten Feigin und Fuchs 1983 [42] die ganze Einbettungsstruktur von Virasoro-Verma-Moduln angeben. Der Ausgangspunkt für diese Betrachtung ist die Tatsache, daß sich jeder Untermodul als Summe von Verma-Moduln, die auf singulären Vektoren basieren (2.11), schreiben läßt. Dazu sei also $N \subset M(c,h)$ und $N' := span\langle v \in N | v \text{ singulär}\rangle$. Dann gilt:

$$N = U(Vir) \otimes_{U(\eta^- \oplus \eta^0)} N'. \tag{2.25}$$

Sei nun $V'$ von einer minimalen Anzahl von singulären Vektoren erzeugt, so daß der zugehörige Verma-Modul gleich $J(c,h)$ ist. Die oben genannte Einbettungsstruktur unterscheidet im wesentlichen drei Fälle für den maximalen Untermodul $J(c,h)$:

1) $dim(V') = 0$, und die Einbettungskette enthält nur ein Glied.

2) $dim(V') = 1$, und die Einbettungskette enthält nur zwei Glieder.

3) $dim(V') = 1$ oder $dim(V') = 2$, und die Einbettungskette ist halbseitig unendlich.

Zu dieser Unterscheidung kommt noch die Differenzierung nach der Richtung der Einbettungsketten (siehe Anhang für die genaue Fallunterscheidung nach [42]).

**Definition:** Die $V(c,h)$ mit $dim(V') = 2$ und unendlich vielen singulären Vektoren (Fall $III^-$ im Anhang) heißen minimale Modelle.

Aus der Untersuchung [42] ergibt sich desweiteren:

**Lemma:** Für die minimalen Modelle gilt:

$$c = c(p,p') = 1 - 6\frac{(p-p')^2}{pp'} \qquad p, p' \text{ teilerfremd und} \tag{2.26}$$

$$h = h_{r,s}^{p,p'} = \frac{(pr-p's)^2 - (p-p')^2}{4pp'} \qquad 1 \leq r \leq p'-1, \quad 1 \leq s \leq p-1. \tag{2.27}$$

Eine weitere Anwendung der Determinantenformel (2.23) ist die Bestimmung des Gebiets, in dem die Shapovalov-Form in Abhängigkeit von $c$ und $h$ unitär ist. Aus Stetigkeitsüberlegungen ist dies der Fall für $c \geq 1$ und $h > 0$. Außerhalb dieses zusammenhängenden Gebiets gibt es nur noch einzelne Punkte, an denen die Shapovalov-Form positiv definit ist. Natürlich muß $0 < c < 1$ gelten, da sonst z.B. $\langle L_n, L_n \rangle_S = 2nh + \frac{c}{12}(n^3 - n) < 0$ für $c < 0$ und $n \gg 0$. Es handelt sich hierbei um die FQS-unitäre Reihe der minimalen Modelle mit den $c$-Werten $c(p, p+1)$ und den entsprechenden $h$-Werten $h_{r,s}^{p,p'}$, die in [10] vermutet und in [13, 14] bewiesen wurde.

## 2.4 $(2, q$ ungerade) Modelle

Gegenstand dieser Arbeit sind die $(2, q)$ minimalen Modelle, deren zentrale Ladung

$$c(2, q) = -\frac{(3q-4)(q-3)}{q} \tag{2.28}$$

negativ ist, und die somit nichtunitäre Modelle sind. Die auftretenden $h$-Werte sind :

$$h_j = \frac{-j(q-2-j)}{2q}, \qquad j = 0, \ldots, N, \tag{2.29}$$

wobei $q = 2N + 3$ ist. Für diese Modelle wurde in [43] eine explizite Basis des Verma-Modul-Quotienten $V(c, h)$ angegeben. Die Basis wird durch Elemente der Form

$$L_{n_1} \cdots L_{n_m} |h_j\rangle \tag{2.30}$$

mit $n_1 \geq \ldots \geq n_m \geq 1$ gegeben, die den folgenden zwei Bedingungen genügen:

1) $n_i - n_{i+N} \geq 2$ (difference two condition)

2) $\#\{n_i = 1\} \leq j$ (initial condition).

Diese Basis wird in der Arbeit [43] zusätzlich mit einer Ordnung versehen, die wie folgt definiert wird:

$$L_{m_1} \cdots L_{m_r} \succ L_{n_1} \cdots L_{n_s}, \tag{2.31}$$

falls

i) $r > s$,

ii) $r = s$ und $\sum_i m_i > \sum_i n_i$ oder

iii) $r = s$, $\sum_i m_i = \sum_i n_i$ und $m_t > n_t$, $m_i = n_i$ für $1 \leq i \leq t-1$.

Diese Ordnung ist extrem nützlich und wird in dieser Arbeit mehrfach verwendet werden.

## 2.5 Charaktere und Signaturcharaktere

Eine wichtige Größe in der CFT sind die Charaktere, die als formale Potenzreihen definiert werden. Diese treten auch in der statistischen Mechanik als Zustandssummen auf. In dieser Arbeit bilden sie den Ausgangspunkt für den in der Einleitung angesprochenen Zusammenhang zwischen den FB-Modellen und den $(2,q)$-Modellen.

**Definition:** Der Charakter einer Nierdrigstgewichts-Darstellung $(W,c,h)$ wird gegeben durch die formale Potenzreihe:

$$\chi((W,c,h)) := tr_W q^{L_0-\frac{c}{24}}. \tag{2.32}$$

Dies ist bis auf den Faktor $q^{h-\frac{c}{24}}$ nichts anderes als die erzeugende Funktion der Dimensionen der $L_0$-Graduierung

$$ch((W,c,h)) := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} dim(W_n)q^n. \tag{2.33}$$

**Beispiel:**

$$\begin{aligned}\chi(M(c,h)) &= q^{h-\frac{c}{24}} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \overbrace{dimM(c,h)_n}^{=p(n)} q^n & (2.34)\\ &= q^{h-\frac{c}{24}} \frac{1}{\prod_{l>0}(1-q^l)}, & (2.35)\end{aligned}$$

wobei $p(n)$ wieder die Anzahl der Partitionen von $n$ ist.

Aus der im letzten Abschnitt erläuterten Einbettungsstruktur erhält man nach Rocha-Caridi [44] folgende Formel für die Charaktere der minimalen Modelle:

$$\chi(V(c(p,p'),h_{r,s}^{p,p'})) = q^{h-\frac{c}{24}} \frac{1}{\prod_{l>0}(1-q^l)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{pp'k^2}(q^{k(ps-p'r)} - q^{k(ps+p'r)+rs}). \tag{2.36}$$

Im Fall von nichtunitären Theorien liefert die erzeugende Funktion der Signaturen der Shapovalov-Form auf den endlich-dimensionalen Räumen der $L_0$-Graduierung eine weitere interessante Potenzreihe, die insbesondere im Fall der $(2,q)$-Modelle in dieser Arbeit behandelt wird.

**Definition:** Die Signatur $sign(\langle\ ,\ \rangle)$ einer hermite'schen Form $\langle\ ,\ \rangle$ auf einem endlich dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum ist gegeben durch $tr(D)$, wobei $D$ die Sylvester-Diagonalform $D = diag(+1,\ldots,+1,0,\ldots.0,-1\ldots,-1)$ von $\langle\ ,\ \rangle$ ist.

**Definition:** Der Signaturcharakter einer Niedrigstgewichts-Darstellung $(W,c,h)$ ist durch folgende formale Potenzreihe gegeben:

$$\sigma((W,c,h)) := \sum_{n\in\mathbb{N}_0} sign(\langle\ ,\ \rangle_S |_{W_n})q^n. \tag{2.37}$$

Es gibt im allgemeinen keine geschlossenen Formeln für die Signaturcharaktere. Es existiert lediglich ein Algorithmus, der die Signatur aus der Anzahl der Kreuzungen von Nullinien bestimmt ([45, 46]). Dies funktioniert folgendermaßen: Da die Kac-Determinante auf dem Unterraum vom Grad $n$ eine stetige Funktion von $c$ und $h$ ist, deren Nullstellen $(h_{r,s}(c))$ bekannt sind, kann man die Vorzeichenwechsel dieser Funktion einfach auf einem geeignet gewählten Weg bzw. einer Folge von Punkten zwischen einem Punkt $(c_0,h_0)$, an dem die Signatur bekannt ist, und dem Punkt, an dem die Signatur ausgerechnet werden soll, abzählen und so die Signatur erhalten.

# 3 Graphen und Pfadräume

Der Zusammenhang der FB-Modelle mit den $(2,q)$-Modellen beruht auf einer entsprechenden Verknüpfung zwischen den zugrundeliegenden Graphen und deren Pfadräumen. Deren Auftreten in der CFT und in statistischen Modellen wird in den nächsten zwei Kapiteln untersucht. Zuerst einmal werden deshalb an dieser Stelle die relevanten Definitionen noch einmal notiert.

**Definition:** Ein Graph $\mathcal{G}$ ist eine Menge von Ecken ($E$) und Seiten ($S$). Jeder Seite s $\in S$ sind zwei Ecken aus $E$ zugeordnet.
Ein Graph heißt numeriert, wenn seine Ecken durch eine Indexmenge $I$ numeriert sind.
Einen numerierten Graphen kann man durch seine Zusammenhangsmatrix angeben. Die Zusammenhangsmatrix $M_{\mathcal{G}} \in M(\#E, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ eines numerierten Graphen ist für $e, e' \in E$ gegeben durch:

$$(M_{\mathcal{G}})_{e,e'} = \begin{cases} 1 & \text{falls es eine Seite s} \in S \text{ mit den Ecken } e \text{ und } e' \text{ gibt} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.1}$$

Umgekehrt kann man aus einer symmetrischen Matrix M $\in M(N, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ bei gegebener Indexmenge $I$ einen Graphen konstruieren, indem man zwei Ecken e und e' verbindet, falls $M_{e,e'} = 1$.

**Definition:** Ein Pfad über einem numerierten Graphen $\mathcal{G}$ ist eine Abbildung: $\mathbb{N}_0 \mapsto I$, also eine Folge von Ecken $(l_i)_i$, die der Bedingung genügen muß, daß je zwei aufeinanderfolgende Folgenglieder $l_i, l_{i+1}$ mit einer Seite verbundene Ecken des Graphen bezeichnen.

**Definition:** Mit $\mathcal{P}_{\{\mathcal{G},a,(g_i)_i\}}$ wird der Hilbertraum bezeichnet, dessen Basis durch Pfade $(l_i)_i$ über dem numerierten Graphen $\mathcal{G}$ gegeben ist, die in der Ecke $a$ ($l_0 = a$) beginnen und die Asymptotik $(g_i)_i$ besitzen (d.h. für $i \gg 1$ ist $l_i = g_i$). Das Skalarprodukt ist durch dasjenige gegeben, bezüglich dem alle Pfade orthonormiert sind.
Die Folge $(g_i)_i$ kann als Grundzustand betrachtet werden (siehe Kapitel 5.3). Falls $(g_i)_i$ eine konstante Folge ist, so wird sie durch ihren konstanten Wert angegeben (z.B. $\mathcal{P}_{\{\mathcal{G},a,0\}}$).

# 4 Graphen in der CFT

Nachfolgend wird das Auftreten von Graphen innerhalb der CFT untersucht. Die Graphen und deren Pfadräume treten als Fusionsgraphen bestimmter Modelle oder durch eine geeignete Interpretation von Charakteren auf.

## 4.1 Fusionsgraphen

In [36] wurde erstmals von der CFT ausgehend eine Pfadraumdarstellung für minimale Modelle abgeleitet. Es handelte sich hierbei um die $(2, q$ ungerade) Modelle, die auch Gegenstand der Untersuchung dieser Arbeit sind. In [36] wurden die Fusionsgraphen des $h_{min}$ primären Feldes benutzt, um einen Isomorphismus zwischen den den Graphen zugehörigen Pfadräumen und den Niedrigstgewichts-Darstellungen dieser Modelle anzugeben. Dabei werden die Fusionsgraphen der primären Felder einer Theorie wie folgt definiert:

**Definition:** Der Fusionsgraph $\mathcal{G}_i$ eines primären Feldes $\phi_i$ ist der Graph, der durch die Zusammenhangsmatrix $N_i$ (der Fusionsmatrix des Feldes) gegeben ist. Dabei ist die

Fusionsmatrix $(N_i)_j^k$ durch die Fusionsregeln des primären Feldes $\phi_i$ gegeben:

$$\phi_i \times \phi_j = \sum_k (N_i)_j^k \phi_k. \tag{4.1}$$

Die Numerierung der Felder erfolgt nach abfallenden $h$-Werten.
Der Graph, der dem primären Feld $\phi_N$ des minimalen Modells $(2, 2N+3)$ entspricht, d.h. dem Feld zu minimalen $h = h_{min}$, wird im folgenden mit $\mathcal{A}_{\mathbf{N+1}}$ bezeichnet, wobei folgende Numerierung der Ecken gewählt wird: die Ecke, die dem $j$-ten Feld entspricht, wird mit $N-j$ bezeichnet. Im Anhang sind die $\mathcal{A}_N$-Gaphen für $N = 2, 3, 4$ und 5 angegeben.

Für eine genaue Definition der Fusions-Algebra (4.1) siehe z.B. [47].

Die Hauptproposition aus [36] läßt sich nun wie folgt formulieren:

**Proposition:** Sei q=2N+3 und sei $\mathcal{A}_{N+1}$ der oben definierte Graph, dann existiert eine Bijektion zwischen den Pfadräumen $\mathcal{P}_{\{\mathcal{A}_{N+1}, N-j, 0\}}$ und den irreduziblen Niedrigstgewichts-Darstellungen $V(c, h_j)$, die gegeben wird durch:

$$(l_i)_i \mapsto \ldots L_2^{l_2} L_1^{l_1} = \prod_{i=\infty}^{1} L_i^{l_i} \qquad \text{für } i \in I\!N. \tag{4.2}$$

Dieser Isomorphismus erhält die $L_0$-Graduierung, die auf dem Pfadraum durch:

$$L_0 (l_i)_i := (h_{N-l_0} + \sum_{i \in I\!N} i l_i) \cdot ((l_i)_i). \tag{4.3}$$

gegeben wird [36].

Bei dem obigen Isomorphismus legt der nullte Eintrag in einer Folge den $h$-Wert fest, während die restlichen Folgenglieder eine Basis der entsprechenden $V(c, h)$ abzählen.
Dies kann man mit den in Kapitel 2.4 angegeben Restriktionen für die FNO Basis wie folgt in Zusammenhang bringen: Der erste Eintrag liefert die „initial condition“, während die „difference two condition“ durch den Zusammenhang des Graphen geliefert wird. Die $\mathcal{A}$ Graphen (d. h. ihre Zusammenhangsmatrizen) lassen sich sukzessive aus den Tadpolegraphen $\mathcal{T}_K = A_{2K}/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, welche den Fusionsgraphen der primären Felder mit den größten $h$-Werte entsprechen, berechnen. Dazu sei $M_{\mathcal{T}_k}$ die Zusammenhangsmatrix des $\mathcal{T}_k$-Graphen; dann gilt [36]:

$$(\mathcal{A}_k)_{i,j} = p_k(M_{\mathcal{T}_k}), \tag{4.4}$$

wobei die $p_k$ die Tschebyschew-Polynome zweiter Art sind. Dies ergibt sich aus der Polynomialität der Fusions-Algebra dieser Theorien [47].

Man kann natürlich auch den $\mathcal{A}_N$-Graphen einfach über seine Zusammenhangsmatrix $(\mathcal{A}_N)_{i,j}$ definieren: Für $0 \leq i, j \leq N-1$:

$$(\mathcal{A}_N)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i+j < N \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases} \tag{4.5}$$

## 4.2 Graphen aus Summenformeln

Eine weitere Möglichkeit, Graphen in die CFT zu einzubringen, ist durch Summenformeln gegeben. Dazu betrachtet man geeignete Summenformeln für Charaktere und führt dann die

Summation auf eine geeignete Abzählung von Pfaden über Graphen zurück. Dieses Verfahren wurde in [37] für die (2, ungerade) und die (3, gerade)-Modelle ausgeführt. Mit Hilfe von Produktidentitäten von Charakteren können diese Resultate dann auf $(2\nu, p')$-Modelle ausgedehnt werden.

Man erhält aus den Rocha-Caridi-Formeln (2.36) mit Hilfe der Jacobi-Tripelprodukt-Identität:

$$\prod_{l\geq 1}(1-v^l)(1+v^{l-\frac{1}{2}}w)(1+v^{l-\frac{1}{2}}w^{-1}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v^{\frac{1}{2}k^2}w^k \tag{4.6}$$

mit $v = q^{\nu p'}$ und $w = -q^{\frac{(2m-p')\nu}{2}}$ die folgende Produktform für das $(2\nu, p')$-Modell:

$$ch^{2\nu,p'}_{\nu,m} = \prod_{l\not\equiv 0,\nu m \bmod \nu p', l\geq 1} (1-q^l)^{-1}. \tag{4.7}$$

Daraus erhält man die oben angesprochene Produktidentität:

$$ch^{2\nu,3}_{\nu,1}(q)ch^{2,p'}_{1,m}(q^\nu) = ch^{2\nu,p'}_{\nu,m}(q) \tag{4.8}$$

und eine entsprechende Zerlegung für die Charaktere $\chi$.

Aus entsprechenden Produktformeln [37] erhält man für die (2, ungerade) und die (3, gerade)-Modelle folgende Formeln:

$$\begin{aligned} ch^{2\nu,3}_{\nu,1}(q) &= \prod_{k\not\equiv 0,\pm\nu \bmod 3\nu, k>0} (1-q^k)^{-1} && (4.9)\\ ch^{2,p'}_{1,m}(q) &= \prod_{k\not\equiv 0,\pm m \bmod p', k>0} (1-q^k)^{-1}. && (4.10)\end{aligned}$$

Die rechten Seiten der obigen Identitäten können aber ihrerseits mit Pfadräumen auf Graphen in Verbindung gebracht werden. Für die (2, ungerade)-Modelle sind es die schon erläuterten $\mathcal{A}$-Graphen. Die (3, gerade)-Modelle hingegen werden über sogenannte $\mathcal{B}$-Graphen definiert, dabei ist der $\mathcal{B}_N$-Graph durch die Zusammenhangsmatrix

$$(\mathcal{B}_N)_{i,j} = 1, \qquad \text{für } 0\leq i,j\leq N-1 \tag{4.11}$$

definiert. Die Identitäten zwischen den Charakteren und der Spur des Pfadraum-$L_0$

$$L_0 := (h + \sum_{i\geq 0} il_i)\cdot(l_i)_i \tag{4.12}$$

über den entsprechenden Pfadräumen lauten dann [37]

$$\begin{aligned} ch^{2,p'}_{1,m}(q) &= Tr_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}(p',m)}} q^{L_0} && (4.13)\\ ch^{2\nu,3}_{\nu,1}(q) &= Tr_{\mathcal{P}_{\mathcal{B}(\nu)}} q^{L_0}, && (4.14)\end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{A}(p',m)} &= \mathcal{P}_{\{\mathcal{A}_{\frac{p'-1}{2}}, \frac{p'-1}{2}-m, 0\}} && (4.15)\\ \mathcal{P}_{\mathcal{B}(\nu)} &= \mathcal{P}_{\{\mathcal{B}_\nu, 0, 0\}}. && (4.16)\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Identität (4.8) kann man dann eine entsprechende Gleichung für die $(2\nu, p')$-Modelle erhalten, wobei als Graph der tensorierte $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-Graph verwendet wird:

$$ch_{\nu,m}^{2\nu,p'}(q) = Tr_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(p'm,\nu)}} q^{L_0} \tag{4.17}$$

mit

$$\mathcal{P}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}(p'm,\nu)} = \mathcal{P}_{\{\mathcal{A}_{\frac{p'-1}{2}} \otimes \mathcal{B}_\nu, \nu(\frac{p'-1}{2}-m),0\}}, \tag{4.18}$$

wobei die Numerierung des $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-Graphen in [37] gegeben wird.
Wenn man für diese Charaktere nun wiederum verallgemeinerte Rogers-Ramanujan-Identitäten anwendet, so erhält man wieder eine Summendarstellung [37]:

$$ch_{\nu,m}^{2\nu,p'} = \sum_{n_1,\ldots,n_K \geq 0} \frac{q^{N_1^2+\cdots+N_K^2+N_{\nu m}+\cdots+N_K}}{(q)_{n_1}\cdots(q)_{n_{K-1}}(q^{\gamma_\nu})_{n_K}}, \tag{4.19}$$

wobei $N_i = \sum_{j=i}^N n_j$, $(q)_i = \prod_{j=q}^i (1-q^j)$, $K = [\frac{\nu p'}{2}] - 1$ und $\gamma_\nu = \begin{cases} 2 & \text{falls } \nu \text{ gerade} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$.
Für diese Zerlegung wurde in [37] eine Quasiteilcheninterpretation entwickelt, in der die verschiedenen Summationsindizes als die verschiedenen Sorten von Quasiteilchen der Theorie aufgefaßt werden. Jeder Teilchensorte $n_i$ wird zudem das Energiegewicht $i$ zugeordnet.

# 5 Statistische Modelle über Graphen

In diesem Kapitel wird nun auf die statistischen Modelle eingegangen, bei denen Graphen und deren Pfadräume eine wichtige Rolle spielen.

## 5.1 IRF-, ABF- und FB-Modelle

Bei bestimmten Modellen treten Graphen und deren Pfadräume bei der Definition und Analyse dieser Modelle auf. Ausgehend von den Coxeter-$A$-$D$-$E$-Graphen kann man sogenannte IRF (interaction 'round a face)-Modelle definieren [24]. Für die $A$-Graphen wurde dies bereits in [11] durchgeführt und in [17] weitergeführt. Ein IRF-Modell definiert man auf einem quadratischen Gitter. Jedem Gitterplatz wird dann ein Spin zugeordnet. Die Wechselwirkung wird durch Boltzmanngewichte $w(l_i, l_j|l_m, l_n)$ angegeben, die, entsprechend der Spinkonfiguration $(l_i, l_j, l_m, l_n)$ an den Ecken, jeder Masche (face) zugeordnet werden.

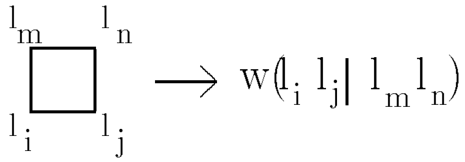


Figure 1: Boltzmanngewicht für IRF

Die Zustandssumme läßt sich dann wie folgt schreiben:

$$Z = \sum_{\text{Konfigurationen}} \prod_{\text{Maschen}} w(l_i, l_j | l_m, l_n). \tag{5.1}$$

Bei den IRF-Modellen über Graphen nehmen die Spins an den Gitterplätzen Werte entsprechend den numerierten Ecken des zugrundeliegenden Graphen an. Dabei gilt zusätzlich die Einschränkung, daß an zwei verbundenen Gitterplätzen nur solche Spins auftreten, deren entsprechende Ecken auf dem Graphen ebenfalls verbunden sind. In der vorliegenden Arbeit werden nur Modelle über $A_n$-Graphen, die den ABF-Modellen (Andrews, Baxter, Forrester) [11] und den FB-Modellen (Forrester, Baxter) [17] entsprechen, betrachtet. Die Ecken des Coxeter-$A_n$Graphen werden hierbei von 1 bis $n$ durchnumeriert. Die Einschränkung an die Spins ist dann einfach $l_i \in \{1 \dots n\}$ und für zwei benachbarte Spins $l_i, l_j$: $|l_i - l_j| = 1$.

Mit diesen Einschränkungen erhält man sechs verschiedene Konfigurationen für eine Masche:

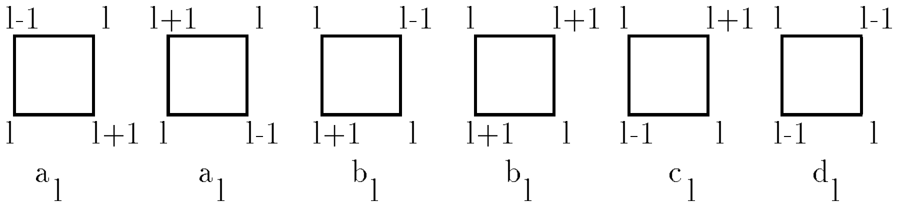


Figure 2: Erlaubte Konfigurationen der ABF- bzw. FB-Modelle

Diesen ordnet man wie folgt Boltzmangewichte zu:

$$\begin{aligned} a_l &= \rho' h(v+\eta) \\ b_l &= \rho' h(\eta - c)[h(w_{l-1})h(w_{l+1})]^{\frac{1}{2}}/h(w_l) \\ c_l &= h(2\eta)h(w_l + \eta - v)/h(w_l) \\ d_l &= h(2\eta)h(w_l - \eta + v)/h(w_l) \end{aligned} \tag{5.2}$$

wobei

$$h(v) = 2p^{\frac{1}{4}} \sin(\frac{\pi v}{2K}) \prod_{i=1}^{\infty} (1 - 2p^n \cos(\frac{\pi v}{K}) + p^{2n})(1-p^{2n})^2. \tag{5.3}$$

Hierbei sind $K$ und $K'$ vollständige elliptische Integrale erster Art, $\rho'$ ein beliebiger Parameter, der sogenannte Spektralparameter, $v$ eine komplexe Variable und $p, w_l$ wie folgt definiert:

$$p = e^{-\pi K'/K} \qquad w_l = 2l\eta \tag{5.4}$$

$p$ wird „rtex-Parameter $\eta$ wird für die FB-Modelle [17] durch

$$\eta = sK/r \tag{5.5}$$

festgelegt. Es gilt hierbei: $n = r - 1$, so daß $r$ den Graphen $A_n$ des Modells bestimmt. Bei der speziellen Wahl $s = 1$ erhält man die ABF-Modelle. Die Parametrisierung der Boltzmanngewichte mittels elliptischer Integrale und den 8-Vertex-Parameter $\eta$ erhält man aus einer Korrespondenz zwischen den betrachteten Modellen und dem „zero field 8-vertex model“ [48, 49, 50].
Die in diesem Abschnitt eingeführten Modelle können mit Charakteren der Virasoro-Algebra in Verbindung gebracht werden. Wie dies erfolgt, wird in den folgenden Abschnitten dargelegt werden. Die auftretende zentrale Ladung eines Modells mit $\eta = sK/r$ ist dann $c(p, p')$, wobei $p = r$ und $p' = r - s$ ist.

## 5.2 Lokale Zustandswahrscheinlichkeit (LHP) und Corner-Transfer-Matrix (CTM)

Die oben angesprochenen Virasoro-Charaktere treten bei der Berechnung der sogenannten „local hight probabilities“ (LHP) auf. Diese geben die Wahrscheinlichkeit an, daß der Spin $l_0$ des mittleren Gitterplatzes einen bestimmten Wert a hat. Dabei wird natürlich angenommen, daß das Gitter so beschaffen ist, daß ein mittlerer Gitterplatz existiert.

$$P_a = Z^{-1} \sum_{\text{Konfigurationen}} \delta(l_0, a) \prod_{\text{Maschen}} w(l_i, l_j | l_m, l_n). \tag{5.6}$$

Die Berechnung dieser Wahrscheinlichkeiten wird mit der Methode der „corner-transfer-matrices“ (CTM) durchgeführt [51]. Diese werden ähnlich wie die üblichen Zeilentransfermatrizen definiert. Man teilt das Gitter ausgehend von dem mittleren Gitterplatz in vier Quadranten auf.

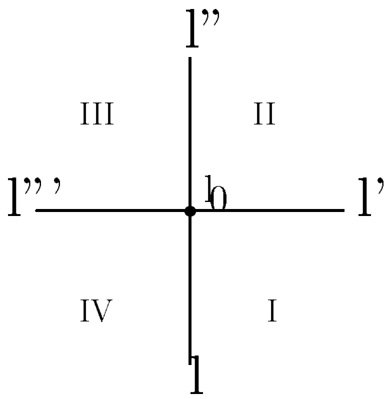


Figure 3: Quadranten und Halbachsenkonfigurationen

Nun wird die CTM so definiert, daß sie den Beitrag eines dieser Quadranten -bei festgehaltenem Randspin und gegebenen Konfigurationen $\mathbf{l}, \mathbf{l}'$ auf den den Quadranten begrenzenden Halbachsen- zur Zustandssumme liefert. Z.B. wird die CTM A für den Quadranten I wie folgt definiert:

$$A_{\mathbf{l},\mathbf{l}'} = \begin{cases} \sum \prod w((l_i, l_j | l_m, l_n) & \text{falls } l_0 = l_0' \\ 0 & \text{falls } l_0 \neq l_0', \end{cases} \tag{5.7}$$

wobei die Summe über die Gitterplätze innerhalb des Quadranten ohne die Randspins läuft und das Produkt sich über alle Maschen innerhalb des Quadranten erstreckt. Die Indizes $\mathbf{l}, \mathbf{l}'$ bezeichnen die Konfigurationen auf den Halbachsen und $l_0$ bzw. $l_0'$ den mittleren Spin. Bezeichnet man mit A,B,C,D die CTM der vier Quadranten, dann kann die Zustandssumme geschrieben werden als:

$$Z = tr(ABCD). \tag{5.8}$$

Die gesuchten lokalen Wahrscheinlichkeiten kann man dann mit Hilfe der Matrix $S_a$

$$(S_a)_{\mathbf{l},\mathbf{l}'} = \delta(l_0, a)\delta(\mathbf{l}, \mathbf{l}') \tag{5.9}$$

wie folgt schreiben [51]:

$$P_a = tr(S_a ABCD)/tr(ABCD). \tag{5.10}$$

Dieser Ausdruck läßt sich dann weiter vereinfachen. Dies ist im Anhang von [17] parallel zu den Berechnungen im Anhang von [11] ausgeführt. Der Hauptpunkt bei der Rechnung ist, daß man lediglich die Exponentialdarstellung [51] (CTM$(v) = \exp(vH_{\mathrm{CTM}})$) einer CTM benötigt. Für das relevante $H_{\mathrm{CTM}}$ erhält man im Limes $p \to 1$ [17]:

$$(H_{\mathrm{CTM}})_{\mathbf{l},\mathbf{l}'} \propto \delta(\mathbf{l}, \mathbf{l}') \sum_i ic(l_i, l_{i+1}, l_{i+2}) \tag{5.11}$$

wobei

$$\begin{aligned} c(l, l \pm 1, l) &= \mp[\frac{ls}{r}] && (5.12)\\ c(l-1, l, l+1) &= \frac{1}{2} && (5.13)\\ c(l+1, l, l-1) &= \frac{1}{2}. && (5.14) \end{aligned}$$

Das auftretende $H_{CTM}$ kann mit einem Gitter-$L_0$ identifiziert werden [33, 34, 35].

## 5.3 Kritische Exponenten, Charaktere und Pfadräume

Durch geignete Kombinationen von LHP's konnte Huse für die ABF-Modelle Ordnungsparameter angeben und deren kritische Exponenten bestimmen [12]. Die Exponenten und die auftretenden Scaling-Dimensionen dieser Modelle stimmen mit der unitären FQS-Serie minimaler Virasoro-Modelle überein [12]. Für die FB-Modelle wurde von Riggs eine ähnliche Analyse durchgeführt [18]. Dort wurden die in den LHP auftretenden Virasoro-Charaktere in den Bereichen III und IV angegeben. Von besonderem Interesse für diese Arbeit ist der Bereich III, der durch $0 < p < 1$ und $-\eta < Re(v) < \eta$ gekennzeichnet ist (zur Definition der restlichen Bereiche siehe [11, 17]). Das Ergebnis ist, daß im Bereich III des Modells mit $\eta = sK/r$ gilt:

$$P_{a,d} \sim \chi_{d,a}^{r,r-s} \text{ mit } 1 \leq a \leq r-1,\ 1 \leq d \leq r-s-1. \tag{5.15}$$

Die genaue Formel für $P_{a,d}$ (siehe [18]) ist komplizierter und enthält neben den Virasoro- auch $\widehat{su}_2$-Charaktere.

Die Virasoro-Charaktere entsprechen den CTM-Summen in den Formeln für die LHP's, die bereits in [17] angegeben wurden. Der Index $d$ in (5.15) bezeichnet eine bestimmte Wahl des Grundzustandes, der entartet sein kann und in die Berechnung der LHP eingeht [17]. Die auftretenden Grundzustände sind in [17] in Abhängigkeit von den Parametern $r$ und $s$ angegeben. In dem Fall der $(2,q)$-minimalen Modelle jedoch existiert lediglich ein Grundzustand, und es gilt $d=1$, wie man den Restriktionen (5.15) entnehmen kann. Die CTM-Summen ergeben sich als Spur der CTM auf den Pfadräumen $\mathcal{P}_{\{A_{r-1},a,(g_i)_i\}}$. Die Pfadräume selbst treten als Konfigurationsräume der Halbachsen auf. Die Anfangsbedingung für die Pfade ergibt sich hierbei aus dem Index a, da der erste Pfadeintrag immer der festgelegte mittlere Spin ist. Es wird weiterhin festgesetzt, daß sich die Pfade stabilisieren, d.h. für jede Folge $(l_i)_i$ gilt $l_i = g_i$ für $i \gg 1$, wobei $(g_i)_i$ die Folge des durch $d$ bestimmten Grundzustands ist. Die Restriktion, die durch die Pfadasymptotik gegeben wird, entspricht der Beschränkung auf endliche Anregungen über dem gewählten Grundzustand.

# 6 Korrespondenzen zwischen den Pfadräumen $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{P}_A$ der Fusions- und Coxeter-Graphen

Im Fall, daß $r$ ungerade ist, also ein $A$-Graph mit einer geraden Anzahl von Ecken auftritt, wurde schon in [11] bemerkt, daß sich die Spins durch nur $\frac{n}{2}$ Werte beschreiben lassen, da auf den geraden bzw. ungeraden Gittern jeweils nur $\frac{n}{2}$ verschiedene Werte auftreten. In [11] wurde für diesen Fall folgende Transformation angegeben: Sei $r = 2N+3$

$$l_i \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}(2N+1-l_i) & \text{falls } l_i \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}(l_i-2) & \text{falls } l_i \text{ gerade} \end{cases} . \tag{6.1}$$

Auf diese Weise wird einem $A_{r-1}$ Graphen der Tadpolegraph $\mathcal{T}_{N+1} = A_{r-1}/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, dessen Numerierung durch die obige Abbildung bestimmt wird, zugeordnet. Aus den $\mathcal{T}$-Graphen können, wie in Kapitel 4.1 beschrieben, die $\mathcal{A}$-Graphen gewonnen werden. Insbesondere ist im Falle des (2,5)-Modells der auftretetende Tadpolegraph $\mathcal{T}_2$ genau gleich dem Fusionsgraphen $\mathcal{A}_2$, so daß alle Resultate für diesen Graphen sich direkt auf den $A_4$-Graphen des $\eta = 3K/5$ Modells übertragen lassen. In den anderen Fällen ist der Zusammenhang zwischen den entsprechenden Graphen nicht ganz so leicht herzustellen, da hier die Rolle der Tschebyschew-Polynome zweiter Art noch zu klären ist. Jedoch kann man mit K-theoretischen Mitteln zeigen, daß die Pfadalgebren und somit auch die Pfadräume über diesen Graphen isomorph sind [36]. Bei der Rückübersetzung der $\mathcal{T}$-Graphen auf die Coxeter-$A$-Graphen ist zu beachten, daß man eine Wahl für das ungerade oder das gerade Gitter treffen muß. In [11] wird dies so beschrieben: Wenn das Gitter ein Schachbrett wäre, so müßte man wählen, ob die untere linke Ecke schwarz oder weiß ist. Diese Wahl spiegelt die $\mathbb{Z}_2$-Symmetrie des $A_n$-Graphen und -im Hinblick auf die Klassifikation der auftretenden Verma-Moduln- auch die Symmetrie des konformen „Grids“ wider.

Insbesondere sieht diese Übersetzung im Falle des $(2,5)$-Modells ($r=5, s=3$) wie folgt aus: Der $A_4$-Graph wird wie folgt umnumeriert:

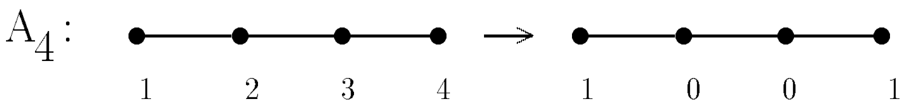


Figure 4: Umnumerierung der $A_4$-Graphen

Nun kann man sehen, daß der Pfadraum über diesem umnumerierten Graphen gleich dem über dem $\mathcal{A}_2$-Fusionsgraphen ist:

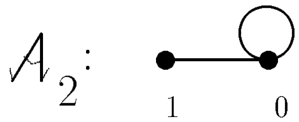


Figure 5: $\mathcal{A}_2$-Fusionsgraph

Weitere umnumerierte $A$-Graphen sind zusammen mit den entsprechenden Fusions-$\mathcal{A}$-Graphen im Anhang abgebildet.

In [11] wurde die obige Umschreibung des Modells als „lattice gas" interpretiert, bei dem die Restriktion gilt, daß auf zwei benachbarten Plätzen jeweils N oder N-1 Teilchen sind. In dieser Sichtweise beschreiben die $\mathcal{A}$-Graphen ein „lattice gas", bei dem auf zwei benachbarten Gitterplätzen höchstens insgesamt N Teilchen sind. Diese weniger restriktive Bedingung erklärt auf der Ebene der Graphen die zusätzlichen Seiten der $\mathcal{A}$-Graphen gegenüber denen der Coxeter $A$-Graphen. Die obige Teilcheninterpretation entspricht der, die in Kapitel 10.1 verwendet wird. Mit dem oben angesprochenen Isomorphismus der Pfadräume müßte sich also das „lattice gas" mit der Einschränkung N oder N-1 Teilchen auf benachbarten Plätzen auf das „lattice gas" mit der Einschränkung höchstens N Teilchen abbilden lassen. In Fall N=1, also im Fall des (2,5)-Modells, sind natürlich beide gleich.

Die Korrespondenz zwischen den $\mathcal{P}_A$- und $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$-Graphen überträgt sich auch auf ihre Pfadräume. Hinzu kommt aber noch folgende Beobachtung bezüglich der Anfangsbedingung: In beiden Fällen, sowohl in der CFT als auch im statistischen Modell, bestimmt das erste Folgenglied $l_0$ den $h$-Wert des Pfadraums. Im ersten Fall zu $h_{N-l_0}$, und im zweiten Fall zu $h = h^{r,r-s}_{l_0,1}$. Durch die Vorschrift (6.1) werden beide Definitionen gleich, da dann der Anfangswert $a$ im statistischen Modell gleich dem der CFT ist ($j$ für gegebenes $h_j$). Insgesamt treten nur N verschiedene $h$-Werte auf, da wie bereits angesprochen die Symmetrie des konformen „Grids" $h_{m,n} \mapsto h_{p-m,p'-n}$ existiert. Die Anfangsbedingungen werden also durch (6.1) aufeinander abgebildet, und so können den Ecken des Graphen $A_n$ nach der Umnumerierung mittels (6.1) und entsprechender Identifizierung der Ecken die den $h$-Werten der Anfangsbedingung entsprechenden Felder zugeordnet werden.
Im Falle des (2,5)-Modells werden auch die Grundzustände aufeinander abgebildet. Auf den $A_4$-Graphen lautet dieser $(\ldots,3,2,3,2,3,2,\ldots)$ und wird mit (6.1) zu $(0,0,\ldots)$, dem Grundzustand im Fall des Fusionsgraphen $\mathcal{A}_2$.

Im folgenden wird auf dieser Korrenspondenz zwischen CFT und statistischem Modell aufgebaut werden. Es werden einerseits eine der Korrespondenz entsprechende Virasoro-

Operation auf dem Pfadraum und andererseits die Implikationen der Konfigurationsraumstruktur der Pfadräume für die Verma-Moduln der (2,q)-Modelle untersucht.

# 7 Zulässige Darstellungen

## 7.1 Allgemeine Situation

Zunächst werden die Modalitäten für irrreduzible Darstellungen der Virasoro-Algebra auf dem Pfadraum $\mathcal{P}_{\{\mathcal{A}_N,i,0\}}$ (kurz $\mathcal{P}_\mathcal{A}$) zu den Fusionsgraphen $\mathcal{A}_N$ aus Kapitel 4.1 mit den entsprechenden Restriktionen untersucht.
Als erstes ist folgendes bemerken:

**Bemerkung:** Falls eine Darstellung von $Vir$ auf $\mathcal{P}_\mathcal{A}$ existiert, dann gilt für die entsprechende $c$ und $h$:

$$\mathcal{P}_\mathcal{A} \cong V(c,h) \qquad \text{als } Vir\text{-Moduln.} \tag{7.1}$$

**Beweis:** Auf Grund der universellen Eigenschaft des Verma-Moduls (2.10) existiert eine surjektive Abbildung $\pi : M(c,h) \to \mathcal{P}_\mathcal{A}$. $K := ker(\pi)$ ist dann ein Untermodul und als solcher in dem eindeutigen maximalen Untermodul $J(c,h)$ enthalten.
Dann folgt aber auch $K = J(c,h)$, da die Dimensionen in den einzelnen Graden übereinstimmen: $dim_n(K) = dim_n J(c,h)$, wie man mit Hilfe des Isomorphismus (4.1) sieht.
Mit dieser Bemerkung läßt sich also das Problem, eine Darstellung zu finden, umformulieren: Gesucht wird ein Isomorphismus

$$\Phi : \mathcal{P}_\mathcal{A} \longrightarrow V(c,h). \tag{7.2}$$

Ein solcher Isomorphismus kann leicht angegeben werden:

**Beispiel 1:**

$$\Phi((l_i)_i) := \prod_{i=\infty}^{1} L_i^{l_i}. \tag{7.3}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da, wie bereits in Kapitel 4.1 gesehen, die Struktur der $\mathcal{A}$-Graphen genau die Restriktionen der FNO-Basis enthält.
Bei näherer Untersuchung stellt man jedoch fest, daß dieses Beispiel aber nicht alle natürlichen Strukturen der Räume $(\mathcal{P}_\mathcal{A}, V(c,h))$, die im nächsten Kapitel eingeführt werden, respektiert.

## 7.2 Natürliche Strukturen auf $\mathcal{P}_\mathcal{A}$ und $V(c,h)$

1) Wenn man den Pfadraum $\mathcal{P}_\mathcal{A}$ (im folgenden immer nur noch mit $\mathcal{P}$ bezeichnet) als Konfigurationsraum auffaßt, dann ergeben sich die folgenden natürlichen Strukturen: Zuerst einmal hat man zwei Operatoren, $L_0$ und $K$, wobei $L_0$ das Pfadraum-$L_0$ (4.3) ist:

$$L_0((l_i)_i) := (h_{N-l_0} + \sum_{i\in\mathbb{N}} il_i) \cdot ((l_i)_i) \tag{7.4}$$

und $K$ wie folgt definiert wird:

$$K((l_i)_i) := (\sum_{i\in\mathbb{N}} l_i) \cdot ((l_i)_i). \tag{7.5}$$

Die beiden Operatoren liefern dann eine doppelte Graduierung des Pfadraums:

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{n,k} \mathcal{P}_{n,k}, \tag{7.6}$$

wobei

$$L_0|_{\mathcal{P}_{n,k}} = (n + h_{N-l_0}) \cdot id$$
$$K|_{\mathcal{P}_{n,k}} = k \cdot id.$$

Weiterhin haben wir das natürliche Skalarprodukt des Pfad-Hilbertraums, bezüglich dem alle Pfade orthonormal sind. Dieses Skalarprodukt wird im folgenden mit $( \ , \ )_{\mathcal{P}}$ bezeichnet:

$$(((l_i)_i), ((n_i)_i))_{\mathcal{P}} := \prod_i \delta_{l_i,n_i}. \tag{7.7}$$

Mit dieser Metrik wird die direkte Summe (7.6) zu einer orthogonalen Summe:

$$\mathcal{P} = \perp_{n,k} \mathcal{P}_{n,k}. \tag{7.8}$$

Unter einem geeigneten Isomorphismus müßten diese Strukturen im wesentlichen erhalten bleiben. In anderen Worten, man sollte aus einer geeigneten Darstellung eine orthogonale Basis für $V(c,h)$ gewinnen können, und es sollte auf $V(c,h)$ eine Struktur existieren, die der doppelten Graduierung des Pfadraums entspricht.

2) Wenden wir uns jetzt $V(c,h)$ zu. Hier hat man die übliche Graduierung, die durch $L_0$ (2.15) induziert wird. Zudem hat man eine kanonische Form auf $V(c,h)$, die Shapovalov-Form, siehe (2.2), die hier mit $\langle \ , \ \rangle_S$ bezeichnet wird. Aus diesen Daten erhält man die übliche orthogonale Zerlegung von $V(c,h)$:

$$V(c,h) = \perp_n V_n(c,h). \tag{7.9}$$

Obwohl es keine weitere offensichtliche Graduierung gibt, so existiert doch eine natürliche Filtrierung:

**Definition:** Sei $\widetilde{V}_{n,k} := span\langle L_{n_l} \dots L_{n_1} | n_l \geq \dots \geq n_1, l \leq k$ und $\sum_i n_i = n\rangle$ (d.h. Linearkombinationen von Produkten aus höchstens k $L_i$'s mit der Gesamtenergie n).

Diese Räume liefern die oben angesprochene Filtrierung für jedes $V_n(c,h)$

$$\emptyset = \widetilde{V}_{n,-1} \subset \widetilde{V}_{n,0} \subset \dots \subset \widetilde{V}_{n,k-1} \subset \widetilde{V}_{n,k} \subset \widetilde{V}_{n,k+1} \subset \dots \subset \widetilde{V}_{n,\infty} = V_n(c,h). \tag{7.10}$$

Die sukzessiven Quotienten dieser Filtrierung sind besonders interessant, da sie dieselbe Dimension haben wie die entsprechenden Pfadräume.

**Definition:** Sei $\widehat{V}_{n,k} := \widetilde{V}_{n,k}/\widetilde{V}_{n,k-1}$.
Mit den Überlegungen aus Kapitel 4.1 folgt durch Abzählen:

$$dim\widehat{V}_{n,k} = dim\mathcal{P}_{n,k}. \tag{7.11}$$

**Bemerkung:** Mit $\pi_{n,k}$ wird im folgenden die kanonische Projektion $\pi_{n,k} : \widetilde{V}_{n,k} \longrightarrow \widehat{V}_{n,k}$ bezeichnet.

## 7.3 Zulässige Darstellungen

Diese Untersuchungen zeigen, welchen Anforderungen ein Isomorphismus (7.2) genügen sollte, um die verschiedenen natürlichen Strukturen zu erhalten. Die folgende Definition ist deshalb von zentraler Bedeutung.

**Definition:** Ein Isomorphismus $\Phi : \mathcal{P}_{\mathcal{A}} \longrightarrow V(c,h)$ heißt **zulässig**, falls die folgenden Bedingungen gelten:

a) $\Phi(\mathcal{P}_{n,k}) \subset \widetilde{V}_{n,k}$ und damit $\pi_{n,k} \circ \Phi(\mathcal{P}_{n,k}) = \widehat{V}_{n,k}$.

b) $\Phi^* \langle \ , \ \rangle_S$ ist in der Pfadbasis orthogonal
d. h. $\langle \Phi((l_i)_i), \Phi((n_i)_i) \rangle = \epsilon((l_i)_i,(n_i)_i) \cdot ((l_i)_i,(n_i)_i)_{\mathcal{P}}$ , mit $\epsilon((l_i)_i,(n_i)_i) \in \mathbb{C}$.

**Bemerkungen:**

1) Man kann natürlich immer so normieren, daß das $\epsilon$ aus b) $\pm 1$ ist.

2) Der Zusatz in der Bedingung a) verarbeitet die Information (7.11) über die Dimensionen der entsprechenden Räume. Die Bedingung a) selbst beinhaltet eine grobe Identifizierung der Anzahl der $L$'s mit der Summe der nicht verschwindenden Einträge einer Pfadfolge. Insbesondere gibt ein Folgeglied $k$ an, daß in dem entsprechenden Bild unter $\Phi$ mindestens $k$ weitere $L$'s vorkommen. Ausgenommen ist selbstverständlich das nullte Folgenglied $(l_0)$, da dieses ja nur den $h$-Wert festlegt. Für eine Teilcheninterpretation dieser Aussage wird auf Kapitel 10.1 verwiesen.

3) Die Bedingung b) garantiert die Existenz einer orthogonalen Basis, die die vorherige in jedem Schritt der Filtrierung ergänzt.
In diesem Sinne ist b) äquivalent zu der Existenz von orthogonalen Schnitten $s_{n,k}$ (d.h. $\pi_{n,k} \circ s_{n,k} = id$)

$$0 \longrightarrow \widetilde{V}_{n,k-1} \longrightarrow \widetilde{V}_{n,k} \underset{s_{n,k}}{\overset{\pi_{n,k}}{\rightleftarrows}} \widehat{V}_{n,k} \longrightarrow 0, \tag{7.12}$$

wobei hier orthogonal folgendes bedeutet:

$$s_{n,k}(\widehat{V}_{n,k}) \perp \widetilde{V}_{n,k-1}. \tag{7.13}$$

Aus diesen Schnitten erhält man dann eine orthogonale Zerlegung:
Sei nun $V_{n,k} := s_{n,k}(\widehat{V}_{n,k})$, dann gilt:

$$V(c,h) = \perp_{n,k} V_{n,k}. \tag{7.14}$$

Diese Zerlegung entspricht der doppelten Graduierung (7.6) des Pfadraumes. Die Existenz einer solchen Basis (bzw. Zerlegung) ist jedoch nicht trivial. Im Gegenteil, dies gerade ist der entscheidende Punkt der angestrebten Korrespondenz zwischen dem Pfadraum und dem Verma-Modul-Quotienten. Wenn man sich z.B. Beispiel 1 (7.3) ansieht, so stellt man fest, daß die Bedingung a) erfüllt wird, daß hingegen die Bedingung b) nicht erfüllt ist.
Mit anderen Worten: Die Interpretation des Pfadraums als Konfigurationsraum führt zu der Postulierung einer spezifischen orthogonalen Basis von $V(c,h)$.

4) Ein Isomorphismus $\Phi'$ kann wie folgt aus den Schnitten $s_{n,k}$ zurückgewonnen werden:

$$\Phi'((l_i)_i) := s_{n,k} \circ \pi_{n,k}(\prod_{i=\infty}^{1} L_i^{l_i}), \qquad \text{für } (l_i)_i \in \mathcal{P}_{n,k}. \tag{7.15}$$

$\Phi'$ erfüllt die Bedingung b) nur teilweise, da nicht garantiert ist, ob alle Bild-Vektoren $\Phi'((l_i)_i)$ aufeinander senkrecht stehen. Es gilt aber, daß

a) $\Phi(\mathcal{P}_{n,k}) \subset \tilde{V}_{n,k}$ und

b') $\Phi'(\mathcal{P}_{n,k}) \perp \Phi'(\mathcal{P}_{n',k'})$ bzgl. $\Phi^*\langle\ ,\ \rangle_S$, falls $n \neq n'$ oder $k \neq k'$.

Ein Isomorphismus, der den Bedingungen a) und b') genügt, heißt **schwach zulässig**. Aus einem schwach zulässigen Isomorphismus $\Phi'$ kann man immer durch Nachschaltung einer geeigneten Orthogonalisierung innerhalb der $\Phi'(\mathcal{P}_{n,k})$ einen zulässigen Isomorphismus $\Phi$ machen. Dies ist möglich, da die Shapovalov-Form nicht-ausgeartet und somit, falls $\Phi'$ schwach zulässig ist, auch auf $\Phi'(\mathcal{P}_{n,k})$ nicht-ausgeartet, also diagonalisierbar, ist. Unabhängig von der Wahl der Orthogonalisierung gilt aber:

$$\Phi'(\mathcal{P}_{n,k}) = \Phi(\mathcal{P}_{n,k}) := V_{n,k}, \tag{7.16}$$

so daß die Räume $V_{n,k}$ und die Zerlegung $V(c,h) = \perp_{n,k} V_{n,k}$ nur von der schwach zulässigen Struktur abhängen.

**Zusätzliche Bemerkung:** In manchen Fällen (falls $h = 0$) ist es nützlich, nur die quasi-primären Objekte zu betrachten.

**Definition:**

Sei $V_n^{q.p.} := ker(L_{-1}|_{V(c,h)_n})$,

$\tilde{V}_{n,k}^{q.p.} := \ ker(L_{-1}|_{\tilde{V}_{n,k}})$,

bzw. $\hat{V}_{n,k}^{q.p.} := \ ker(L_{-1}|_{\hat{V}_{n,k}})$.

Analog zu den obigen Betrachtungen kann man dann orthogonale Schnitte $s_{n,k}^{q.p.}$ definieren:

$$0 \longrightarrow \tilde{V}_{n,k-1}^{q.p.} \longrightarrow \tilde{V}_{n,k}^{q.p.} \underset{s_{n,k}^{q.p.}}{\overset{\pi_{n,k}}{\rightleftarrows}} \hat{V}_{n,k}^{q.p.} \longrightarrow 0. \tag{7.17}$$

Die restliche Information über den nicht-quasi-primären Teil erhält man auf Grund der Tatsache, daß die SL(2,$\mathbb{C}$) Unter-Verma-Moduln, die auf den $V_n^{q.p.}$ basieren, eine Basis für ganz $V(c,h)$ liefern:

$$\bigoplus_n U(L_1)V_n^{q.p.} = V(c,h). \tag{7.18}$$

Die Kontravarianz der Shapovalov-Form und die Tatsache, daß, falls $h = 0$, $L_1|_{\mathcal{P}_{n,k}} \in \mathcal{P}_{n,k}$ gilt (siehe Abschnitt 10.1), garantieren dann, daß die orthogonale Zerlegung des quasi-primären Teils:

$$V(c,h)^{q.p.} = \perp_{n,k} V_{n,k}^{q.p.}. \tag{7.19}$$

sich auf ganz $V(c,h)$ überträgt, wobei $V_{n,k}^{q.p.} := s_{n,k}^{q.p.}(\hat{V}_{n,k}^{q.p.})$ ist.
Diese Bemerkung wird im nächsten Kapitel für eine Konstruktion einer zulässigen Darstellung verwendet.

# 8 Konstruktionen für zulässige Darstellungen

In diesem Kapitel werden zwei Verfahren angegeben, um zulässige Darstellungen explizit zu konstruieren. Diese Verfahren wurden programmiert. Die expliziten Resultate und deren Implikationen werden dann im nächsten Kapitel wiedergegeben.

**Konstruktion 1:** Man orthogonalisiert die FNO-Basis bezüglich der FNO-Ordnung (2.31).
Wie bereits erwähnt, kann man a priori keine Aussage darüber machen, ob dieser Algorithmus funktioniert, da die Shapovalov-Form nicht positiv-definit ist und somit bei der Orthogonalisierungsroutine isotrope Vektoren auftreten können. Andererseits liefert der Erfolg dieses Algorithmus gerade die neue Erkenntnis, nämlich die Existenz der postulierten orthogonalen Basis. Der diesem Algorithmus entsprechende Isomorphismus $\Phi$ ist dann:

$$\Phi_{FNO}((l_i)_i) := (\prod_{i=\infty}^{1} L_i^{l_i})^{\perp_{FNO}}, \tag{8.1}$$

wobei der Index $\perp_{FNO}$ das Bild unter der oben genannten Orthogonalisierung bezeichnet.
Um die Berechnungen durchzuführen, wurde zuerst die Shapovalov-Form zu einem entsprechendem Energieniveau $(V(c,h)_n)$ erzeugt und dann eine Gram-Schmidt-Orthogonalisierung, wie oben angegeben, durchgeführt. Die Berechnungen wurden für das (2,5)-Modell bis zu $\widetilde{V}_{32,5} = V(c,h)_{32}$ durchgeführt. Dies ist ein 97-dimensionaler Unterraum. Für die $(2, q$ ungerade)-Modelle mit q $<$ 35 wurde der Algorithmus bis $\widetilde{V}_{15,5}$ (ein 37-dimensionaler Unterraum) durchgeführt.

Man kann diese Konstruktion abwandeln, indem man irgendeine andere Ordnung für die Orthogonalisierung wählt, in der :

$$L_{m_1} \cdots L_{m_r} \succ L_{n_1} \cdots L_{n_s}, \text{ falls } r > s. \tag{8.2}$$

Allerdings ist die FNO-Ordnung am besten geeignet (siehe Kapitel 10.2).

**Konstruktion 2:** Diese Konstruktion ist die angekündigte Konstruktion für $h = 0$, in der die Bemerkung im vorangegangenen Kapitel umgesetzt wird. Man beschränkt sich also auf die quasi-primären Objekte. Es wird induktiv eine Basis von $\widetilde{V}_{n,k}^{q.p.}$ konstruiert, indem man eine Basis von $\widetilde{V}_{n,k-1}^{q.p.}$ entsprechend erweitert. Danach werden die neuen Basisvektoren in geeigneter Weise orthogonalisiert. Dieses Vefahren kann verfeinert werden, indem man zusätzlich die FNO (oder eine andere Ordnung, die die Bedingung (8.2) erfüllt) benutzt, um die Filtrierung (7.10) zu verfeinern, so daß die einzelnen Quotienten nur noch eindimensional sind.
Der der FNO-Ordnung entsprechende Isomorphismus ist in Kapitel 10.2 (10.33) angegeben.
Für die explizite Rechnung wurde wie folgt verfahren: Falls $h = 0$ ist, hat man die Möglichkeit, die quasi-primären Vektoren in der Form:

$$L_m L_m L_{n_r} \cdots L_{n_1} + \text{ Terme niedriger Ordnung bzgl. der FNO-Ordnung (2.31)} \tag{8.3}$$

zu wählen. Dann kann man die so gewählten Vektoren nach der FNO-Ordnung ihrer führenden Terme orthogonalisieren. Besonders einfach ist dieses Verfahren für $k = 2$, da dann $dim(\widetilde{V}_{n,2}^{q.p.}) = 1$. Das Verfahren wurde, da in diesem Fall keine Orthogonalisierung nötig ist, für beliebiges $c$ durchgeführt, und zwar bis zu $n = 200$.

In den betrachteten Fällen konnten auf den entsprechenden endlich-dimensionalen Unterräumen von $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ bzw. $V(c,h)$ mit den angewandten Verfahren immer zulässige Darstellungen konstruiert werden.

# 9 Signaturcharaktere für die $(2,q)$-Modelle

Da jede zulässig Darstellung insbesondere eine der Pfadbasis entsprechende orthogonale Basis liefert, ist es möglich, mit deren Hilfe die Signatur auf den entsprechenden Unterräumen der Zerlegung (7.14) zu berechnen. In allen durchgeführten Rechnungen für verschiedene $n$ und $k$ findet man:

$$sign(\langle\ ,\ \rangle_S)|_{V_{n,k}} = (-1)^k dim V_{n,k}. \tag{9.1}$$

In anderen Worten: Die Shapavalov-Form ist $(-1)^k$ definit auf $V_{n,k}$. Dies ist ein erstaunliches Resultat. Nicht nur gelingt es, mit Hilfe der Pfadraumformulierung eine orthogonale Basis zu finden, sondern man erhält sogar eine Zerlegung von $V(c,h)$ in die positiv- bzw. negativ-definiten Unterräume:

$$V(c,h) = V(c,h)^+ \oplus V(c,h)^-. \tag{9.2}$$

Das Auftreten einer alternierenden Definitheit wird in Kapitel 10.3 erklärt. Da die durchgeführten Rechnungen weit über dem Bereich zufälliger Übereinstimmungen liegen, veranlassen sie zu folgender Vermutung:

**Hauptvermutung:** Für die $(2, q$ ungerade$)$ minimalen Modelle existieren zulässige Darstellungen der Virasoro-Algebra auf den entsprechenden Pfadräumen $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$. Diese liefern eine Zerlegung (9.2) von $V(c,h)$ in die positiv- und negativ-definiten Unterräume bezüglich der Shapovalov-Form:

$$V(c,h)^+ := \bigoplus_{\substack{n \\ k\ gerade}} V_{n,k}, \qquad V(c,h)^- := \bigoplus_{\substack{n \\ k\ ungerade}} V_{n,k}. \tag{9.3}$$

Die aus dieser Zerlegung folgenden Signaturcharaktere sind durch:

$$\sigma(c(2,2N+3),h_j)(q) = \sum_{n_1,\ldots,n_N \geq 0} (-1)^{(\sum_{i=1}^N i n_i)} \frac{q^{N_1^2+\cdots+N_N^2+N_j+\cdots+N_N}}{(q)_{n_1}\cdots(q)_{n_N}} \tag{9.4}$$

gegeben, wobei $N_i = \sum_{j=i}^N n_j$ und $(q)_i = \prod_{j=1}^i (1-q^j)$.

**Bemerkung:**

1) Die Signaturcharakterformeln (9.4) wurden bereits von W. Nahm [52] vermutet und stimmen mit denen von A. Kent bis zur Ordnung $O(q^{100})$ überein [53].

2) Die genaue Struktur der Schnitte oder der Orthogonalisierung spielt keine Rolle für die auf $\mathcal{P}$ induzierte Metrik, da diese auf den $\mathcal{P}_{n,k}$ jeweils positiv oder negativ definit ist. Auf diese Weise erhält man für jedes andere $\Phi$ dieselben Resultate. Lediglich die schwache Zulässigkeit spielt eine Rolle.

3) Die Charaktere, die den obigen Signaturcharakteren entsprechen (siehe (4.19)), sind bis auf das auftretende Vorzeichen $(-1)^{\sum_i i n_i}$ gleich und wurden bereits in [43] angegeben. In einer Quasi-Teilchen-Interpretation im Sinne von [37] ist der Exponent von $-1$ nichts anderes, als die mit ihren Energiegewichten $i$ gewichtete Summe der Anzahl von Quasi-Teilchen vom Typ $n_i$ (siehe auch Kapitel 10.1).

# 10 Virasoro-Algebra auf dem Gitter

## 10.1 Allgemeine Betrachtungen

Jeder Isomorphismus $\Phi$ (7.2) liefert natürlich auch eine Darstellung der Virasoro-Algebra auf dem Gitter im Sinne von Kapitel 6. Im Hinblick darauf werden jetzt zulässige Darstellungen auf ihre induzierte Operation der Virasoro-Algebra auf den Pfaden über den $\mathcal{A}$-Graphen hin untersucht. Die spezielle Wahl der der Pfadbasis entsprechenden Basis in $V(c,h)$ durch $\Phi$ hat natürlich Einfluß auf die spezielle Gestalt der Operation. Bestimmte Eigenschaften der induzierten Operation gelten jedoch unabhängig von der speziellen Gestalt von $\Phi$ und hängen nur von der schwachen Zulässigkeit ab. Diese Eigenschaften werden in diesem Paragraphen diskutiert. Im folgenden Abschnitt wird dann näher auf die spezielle Struktur der Operation in den Konstruktionen 1 und 2 eingegangen.

Im allgemeinen gilt:

$$\begin{aligned} L_m(\tilde{V}_{n,k}) &\subset \tilde{V}_{n+m,k+1} \text{ und} && (10.1)\\ L_{-m}(\tilde{V}_{n,k}) &\subset \tilde{V}_{n-m,k}, && (10.2)\end{aligned}$$

und weiterhin erhält man aus den Einschränkungen der FNO-Basis:

$$\begin{aligned} L_1^l(\tilde{V}_{n,k}) &\subset \tilde{V}_{n+l,k+j}, \text{ falls h} = h_j && (10.3)\\ L_2^r(\tilde{V}_{n,k}) &\subset \tilde{V}_{n+2r,k+N+j}, \text{ falls c} = \mathrm{c}(2,2N+3), && (10.4)\end{aligned}$$

wobei die erste Inklusion von der „initial condition" und die zweite von der „difference two condition" herrührt.
Die Inklusionen (10.1) und (10.2) kann man in der FNO Basis nachrechnen:

$$\begin{aligned} L_m(L_{n_k}\cdots L_{n_1}) &= \sum_{i=k}^{r}[(n_i-m)\, L_{n_k}\cdots L_{n_i+m}\cdots L_{n_1}] && (10.5)\\ &\quad + L_{n_k}\cdots L_{n_{r+1}}L_m L_{n_r}\cdots L_{n_1}, \qquad \text{wobei } n_{r+1} > m \geq n_r. \end{aligned}$$

Falls einer der oben auftretenden Vektoren nicht als FNO-Basisvektor erlaubt ist, so enthält seine Darstellung in der FNO-Basis nicht mehr $L_n$'s als vorher. Dies kann man, parallel zu dem Beweis in [43], induktiv zeigen.
Wenn wir jetzt die $Vir$-Operation mit $\Phi$ auf den Pfadraum $\mathcal{P}$ zurückziehen, so werden die obigen Inklusionen zu Inklusionen bezüglich der $\mathcal{P}_{n,k}$:

$$\begin{aligned} L_m(\mathcal{P}_{n,k}) &\subset \mathcal{P}_{n+m,k}\oplus\mathcal{P}_{n+m,k+1} && (10.6)\\ L_{-m}(\mathcal{P}_{n,k}) &\subset \mathcal{P}_{n-m,k-1}\oplus\mathcal{P}_{n-m,k}. && (10.7)\end{aligned}$$

Dies kann man mit Hilfe der zurückgezogenen Shapovalov-Form zeigen. Zuerst einmal hat man aus (10.1) und (10.2) die Inklusionen

$$L_m(\mathcal{P}_{n,k}) \subset \bigoplus_{l=1}^{k+1}\mathcal{P}_{n+m,l} \qquad (10.8)$$

$$L_{-m}(\mathcal{P}_{n,k}) \subset \bigoplus_{l=1}^{k}\mathcal{P}_{n-m,l}. \qquad (10.9)$$

Weiterhin erhält man aus der Orthogonalität der Zerlegung (7.14):

$$\begin{array}{rcl} \text{für } (n_i)_i \in \mathcal{P}_{n,k} & \text{und} & (l_i)_i \in \bigoplus_{l=1}^{k-1} \mathcal{P}_{n+m,l} \\ \Phi^*\langle (l_i)_i, L_m((n_i)_i)\rangle_S & = & \langle \Phi((l_i)_i), L_m\Phi((n_i)_i)\rangle_S \\ & = & \langle L_{-m}\Phi((l_i)_i), \Phi((n_i)_i)\rangle_S \\ & = & 0 \qquad (10.10) \\ \text{mit (7.13), da } L_{-m}\Phi((l_i)_i) \in \widetilde{V}_{n,k-1} & \text{und} & \Phi((n_i)_i) \in s_{n,k}(V_{n,k}). \end{array}$$

Also folgt (10.6) und in derselben Weise auch (10.7). Aus der „initial condition“ (10.3) und der „difference two condition“ (10.4) erhält man folgende Inklusionen, die in analoger Weise zu den obigen Inklusionen folgen:

$$L_1^l(\mathcal{P}_{n,k}) \subset \mathcal{P}_{n+l,k} \oplus \ldots \oplus \mathcal{P}_{n+l,k+j}, \text{ falls } h = h_j \qquad (10.11)$$

$$L_2^r(\mathcal{P}_{n,k}) \subset \mathcal{P}_{n+2r,k} \oplus \ldots \oplus \mathcal{P}_{n+2r,k+N+j}, \text{ falls } \mathrm{c} = \mathrm{c}\,(2, 2N+3). \qquad (10.12)$$

Diese Einschränkungen bezüglich der $Vir$-Operation veranlassen zu folgender additiven Zerlegung der üblichen Virasoro-Generatoren $L_n$: Seien $P_{n,k}$ die orthogonalen Projektoren auf die Räume $\mathcal{P}_{n,k}$.

**Definition:**

$$\begin{array}{rcl} \text{Sei } L_m & = & \widehat{L}_m + C_m, \text{ für } m \in \mathbb{Z}, \qquad (10.13) \\ \text{wobei } \widehat{L}_m|_{\mathcal{P}_{n,k}} & = & P_{n,k} \circ L_m \\ C_m|_{\mathcal{P}_{n,k}} & = & P_{n,k+1} \circ L_m, \text{ für } m > 0 \\ C_m|_{\mathcal{P}_{n,k}} & = & P_{n,k-1} \circ L_m, \text{ für } m < 0\ . \end{array}$$

Die Relationen (10.3) und (10.4) lauten nun:

$$C_1^{j+1} = 0, \text{ falls } h = h_j \qquad (10.14)$$

$$C_2^{N+j+1} = 0, \text{ falls } \mathrm{c} = \mathrm{c}\,(2, 2N+3). \qquad (10.15)$$

Dies bedeutet, daß die Operatoren $C_1$ bzw. $C_2$ die Information über $h$ bzw. $c$ enthalten. Diese charakteristischen Werte können direkt aus dem Nilpotenzindex des jeweiligen Operators abgelesen werden.

Kommutatorrelationen für die Operatoren $\widehat{L}_n$ und $C_n$ erhält man, indem man (10.13) in die fundamentale Virasoro-Relation (2.2) einsetzt und dann die verschiedenen Grade der Operatoren bezüglich der $K$-Graduierung vergleicht.

Um die Gleichungen zu vereinfachen, ist es nüzlich, nur noch $\widehat{L}_n$ und $C_n$ für $n \in \mathbb{N}$ zu betrachten. Statt negativer $n$-Werte werden die entsprechenden adjungierten Operatoren $\widehat{L}_n^\dagger = \widehat{L}_{-n}$ bzw. ${C_n}^\dagger = C_{-n}$ herangezogen, wobei † die Adjungierung bezüglich der Shapovalov-Form bedeutet.

Man erhält auf diese Weise (sowie die adjungierten Gleichungen):

$$[\widehat{L}_n, \widehat{L}_m] = (m-n)\widehat{L}_{n+m} \qquad (10.16)$$

$$[\widehat{L}_n, C_m] + [C_n, \widehat{L}_m] = (m-n)C_{n+m} \qquad (10.17)$$

$$[C_n, C_m] = 0 \qquad (10.18)$$

und als gemischte Kommutatoren, falls $m \geq n$:

$$\begin{aligned}
[\widehat{L}_n^\dagger, \widehat{L}_m] + [C_n{}^\dagger, C_m] &= (m+n)\widehat{L}_{m-n} + \delta_{m,n}\frac{c}{12}(m^3 - m) && (10.19)\\
[\widehat{L}_n^\dagger, C_m] &= (m+n)C_{m-n} && (10.20)\\
[C_n{}^\dagger, \widehat{L}_m] &= 0. && (10.21)
\end{aligned}$$

Falls $m \leq n$, erhält man die adjungierten Gleichungen:

$$\begin{aligned}
[\widehat{L}_n^\dagger, \widehat{L}_m] + [C_n{}^\dagger, C_m] &= (m+n)\widehat{L}_{n-m}^\dagger + \delta_{m,n}\frac{c}{12}(m^3 - m) && (10.22)\\
[C_n{}^\dagger, \widehat{L}_m] &= (m+n)C_{n-m}^\dagger && (10.23)\\
[\widehat{L}_n^\dagger, C_m] &= 0. && (10.24)
\end{aligned}$$

Obwohl diese Relationen etwas komplizierter aussehen als die der ursprünglichen Virasoro-Algebra, so gibt es mehrere Gründe, die Operatoren $\widehat{L}_n$ und $C_n$ einzuführen. Ein weiterer, außer den schon angegebenen, ist der, daß man sie in einer Teilcheninterpretation auch als Erzeugungs- und Schiebeoperatoren auffassen kann. Es gibt viele Möglichkeiten, eine Teilcheninterpretation anzugeben. In [37] wurden die Summationsindizes der Charaktere als Quasiteilchen unterschiedlichen Typs und unterschiedlichen Energiegewichts aufgefaßt. In dieser Arbeit wird ein einfacheres Bild gewählt. Ein nicht verschwindender Eintrag $l_i$ in der Pfadfolge wird als Vorhandensein von $l_i$ Teilchen am Platz $i$ aufgefaßt. Die Verbindung zum Quasiteilchenbild erhält man, indem man sich jedes Quasiteilchen von Typ $i$ als aus $i$ einfachen Teilchen bestehend denkt. Das Energiegewicht $i$ ist dann gerade die Anzahl der Teilchen, aus denen ein Quasiteilchen aufgebaut wird. In dem hier verwendeten einfachen Teilchenbild sind die Räume $\mathcal{P}_{n,k}$ gerade die Konfigurationsräume von $k$ Teilchen mit der Gesamtenergie $n$. In dieser Auffassung sind dann die $C_n$ Ein-Teilchen-Erzeuger und ihre adjungierten $C_n^\dagger$ Ein-Teilchen-Vernichter. Die $\widehat{L}_n$ und $\widehat{L}_n^\dagger$ erhalten die Anzahl der Teilchen und produzieren somit nur eine Gesamtanzahl von $n$ Verschiebungen nach rechts bzw. links. Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned}
[\widehat{L}_1, \widehat{L}_n] &= (n-1)\widehat{L}_{n+1} \qquad \text{für } i \in I\!N && (10.25)\\
[\widehat{L}_1, C_n] + [C_1, \widehat{L}_n] &= (n-1)C_{n+1}. && (10.26)
\end{aligned}$$

Das heißt, daß man die Verschiebungen höherer Ordnung durch verschachtelte Kommutatorbildung von $\widehat{L}_2$ mit $\widehat{L}_1$ erhält. Die Erzeuger höherer Ordnung erhält man aus Summen von verschachtelten $C_2$-$\widehat{L}_1$- und $C_1$-$\widehat{L}_2$-Kommutatoren. Diese Relationen vereinfachen sich im Fall $h = 0$, da dann aus der „initial condition“ folgt:

$$C_1 = C_{-1} = 0, \qquad \text{also} \qquad \widehat{L}_1 = L_1, \tag{10.27}$$

und die obigen Gleichungen vereinfachen sich zu:

$$\begin{aligned}
[L_{\pm 1}, \widehat{L}_n] &= (n \mp 1)\widehat{L}_{n\pm 1} \text{für alle } n \in Z\!\!\!Z && (10.28)\\
[L_{\pm 1}, C_n] &= (n \mp 1)C_{n\pm 1}, && (10.29)
\end{aligned}$$

so daß sowohl die Verschiebungen als auch die Erzeugungen höherer Ordnung durch verschachtelte $L_1$-Kommutatoren erhalten werden können.

## 10.2 Verschiebung und Erzeugung durch die Virasoro-Algebra

Die Betrachtungen des letzten Abschnitts klassifizieren das grobe Verhalten der $Vir$-Operation, welches unabhängig von der speziellen Wahl der Pfadraumidentifizierung ist und nur von der schwachen Zulässigkeit abhängt. Die feinere Struktur, nämlich welche Verschiebungen auftreten, bzw. wo Teilchen erzeugt werden, hängt sehr von der Basiswahl ab. In diesem Abschnitt wird dieses spezielle Verhalten untersucht.

Die einfachste Operation, die man sich vorstellen könnte, wäre, daß $\widehat{L}_n$ jedes Teilchen einer Konfiguration einfach um $n$ Plätze nach rechts weiterschiebt, während $C_n$ ein Teilchen an der Stelle $n$ erzeugt. Eine solche Operation würde einer Sugawara-Konstruktion ähnlich sein. In Beispiel 1 liegt fast eine solche Operation vor. Zumindest ist dies der Fall, wenn keine Obstruktionen im Sinne von nicht erlaubten FNO-Basisvektoren auftreten. Jedoch ist hier die Operation weitaus komplizierter, wenn Obstruktionen auftreten. Dann kann es passieren, daß alle Teilchen verschoben werden und durch ${C_n}^\dagger$ mehr als ein Teilchen vernichtet wird. Dies liegt gerade an der Nicht-Zulässigkeit dieser Darstellung. In den zulässigen Fällen läßt sich leider kein so einfaches Verhalten finden. Man könnte dies folgendermaßen formulieren: Die Zulässigkeit garantiert eine globale Kontrolle der Verschiebungsstruktur, aber den Preis, den man dafür zahlt, ist der „Verlust“ einer einfachen speziellen Struktur.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen zur feineren Struktur der $Vir$-Operation wird jetzt die in Konstruktion 1 (8.1) angegebene Darstellung vermittels bezüglich der FNO-Ordnung (2.31) orthogonalisierter FNO-Basisvektoren näher untersucht. Zu diesem Zweck wird einer Pfadraumfolge $(l_i)_i$ ihre endliche Anzahl von nicht-verschwindenden Gliedern zugeordnet:

$$(l_i)_i \longrightarrow (l_{i_1}^{i_1}, \ldots, l_{i_m}^{i_m}), \tag{10.30}$$

wobei $l_0$ ausgelassen wird. Dies ist dann einfach eine Teilchenkonfiguration mit je $l_{i_k}$ Teilchen am Platz $i_k$. In dieser Notation findet man folgende Einschränkungen für die Operation von $Vir$ in der durch $\Phi_{FNO}$ gegebenen Basis:

1) $\widehat{L}_m$ angewendet auf eine Teilchenkonfiguration ergibt eine Summe von Konfigurationen, in denen aber höchstens das oberste Teilchen $m$ Plätze nach oben verschoben ist. In der Ordnung (2.31) heißt das:

$$\begin{aligned} \widehat{L}_m(n_1^{i_1}, \ldots, n_r^{i_r}) &= \sum_{\text{Konfig.} \in \mathcal{P}_{n+m,k}} \lambda_{\text{Konfig.}} \text{Konfig.} \\ \text{wobei } \sum_j n_j = k \quad &, \quad \sum_j n_j i_j = n \\ \text{und Konfig.} &\succeq (n_1^{i_1}, \ldots, (n_r - 1)^{i_r}, 1^{i_r+m}). \end{aligned} \tag{10.31}$$

2) $C_m$ angewendet auf eine Teilchenkonfiguration erzeugt eine Summe von Konfigurationen, in denen das neue Teilchen höchstens am Platz $m$ erzeugt wurde:

$$\begin{aligned} C_m(n_1^{i_1}, \ldots, n_r^{i_r}) &= \sum_{\text{Konfig.} \in \mathcal{P}_{n+m,k+1}} \lambda_{\text{Konfig.}} \text{Konfig.} \\ \text{wobei } \sum_j n_j = k \quad &, \quad \sum_j n_j i_j = n \end{aligned} \tag{10.32}$$

$$\text{Konfig.} \preceq \begin{cases} (n_1^{i_1},\ldots,n_t^{i_t},1^m,n_{t+1}^{i_{t+1}},\ldots,n_r^{i_r}) & \text{falls } i_t < m < i_{t+1} \\ (n_1^{i_1},\ldots,(n_t+1)^{i_t},n_r^{i_r}) & \text{falls } n = i_t. \end{cases}$$

Falls eine der oben auftretenden Konfigurationen nicht erlaubt sein sollte, so ist der entsprechende Koeffizient $\lambda_{\text{Konfig}} = 0$. Der Beweis der Restriktionen verläuft analog zum Beweis von (10.1) und (10.2) mit Rechnungen der Art (10.6). Es existieren natürlich auch entsprechende Restriktionen für die jeweils adjungierten Operatoren.

**Beispiel:** Insbesondere gilt für den Vakuumsektor des (2,5)-Modells, daß $C_2$ höchstens ein Teilchen am Platz 2 erzeugt. Also gilt z.B.:

$$\begin{array}{rcl} C_2(1^2,n_2^{i_2},\ldots,n_m^{i_m}) & = & 0 \\ C_2(1^3,i_2^{n_2},\ldots,n_m^{i_m}) & = & 0 \\ C_2(1^4,i_2^{n_2},\ldots,n_m^{i_m}) & = & \sum\limits_{\text{Konfig.}\in\mathcal{P}_{\cdot,k+1}} \lambda_{\text{Konfig.}}\text{Konfig.} \\ \text{mit} & & \text{Konfig.} \preceq (1^2,1^4,n_2^{i_2},\ldots,n_m^{i_m}) \\ \text{bzw.} & & \\ C_2^\dagger(1^2,n_2^{i_2},\ldots,n_m^{i_m}) & = & \sum\limits_{\text{Konfig.}\in\mathcal{P}_{\cdot,k-1}} \lambda_{\text{Konfig.}}\text{Konfig.} \\ \text{mit} & & \text{Konfig.} \succeq (n_2^{i_2},\ldots,n_m^{i_m}) \\ C_2^\dagger(1^3,n_2^{i_2},\ldots,m_m^{i_m}) & = & 0 \\ C_2^\dagger(1^4,n_2^{i_2},\ldots,m_m^{i_m}) & = & 0. \end{array}$$

Die entsprechenden Koeffizienten wurden in diesem Fall bis $n = 16$ berechnet und stimmen mit den angegebenen Restriktionen überein.

Wenn man sich nun der Konstruktion 2 zuwendet, sieht man, daß man -wie man es von einer quasi-primären Zerlegung erwarten würde- eine besonders einfache Struktur von $L_1$ hat:

$$L_1(n_1^{i_1},\ldots,m_m^{i_m}) = (n_1^{i_1},\ldots,(n_m-1)^{i_m},1^{i_m+1}). \tag{10.33}$$

Eigentlich wird gerade mit Hilfe dieser $L_1$-Operation der Isomorphismus des quasi-primären Teils auf ganz $V(c,h)$ ausgedehnt. Untersucht man aber die Operation der restlichen Virasoro-Generatoren, so stellt man fest, daß es außer den Restriktionen (10.6) und (10.7), die aus dem allgemeinen Teil stammen, keine weiteren mehr gibt, so daß im generischen Fall alle Koeffizienten $\lambda_{\text{Konfig.}} \neq 0$ sind.

Es wurde keine Konstruktion gefunden, die schärfere Restriktionen liefert, als die mittels der FNO-Ordnung. Im Falle einer Konstruktion, die auf einer anderen Ordnung basiert, kann man sich dies schon anhand der $L_1$-Operation überlegen.

## 10.3 Nichtunitarität und die Pfadraummetrik

Eine Frage von fundamentaler Bedeutung ist, wie sich die Virasoro-Algebra unter Adjunktion ‡ bezüglich der Pfadraummetrik $(\ ,\ )_{\mathcal{P}}$ verhält. Für die $Vir$-Generatoren $L_n$ selbst lassen sich keine einfachen Formeln angeben. Dies entspricht einer allgemeinen Tatsache, auf die schon oft hingewiesen wurde [18, 41, 34, 35], nämlich, daß man zwar ein positiv definites Skalarprodukt auf dem Konfigurationsraum finden kann, daß aber bezüglich diesem die Virasoro-Algebra nicht selbstadjungiert (d. h. $L_n^\dagger = L_{-n}$) ist. Dies ist klar auf Grund der negativen $c$-Werte. Auch die komplexe Struktur der Verschiebung kann man auf diese Weise verstehen. Für die untersuchten $c$-Werte existiert eben keine Sugawara-Konstruktion, in der gleichzeitig die Heisenberg- und die Virasoro-Algebra selbstadjungiert sind [41]. Allerdings lassen sich folgende einfache Gleichungen aus der Hauptvermutung ableiten:

$$\widehat{L}_n^\ddagger = \widehat{L}_{-n} \tag{10.34}$$
$$C_n^\ddagger = -C_{-n}. \tag{10.35}$$

Diese Gleichungen stellen die Verbindung zwischen dem positiv definiten Skalarprodukt auf dem Konfigurationsraum und dem Verhalten von $Vir$ unter Adjungierung (im diesem Sinne also zur Shapovalov-Form) her. Man kann auch die obigen Gleichungen als Umformulierung der Hauptvermutung nehmen. Im Teilchenbild formuliert lautet diese dann: Die Nichtunitarität der $(2,q)$-Modelle manifestiert sich lediglich im negativen Vorzeichen in der Relation zwischen adjungiertem Erzeuger und dem entsprechenden Vernichter. Die Gleichung (10.34) lautet dann: Die einzelnen Konfigurationsräume $\mathcal{P}_k = \oplus_n \mathcal{P}_{n,k}$ von $k$-Teilchenzuständen sind in der Shapovalov-Form definit (positiv oder negativ). Das alternierende Vorzeichen der Definitheit kann dann wie folgt verstanden werden:

**Bemerkung:** Die alternierende Definitheit resultiert aus der Nichtunitarität und ist im folgenden Sinne die einfachst mögliche Nichtunitarität: Wenn man nämlich wie oben annimmt, daß die Shapovalov-Form auf den Räumen $\mathcal{P}_k$ definit ist, daß also (10.34) und $C_n^\ddagger = \pm C_{-n}$ gilt, dann folgt für $m \gg n$

$$\begin{aligned}
((l_i)_i, [L_{-m}, L_m](l_i)_i)_{\mathcal{P}} &= 2mn + \frac{c}{12}(m^3 - m) < 0 && (10.36)\\
&= ((l_i)_i, L_{-m}L_m(l_i)_i) && (10.37)\\
&= ((l_i)_i, \widehat{L}_{-m}\widehat{L}_m(l_i)_i)_{\mathcal{P}} + ((l_i)_i, C_{-m}C_m(l_i)_i)_{\mathcal{P}} && (10.38)\\
&= (\widehat{L}_m(l_i)_i, \widehat{L}_m(l_i)_i)_{\mathcal{P}} \pm (C_m(l_i)_i, C_m(l_i)_i)_{\mathcal{P}}, && (10.39)
\end{aligned}$$

und deshalb muß der zweite Term negativ sein, also muß $C_n^\ddagger = -C_{-n}$ gelten und die Definitheit alternieren.

# 11 Zusammenfassung und Ausblick

Die Modalitäten einer Virosoro-Algebra-Operation auf den Pfadräumen der $\mathcal{A}$-Graphen wurden untersucht. Diese Pfadräume sind über Pfadraumisomorphismen mit den Konfigurationsräumen der statistischen FB-Modelle über Coxeter $A$-Graphen verknüpft, die das kritische Verhalten der $(2, q$ ungerade$)$-Modelle aufweisen. Eine detaillierte Analyse der zugrundeliegenden Räume resultiert in der Definition einer zulässigen Darstellung. Für diese Klasse von Darstellungen wurden explizite Konstruktionen angegeben. Die endlich-dimensionalen Resultate der Konstruktionsalgorithme führten zu Aussagen über die Zerlegung des irreduziblen Verma-Modul-Quotienten $V(c,h)$ in seine bezüglich der Shapovalov-Form positiv- bzw. negativ-definiten Unterräume sowie über die entsprechenden Signaturcharakterformeln für die $(2,q)$-Modelle. Weiterhin wurde die Struktur der Operation von $Vir$ mittels einer zulässigen Darstellung untersucht. Zu diesem Zweck wurde eine Teilcheninterpretation der Pfade angegeben. Die Operation eines Virasoro-Generators $L_n$ spaltet sich in diesem Bild in die Operation eines Ein-Teilchen-Erzeugungsoperators (bzw. Vernichters) $C_n$ und die eines Schiebeoperators $\widehat{L}_n$ auf. Diese Aufspaltung entspricht der zuvor angegeben Zerlegung der Pfadräume bzw. $V(c, h)$. Die Parameter $N$ und $j$, die die zentrale Ladung ($c = c(2, 2N + 3)$ und $h = h_j$ festlegen, treten als Nilpotenzindizes der Operatoren $C_2$ bzw. $C_1$ auf. Zuletzt wurde noch gezeigt, wie man die Nichtunitarität und die Signaturcharaktere der $(2, q)$-Modelle in diesem Zusammenhang mit Hilfe von Adjuktionsformeln der Operatoren $\widehat{L}_n$ und $C_n$ verstehen kann.

Diese Resultate liefern einen engen Zusammenhang zwischen den betrachteten CFT's und den entsprechenden statistischen Modellen. Aus der Existenz der Pfadraumisomorphismen kann man das Auftreten der $(2, q)$-Modelle in statistischen Modellen auf Coxeter $A$-Graphen verstehen. Aus dem Wechselspiel der verschiedenen Betrachtungsweisen der Objekte als zur CFT oder zur statistischen Mechanik zugehörig lassen sich Aussagen über deren Struktur finden. So kann man von der CFT ausgehend die Operation der Virasoro-Algebra auf dem Pfadraum als Operation von Erzeuguns- und Verschiebungs-Operatoren verstehen. Andereseits erhält man von den integrablen Modellen ausgehend die Interpretation von $V(c, h)$ als Konfigurationsraum, die dessen Zerlegung in positiv- und negativ-definite Teilräume liefert.

Unter Ausnutzung der beiden Betrachtungsweisen kann sicherlich noch das Verständnis des Zusammenhangs zwischen CFT und statistischen Modellen vertieft bzw. erweitert werden. Auf ähnliche Weise wie in der vorliegenden Arbeit könnte man noch die $\mathcal{B}$-Graphen aus Kapitel 4.2 betrachten. Diese lassen vermutlich eine Teilcheninterpretation als $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Parafermionen zu. Diese Resultate könnten dann analog zu [37] auf alle $(2\nu, p')$-Modelle ausgedehnt werden. Vielleicht existiert auch eine Verbindung zu den Quasi-Teilchen-Interpretationen der Summenformeln aus [54, 55, 56]. Möglicherweise kann man dann auf Grund weiterer Analyse auch die Implikationen der einfachen Stuktur der Signaturcharaktere und überhaupt deren Rolle in der statistischen Mechanik verstehen.

## 12 Danksagungen

Ich möchte Prof. Dr. W. Nahm für die interessante Aufgabenstellung danken. M. Rösgen danke ich für die Korrektur des Manuskripts. Der Gruppe von Prof. Nahm danke ich für ihre Hilfsbereitschaft. Mein Dank geht auch an die Studienstiftung des deutschen Volkes für die finanzielle und ideelle Förderung. Weiterhin danke ich meinen Eltern und B. Wehefritz für ihre ständige Unterstützung.

# References

[1] A. Z. Patashinskii und V. L. Pokrovskii, Fluctuation Theory of Phase Transitions, Pergamon Oxford 1979

[2] J.L. Cardy, in Les Houches Session XLIX, 1988, Fields, Strings and Critical Phenomena, E.Brezin und J.Zinn-Justin eds., Elsevier Science Publishers B.V., 1989

[3] P.Ginsparg , in Les Houches Session XLIX, 1988, Fields, Strings and Critical Phenomena, E.Brezin und J.Zinn-Justin eds., Elsevier Science Publishers B.V., 1989

[4] L. Alvarez-Gaumé, G. Sierra und C. Gomez, CERN-TH.5540/89

[5] W. Nahm, Conformal Field Theoy in Two Dimensions, World Scientific, to appear

[6] G. Segal, The Definition of Conformal Field Theory, Oxford

[7] A. M. Polyakov, ZhETF Lett. **12** (1970) *538*

[8] A. A. Migdal, Phys. Lett. B **44** (1972) *112*

[9] A. M. Polyakov, ZhETF Lett. **66** (1974) *23*

[10] A. A. Belavin, A. M. Polyakov und A. B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B **241** (1984) *333*

[11] G.E. Andrews, R.J. Baxter und P.J. Forrester, J. Stat. Phys. **35** (1984) *193*

[12] D. Huse, Phys. Rev. B **30** (1984) *3908*

[13] D.Friedan, Z. Qiu und S.H. Shenker, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) *175*

[14] D.Friedan, Z. Qiu und S.H. Shenker, in Vertex Operators in Physics and Mathematics, ed. J. Lepowski et. al., Springer Berlin 1984

[15] H. Saleur, in Knots, Topology and QFT, Proceedings of the Johns Hopkins Workshop, Florence 1989, L. Lusanna ed.

[16] A. Connes, D.E. Evans, Comm. Math. Phys. **121** (1989) *507*

[17] P.J. Forrester und R.J. Baxter, J. Stat. Phys. **38** (1985) *435*

[18] H. Riggs, Nucl. Phys. B **326** (1989) *673*

[19] V.Pasquier, Comm. Math. Phys. **118** ( 1988) *355*

[20] A.Capelli, C. Itzykson und J.-B. Zuber, Nucl. Phys. B **280** (1987) *455*

[21] A.Capelli, C. Itzykson und J.-B. Zuber, Comm. Math. Phys. **113** (1987) *1*

[22] A.Kato, Mod. Phys. Lett. A **2** (1987) *585*

[23] D. Gepner und Z. Qui, Nucl. Phys. B **285** (1987) *423*

[24] V. Pasquier, Nucl. Phys. B **285** (1987) *162*

[25] A.L. Owcarek und R.J. Baxter, J. Stat. Phys. **49** (1987) *1093*

[26] E. Date et al., Phys. Rev. B **35** (1987) *2105*

[27] V. Pasquier, J.Phys. A **20** (1987) *5707*

[28] V. Pasquier und H. Saleur, Nucl. Phys. B **330** (1990) *532*

[29] B. Davies et al., Comm. Math. Phys. **151** (1993) *89*

[30] M.Jimbo, T. Miwa und M. Okado, Lett. in Math. Phys. **14** (1987) *123*

[31] E. Date et al., Nucl. Phys. B **290** (1987) *231*

[32] W.M. Koo und H. Saleur, USC-93-025/YCTP-P22-93

[33] H. Itoyama und H.B. Thacker, Phys.Rev.Lett. **58** (1987) *1395*

[34] H.B. Thacker, Physika **18**D (1986) *348*

[35] H. Frahm und H.B. Thacker, J.Phys. A **24** (1991) *5587*

[36] J. Kellendonk und A. Recknagel, Phys. Lett. B **298** (1993) *329*

[37] J. Kellondonk, M. Rösgen und R. Varnhagen, Int. J. Mod. Phys. A **9** (1994) *1009*

[38] R. Kaufmann, Int. J. Mod. Phys. A **10** (1995) *943*

[39] V. G. Kac (1978), in Proceedings of ICM 299-304, Helsinki 1978

[40] B.L. Feigin, D.B. Fuks, Funkt. Anal. Appl. **16** (1982) *114*

[41] V.G. Kac und A.K. Raina, Highest weight rep. of infinite dimensional Lie algebras, World Scientific 1987

[42] B.L. Feigin, D.B. Fuks, Funkt. Anal. Appl. **17** (1983) *241*

[43] B. Feigin, T.Nakanishi und H. Ooguri, Int. J. Mod. Phys. A **7** suppl. **1A** (1992) *217*

[44] A. Rocha-Caridi, in Vertex Operators in Mathematics and Physics, MRSI Publications # 3 (1984) *451*, Springer Heidelberg

[45] A. Kent, Phys. Lett. B **269** (1991) *314*

[46] A. Kent und G. Watts, Comm. Math. Phys. **143** (1991) *1*

[47] M. Caselle, G. Ponzano und F. Ravanini, Int. J. Mod. Phys. B **6** (1992) *2675*

[48] R.J. Baxter, Annals of Phys. **76** (1993) *1*

[49] R.J. Baxter, Annals of Phys. **76** (1993) *25*

[50] R.J. Baxter, Annals of Phys. **76** (1993) *48*

[51] R.J. Baxter, Exactly Solved Models in Statistical Mechanics, Academic press London 1982

[52] W. Nahm, private Mitteilung

[53] A. Kent, private Mitteilung an W. Nahm

[54] R. Kedem und B.M. McCoy, J. Stat. Phys. Vol. **71** (1993) *865*

[55] R. Kedem et al., Phys. Lett. B **304** (1993) *263*

[56] R. Kedem et al., Phys. Lett B **307** (1993) *68*

## Anhang

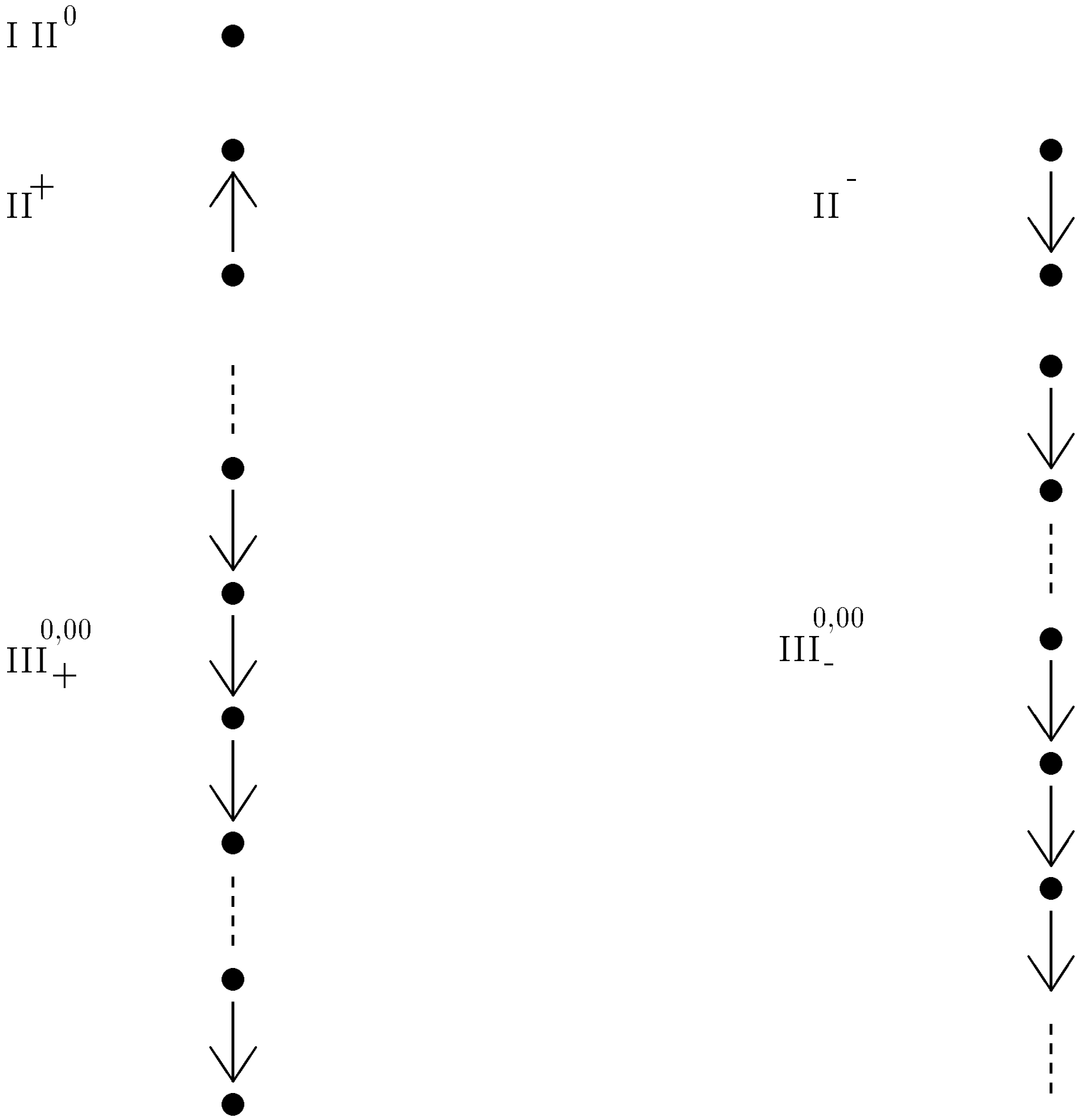


Figure 6: Einbettungsdiagramme Teil I

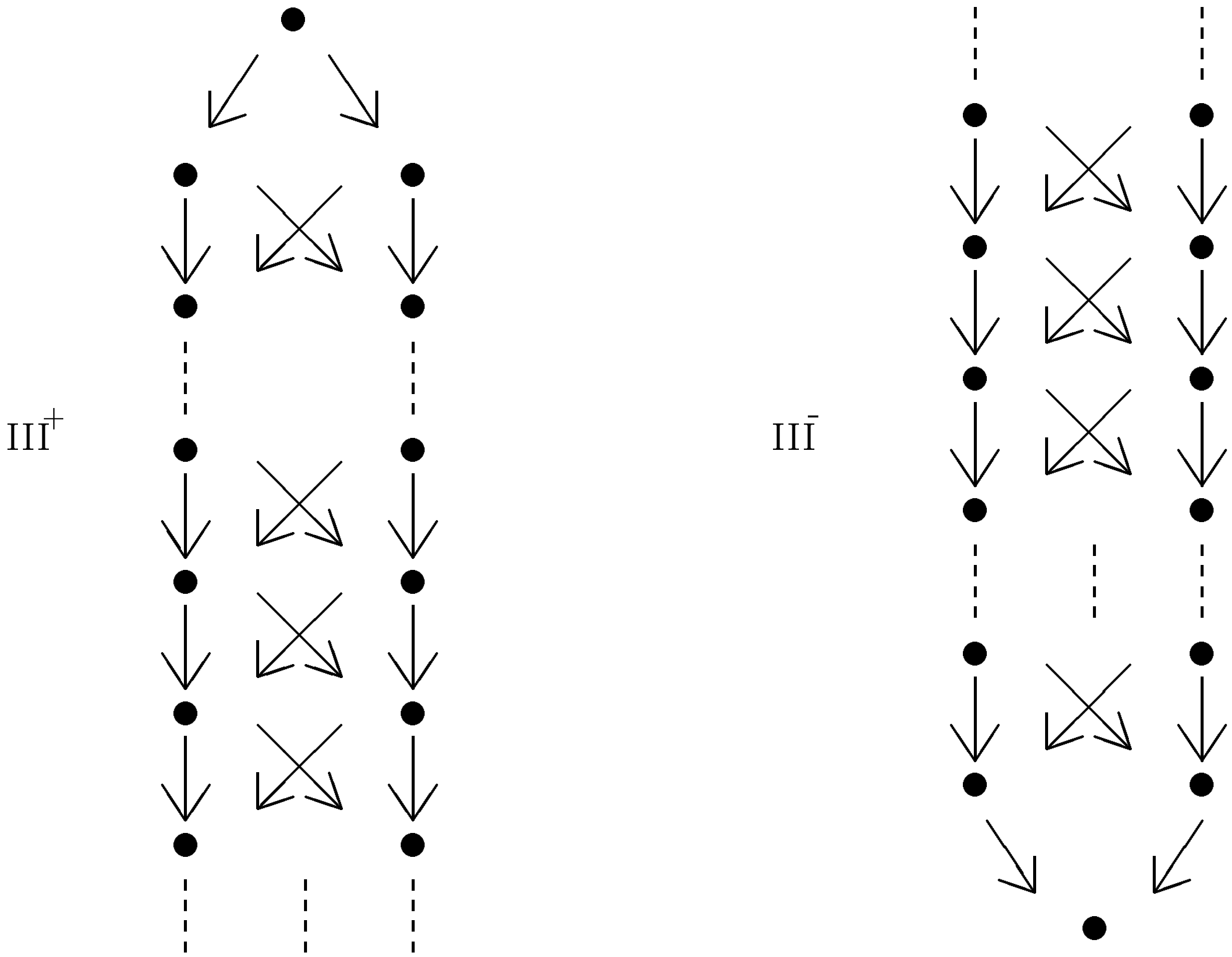


Figure 7: Einbettungsdiagramme Teil II

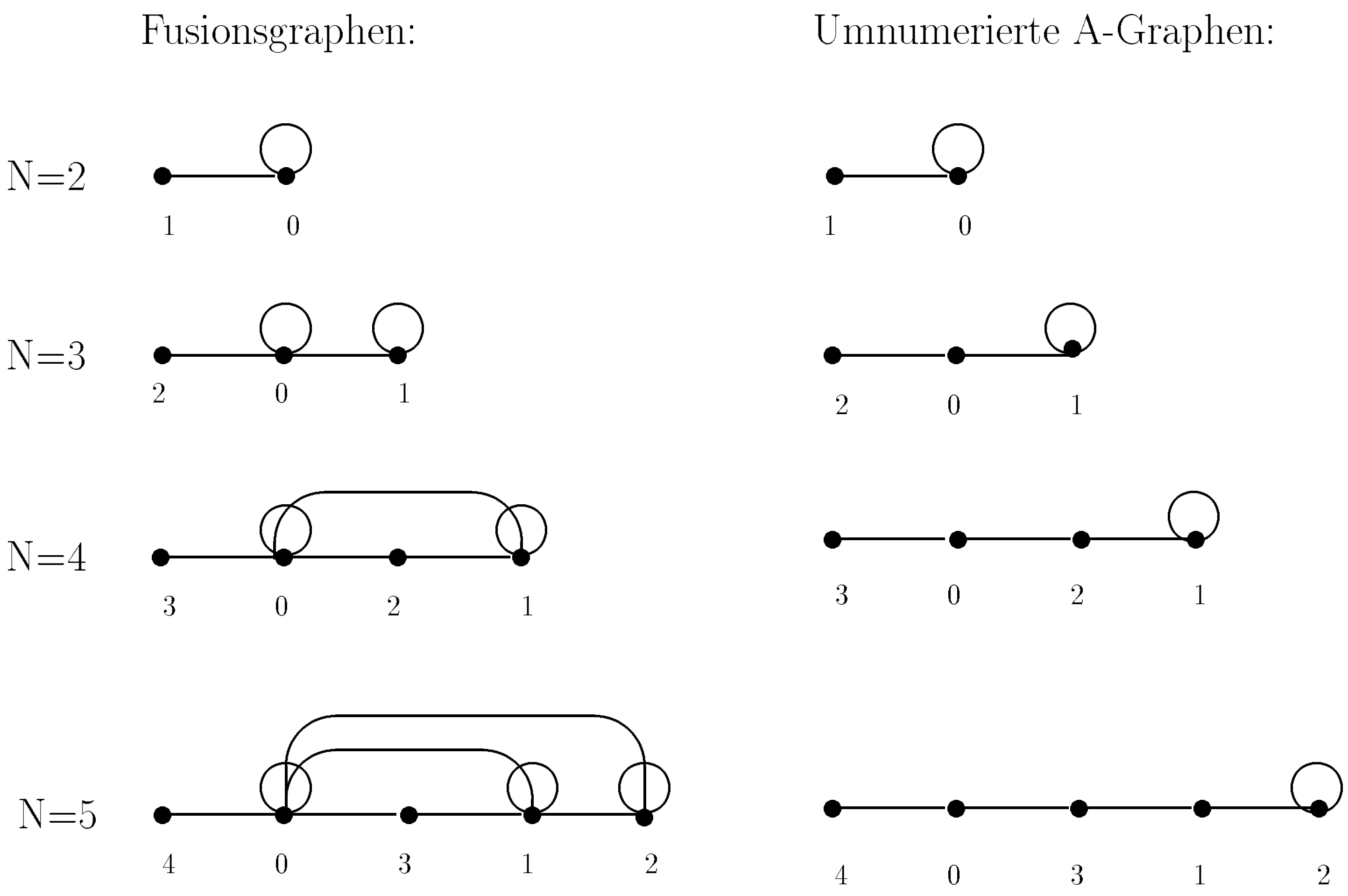


Figure 8: $\mathcal{A}_N$- und umnumerierte $A_{2N}$-Graphen