Geometrische Untersuchungen einer K3-Fläche aus dem Blickfeld der Stringtheorie

von
Andreas Friedrich Malmendier

Diplomarbeit in Physik
angefertigt im
Physikalischen Institut

vorgelegt der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu Bonn

Bonn, November 2000

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Referent: Prof. Dr. W. Nahm
Korreferent: Prof. Dr. W. Ballmann

Inhaltsverzeichnis

I Einleitung 1

II Die Kummer-Konstruktion 4

1 Die Eguchi-Hanson-Sphäre 4
- 1.1 Die Metrik . . . 4
- 1.2 Die Killing-Vektorfelder . . . 7
- 1.3 Der Levi-Civita-Zusammenhang . . . 9
- 1.4 Die freien Parameter und das B-Feld . . . 10
- 1.5 Das Eichpotential und die Eichfeldstärke . . . 11
- 1.6 Die Monopolgleichung . . . 13

2 Ein Zusammenhang auf $K3$ 14
- 2.1 Das Verkleben der Eguchi-Hanson-Sphären . . . 15
- 2.2 Der fast antiselbstduale Zusammenhang . . . 19

III Das Spektrum auf $\mathbb{EH}_2$ 19

3 Die Eigenwertgleichung 20
- 3.1 Die Separation der Eigenwertgleichung . . . 20
- 3.2 Die Klassifikation der Eigenwertgleichung . . . 21

4 Die Lösung der Eigenwertgleichung 22
- 4.1 Die asymptotische Entwicklung . . . 22
- 4.2 Die Lösung als Potenzreihe . . . 24
- 4.3 Das Spektrum des Differentialoperators . . . 29
- 4.4 Die Berechnung der Streuphase . . . 32

IV Ein Ausblick 33

A Die Differentialgleichung 35

B Die Lösung als Potenzreihe 38
- B.1 Die asymptotische Entwicklung . . . 38
- B.2 Die regulären Lösungen im Fall $E = 0$ . . . 40
- B.3 Die singulären Lösungen im Fall $E = 0$ . . . 41

B.4 Die regulären Lösungen im Fall $E \neq 0$ 43
B.5 Die singulären Lösungen im Fall $E \neq 0$ 46

C Die Nullstellenberechnung **50**

D Die Streuphase **51**

Literaturverzeichnis **56**

Teil I
Einleitung

Eine geeignete Beschreibung einer Stringtheorie ist die einer zweidimensionalen Quantenfeldtheorie [OY96]. Daß es sich um eine zweidimensionale Theorie handelt, liegt gerade daran, daß Stringtheorie keine Punktteilchen, sondern ausgedehnte Objekte, die Strings, beschreiben will.
In der vorliegenden Arbeit geht es um eine bestimmte Stringtheorie, die Typ-II-a Superstringtheorie. Deren zugrundeliegende klassische Feldtheorie kann in einem *nichtlinearen Sigma-Modell* formuliert werden. Die klassischen Felder X können dann gerade als die Immersion einer zweidimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit, der Weltfläche, in eine Zielmannigfaltigkeit M interpretiert werden, $X : \Sigma \to M$. Das Wirkungsfunktional der klassischen Feldtheorie hat die folgende Gestalt [Asp96]

$$\begin{aligned} S &= \int_\Sigma d\mathrm{vol}_\Sigma \left(g_{\mu\nu}(X) - B_{\mu\nu}(X) \right) \partial X^\mu \, \bar{\partial} X^\nu \\ &+ \text{(weitere Beiträge von Dilaton und Fermionen)} . \end{aligned}$$

Dabei ist g eine Metrik und B ein antisymmetrisches Tensorfeld zweiter Stufe auf M.
Ein ausgedehntes Objekt quantisieren zu können, legt der zweidimensionalen Feldtheorie strenge Beschränkungen auf – sie muß konform invariant sein. Zudem muß für die supersymmetrischen Stringtheorie $\dim_\mathbb{R} M = 10$ gelten, damit in der Theorie keine konforme Anomalie auftritt.
Durch Kompaktifizierung erhält man schließlich ein Modell, dessen Zielraum aus dem Produkt einer nichtkompakten pseudo–Riemannschen und einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit besteht, deren Dimensionen sich zu zehn addieren, $M = M_{PR} \times M'_R$. Die Mannigfaltigkeit M_{PR} wird als "Raum-Zeit" der betrachteten Theorie verstanden, deren zusätzliche Freiheitsgrade durch die Theorie auf M'_R bestimmt werden. Man betrachtet die Theorie auf M_{PR} und berücksichtigt die Effekte der Theorie auf M'_R perturbativ in Form einer Störungsentwicklung. Konforme Invarianz erzwingt dann in der ersten Ordnung dieser Störungstheorie die folgenden Bedingungen [Gre96]: Die Metrik g' der kompakten Riemmanschen Mannigfaltigkeit M'_R muß eine verschwindende Ricci–Krümmung aufweisen und die Zweiform B' auf M'_R muß geschlossen sein.
Daher erscheinen Calabi–Yau–Mannigfaltigkeiten als bevorzugte Mannigfaltigkeiten für eine Kompaktifizierung (vgl. [Pol98]). Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten sind kompakte Kähler-Mannigfaltigkeiten, deren erste Chern-Klasse

verschwindet. Nach dem Theorem von Yau [Yau77] ist das Verschwinden der ersten Chern-Klasse eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Ricci-flachen Metrik auf einer kompakten Kähler-Mannigfaltigkeit.
In der vorliegenden Arbeit ist diese kompakte Mannigfaltigkeit eine vierdimensionale $K3$-Fläche, die einzige nichttriviale, komplex zweidimensionale Calabi–Yau–Mannigfaltigkeit. Die so entstehende Theorie ist in vielerlei Hinsicht interessant (vgl. [Pol98]): zum einen hat diese Theorie eine interessante Dynamik, die in einem hohen Maße durch ihre Lorentz–Invarianz und Supersymmetrie bestimmt wird: Die $K3$-Fläche ist eine Hyper-Kähler-Mannigfaltigkeit. Physikalisch können die drei Kähler-Strukturen als zusätzliche Generatoren von Weltflächen-Supersymmetrie interpretiert werden. Für $N = (4, 4)$ nichtlineare Sigma-Modelle vereinfacht sich die Störungsentwicklung dramatisch. Nach dem führenden Term verschwinden alle weiteren Terme in der Störungsentwicklung [Asp96].
Zum anderen tritt eine solche Theorie oft als Zwischenschritt bei einer Kompaktifizierung zu einer Theorie mit vierdimensionaler Raumzeit hin auf. Der kompakte Raum ist dann lokal gerade ein Produkt aus einer $K3$ Mannigfaltigkeit und einem zweidimensionalen Torus.
Für die String-Theorie ist die explizite Gestalt der Ricci-flachen Metrik g' und des Kozykels B' auf M'_R von Bedeutung: Sie sind eine exakte Vakuumlösung der Stringtheorie. Allerdings ist für eine K3-Fläche keine Ricci-flache Metrik explizit bekannt.
Kummer hat aber eine topologische Konstruktion von K3 angeben können. Mit der Lösung von Eguchi und Hanson [EH78], die eine Ricci-flache Metrik auf der glatten Auflösung der bei der Konstruktion auftretenden A_1-Singularität konstruiert haben, kann diese topologische Konstruktion Kummers auch für die Konstruktion einer fast Ricci-flachen Metrik auf K3 genutzt werden.
Das nichtlineare Sigma-Modell auf $K3$ definiert eine $N = 4$ superkonforme Feldtheorie mit zentraler Ladung $c = 6$. Die Eigenfunktionen können als quantenmechanischer Limes der Twistfelder der konformen Feldtheorie auf $K3$ interpretiert werden. Mit dem Wärmeleitungskern des Laplace-Operators der konstruierten Metrik kann dann die Zustandssumme der konformen Feldtheorie im geometrischen Limes bestimmt werden.
Diese Arbeit ist wie folgt geliedert. In Kapitel II wird kurz die Geometrie der Eguchi-Hanson-Sphäre beschrieben. Anschließend wird die Kummersche Konstruktion erläutert. Schließlich zeigen wir, daß die Kummersche Konstruktion aufgefasst als Konstruktion einer Metrik auf $K3$ im Formalismus der Eichtheorie genau die Verklebungsvorschrift liefert, die Jaffe und Taubes [JT80a] zur Konstruktion von Multimonopol-Lösungen verwendet ha-

ben. Dieses Ergebnis steht auch im Einklang mit einem weiteren Resultat von Taubes [Tau82].
In Kapitel III wird die Eigenwertgleichung auf der nichtkompakten Eguchi-Hanson-Späre behandelt. Mit Hilfe der hohen Symmetrie kann die Eigenwertgleichung des Laplace-Beltrami-Operators auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung reduziert werden. Diese wird asymptotisch und an der Bolt-Singularität gelöst. Schließlich bestimmen wir numerisch die asymptotische Streuphase.
In Kapitel IV erläutern wir, wie mit Hilfe der Ergebnisse aus Kapitel III die Zustandssumme des Laplace-Operators auf $K3$ bestimmt werden kann.
Die durchgeführten Rechnungen finden sich im Anhang.

Danksagung
Ich danke besonders Herrn Professor Werner Nahm für die gute Zusammenarbeit und die vielen Anregungen. Ebenfalls danke ich Katrin Wendland, Falk Rohsiepe und Max Zucker für die vielen weiteren Tipps zu meiner Arbeit und ihre Geduld in Diskussionen. Bei Andreas Wißkirchen möchte ich mich für seine Hilfe besonders bei dem Umgang mit den Computern bedanken, bei Daniel Roggenkamp, mit dem ich mir seit Beginn meiner Diplomarbeit ein Büro teile, für interessante und lustige Diskussionen. Bei Holger Eberle, Michael Rösgen und Matthias Soika und allen Mitgliedern der Arbeitsgruppen von Prof. H. Monien und Prof. H.-P. Nilles möchte ich mich für das gute Klima bedanken.
Ferner danke ich der Studienstiftung des deutschen Volkes insbesondere für die finanzielle Unterstützung meines Studiums.

Teil II
Die Kummer-Konstruktion

1 Die Eguchi-Hanson-Sphäre

ALE-Mannigfaltigkeiten sind nichtkompakte Calabi-Yau-Zweimannigfaltigkeiten. Sie beschreiben glatte Auflösungen singulärer Varietäten in $\mathbb{C}^3$. Die ALE-Räume sind durch die diskreten Untergruppen von $SU(2)$ klassifiziert [BFRM95].
Mannigfaltigkeiten M_{A_k} der A-Serie beschreiben die glatte Auflösung singulärer algebraischer Varietäten definiert durch $xy = z^{k+1}$ in $\mathbb{C}^3$, und es gilt $\partial M = S^3/A_k$. ALE-Mannigfaltigkeiten der A-Serie mit selbstdualer Metrik sind durch den Multi-Center-Ansatz von Gibbons und Hawking gegeben [GH78]. Der zu A_1 gehörende Raum ist die Eguchi-Hanson-Sphäre $\mathbb{EH}_2$ ([Can87],[EH78],[EH79],[GM86]).

1.1 Die Metrik

Der Raum

$$\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2 \;=\; \{(z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2 \mid (z^1, z^2) \sim (-z^1, -z^2)\}$$

kann durch Einbettung in den $\mathbb{C}^3$ algebraisch beschrieben werden [Asp96]

$$\begin{aligned} A &= \Big\{(x^0, x^1, x^2) \in \mathbb{C}^3 \mid f(x) := x^0\, x^1 - (x^2)^2 = 0\Big\} \\ &= \Big\{((z^1)^2, (z^2)^2, z^1\, z^2) \in \mathbb{C}^3 \mid (z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2\Big\}\,. \end{aligned}$$

Die Hyperfläche A ist glatt bis auf den Ursprung. Wir betrachten den *blow-up* von $\mathbb{C}^3$ am Ursprung [Asp96]

$$\tilde{X} \;=\; \Big\{(x^0, x^1, x^2), [s^0 : s^1 : s^2] \in \mathbb{C}^3 \times P^2(\mathbb{C}) \mid \forall_{i,j}\, x^i\, s^j = x^j\, s^i\Big\}\,.$$

Die Abbildungen $\pi_1 : \tilde{X} \to \mathbb{C}^3$ und $\pi_2 : \tilde{X} \to P^2(\mathbb{C})$ seien die Projektionen auf die Komponenten. Dann ist

$$\begin{aligned} && \tilde{A} &\xrightarrow{\pi_2} B\,, \\ \text{wobei} && \tilde{A} &:= \text{Abschluß}\Big(\pi_1^{-1}(A - 0)\Big)\,, \\ && B &:= \Big\{[s^0 : s^1 : s^2] \in P^2(\mathbb{C}) \mid s^0\, s^1 - (s^2)^2 = 0\Big\} \end{aligned}$$

isomorph (als holomorphes Bündel) zu dem Kotangentialbündel $T^*P^1(\mathbb{C})$. Denn auf B kann man Koordinaten erklären durch

$$\begin{array}{lcl} s^1 \neq 0: & [s^0 : s^1 : s^2] \mapsto & u = \frac{s^2}{s^1}\,, \\ s^0 \neq 0: & [s^0 : s^1 : s^2] \mapsto & v = \frac{s^2}{s^0}\,, \end{array}$$

und als Faserkoordinate wählt man $\xi := x^1$ bzw. $\zeta := x^0$ für $s^1 \neq 0$ bzw. $s^0 \neq 0$. Man erhält als Übergangsfunktion zwischen den Koordinaten

$$\forall_{s^0 \neq 0, s^1 \neq 0} \qquad (v, \zeta) = (\frac{1}{u}, u^2 \xi)\ .$$

Das ist genau die Übergangsfunktion des Kotangentialbündels $T^*P^1(\mathbb{C})$. Denn sei $(z, \lambda dz)$ ein Element des Kotangentialbündels der Sphäre und $z' = \frac{1}{z}$ in den Koordinaten der stereographischen Projektion. Dann gilt

$$\begin{aligned} (z', -\lambda'\, d(z')) &= (\frac{1}{z}, \frac{\lambda'}{z^2} dz)\ , \\ (z', \lambda') &= (\frac{1}{z}, z^2\, \lambda)\ . \end{aligned}$$

Auf $\tilde{A}$ erkären wir einen Atlas bestehend aus diesen beiden Bündelkarten

$$\begin{array}{lrcl} s_1 \neq 0: & x_1 : U_1 := \tilde{A}\ |_{s_1 \neq 0} & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & (x^0, x^1, x^2), [s^0 : s^1 : s^2] & \mapsto & (u, \xi)\ , \end{array}$$

und (U_0, x_0) entsprechend. In der Karte (U_1, x_1) definieren wir nach [Boz88] die Metrik $g^a_{\mathbb{EH}}$

$$\begin{aligned} g^a_{\mathbb{EH}}\ |_{U_1} &:= \frac{1}{\sqrt{c}} \left(\frac{\sqrt{1 + c\,\rho^4}}{(1 + |u|^2)^2} + \frac{c\,|u|^2\,|\xi|^2}{\sqrt{1 + c\,\rho^4}} \right) du.\, d\bar{u} \\ &+ \frac{\sqrt{c}}{4} \frac{(1 + |u|^2)^2}{\sqrt{1 + c\,\rho^4}}\, d\xi.\, d\bar{\xi} \\ &+ \frac{\sqrt{c}}{2} \frac{1 + |u|^2}{\sqrt{1 + c\,\rho^4}}\, \bar{u}\, \xi\ du.\, d\bar{\xi} + c.c. \\ \text{mit} \quad \rho^4 &:= (1 + |u|^2)^2\, |\xi|^2\ , \\ c &:= \frac{1}{\sqrt[4]{a}}\,, \quad a \in \mathbb{R}_{>0}\ , \end{aligned}$$

und für (U_0, x_0) enstprechend. Das definiert eine Metrik auf $\tilde{A}$. Die Eguchi-Hanson-Sphäre $\mathbb{EH}_2$ ist gerade $\tilde{A}$ zusammen mit dem so konstruierten Atlas und der Metrik $g^a_{\mathbb{EH}}$.

Man erhält für $c \to 0$

$$\begin{aligned}
\sqrt{c}\, g^a_{\mathbb{EH}}\, |_{U_1} &:= \frac{1}{(1+|u|^2)^2}\, du.\, d\bar{u} \\
&+ \; c\left\{|u|^2\, |\xi|^2\, du.\, d\bar{u} + \frac{1}{4}\,(1+|u|^2)^2\, d\xi.\, d\bar{\xi}\right. \\
&\quad \left. +\frac{1}{2}\,(1+|u|^2)\,\bar{u}\,\xi\; du.\, d\bar{\xi} + c.c.\right\} \\
&+ \; O(c^2)\ .
\end{aligned}$$

Durch $c \to 0$ retrahiert man das Kotangentialbündel der Sphäre auf die Sphäre; man erhält $P^1(\mathbb{C})$, den exzeptionellen Divisor des Aufblasens, versehen mit der Fubini-Study-Metrik.
Durch $(x^0, x^1, x^2) \neq 0$ ist eindeutig ein Punkt in $\tilde{X}$ bestimmt und damit erhalten wir eine weitere Karte von $\tilde{A}$

$$\begin{aligned}
x_a: \qquad U_a := \pi^{-1}(A-0) &\longrightarrow \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2 - \{0\} \\
(x^0, x^1, x^2) &\mapsto (z^1, z^2)\ .
\end{aligned}$$

Auf $U_a \cap U_1$ erhält man die Übergangsfunktion $(u,\xi) = \left(\frac{z^1}{z^2}, (z^2)^2\right)$. In der Karte (U_a, x_a) hat die Metrik die Gestalt, die Candelas [Can87] als Eguchi-Hanson-Metrik angibt

$$\begin{aligned}
(g^a_{\mathbb{EH}}\, |_{U_a})_{i\bar{\jmath}} &= \frac{\sqrt{a^4+\rho^4}}{\rho^2}\left\{\delta_{i\bar{\jmath}} - \frac{a^4\; z_i z_{\bar{\jmath}}}{\rho^2\,(a^4+\rho^4)}\right\}\ , \qquad (1) \\
\rho^2 &= |z^1|^2 + |z^2|^2\ .
\end{aligned}$$

In der Karte (U_a, x_a) taucht für $|z^2| \to 0$ in der Metrik eine sogenannte Bolt-Singularität auf, die ein singuläres Verhalten der Karte und nicht der Metrik wiederspiegelt (vgl. [GM86], [EH79]). Dem sogenannten *blow down* entpricht gerade der Limes $a \to 0$.
Aus der Definition der Karte (U_a, x_a) ist ersichtlich, daß der geodätische Rand im Unendlichen $S^3/\mathbb{Z}_2$ und damit $\mathbb{EH}_2$ asymptotisch lokal Euklidisch (ALE) ist. Die Yukawa-Kopplung und das Verhalten von Metrik, Krümmung und Yukawa-Kopplung im Limes $a \to 0$ werden in [Lüt88] diskutiert.
Sei $\Psi \in C^\infty(U_a, \mathbb{C})$ eine glatte Funktion. Dann kann diese zu einer glatten Funktion auf $\mathbb{EH}_2$ fortgesetzt werden genau dann, wenn Ψ in $(0,0)$ stetig ist.

1.2 Die Killing-Vektorfelder

Eine Karte $(\tilde{U}_E, \tilde{x}_E)$ erhält man, indem man die Elemente von $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2 - 0$ mit Hilfe der Eulerwinkel (θ, ψ, φ) auf der Sphäre S^3 darstellt

$$\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{i}{2}(\psi+\varphi)} \\ \sin\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{i}{2}(\psi-\varphi)} \end{pmatrix} ,$$

wobei $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$, $\theta \in (0, \pi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $\psi \in [0, 4\pi)$. Die $\mathbb{Z}_2$-Operation hat dann die folgende Gestalt

$$\begin{array}{lrcl} \mathbb{Z}_2 : & \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} & \mapsto & -\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix} \\ & (\theta, \psi, \varphi) & \mapsto & (\theta, \psi + 2\pi, \varphi) \ . \end{array}$$

In der Karte $(\tilde{U}_E, \tilde{x}_E)$ hat die Metrik $g^a_{\mathbb{EH}}$ die folgende Gestalt

$$\begin{aligned} g^a_{\mathbb{EH}}\, |_{\tilde{U}_E} &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^4}{\rho^4}}}\, d\rho^2 + \frac{\rho^2}{4}\sqrt{1+\frac{a^4}{\rho^4}}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \\ &+ \frac{\rho^2}{4}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^4}{\rho^4}}}\,(d\psi + \cos\theta\, d\varphi)^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^4}{\rho^4}}}\, d\rho^2 + \rho^2\sqrt{1+\frac{a^4}{\rho^4}}\left((\tau^1)^2 + (\tau^2)^2\right) \\ &+ \frac{\rho^2}{\sqrt{1+\frac{a^4}{\rho^4}}}\,(\tau^3)^2 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \qquad \tau^1 &:= \frac{1}{2}\left(\sin\psi\, d\theta - \sin\theta\, \cos\psi\, d\varphi\right) , \\ \tau^2 &:= -\frac{1}{2}\left(\cos\psi\, d\theta + \sin\theta\, \sin\psi\, d\varphi\right) , \\ \tau^3 &:= \frac{1}{2}\left(d\psi + \cos\theta\, d\varphi\right) . \end{aligned}$$

Führt man neue Koordinaten (U_E, x_E) durch die Transformation der radialen Variable $r = \sqrt[4]{\rho^4 + a^4}$ ein (vgl. [EH79]), ergibt sich die ursprünglich von Eguchi und Hanson konstruierte Lösung

$$\begin{aligned} g^a_{\mathbb{EH}}\, |_{U_E} &= \frac{1}{1-\frac{a^4}{r^4}}\, dr^2 + r^2\left((\tau^1)^2 + (\tau^2)^2\right) \\ &+ r^2\left(1 - \frac{a^4}{r^4}\right)(\tau^3)^2 \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Führt man wiederum neue Koordinaten $(\hat{U}_E, \hat{x}_E)$ durch die radiale Variable $u := r\sqrt{1 - a^4/r^4}$ ein, so hat die Metrik die folgende Gestalt (vgl. [EH79])

$$g^a_{\mathbb{EH}} \mid_{\hat{U}_E} = \frac{1}{\left(1 + \frac{a^4}{r^4}\right)^2} du^2 + u^2 (\tau_3)^2 + r^2 \Big((\tau_1)^2 + (\tau_2)^2\Big) . \tag{4}$$

Für $r \to a$ oder $u \to 0$ bleiben die Koeffizienten der Metrik beschränkt.
Die Gruppe $SO(3)$ operiert auf sich selbst durch Links- und Rechtsmultiplikation. Die Vektorfelder (ξ_1, ξ_2, ξ_3), die die Rechtsmultiplikation erzeugen, haben in der Karte (U_E, x_E) die folgende Gestalt (vgl. [GM86])

$$\begin{aligned}
\xi_1 &:= \left(\sin\psi \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\psi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \cot\theta \, \cos\psi \frac{\partial}{\partial\psi}\right) , \\
\xi_2 &:= -\left(\cos\psi \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\psi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \cot\theta \, \sin\psi \frac{\partial}{\partial\psi}\right) , \\
\xi_3 &:= \frac{\partial}{\partial\psi} , \\
[\xi_i, \xi_j] &= -\varepsilon_{ij}^{\ \ k} \, \xi_k .
\end{aligned}$$

(τ^1, τ^2, τ^3) sind die drei dualen 1-Formen mit $2 < \tau^i, \xi_j > = \delta^i_j$. Sie erfüllen die Relationen einer $\mathsf{su}(2)$-Liealgebra

$$d\tau^i = 2\,\varepsilon^i_{\ jk} \, \tau^j \wedge \tau^k .$$

Ebenso kann man die Vektorfelder $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$, die die Linksmultiplikation erzeugen, und die dualen 1-Formen $(\bar{\tau}^1, \bar{\tau}^2, \bar{\tau}^3)$ definieren (durch Vertauschen $\psi \leftrightarrow \varphi$ und Multiplikation mit -1). Da Links- und Rechtsmultiplikation kommutieren, gilt

$$[\xi_i, \bar{\xi}_j] = 0 .$$

Daraus folgt, daß (τ^1, τ^2, τ^3) invariant unter Linksmultiplikation sind, d. h. ihre Lie-Ableitungen bezüglich $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$ verschwinden. Ebenso verschwindet ihre Lie-Ableitung bezüglich ξ_3

$$\begin{aligned}
< (\tau^i)_{i=1,2}, \xi_3 > &= 0 , \\
\mathcal{L}(\xi_3)(\tau^3) &= \Big(d \circ \iota(\xi_3)\Big)(\tau^3) + \Big(\iota(\xi_3) \circ d\Big)(\tau^3) = 0 .
\end{aligned}$$

Die Vektorfelder $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3, \xi_3)$ definieren damit Killing-Vektorfelder, die die $SU(2)_R \times U(1)_L$ Isometriegruppe von $\mathbb{EH}_2$ erzeugen.

1.3 Der Levi-Civita-Zusammenhang

Wir starten zunächst mit einem allgemeineren Ansatz für eine asymptotisch Euklidische Metrik g. In der Karte (U_E, x_E) sei durch

$$(e^\mu)_{\mu=0,\dots,3} \;=\; (f(r)\,dr\,,\; g(r)\,\tau^1\,,\; h(r)\,\tau^2\,,\; k(r)\,\tau^3)$$

ein orthogonaler Rahmen gegeben, d. h.

$$(g\,|_{U_E}) = \delta_{\mu\nu}\, e^\mu .\, e^\nu \; .$$

Es sei $\omega := (\omega^\mu{}_\nu)_{\mu,\nu=0,\dots,3}$ die Zusammenhangsform des Levi-Civita-Zusammenhangs der Metrik g

$$\nabla\, e_\nu := \omega^\mu{}_\nu\, e_\mu \;, \qquad \nabla\, e^\mu := -\,\omega^\mu{}_\nu\, e^\nu \; .$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\omega^0{}_1(e_1) &= -\tfrac{g'(r)}{f(r)\,g(r)}\;, & \omega^2{}_3(e_1) &= -\tfrac{g(r)}{h(r)\,k(r)} + \tfrac{h(r)}{g(r)\,k(r)} + \tfrac{k(r)}{g(r)\,h(r)}\;,\\
\omega^0{}_2(e_2) &= -\tfrac{h'(r)}{f(r)\,h(r)}\;, & \omega^3{}_1(e_2) &= \tfrac{g(r)}{h(r)\,k(r)} - \tfrac{h(r)}{g(r)\,k(r)} + \tfrac{k(r)}{g(r)\,h(r)}\;,\\
\omega^0{}_3(e_3) &= -\tfrac{k'(r)}{f(r)\,k(r)}\;, & \omega^1{}_2(e_3) &= \tfrac{g(r)}{h(r)\,k(r)} + \tfrac{h(r)}{g(r)\,k(r)} - \tfrac{k(r)}{g(r)\,h(r)}\;.
\end{aligned}$$

Fordert man Antiselbstdualität der Zusammenhangsform ($\varepsilon^{0123} = 1$)

$$\omega^\mu{}_\nu \;=\; -\frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\lambda}{}_{\nu\kappa}\,\omega^\kappa{}_\lambda\;,$$

erhält man ein System von drei gekoppelten Differentialgleichungen mit den Randbedingungen

$$\lim_{r\to\infty} f(r),\; g(r),\; h(r),\; k(r) = 1\;.$$

Belinsky et al. haben gezeigt, daß die Eguchi-Hanson-Metrik (3) die einzige nichtsinguläre Lösung ist [BGPP78], und es gilt (vgl. [EH79])

$$\left(f(r) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{a^4}{r^4}}}\,,\; g(r) = h(r) = r\,,\; k(r) = \frac{r}{f(r)} \right)\;, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
R^0{}_1 &= -R^2{}_3 &&= -\tfrac{2a^4}{r^6}\left(e^0\wedge e^1 - e^2\wedge e^3\right),\\
R^0{}_2 &= R^1{}_3 &&= -\tfrac{2a^4}{r^6}\left(e^0\wedge e^2 - e^3\wedge e^1\right),\\
R^0{}_3 &= -R^1{}_2 &&= +\tfrac{4a^4}{r^6}\left(e^0\wedge e^3 - e^1\wedge e^2\right).
\end{aligned}$$

Eine (anti-)selbstduale Zusammenhangsform führt zu einer (anti-)selbstdualen Krümmungsform und damit zu einer verschwindenden Ricci-Krümmung. Umgekehrt erhält man jede (anti-)selbstduale Krümmungsform nach einer eventuellen Eichtransformation aus einem (anti-)selbstdualen Zusammenhang (vgl. [EH79]).

1.4 Die freien Parameter und das B-Feld

In der Karte (U_E, x_E) ergibt sich die Metrik (3) aus dem Ansatz von Gibbons und Hawking für die A_1-ALE-Mannigfaltigkeit

$$\begin{aligned} g\,|_{U_E} &= \gamma^{-1}(\vec{x})\ (dt + <\vec{\omega}, d\vec{x}>) + \gamma(\vec{x})\ <d\vec{x}, d\vec{x}> \\ \text{mit}\quad \operatorname{grad}\gamma &= \operatorname{rot}\vec{\omega}\,, \\ V(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_i|}\,, \\ z^1 &= x + \mathrm{i}y\,, \\ z^2 &= z + \mathrm{i}t\,. \end{aligned}$$

Legt man das erste Zentrum $\vec{x}_1$ in den Ursprung, so erhält man als drei freie Parameter die Lage des zweiten Zentrums. Prasad hat gezeigt, daß man – wenn man die beiden Zentren symmetrisch entlang der z-Achse im Abstand $\frac{a^4}{4}$ plaziert – nach einer geeigneten Koordinatenwahl genau die Lösung (3) erhält [Pra79]. Man erhält damit für eine Eguchi-Hanson-Sphäre drei freie Parameter: den Skalenparameter a und zwei weitere Parameter, die die Orientierung der Eguchi-Hanson-Sphäre bestimmen, denn nur vier der sechs Generatoren der $SO(4)$-Drehgruppe sind Killing-Vektorfelder [Pag78]. Der Limes $a \to 0$ beschreibt das Zusammenziehen der beiden Zentren auf einen Punkt.

In dem orthogonalen Rahmen der Eguchi-Hanson-Metrik (3) ist eine Basis der selbstdualen (+) und antiselbstdualen (−) Zweiformen gegeben durch

$$\left(e^0 \wedge e^1 \pm e^2 \wedge e^3\,,\ e^0 \wedge e^2 \pm e^3 \wedge e^1\,,\ e^0 \wedge e^3 \pm e^1 \wedge e^2\right)\,.$$

Durch einen einfachen Koeffizientenansatz erhält man die folgenden geschlossenen selbstdualen Zweiformen

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{a^2}{r^4 - a^4}\left(e^0 \wedge e^1 + e^2 \wedge e^3\right)\,, \\ B_2 &= \frac{a^2}{r^4 - a^4}\left(e^0 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^1\right)\,, \\ B_3 &= \frac{a^2}{r^4}\left(e^0 \wedge e^3 + e^1 \wedge e^2\right)\,. \end{aligned}$$

Die einzige (normierbare) selbstduale geschlossene Zweiform ist damit B_3. Die Zweiform B_3 besitzt ein $1/r^4$-Verhalten, welches charakteristisch ist für Yang-Mills-Instantonen (im Gegensatz zum $1/r^2$-Verhalten von Monopolen) [EH79].

Ebenso erhält man die folgenden geschlossenen antiselbstdualen Zweiformen

$$\begin{aligned} J^1 &= e^0 \wedge e^1 - e^2 \wedge e^3 \ , \\ J^2 &= e^0 \wedge e^2 - e^3 \wedge e^1 \ , \\ J^3 &= e^0 \wedge e^3 - e^1 \wedge e^2 \ . \end{aligned}$$

Keine dieser antiselbstdualen geschlossenen Zweiformen ist normierbar. Dieses Ergebnis steht im Einklang mit dem Wert einer Hirzebruch-Signatur von $\tau(\mathbb{EH}_2) = -1$. Die drei harmonischen Zweiformen (J^1, J^2, J^3) sind gerade die drei Kähler-Formen der drei komplexen Strukturen einer Hyperkähler-Struktur.

Wählt man J^1 als Kähler-Form, dann ist die holomorphe Zweiform durch $\Omega := J^2 + \mathrm{i}J^3$ gegeben [Asp96], und es gilt

$$\begin{aligned} J^1 \wedge J^1 &= -2 \ \mathrm{vol}(\mathbb{EH}_2) \ , \\ \int_{\mathbb{EH}_2} \Omega \wedge \Omega &= 0 \ . \end{aligned}$$

Der Raum der antiselbstdualen Zweiformen wird damit – aufgefasst als Unterraum in $H^2(\mathbb{EH}_2, \mathbb{R})$ – aufgespannt von einer Ebene, die durch Ω gegeben ist, und der Kähler-Form.

Man betrachtet eine Deformation der Kähler Metrik g [Gre96]

$$\delta g = \delta g_{ij}\, dz^i .\, dz^j + \delta g_{i\bar{j}}\, dz^i .\, dz^{\bar{j}} + \text{c.c.}$$

und fordert Ricci-Flachheit der neuen Metrik. Es folgt, daß die $\delta g_{i\bar{j}}\, dz^i .\, dz^{\bar{j}}$ als Deformationen der Kähler-Struktur harmonische Formen sein müssen und damit als Repräsentanten von $H^{(1,1)}_{\bar{\partial}}(M, \partial M)$, den geschlossenen harmonischen Differentialformen, die auf ∂M genügend schnell abfallen, aufgefasst werden können. Die Deformationen $\delta g_{ij}\, dz^i .\, dz^j$ sind Deformationen der komplexen Struktur; sie können durch Kontraktion mit der holomorphen Zweiform ebenfalls als Elemente von $H^{(1,1)}_{\bar{\partial}}(M, \partial M)$ aufgefasst werden [BFRM95]. Durch Kombination der Formen (J^1, J^2, J^3) mit der Form B_3 erhält man genau die drei Deformationen, die den drei freien Parametern der Eguchi-Hanson-Metrik entsprechen. Page hat genau auf diese Weise die Nullmoden des Liechnerowiczs-Operators konstruiert [Pag78], die Hawking und Pope aus der Spinoranalyse erhalten haben [HP78]. Die drei so konstruierten Nullmoden fallen mit wachsendem r schnell ab [Pag78].

1.5 Das Eichpotential und die Eichfeldstärke

Wir fassen das Tangentialbündel $T\mathbb{EH}_2$ als assoziiertes Vektorraumbündel des $SU(2)$-Prinzipalfaserbündels P auf, wobei $SU(2)$ auf der Faser durch die fundamentale Darstellung D (aufgefaßt als reelle Darstellung) operiert

$$T\mathbb{EH}_2 \approx P \times_D \mathbb{R}^4 \ .$$

Die lokalen Trivialisierungen des Vektorraumbündels sind durch die Erweiterung der Karten (U, x) von $\mathbb{EH}_2$ auf Karten $(\bar{U}, \bar{x})$ des Tangentialbündels gegeben, Ein Vektorfeld $V \in \sec(M, TM)$ kann bezüglich der Karte $(\bar{U}_E, \bar{x}_E)$ als

$$V = v^\mu \, e_\mu \ , \qquad \bar{x}_E(V) := v^\mu \, b_\mu$$

dargestellt werden, wobei $(b_\mu)_{\mu=0..3}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ ist. Die Darstellung D induziert durch Ableiten eine Darstellung $\hat{D}$ von $\mathsf{su}(2)$.
Das Eichpotential ist die Zusammenhangsform des Prinzipalfaserbündels P bezüglich der Karte $(\bar{U}_E, \bar{x}_E)$ und der Darstellung D

$$\begin{aligned}
&& {}_{E}A &\in \sec|_{U_E} \Big(\mathbb{EH}_2 \, , \, T^*\mathbb{EH}_2 \otimes \mathsf{su}(2)\Big) \ , \\
&& \bar{x}_E(\omega) &= \hat{D}({}_{E}A) \ , \\
:\Leftrightarrow \qquad && \omega^\nu_{\ \kappa}(e_\mu) \, e^\mu \otimes (b_\nu \otimes b^\kappa) &= \sum_{k=1}^{3} {}_{E}A^k_\mu \, e^\mu \otimes \hat{D}(\mathrm{i}\sigma^k) \ .
\end{aligned}$$

Analog ist die Eichfeldstärke definiert

$${}_{E}F \in \sec|_{U_E} \Big(\mathbb{EH}_2 \, , \, \wedge^2 T^*\mathbb{EH}_2 \otimes \mathsf{su}(2)\Big) \ .$$

Für einen antiselbstdualen Ricci-flachen Levi-Civita-Zusammenhang folgt

$${}_{E}A^1 = \omega^1_{\ 0} \ , \qquad {}_{E}A^2 = \omega^2_{\ 0} \ , \qquad {}_{E}A^3 = \omega^3_{\ 0} \ .$$

Im Fall der Eguchi-Hanson-Metrik (3) gilt

$$\begin{aligned}
{}_{E}A &= \sqrt{1 - \frac{a^4}{r^4}} \Big(d\theta \otimes \frac{\mathrm{i}}{2} \left(\sin\psi \, \sigma^1 - \cos\psi \, \sigma^2 \right) \\
&- \sin\theta \, d\varphi \otimes \frac{\mathrm{i}}{2} \left(\cos\psi \, \sigma^1 + \sin\psi \, \sigma^2 \right) \Big) \\
&+ \left(1 + \frac{a^4}{r^4} \right) \left(d\psi + \cos\theta d\varphi \right) \otimes \frac{\mathrm{i}\sigma^3}{2} \ . \qquad (6)
\end{aligned}$$

1.6 Die Monopolgleichung

In (x_E, U_E) wählen wir die Basis der Einsformen $(dx^\mu)_{\mu=0,\ldots,3}$ mit

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ \times (0,\pi) \times [0,2\pi) & \underset{\text{diffeo}}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^3 - \mathbb{R}\,{}^t(1,0,0)\ , \\ (r\ ,\ \theta\ ,\ \varphi) & \mapsto & \vec{x} = {}^t(r\sin\theta\,\cos\psi\ ,\ r\sin\theta\,\sin\psi\ ,\ r\cos\theta)\ , \\ x^0 & = & \varphi + \psi\ . \end{array}$$

Man rechnet leicht nach

$$\begin{aligned} d\theta &= -\frac{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}{r^2}\,dx^3 + \frac{x^3}{r^2}\,\frac{x^1\,dx^1 + x^2 dx^2}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}\ , \\ d\psi &= \frac{x^1\,dx^2 - x^2\,dx^1}{(x^1)^2+(x^2)^2}\ , \\ \sin\theta\ d\psi &= \frac{1}{r}\,\frac{x^1\,dx^2 - x^2\,dx^1}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}\ , \\ \cos\theta\ d\psi &= \frac{x^3}{r}\,\frac{x^1\,dx^2 - x^2\,dx^1}{(x^1)^2+(x^2)^2}\ . \end{aligned}$$

Damit sind die Einsformen $d\theta, \sin\theta\ d\psi$ glatt, und $d\psi$ ist glatt außer auf dem Dirac-String

$$\begin{aligned} s &= \{(x^1,x^2,x^3)\mid x^1 = x^2 = 0, x^3 \neq 0\} \\ &= \{(r,\theta,\tilde{\psi})\mid \cos\theta = \pm 1\}\ . \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} {}_EA^k &= {}_EA^k_\mu(x^1,x^2,x^3)\,dx^\mu \\ {}_EF^k &= \left(\partial_m\,{}_EA^k_0 - 2\,\varepsilon_{ij}{}^k\,{}_EA^i_m\,{}_EA^j_0\right)\,dx^m\wedge dx^0 \\ &\quad + \underbrace{\left(\partial_m\,{}_EA^k_n - \varepsilon_{ij}{}^k\,{}_EA^i_m\,{}_EA^j_n\right)\,dx^m\wedge dx^n}_{=:\ {}_EF_3^k(x^1,x^2,x^3)}\ . \end{aligned}$$

Wir definieren einen Schnitt

$$\begin{array}{rrcl} & {}_E\Phi & \in & \sec|_{U_E}\left(\mathbb{EH}_2\ ,\ P\times_{Ad} SU(2)\right) \\ \text{durch} & {}_E\Phi & := & \displaystyle\sum_{k=1}^{3}\,{}_EA^k_0\,\mathrm{i}\sigma^k\ . \end{array}$$

Der Zusammenhang des Prinzipalfaserbündels P induziert durch die adjungierte Darstellung von $SU(2)$ einen Zusammenhang ∇^{Ad} auf $P\times_{Ad} SU(2)$.

Es gilt

$$\begin{aligned}\nabla^{Ad}\, {}_E\Phi &= \sum_{k=1}^{3} d\, {}_E\Phi^k \otimes \mathsf{i}\sigma^k + dx^\mu \otimes [\, {}_EA_\mu \,,\, {}_E\Phi] \\ &= \left(\partial_m\, {}_EA_0^k - 2\,\varepsilon_{ij}^{\ \ k}\, {}_EA_m^i\, {}_EA_0^j\right) dx^m \otimes \mathsf{i}\sigma^k \;.\end{aligned}$$

Damit folgt

$${}_EF \;=\; {}_EF_3(x^1,x^2,x^3) + \nabla^{Ad}\, {}_E\Phi(x^1,x^2,x^3) \;\wedge\; dx^0 \;.$$

Die Krümmungsform ist antiselbstdual und damit auch die Eichfeldstärke

$$\begin{aligned} {}_EF &= -\ast\, {}_EF \;, \\ \Rightarrow \qquad \ast\, {}_EF_3 &= -\nabla^{Ad}\, {}_E\Phi(x^1,x^2,x^3) \;\wedge\; dx^0 \;. \end{aligned} \tag{7}$$

Die Gleichung (7) ist die Monopolgleichungen eines $SU(2)$-YMH-Modells auf dem $\mathbb{R}^3$ im Prasad-Sommerfield Limes, das durch dimensionale Reduktion eines antiselbstdualen Zusammenhanges zustande kommt [JT80a].
Im Fall der Eguchi-Hanson Metrik (3) gilt

$$\begin{aligned} {}_E\Phi &= \frac{\mathsf{i}}{2}\Big(-\sqrt{1-\frac{a^4}{r^4}}\,\sin\theta\,\big(\cos\psi\,\sigma^1 + \sin\psi\,\sigma^2\big) + \left(1+\frac{a^4}{r^4}\right)\cos\theta\,\sigma^3\Big) \;, \\ {}_EA_3 &= \sqrt{1-\frac{a^4}{r^4}}\,\Big(d\theta\otimes\frac{\mathsf{i}}{2}\big(\sin\psi\,\sigma^1 - \cos\psi\,\sigma^2\big) \\ &+ \sin\theta\, d\psi\,\otimes\frac{\mathsf{i}}{2}\big(\cos\psi\,\sigma^1 + \sin\psi\,\sigma^2\big)\Big) \\ &+ \left(1+\frac{a^4}{r^4}\right)\,(1-\cos\theta)\,d\psi\otimes\frac{\mathsf{i}}{2}\sigma^3 \;. \end{aligned}$$

Das Feld ${}_E\Phi$ ist glatt, und ${}_EA_3$ ist glatt außer auf dem Dirac-String s.

2 Ein Zusammenhang auf $K3$

Kummer hat eine topologische Konstruktion einer $K3$-Fläche angeben können (vgl. [Wal88]). Dazu startet man mit dem vierdimensionalen Torus repräsentiert durch ein Gitter in $\mathbb{C}^2$. Man erhält den Orbifold–Limes $K3(\mathbb{Z}_2)$, wenn man dieses Gitter durch die Operation einer $\mathbb{Z}_2$-Punktgruppe des Gitters teilt.
Bei der Orbifold $K3(\mathbb{Z}_2)$ ist die Krümmung in 16 singulären Punkten, den Fixpunkten der $\mathbb{Z}_2$-Gruppe, konzentriert. Man schneidet Bälle um die Fixpunkte heraus und ersetzt sie durch nichtkompakte Eguchi-Hanson-Sphären.

Da der Rand dieser Mannigfaltigkeit gerade $S^3/\mathbb{Z}_2$ ist, passen sie in die ausgeschnittenen Umgebungen der singulären Punkte hinein. Läßt man das Volumen der eingeklebten Eguchi-Hanson-Sphären gegen null gehen, erhält man eine $K3$-Fläche.
Diesen Grenzwertprozeß beschreiben wir genauer: Wir betrachten die Eguchi-Hanson-Sphäre eingeschränkt auf $r \leq R_0$. Im Grenzwert $R_0 \to \infty$ erhalten wir eine Eguchi-Hanson-Sphäre, deren geodätischer Rand genau an den Rand der ausgeschnittenen Umgebung eines singulären Punktes passt.
Es gilt für $\tilde{r} = ra$

$$\begin{aligned} g^a_{\mathbb{EH}} &= a^2\, \tilde{g}^{a=1}_{\mathbb{EH}} \ , \\ J^1(a) &= a^2\, \tilde{J}^1(a=1) \ , \\ B_3(a) &= \tilde{B}_3(a=1) \ . \end{aligned}$$

Den Grenzwert $R_0 \to \infty$ können wir damit auch als Grenzwert $a \to 0$ interpretieren. Da sich die Kähler-Form bei dieser Transformation mit a^2 skaliert, verschwindet in diesem Limes das Volumen der Eguchi-Hanson-Sphären. Die geschlossene selbstduale Zweiform B_3 skaliert sich aber nicht unter dieser Transformation, d.h. ein nichttrivialer Zwei-Kozykel übersteht diesen Grenzwertprozeß.
Page hat gezeigt, wie in dieser Konstruktion die 58 Parameter einer $K3$-Fläche interpretiert werden können [Pag78]: Für jede der 16 Eguchi-Hanson-Sphären erhält man 3 freie Parameter (vgl. Abschnitt 1.4); hinzukommen die 10 freien Parameter der Metrik des flachen Torus.
Für geschlossene antisymmetrische Tensorfelder zweiter Stufe kommen noch 22 Parameter hinzu: Auf jeder der 16 Eguchi-Hanson-Sphäre gibt es eine (normierbare) selbstduale Zweiform (vgl. Abschnitt 1.4), und 6 Parameter erhält man für die Zweiformen auf dem flachen Torus.

2.1 Das Verkleben der Eguchi-Hanson-Sphären

Wir fassen den Zusammenhang der EH-Sphäre in den Koordinaten (U_E, x_E) als $SU(2)$-YMH-Modell auf $\mathbb{R}^3_{>a}$ auf.
Für $r = a$ entartet die Metrik zur FS-Metrik [EH79]. Die FS-Metrik ist ebenfalls eine antiselbstduale Metrik. Wir setzten die FS-Metrik auf $r \leq a$ fort und verkleben deren zugehöriges Higgs-Feld und Vektorpotential mit den zugehörigen Feldern der EH-Metrik.
Für $r \geq 2a$ verkleben wir das Higgs-Feld und das Vektorpotential der EH-Metrik mit den entsprechenden Feldern des flachen LC-Zusammenhangs.
Damit haben wir nährungsweise eine Lösung eines YMH-Modell auf ganz $\mathbb{R}^3$ konstruiert. Sei $\frac{1}{2}\min(1,a) > \epsilon > 0$, eine geeignete offene Überdeckung des

$\mathbb{R}^3$ besteht aus den folgenden Mengen

$$\begin{aligned} U_1^{\epsilon,\,a} &:= B_{a+\epsilon}(0)\ , \\ U_2^{\epsilon,\,a} &:= B_{2a+1}(0) - \bar{B}_a(0)\ , \\ U_3^{\epsilon,\,a} &:= \mathbb{R}^3 - \bar{B}_{2a+2\epsilon}(0)\ . \end{aligned}$$

Wir werden zeigen, daß die Felder des so konstruierten YMH-Modells in jeder der offenen Mengen der Überdeckung eichäquivalent zu glatten Feldern sind. Nach Propsition 4.1 [Tau81] gibt es dann eine globale Eichtransformation, die die Felder in glatte Felder überführt.
Auf diese Weise haben wir ein YMH-Modell konstruiert, das eichäquivalent zu einem glatten ist. Dieses glatte YMH-Modell fassen wir als Reduktion eines glatten Zusammenhangs $\nabla^{\epsilon,\,a}$ mit Eichfeldstärke $F^{\epsilon,\,a}$ auf. Der ursprüngliche Zusammenhang ist bis auf die Verklebestellen antiselbstdual und damit Ricci-flach, denn es gilt

$$\begin{array}{lll} \text{auf}\ \bar{B}_{a+\epsilon}(0) & \sim & \text{FS-Metrik}\ , \\ \phantom{\text{auf}}\ \bar{B}_{2a+\epsilon}(0) - B_{a+2\epsilon}(0) & \sim & \text{EH-Metrik}\ , \\ \phantom{\text{auf}}\ \mathbb{R}^3 - B_{2a+2\epsilon}(0) & \sim & \text{flache Metrik}\ . \end{array}$$

Der glatte Zusammenhang kann als Zusammenhang auf einer Umgebung einer aufgeblasenen A_1-Singularität des Orbifold-Limes $K3(\mathbb{Z}_2)$ angesehen werden. Durch Ausführen dieser Konstruktion an allen 16 Fixpunkten erhalten wir einen glatten Zusammenhang auf der glatten Auflösung von $K3(\mathbb{Z}_2)$.

2.1.1 Der LC-Zusammenhang der Fubini-Study-Metrik

Mit $r = a$ in (6) erhält man für die Felder des YMH-Modells

$$\begin{aligned} \Phi^{\mathrm{FS}} &= 2\cos\theta\,\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^3\ , \\ A_3^{\mathrm{FS}} &= 2\,(1-\cos\theta)\,d\psi\otimes\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^3\ . \end{aligned}$$

Mit der Variablentransformation $\tilde{\psi} = 2\psi$ – diese ist möglich, da $\psi \sim \psi + 2\pi$ – erhält man

$$\begin{aligned} \Phi^{\mathrm{FS}} &= 2\cos\theta\,\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^3\ , \\ A_3^{\mathrm{FS}} &= (1-\cos\theta)\,d\tilde{\psi}\otimes\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^3\ . \end{aligned}$$

Man kann das Higgs-Feld und das Vektorpotential als dimensionale Reduktion des singulären Zusammenhangs der Metrik (4) auffassen.

Das Feld Φ^{FS} ist glatt, und A_3^{FS} ist glatt außer auf dem Dirac-String

$$\tilde{s} = \{(r, \theta, \tilde{\psi}) \mid \cos\theta = \pm 1\} .$$

Eine Eichtransformation der Form

$$\tilde{u} = \exp\left(\frac{\theta}{2}\left(\sin\tilde{\psi}\,\mathsf{i}\sigma^1 - \cos\tilde{\psi}\,\mathsf{i}\sigma^2\right)\right)$$

überführt die Felder in glatte Felder.

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}^{\mathrm{FS}} &= \tilde{u}\,{}_E\Phi^{\mathrm{FS}}\,\tilde{u}^{-1} \\
&= 2\cos^2\theta\,\frac{\mathsf{i}}{2}\sigma^3 + 2\cos\theta\,\sin\theta\frac{\mathsf{i}}{2}(\cos\tilde{\psi}\,\sigma^1 + \sin\tilde{\psi}\,\sigma^2) , \\
\hat{A}_3^{\mathrm{FS}} &= \tilde{u}\,{}_E A_3^{\mathrm{FS}}\,\tilde{u}^{-1} + \tilde{u}\,d\tilde{u}^{-1} \\
&= \sin^2\theta\,d\tilde{\psi} \otimes \frac{\mathsf{i}}{2}\sigma^3 - d\theta \otimes \frac{\mathsf{i}}{2}(\sin\tilde{\psi}\,\sigma^1 - \cos\tilde{\psi}\,\sigma^2) \\
&- \sin\theta\,\cos\theta\,d\tilde{\psi} \otimes \frac{\mathsf{i}}{2}(\cos\tilde{\psi}\,\sigma^1 + \sin\tilde{\psi}\,\sigma^2) .
\end{aligned}$$

2.1.2 Der flache Zusammenhang

Überdeckt man den $\mathbb{R}^4$ durch Karten aus Radius und Eulerwinkel der S^3 (das sind genau die Koordinaten aus Abschnitt 1.1 ohne die $\mathbb{Z}_2$-Identifikation), dann haben die flache Metrik, das Higgs-Feld und das Vektorpotential nach dimensionaler Reduktion (vgl. 1.6) die folgende Gestalt ($a = 0$)

$$\begin{aligned}
g^{\mathrm{f}} &= dr^2 + r^2\left((\tau^1)^2 + (\tau^2)^2 + (\tau^3)^2\right) , \\
\Phi^{\mathrm{f}} &= \frac{\mathsf{i}}{2}\Big(- \sin\theta\left(\cos\psi\,\sigma^1 + \sin\psi\,\sigma^2\right) + \cos\theta\,\sigma^3\Big) , \\
A_3^{\mathrm{f}} &= d\theta \otimes \frac{\mathsf{i}}{2}\left(\sin\psi\,\sigma^1 - \cos\psi\,\sigma^2\right) \\
&+ \sin\theta\,d\psi \otimes \frac{\mathsf{i}}{2}\left(\cos\psi\,\sigma^1 + \sin\psi\,\sigma^2\right) \\
&+ (1 - \cos\theta)\,d\psi \otimes \frac{\mathsf{i}}{2}\sigma^3 .
\end{aligned}$$

Das Feld Φ^{f} ist glatt, und A_3^{f} ist glatt außer auf dem Dirac-String s, es ist aber eichäquivalent zu einem glatten Feld

$$\begin{aligned}
u &= \exp\left(\frac{\theta}{2}\left(\sin\psi\,\mathsf{i}\sigma^1 - \cos\psi\,\mathsf{i}\sigma^2\right)\right) , \\
\hat{\Phi}^{\mathrm{f}} &= u\,{}_E\Phi^{\mathrm{f}}\,u^{-1} = \frac{\mathsf{i}}{2}\sigma^3 , \\
\hat{A}_3^{\mathrm{f}} &= u\,{}_E A_3^{\mathrm{f}}\,u^{-1} + u\,du^{-1} = 0 .
\end{aligned}$$

2.1.3 Die Verklebefunktionen

Wir definieren die Verklebefunktionen $b^\epsilon_a, b^\epsilon_{a,2a}, b^\epsilon_{2a,\infty} \in C^\infty_0(\mathbb{R})$ (vgl. [Tau81])

$$
\begin{aligned}
b^\epsilon_a(r) &= \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \le a+\epsilon \\ 0 & \text{für} \quad x \ge a+2\epsilon \end{cases} , \\
b^\epsilon_{a,2a}(r) &= \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le r \le a+\epsilon \\ 1 & \text{für} \quad a+2\epsilon \le r \le 2a+\epsilon \\ 0 & \text{für} \quad 2a+2\epsilon \le r < \infty \end{cases} , \\
b^\epsilon_{2a,\infty}(r) &= \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \le 2a+\epsilon \\ 1 & \text{für} \quad x \ge 2a+2\epsilon \end{cases} .
\end{aligned}
$$

Wir definieren jetzt die Felder

$$
\begin{aligned}
\Phi^{\epsilon,a} &:= b^\epsilon_a(r)\,\Phi^{\mathrm{FS}} + b^\epsilon_{a,2a}(r)\,{}_E\Phi + b^\epsilon_{2a,\infty}(r)\,\Phi^{\mathrm{f}} , \\
A_3^{\epsilon,a} &:= b^\epsilon_a(r)\,A_3^{\mathrm{FS}} + b^\epsilon_{a,R}(r)\,{}_E A_3 + b^\epsilon_{2a,\infty}(r)\,A_3^{\mathrm{f}} .
\end{aligned}
$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\Phi^\epsilon\,|_{U_1^{\epsilon,a}} &= \Phi^{\mathrm{FS}} , & A_3^\epsilon\,|_{U_1^{\epsilon,a}} &= A_3^{\mathrm{FS}} , \\
\Phi^\epsilon\,|_{U_3^{\epsilon,a}} &= \Phi^{\mathrm{f}} , & A_3^\epsilon\,|_{U_3^{\epsilon,a}} &= A_3^{\mathrm{f}} ,
\end{aligned}
$$

und damit sind in diesen offenen Mengen die Felder eichäquivalent zu glatten Feldern. In $U_2^{\epsilon,a}$ gilt

$$
\begin{aligned}
\Phi^\epsilon\,|_{U_1^{\epsilon,a}} &= \left\{2\,b^\epsilon_a(r) + b^\epsilon_{a,2a}(r)\,\left(1+\frac{a^4}{r^4}\right) + b^\epsilon_{2a,\infty}(r)\right\}\cos\theta\,\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^3 \\
&- \frac{\mathrm{i}}{2}\left\{b^\epsilon_{a,2a}(r)\sqrt{1+\frac{a^4}{r^4}} + b^\epsilon_{2a,\infty}(r)\right\}\sin\theta\left(\cos\psi\,\sigma^1 + \sin\psi\,\sigma^2\right) , \\
A_3^\epsilon\,|_{U_1^{\epsilon,a}} &= \left\{2\,b^\epsilon_a(r) + b^\epsilon_{a,2a}(r)\,\left(1+\frac{a^4}{r^4}\right) + b^\epsilon_{2a,\infty}(r)\right\}(1-\cos\theta)\,d\psi\otimes\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^3 \\
&+ \left\{b^\epsilon_{a,2a}(r)\sqrt{1+\frac{a^4}{r^4}} + b^\epsilon_{2a,\infty}(r)\right\} \\
&\quad \Big(d\theta\otimes\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\sin\psi\,\sigma^1 - \cos\psi\,\sigma^2\right) \\
&\quad + \sin\theta\,d\psi\otimes\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\cos\psi\,\sigma^1 + \sin\psi\,\sigma^2\right)\Big) .
\end{aligned}
$$

Das Feld $\Phi^\epsilon|_{U_1^{\epsilon,a}}$ ist glatt, und $A_3^\epsilon|_{U_1^{\epsilon,a}}$ ist glatt außer auf einem Dirac-String s. Ein Dirac-String kann durch eine Eichtransformation gedreht werden [JT80a]. Daher kann der offene Kreisring in vier offene sich überlappende Segmente unterteilt werden, und auf jeder dieser Mengen sind die Felder eichäquivalent zu glatten Feldern.

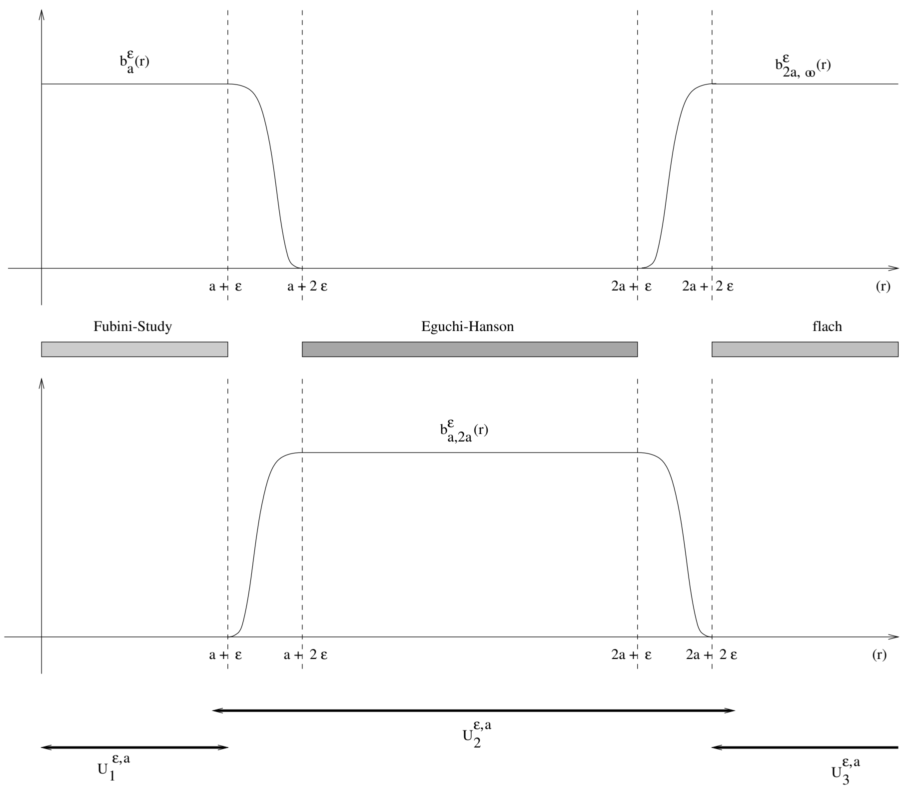

Abbildung 1: Die Verklebefunktionen

2.2 Der fast antiselbstduale Zusammenhang

Bozhkov [Boz88] hat mit Hilfe der Ergebnisse von Taubes [Tau82] für fast selbstduale Zusammenhänge Abschätzungen für die p-Norm des Krümmungstensors berechnen können (Proposition 2[1] [Boz88]): Es gibt eine Konstante $c_1 > 0$, so daß für alle $p \geq 1$ und alle a hinreichend klein gilt nach

$$\begin{aligned} \|F^{\epsilon,a}\|_{L_p} &\leq c_1\, a^{\frac{4}{p}}\,(a+\epsilon)^{\frac{4}{p}}\ , \\ \|\frac{(\mathbf{1}+*)}{2}\,F^{\epsilon,a}\|_{L_p} &\leq c_1\, a^{\frac{4}{p}}\,(a+\epsilon)^{\frac{4}{p}}\ . \end{aligned} \tag{8}$$

Das von uns konstruierte Eichfeld definiert damit einen fast antiselbstdualen Zusammenhang und der Limes $a, \epsilon \to 0$ kann als antiselbstdualer Zusammenhang auf $K3$ interpretiert werden.

[1]Bozkov hat die Abschätzungen für $a = 4$ berechnet – hier taucht die reskalierte Form auf.

Teil III
Das Spektrum auf $\mathbb{EH}_2$

3 Die Eigenwertgleichung

3.1 Die Separation der Eigenwertgleichung

In der Karte (U_E, x_E) hat die Eigenwertgleichung für $a > 0$ die folgende Gestalt (vgl. Anhang A)

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \Psi_E(r,\theta,\psi,\varphi) &= E\,\Psi_E(r,\theta,\psi,\varphi) \\ \Leftrightarrow \left\{\frac{\partial}{\partial z}\Big((z^2-1)\frac{\partial}{\partial z}\Big) \right. &+ \left. \frac{(\beta z+\xi^2)(z^2-1)+\xi_3^2}{z^2-1}\right\}\Psi_E(r,\theta,\psi,\varphi) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Dabei sind ∇^2 der kovariante Laplace-Operator, $(\xi_i)_{i=1,\dots,3}$ die Vektorfelder aus Abschnitt 1.2 und $z := \frac{r^2}{a^2}$, $\beta := \frac{a^2 E}{4}$.
Nach [GM86] diagonalisieren wir die kommutierenden Operatoren $\xi_3, \bar{\xi}_3, \xi^2$ simultan und entwickeln die Eigenfunktionen nach Funktionen vom Wigner-Typ $D^j_{sm}(\theta,\psi,\varphi)$,

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_3\, D^j_{sm} &= -\mathrm{i}\, m\, D^j_{sm}\,, \\ \xi_3\, D^j_{sm} &= \mathrm{i}\,\frac{s}{2}\, D^j_{sm}\,, \\ \Big(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2\Big)\, D^j_{sm} &= -j(j+1)\, D^j_{sm}\,, \\ \text{wobei} \quad j\in\mathbb{N}, & \qquad s,m \in [-j,j]_{\mathbb{N}}\,, \\ D^j_{sm}(\theta,\psi,\varphi) &= e^{\frac{\mathrm{i}s\psi}{2}}\, d^j_{sm}(\theta)\, e^{\mathrm{i}m\varphi}\,. \end{aligned}$$

Es gilt

$$[(\xi_1)^2+(\xi_2)^2, \xi_3] \;=\; 0\,,$$

und daher kommutiert der Laplace-Operator mit ξ_3 und ξ^2. Damit sind j, m gute Quantenzahlen, und die Eigenwertgleichung hat die folgende Gestalt

$$\left\{\frac{d}{dz}\Big((z^2-1)\frac{d}{dz}\Big) + \frac{(\beta z - j(j+1))(z^2-1)-\frac{s^2}{4}}{z^2-1}\right\} A^j_s(\beta|z) = 0\,,$$

$$\begin{aligned} \Psi_E(r,\theta,\psi,\varphi) &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{s=-j}^{j} A^j_s(\beta|z)\, D^j_{sm}(\theta,\psi,\varphi) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{j} A^j_s(\beta|z)\,\Big(e^{\frac{\mathrm{i}s\psi}{2}}\, d^j_{sm}(\theta) + e^{-\frac{\mathrm{i}s\psi}{2}}\, d^j_{-sm}(\theta)\Big)\, e^{\mathrm{i}m\varphi}\,. \end{aligned}$$

Um einen Schnitt zu erhalten, der auf $\mathbb{EH}_2$ wohldefiniert ist, müssen wir uns auf die Funktionen einschränken, die unter der Operation der $\mathbb{Z}_2$-Gruppe aus Abschnitt 1.1 invariant sind. Das gilt gerade für

$$s = 2q \;, \qquad q \in [-\left[\frac{j}{2}\right], \left[\frac{j}{2}\right]]_{\mathbb{N}} \,.$$

Für $a = 0, E > 0$ erhält man die Differentialgleichung

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d}{dr} - \frac{4\,j(j+1)}{r^2} + E\right\} A^j_{2q}(a=0,E|r) \;=\; 0$$

und deren Lösung

$$A^j_{2q}(a=0,E|r) = \frac{c_1}{r}\,J(1+2j|\sqrt{E}\,r) + \frac{c_2}{r}\,Y(1+2j|\sqrt{E}\,r)\,. \qquad (10)$$

3.2 Die Klassifikation der Eigenwertgleichung

Die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\left\{\frac{d^2}{dz^2} + \frac{2\,z}{z^2-1}\frac{d}{dz} + \frac{(\beta z - j(j+1))(z^2-1) - q^2}{(z^2-1)^2}\right\} A^j_{2q}(\beta|z) \;=\; 0 \qquad (11)$$

$$\text{mit} \quad j \in \mathbb{N},\ 0 \le q \le \left[\frac{j}{2}\right]$$

ist vom Bôcher-Typ (vgl. [MS71]). Sie weist eine gewisse Ähnlichkeit mit der Differentialgleichung auf, die Wilson [Wil28] behandelt. Die Gleichung (11) hat drei singulären Stellen und ist *nicht* vom Fuchs-Typ (vgl. [Hen91])

z	r	Singularität	Wurzeln
1	a	schwach	$\pm\frac{q}{2}$
-1	i a	schwach	$\pm\frac{q}{2}$
∞	∞	wesentlich	–

und ist eine gleichzeitige Verallgemeinerung der Besselschen und Hypergeometrischen Differentialgleichung. Es gilt $A^j_{2q}(\beta|-z) = A^j_{2q}(-\beta|z)$, d.h. eine Lösung in dem Gebiet $z \le -1$ zu einer Energie β kann als Lösung in dem Gebiet $z \ge 1$ zu der Energie $-\beta$ aufgefasst werden. Die entsprechenden Bolt-Singularitäten sind die Singularitäten bei $z = \pm 1$.
An den schwachen Singularitäten der Differentialgleichung (11) muß entsprechend den möglichen Wurzeln eine Randbedingung festgelegt werden. Während eine Lösung mit $z^{\frac{q}{2}}$ verschwindet, weist die andere, linear unabängige Lösung dort einen Pol oder eine logarithmische Singularität auf. Nach Abschnitt 1.1 sind gerade die Lösungen zu wählen, die an der Bolt-Singularität regulär und damit auf $\mathbb{EH}_2$ wohldefiniert sind.

4 Die Lösung der Eigenwertgleichung

4.1 Die asymptotische Entwicklung

Seien $E, q > 0$, dann hat die Eigenwertgleichung (11) asymptotisch die folgende Gestalt

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \left(\frac{2}{z} + O(z^{-3}) \right) \frac{d}{dz} + \left(\frac{\beta}{z} - \frac{j(j+1)}{z^2} + O(z^{-4}) \right) \right\} A^j_{2q}(\beta|z) = 0 \; .$$

Vernachlässigt man Terme der Ordnung $O(z^{-2})$, erhält man eine asymptotische Lösung

$$A^j_{2q}(\beta|z)_{asy} \;\; = \;\; \frac{c_1}{r}\, J(1+2j|\sqrt{E}\, r) + \frac{c_2}{r}\, Y(1+2j|\sqrt{E}\, r) \; .$$

Die Lösung entspricht der Lösung $A^j_{2q}(a=0, E|.)$, weil die Metrik (3) asymptotisch lokal Euklidisch ist (vgl. Abschnitt 1.1). Aus der asymptotischen Entwicklung für Bessel- und Weberfuntionen und

$$\int_{R_0}^{\infty} dr \, \underbrace{\sqrt{\det g}}_{=r^3} \, \left(A^j_{2q}(\beta|z)_{asy} \right)^* \, A^j_{2q}(\beta|z)_{asy} \;\; \sim \;\; \int_{R_0}^{\infty} dr \to \infty$$

erkennt man, daß die Lösungen von (9) im Allgemeinen nicht quadratintegrabel sein werden. Der Laplace-Operator definiert aber trotzdem einen selbstadjungiert Operator auf einem geeigneten Hilbert-Raum (vgl. Abschnitt 4.3). Man kann noch genauer das asymptotische Verhalten der Lösungen bestimmen. Nach geeigneter Substitution der Variablen $(z-1)$ und Abspaltung von Faktoren erhält man aus der Differentialgleichung (11) die Differentialgleichung (28) (vgl. Anhang A). Diese kann man für große z in einer Potenzreihe entwickeln: Wir schreiben so die Eigenwertgleichung als Matrixgleichung in $w := {}^t(\tilde{u}, \tilde{u}')$ um

$$w'(\rho) \;\; = \;\; A(\rho)\, w(\rho) \; , \tag{12}$$

wobei A eine Potenzreihe in ρ^{-1}, konvergent für $\rho^2 > 1$, ist;

$$A(\rho) \;\; = \;\; \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k} \, A_k \; ,$$
$$\text{wobei} \quad A_0 \;\; = \;\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8\beta & 0 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte $\pm 2\mathrm{i}\sqrt{2\beta}$ besitzt. Nach Theorem 2.1 (Chap. 5 [CL55]) gibt es eine formale Matrix-Lösung von (12) der Form

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(\rho) &= P(\rho)\,\rho^R\, e^{\rho\, Q_0}\,, \qquad (13)\\ \text{wobei}\qquad Q_0 &= \begin{pmatrix} 2\mathrm{i}\sqrt{2\beta} & 0 \\ 0 & -2\mathrm{i}\sqrt{2\beta} \end{pmatrix}\,,\\ R &= \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}\,,\\ \text{und}\qquad P(\rho) &= \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k}\, P_k\,, \quad \det P_0 \neq 0\,, \end{aligned}$$

eine formale Potenzreihe in ρ^{-1} ist. Durch Einsetzen in die Differentialgleichung (12) erhält man $r_1 = -(2q + \frac{3}{2})$ und eine formale Lösung der Form

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_1(\rho) &= e^{2\mathrm{i}\sqrt{2\beta}\rho}\, \frac{1}{(2\sqrt{2\beta}\,\rho)^{2q+\frac{3}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k(\beta, j, q)}{(2\sqrt{2\beta}\,\rho)^k}\,, \qquad (14)\\ \hat{\varphi}_{(m)1}(\rho) &:= e^{2\mathrm{i}\sqrt{2\beta}\rho}\, \frac{1}{(2\sqrt{2\beta}\,\rho)^{2q+\frac{3}{2}}} \sum_{k=0}^{m} \frac{p_k(\beta, j, q)}{(2\sqrt{2\beta}\,\rho)^k}\,. \end{aligned}$$

Da die Differentialgleichung (12) reell ist, ist $\hat{\varphi}_2 = \hat{\varphi}_1^*$ die zweite, linear unabhängige Lösung und $r_2 = r_1$. Nach Theorem 4.1 (Chap. 5 [CL55]) existiert für hinreichend große ρ für jeden Spaltenvektor $\hat{\varphi}_i$ von (14) eine Lösung $\tilde{u}_i$ von (12), deren asymptotische Entwicklung gerade durch $\hat{\varphi}_i$ gegeben ist (im Sinn von Konvergenz einer asymptotischen Entwicklung (vgl. Chap. 5 [CL55]))

$$|\tilde{u}_i(\rho) - \hat{\varphi}_{(m)i}(\rho)| = O(\rho^{2q+\frac{1}{2}-m})\,.$$

Fasst man ρ als komplexe Variable auf, behält Theorem 4.1 (Chap. 5 [CL55]) in gewissen Sektoren der komplexen Ebene seine Gültigkeit (vgl. Theorem 5.1 (Chap. 5 [CL55])). Sei $\delta > 0$, dann existiert für alle ρ mit

$$-\pi + \delta \leq \arg\rho \leq \pi - \delta$$

und $|\rho|$ genügend groß für jeden Spaltenvektor $\hat{\varphi}_i$ von (14) eine Lösung $\tilde{u}_i$ von (12), deren asymptotische Entwicklung gerade durch $\hat{\varphi}_i$ gegeben ist. Das ist bei komplexen Funktionen mit Verzweigungslinien das bestmögliche Ergebnis.

Im Anhang B.1 bestimmen wir das asymptotische Verhalten dieser Lösungen

$$\hat{\varphi}_1(\rho) \sim \frac{1}{\rho^{2q+1}} \Big(J(\alpha\,|2\sqrt{2\beta}\,\rho) + \mathrm{i}\, Y(\alpha\,|2\sqrt{2\beta}\,\rho) \Big)$$

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_2(\rho) &\sim \frac{1}{\rho^{2q+1}}\Big(J(\alpha\,|2\sqrt{2\beta}\,\rho) - \mathrm{i}\,Y(\alpha\,|2\sqrt{2\beta}\,\rho)\Big)\,, \\
\text{wobei}\quad \alpha &= \sqrt{(1+2j)^2+4\beta}\,, \\
\forall_{i=1,2}\quad A^j_{2q}(\beta|\rho)_i &= 4\,\rho^{2q}\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right)^{\frac{q}{2}}\hat{\varphi}_i(\rho)\,.
\end{aligned}$$

Für $a = 0$ gehen diese Lösung genau in die Lösungen (10) über

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^j_{2q}(a=0,E|r)_1 &= \frac{1}{r}\,J(1+2j|\sqrt{E}\,r) + \frac{\mathrm{i}}{r}\,Y(1+2j|\sqrt{E}\,r)\,, \\
\tilde{A}^j_{2q}(a=0,E|r)_2 &= \frac{1}{r}\,J(1+2j|\sqrt{E}\,r) - \frac{\mathrm{i}}{r}\,Y(1+2j|\sqrt{E}\,r)\,.
\end{aligned}$$

4.2 Die Lösung als Potenzreihe

Wir wollen die Lösungen der Differentialgleichung (11) konstruieren, die an der schwach singulären Stelle $z = 1$ regulär sind. Da die Differentialgleichung zwei schwach singuläre Stellen aufweist, gibt es zwei Beiträge zu diesen Lösungen: zum einen die Lösungen, die auf $(-\infty, \infty)$ regulär sind, zum anderen die Lösungen, die in $z = -1$ einen Pol aufweisen und auf $(-1, \infty)$ regulär sind. Aus der asymptotischen Entwicklung wissen wir, daß alle Lösungen für $\Im(\beta) = 0$ im Unendlichen regulär sind.
Daher ist eine Entwicklung der Lösung in einer Potenzreihe um die schwach singulären Stellen sinnvoll. Die entsprechenden Transformationen der Differentialgleichung finden sich in Anhang A (Gleichungen (19), (20)).
Die Koeffizienten der in $z = \pm 1$ regulären Potenzreihen sind durch 3-Term-Rekursionsrelationen gegeben (vgl. Gleichung (32) und (33)). Die zugehörigen Potenzreihen haben entweder Konvergenzradius 1 oder Konvergenzradius Unendlich (vgl. Anhang B). Bei den Lösungen mit Konvergenzradius 1 zeigt eine Rechnung (vgl. Anhang B), daß diese Lösungen dann auch an der benachbarten schwach singulären Stelle divergieren.
Hat man eine reguläre Lösung um $z = -1$ in Gestalt einer Potenzreihe mit Konvergenzradius Unendlich gefunden, kann man aus dieser Lösung eine Potenzreihenentwicklung einer in $z = 1$ regulären Lösung mit Konvergenzradius Unendlich konstruieren und umgekehrt (vgl. Anhang A), d.h. hat man zu festen Parameter (β, j, q) eine Lösung der Rekursiongleichung (19) gefunden, kann man aus dieser eine Lösung der Rekursiongleichung (20) zu denselben Parametern mit Konvergenzradius Unendlich konstruieren (vgl. Gleichung (27)).
Sowohl die reguläre als auch die singuläre Potenzreihenentwicklung um $z = -1$ weisen eine Singularität in $z = 1$ auf, nämlich für $q = 0$ eine logarithmi-

sche Singularität und für $q \geq 1$ einen Pol (vgl. Anhang B.4 und B.5). Aufgrund der Polstellenstruktur werden sich in genau einer Linearkombination der beiden Lösungen, deren einzelne Potenzreihen divergieren, die Singularitäten gegenseitg aufheben und

$$\hat{v}_{reg}(\chi) + \tilde{f}(\beta, j, q)\, \hat{v}_{sing}(\chi)$$

in $z = 1, \chi = 1$ regulär sein. Diese Linearkombination hat dann eine eindeutige Fortsetzung auf $[1, \infty)$ (vgl. Chap. 1 [CL55]).

4.2.1 Die Konstruktion regulärer Lösungen auf $(-\infty, \infty)$

Wir wollen die Parameter bestimmen, bei denen die Rekursionrelationen (19) und (20) Potenzreihen mit Konvergenzradius Unendlich liefern.
Die Lösungen einer 3-Term-Rekursionrelation

$$\forall_{n \geq 1} \qquad y_{n+1} \;=\; \delta_n\, y_n + \gamma_n\, y_{n-1}$$

bilden einen zweidimensionalen Vektorraum über dem Körper der Koeffizienten. Die *minimale Lösung* $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einer solchen Rekursionsrelation ist durch die Eigenschaft eindeutig bestimmt, daß für jede weitere Lösung $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Gleichung gilt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g_n}{h_n} = 0 \; .$$

Nach dem Theorem von Pincherle (Chap. 5.3 [JT80b]) hat eine 3-Term-Rekursionrelation genau dann eine minimale Lösung, wenn der Kettenbruch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k|}{|\delta_k} := \cfrac{\gamma_1}{\delta_1 + \cfrac{\gamma_2}{\delta_2 + \cfrac{\gamma_3}{\delta_3 + \dots}}}$$

konvergiert. Wenn die Rekursionsrelation eine minimale Lösung $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt, dann gilt insbesondere

$$\frac{g_1}{g_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k|}{|\delta_k} = 0 \; .$$

Es ist

$$\begin{aligned}
f(j, q\,|z) &:= \delta_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k|}{|\delta_k} \\
\forall_{k \geq 0} \quad \delta_k &:= \frac{k(k + 2q + 1) + \mu - z}{(k+1)(k+q+1)} \; , \\
\forall_{k \geq 1} \quad \gamma_k &:= \frac{2z}{(k+1)(k+q+1)} \; .
\end{aligned}$$

in $z = \beta$ genau der Kettenbruch, der der 3-Term-Rekursionsrelation (32) zugeornet ist. Für gegebene Parameter (j, q) bestimmen die Nullstellen von $f(j, q\,|.)$ gerade die Werte von β, bei denen die reguläre Potenzreihenentwicklung um $z = -1$ Konvergenzradius Unendlich hat. An $z = -\beta$ ist $f(j, q\,|.)$ der Kettenbruch, der der 3-Term-Rekursionsrelation (33) zugeordnet ist.
Allgemein gilt der Umordnungssatz für Kettenbrüche (Kap. I.2 [Per77]): Sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\forall_n\ r_n \neq 0$, dann konvergiert einer der Kettenbrüche von

$$\delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k|}{|\delta_k} ,$$
$$r_o\, \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_{k-1} r_k\, \gamma_k|}{|r_k\, \delta_k}$$

genau dann, wenn auch der andere konvergiert. Im Fall der Konvergenz ist der Grenzwert des ersten gerade das $r_0$fache des zweiten.
Da wir nur an den Nullstellen von $f(j, q\,|.)$ interessiert sind, betrachten wir den Kettenbruch

$$\begin{aligned} F(j, q\,|z) &:= d_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k|}{|d_k} \\ \forall_{k\geq 0} \quad d_k &:= k(k + 2q + 1) + \mu - z , \\ \forall_{k\geq 1} \quad c_k &:= 2k(k + q)z . \end{aligned}$$

Dieser Kettenbruch ist ein *T(hron)-Kettenbruch*. Für $k \geq (l - q) + 1$ betrachten wir die Kettenbrüche

$$\sum_{k=j-q+1}^{\infty} \frac{c_k|}{|d_k} ,$$
$$\sum_{k=j-q+1}^{\infty} \frac{r_{k-1} r_k\, c_k|}{|r_k\, d_k}$$
$$\begin{aligned} \text{mit} \quad \forall_{k\geq j-q+1}\ r_k &:= \frac{1}{(k + q)(k + q + 1) - j(j + 1)} , \\ r_{j-q} &:= 1 . \end{aligned}$$

Wenn die Kettenbrüche konvergieren, stimmen ihre Limites überein (s.o.). Es gilt

$$r_k\, d_k \;=\; 1 - r_k z ,$$

$$\begin{aligned} r_{k-1} r_k \, c_k &= 2k(k+q) r_{k-1} r_k \, z \,, \\ \lim_{k\to\infty} r_k &= 0 \,, \\ \lim_{k\to\infty} 2\,k(k+q)\, r_{k-1} r_k &= 0 \,. \end{aligned}$$

Nach Theorem 7.23 (Chap. 7.3 [JT80b]) konvergiert der Kettenbruch

$$\sum_{k=j-q+1}^{\infty} \frac{2\,k(k+q)\, r_{k-1} r_k \, z|}{|1 - r_k z}$$

dann gegen eine Funktion $m(j,q\,|.)$ meromorph in $\mathbb{C}$. Insbesondere ist die Konvergenz gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$, die keine Pole enthält. Die Funtion $m(j,q\,|.)$ ist holomorph in 0 und es gilt $m(j,q\,|0) = 0$. Jedem T-Kettenbruch entspricht eindeutig eine formale Laurent-Reihe um $z = 0$ und $z = \infty$ (Theorem 7.17, Chap. 7.3 [JT80b]). Die führenden Term in dieser Entwicklung sind

$$\begin{aligned} m(j,q\,|z) &= (j-q+1)\, z \\ &- \frac{(j-q+1)(j^2+3j+1-jq-2q)}{2(j+1)(j+3)}\, z^2 + O(z^3) \,, \\ m(j,q\,|z) &= -2(j-q+1)(j+1) \\ &+ 4\frac{(j-q+1)(j+1)(j^2+3j+3-jq-2q)}{z} + O(z^{-2}) \,. \end{aligned}$$

Diese meromorphe Funktion im Allgemeinen zu bestimmen, erscheint schwierig. Man kann aber verwandte Kettenbrüche durch verallgemeinerte hypergeometrische Funktionen ausdrücken. Betrachten wir statt der Rekursionsrelation (32) die Relation – diese stimmt für $q = 1$ mit Gleichung (33) bis auf einen Term der Ordnung $O(k^{-2})$ überein –

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -1 - \frac{2\beta}{(k+1)(k+2)} \frac{1}{x_k} \,, \\ x_k &:= \frac{a_k^{(-1)}}{a_{k-1}^{(-1)}} \,, \end{aligned}$$

dann gilt nach Theorem 6.4 (Chap. 6 [JT80b])

$$\begin{aligned} x_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{2\beta}{(k+1)(k+2)}\Big|}{|1} \\ &= \frac{{}_0F_1(2|\,2\beta)}{{}_0F_1(3|\,2\beta)} \,. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt

$$
\begin{aligned}
j > 1: \quad F(j,q\,|z) \;&:=\; d_0 + \sum_{k=0}^{l-q-1} \frac{c_k|}{|d_k} + 2j(j-q)\frac{z}{m(j,q\,|z)} \quad , \\
j = 0: \quad F(0,0\,|z) \;&:=\; -z + m(0,0\,|z) \, ,
\end{aligned}
$$

und der Kettenbruch konvergiert damit gegen eine meromorphe Funtion auf $\mathbb{C}$.
Die positiven reellen Nullstellen der Funktion $F(j,q\,|.)$ sind gerade die Werte von β, für die die Potenzreihenentwicklung um $z=-1$ Konvergenzradius Unendlich hat, die negativen reellen Nullstellen gerade die Werte von $-\beta$, für die die Potenzreihenentwicklung um $z=1$ Konvergenzradius Unendlich hat. Weil sich aus jeder Entwicklung um $z=-1$ auch eine Entwicklung um $z=1$ mit Konvergenzradius Unendlich ergibt (vgl. Gleichung (27)), gilt für alle $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$F(j,q,\,|\beta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(j,q\,|-\beta) = 0 \, .$$

4.2.2 Die Berechnung der Nullstellen

Bei der numerischen Berechnung der Nullstellen der Funktion $F(j,q\,|.)$ ist zu beachten, daß jeder Vorwärtsalgorithmus numerisch instabil ist. Denn sucht man die minimale Lösung $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einer 3-Term-Rekursionsrelation, dann wird man in den Startwerten der approximierten Lösung $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aufgrund von Rundungsfehlern auch immer eine Beimischung einer dominanten Lösung finden. Es gilt dann nach Definition der minimalen Lösung (vgl. [JT80b])

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{y_n-g_n}{g_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1-\frac{g_n}{y_n}}{\frac{g_n}{y_n}}\right| \to \infty \, .$$

Gautschi [Gau67] hat für die Berechnung daher einen Rückwärtsalogrithmus vorgeschlagen.
Bei der Berechnung der Nullstellen hat sich herausgestellt, daß die Funktion $F(j,q\,|.)$ für relle $z<0$ Pole aufweist, wo hingegen für relle $z>0$ höchstens ein Pol auftritt: es tritt nur bei der Funktion $F(j=2n+q+4,q\,|.)$ für $\beta>0$ und $n\in\mathbb{N}$ genau ein Pol – zwischen $\beta=0$ und der ersten Nullstelle – auf.
Daher ist die Berechnung der Nullstellen für relle $z>0$ gut konditioniert.
Bei der Berechnung der Nullstellen verfahren wir nach der Methode der Intervallschachtelung, wobei die Auswertung eines Kettenbruches mit dem Gautschi-Algorithmus erfolgt. Die Koeffizienten des Kettenbruches wurden

außerdem wie in Abschnitt 4.2.1 umgeordnet, um die Konvergenzgeschwindigkeit zu verbessern.
Das Computerprogramm für diese Rechnung findet sich in Anhang C.

4.3 Das Spektrum des Differentialoperators

In Anhang A findet sich die Substitution, mit der die Differntialgleichung (11) auf Normalform gebracht werden kann (vgl. Differentialgleichung (18)). In Anhang B.1 haben wir außerdem das asymptotische Verhalten der Lösungen bestimmt

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{2}\Big(\sqrt{X+1}-1\Big)\,, \\ \tilde{A}^j_{2q}(\beta|X) &\overset{X\to\infty}{\sim} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{e^{2\mathrm{i}\sqrt{2\beta}\sqrt{\zeta}}}{\zeta^{\frac{3}{4}}} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{\zeta^{\frac{k}{2}}} \\ \frac{e^{-2\mathrm{i}\sqrt{2\beta}\sqrt{\zeta}}}{\zeta^{\frac{3}{4}}} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k^*}{\zeta^{\frac{k}{2}}} \end{array} \right. . \end{aligned}$$

D.h. für ein gegebenes β mit $\Im\beta \neq 0$ gibt es genau eine Lösung, so daß

$$\int_\Lambda^\infty dX\, |\tilde{A}^j_{2q}(\beta|X)|^2 \;<\; \infty\,.$$

Die Differentialgleichung (18) ist vom *limit-point*-Typ in $+\infty$ (vgl. Chap. 9 [CL55])).
Das Verhalten der Lösungen nahe der Stelle $z = 1$ haben wir in Anhang A bestimmt

$$\tilde{A}^j_{2q}(\beta|X) \overset{X\to 0+}{\sim} \left\{ \begin{array}{ll} a_0^{(1)}\zeta^{\frac{q}{2}} & \\ b_0^{(1)}\zeta^{-\frac{q}{2}} & \text{für } q \geq 1 \\ a_0^{(1)}\ln\zeta + b_0^{(1)} & \text{für } q = 0 \end{array} \right. .$$

D.h. für $q \geq 1$ gibt es genau eine Lösung , so daß

$$\int_0^\epsilon dX\, |\tilde{A}^j_{2q}(\beta|X)|^2 \;<\; \infty\,.$$

Die Differentialgleichung (18) ist für $q \geq 1$ vom *limit-point*-Typ in 0. Für $q = 0$ sind beide linear unabhängigen Lösungen quadratintegrabel in 0, die Differentialgleichung (18) ist für $q = 0$ vom *limit-circle*-Typ in 0 (vgl. Chap. 9 [CL55])).
Seien $q \geq 1$, L, p, α wie im Anhang A und

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{X_0} = \Big\{ u \in \mathcal{L}^2(0,\infty) \quad | \quad & Lu \in \mathcal{L}^2(0,\infty)\,, \\ & u \in C^1(0,\infty)\,, \\ & u' \text{ absolut stetig auf } (0,\infty)\,, \\ & \sin(\theta)\, u(X_0) - \cos(\theta)\, p(X_0)\, u'(X_0) = 0 \Big\}\,, \end{aligned}$$

dann ist nach Sec. 3 (Chap. 9 [CL55]) das singuläre Randwertproblem zweiter Ordnung, bestimmt durch die Differentialgleichung (18), auf $\mathcal{D}_{X_0}$ selbstadjungiert.
Daher kann man die Spektraldichte des Differentialoperators L mit Hilfe der Weyl-Titchmarsh-Kodaira-Theorie (vgl. [EF99]) ausdrücken

$$e(X,Y,\beta)\,d\beta \;=\; \sum_{m,n=0}^{1} \psi_m(\beta,X)\,d\rho^{mn}(\beta)\,\psi_n^*(\beta,X)\;,$$

wobei $d\rho^{mn}$ Stieltjes-Maße mit Träger im Spektrum von L und

$$\begin{aligned} L\psi &= \beta\,\psi\;, \\ \psi_0(X_0) &= \sin\varphi_1\;, \qquad p(X_0)\,\psi_0'(X_0) = -\cos\varphi_1\;, \\ \psi_1(X_0) &= \cos\varphi_2\;, \qquad p(X_0)\,\psi_1'(X_0) = \sin\varphi_2\;. \end{aligned}$$

Sei dazu $(\tilde{A}^j_{2q}(\beta|.)_{reg}, \tilde{A}^j_{2q}(\beta|.)_{sing})$ eine Basis des Lösungsraumes der Differentialgleichung (18), wobei $\tilde{A}^j_{2q}(\beta|.)_{reg}$ regulär in $X=0$ sein und $\tilde{A}^j_{2q}(\beta|.)_{sing}$ einen Pol in $X=0$ haben soll. Seien $X_0 \in (0,\infty)$ und

$$\begin{aligned} c_1 &:= \tilde{A}^j_{2q}(\beta|X_0)_{reg}\;, \qquad & d_1 &:= \tilde{A}^j_{2q}(\beta|X_0)_{sing}\;, \\ c_2 &:= \tilde{A}^{j\,\prime}_{2q}(\beta|X_0)_{reg}\;, \qquad & d_2 &:= \tilde{A}^{j\,\prime}_{2q}(\beta|X_0)_{sing}\;. \end{aligned}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Lösungen muß gelten

$$0 \;\neq\; \det\begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\;.$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} \psi_0(\beta|X) &:= \frac{1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2\,p^2(X_0)}}\,\tilde{A}^j_{2q}(\beta|X)_{reg}\;, \\ \psi_1(\beta|X) &:= \frac{1}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2\,p^2(X_0)}}\,\tilde{A}^j_{2q}(\beta|X)_{sing}\;. \end{aligned}$$

Es folgt für β mit $\Im(\beta) = \epsilon > 0$

$$\begin{aligned} m_0(\beta,j,q) &:= -\lim_{X\to 0+}\frac{\psi_0(\beta|X)}{\psi_1(\beta|X)} = 0\;, \\ m_\infty(\beta,j,q) &:= -\lim_{X\to\infty}\frac{\psi_0(\beta|X)}{\psi_1(\beta|X)} \\ &= \mathrm{i}\sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2\,p^2(X_0)}{c_1^2 + c_2^2\,p^2(X_0)}}\left\{\begin{array}{rl} 1 & \text{für } \Re(\beta) > 0 \\ -1 & \text{für } \Re(\beta) < 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Damit folgt nach Theorem 5.1 (Sec. 5 [CL55])

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho^{12}}{d\beta}|_\beta &= \frac{d\rho^{21}}{d\beta}|_\beta = \frac{d\rho^{22}}{d\beta}|_\beta = 0\ , \\
\frac{d\rho^{11}}{d\beta}|_{\beta_0} &= \frac{1}{\pi}\,\mathrm{sgn}(\beta_0)\lim_{\epsilon\to 0+}\Re\left\{\sqrt{\frac{d_1^2+d_2^2\,p^2(X_0)}{c_1^2+c_2^2\,p^2(X_0)}}\right\}_{\beta=\beta_0+\mathrm{i}\epsilon} .
\end{aligned}$$

Sei X_0 im Gültigkeitsbereich der asymptotischen Näherung, dann können wir $m_\infty(\beta,j,q)$ nach β entwickeln, und es folgt

$$\begin{aligned}
p(X_0)\frac{d}{dX} &\approx 4\zeta_0^2\frac{d}{d\zeta}\ , \\
\sqrt{\frac{d_1^2+d_2^2\,p^2(X_0)}{c_1^2+c_2^2\,p^2(X_0)}} &= C_0(j,q)+C_1(j,q,\zeta_0)\sqrt{\beta}+O(\beta) \\
\text{mit}\quad \Im(C_0) &= \Im(C_1)=0\ .
\end{aligned}$$

Bis zur Ordnung $O(\beta)$ gilt also

$$\frac{d\rho^{11}}{d\beta} = \frac{C(j,q,\zeta_0)}{\pi}\sqrt{\beta}\begin{cases} 1 & \text{für } \beta>0 \\ 0 & \text{für } \beta<0\end{cases} .$$

Im Fall $q=0$ ändert sich das Verhalten der Lösungen an der schwach singulären Stelle. Statt eines Pols ist die Singularität der singulären Lösung logarithmisch. Eine solche Singularität ist integrabel. Um weiterhin die Selbstadjungiertheit des Differentialoperators zu gewährleisten, müssen wir $\mathcal{D}_{X_0}$ auf

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{D}}_{X_0} = \Big\{u\in\mathcal{L}^2(0,\infty)\quad|\quad & Lu\in\mathcal{L}^2(0,\infty)\,, \\
& u\in C^1(0,\infty)\,, \\
& u'\ \text{absolut stetig auf } (0,\infty)\,, \\
& \sin(\theta)\,u(X_0)-\cos(\theta)\,p(X_0)\,u'(X_0)=0\,, \\
& [u\hat{\chi}_0](0)=0\Big\}\ ,
\end{aligned}$$

einschränken (zu der letzten Bedingung: vgl. Sec. 3 [CL55]). Die Auswertung der letzten Bedingung unter Berücksichtigung der Form von $p(X)$ ergibt dann aber, daß wir uns auf Funktionen stetig in $z=1$ einschränken müssen. An diesen waren wir aber auch im Fall $q\geq 1$ nur interessiert.

4.4 Die Berechnung der Streuphase

Der Lösungsraum der Differentialgleichung (11) ist ein zweidimensionaler Vektorraum. Um die schwache Singularität bei $z = 1$ finden wir lokal eine Basis dieses Vektorraumes durch einen Potenzreihenansatz (vgl. Anhang B). Für fast alle Werte (β, j, q) bricht diese Darstellung bei $|z-1| = 2$ zusammen. Der Grund dafür ist die Singularität bei $z = -1$.
Asymptotisch haben die Lösungen die Gestalt (vgl. Anhang B.1)

$$\hat{\varphi}_1(\rho) + e^{2\pi \mathrm{i}\, f(\beta,j,q)}\hat{\varphi}_2(\rho) \; .$$

Dabei ist $f(\beta, j, q)$ die Streuphase, und diese sei so normiert, daß der Realteil der obigen Lösung gerade der asymptotischen Entwicklung der in $z = 1$ regulären Lösung $A^j_{2q}(\beta|X)_{reg}$ entspricht.
Es ergibt sich mit der asymptotischen Entwicklung der Hankelfunktionen

$$A^j_{2q}(\beta|X)_{reg} \sim \frac{1}{\rho^{\frac{3}{2}}} \cos(2\sqrt{2\beta}\,\rho - \frac{\pi\alpha}{2} + \pi f(\beta, j, q)) \; . \tag{15}$$

Für diskrete Werte von β, nämlich genau die, die durch die Nullstellen des Kettenbruches aus Abschnitt 4.2.1 gegeben sind, ist die in $z = 1$ reguläre Lösung auch in $z = -1$ regulär und definiert eine reguläre Lösung auf $(-\infty, \infty)$. In Anhang B.4 haben wir das asymptotische Verhalten dieser speziellen Lösungen bestimmt: es ist das der Besselfunktionen.
Aus der Gestalt der Lösungen $\hat{\varphi}_1$, $\hat{\varphi}_2$ folgt damit, daß genau in den Fällen, in denen $f(\beta, j, q) = \mathbb{N}$ gilt, die in $z = 1$ reguläre Lösung nicht in $z = -1$ divergiert.
Mit dem Ansatz

$$f(\beta_n, j, q) = 2\pi n \; ,$$

wobei β_n die $n$te positive Nullstelle ist, ist es daher möglich, die Funktion f in Abhängigkeit von (β, j, q) numerisch zu approximieren. Für jedes Paar (j, q) wurde die Funktion $f(., j, q)$ durch eine Parabel approximiert (vgl. Anhang D).
Diese Parabeln können zum einen als die ersten Terme einer formalen Potenzreihenentwicklung in β interpretiert werden, zum anderen zeigen numerische Tests, daß der Verlauf der Kurven – vor allem für kleine j – gut durch diese Parabeln approximiert wird (vgl. Anhang D).
Für $(j, q) = (0, 0)$ ist $f(., 0, 0)$ (nach den berechneten Daten) eine Parabel. Für große j wird σ_{est} allerdings schnell größer. Die Stabilisierung des Fehlers für große Werte von β ist durch die Struktur des Kettenbruches erklärbar.

Dann ist der Wert des Kettenbruches sehr klein und die absoluten Fehler sind klein.

Teil IV
Ein Ausblick

Schließlich wollen wir erklären, wie mit den Ergebnissen aus Kapitel III die Zustandssumme des Laplace-Operators auf $K3$ asymptotisch bestimmt werden kann.
Sei Δ_{K3} der Laplace-Operator der konstruierten fast Ricci-flachen Metrik auf einer glatten Auflösung von $K3(\mathbb{Z}_2)$ und Δ^d_{K3} der Laplace-Operator mit Dirichlet-Randbedingungen auf Sphären vom Radius R_0 um die 16 Eguchi-Hanson-Sphären. Im Vergleich betrachten wir den flachen Torus mit dem Laplace-Operator Δ_T und den Laplace-Operator Δ^d_T mit Dirichlet Randbedingungen auf den Sphären vom Radius R_0, die im ersten Fall die Eguchi-Hanson-Sphären einschließen. Es gilt

$$\mathrm{Tr}_{L^2} e^{-t\Delta_{K3}} - \mathrm{Tr}_{L^2} e^{-t\Delta^d_{K3}} \quad = \quad \mathrm{Tr}_{L^2} e^{-t\Delta_T} - \mathrm{Tr}_{L^2} e^{-t\Delta^d_T} \; . \tag{16}$$

Die Gleichheit gilt bis auf nichtperturbative Terme, die schneller abfallen als jede Potenz in t. Den jeweils zweiten Summanden von Gleichung (16) zerlegen wir weiter.
Sei dazu $\Delta^d_{\mathbb{EH}}$ der Laplace-Operator auf der Eguchi-Hanson-Sphäre mit Dirichlet-Randbedingungen auf der sie umgebenden Sphäre vom Radius R_0, Δ^d_B der Laplace-Operator auf $B^4_{R_0}$ und Δ^d_{RT} der Laplace-Operator auf dem Rumpftorus[2] mit Dirichlet-Randbedingungen auf dem Rand.
Für kleine Zeiten betrachten wir die asymptotische Entwicklung des Wärmeleitungskerns. Es gilt

$$\mathrm{Tr}_{L^2} e^{-t\Delta} \quad \sim \quad \sum_{n=0}^{\infty} t^{\frac{4-n}{2}} \, a_n(\Delta) \; .$$

Dabei sind die $a_n(\Delta)$ skalare Invarianten, die nur von der lokalen Information des Laplace-Operators abhängen. Sind die Sphären weit genug voneinander entfernt, dann spalten sich die Terme folgendermaßen auf

$$\mathrm{Tr}_{L^2} e^{-t\Delta^d_{K3}} \quad = \quad \mathrm{Tr}_{L^2} e^{-t\Delta^d_{RT}} + \sum_{i=1}^{16} \mathrm{Tr}_{L^2} e^{-t\Delta^d_{\mathbb{EH}_i}} \; ,$$

[2]Mit Rumpf-Torus bezeichnen wir die kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, die wir aus $K3(\mathbb{Z}_2)$ erhalten, wenn wir 16 offene Bälle um die singulären Punkte ausschneiden.

$$\mathrm{Tr}_{L^2} e^{-t\Delta_T^d} \;=\; \mathrm{Tr}_{L^2} e^{-t\Delta_{RT}^d} + \sum_{i=1}^{16} \mathrm{Tr}_{L^2} e^{-t\Delta_{B_i}^d} \;,$$

wobei $\mathbb{EH}_i$ gerade die i-te Eguchi-Hanson-Sphäre ist und B_i entsprechend. Die einzelnen Eguchi-Hanson-Sphären tragen dabei wegen der Lokalität unabhängig voneinander bei, und Entsprechendes gilt für die Bälle B_i. Die Zustandssummen der Laplace-Operatoren auf dem flachen Ball mit Dirichlet-Randbedingungen und dem flachen Torus

$$\mathrm{Tr}_{L^2} e^{-t\Delta_{B_i}^d}\,, \quad \mathrm{Tr}_{L^2} e^{-t\Delta_T^d}$$

sind bekannt (s. Referenzen in [EF99]). Für die Berechnung der Zustandssumme auf einer Eguchi-Hanson-Sphäre mit Dirichlet-Randbedingungen bei Radius R_0, benutzt man dann ihre hohe Symmetrie (vgl. Abschnitt 1.4). Es gilt nach Kapitel III

$$\mathrm{Tr}_{L^2} e^{-t\Delta_{\mathbb{EH}}^d} \;=\; \sum_{j,q} \mathrm{Tr}_{L^2} e^{-t\Delta_{\mathbb{EH}}^{j,q\;d}} \;,$$

wobei $\Delta_{\mathbb{EH}}^{j,q\;d}$ gerade der Laplace-Operator für Eigenfunktionen ist, die für ξ^2 und ξ_3 die Werte $-j(j+1)$ und $\mathrm{i}q$ annehmen (vgl. Kapitel III). Es gilt insgesamt

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{L^2} e^{-t\Delta_{K3}} \;&=\; \mathrm{Tr}_{L^2} e^{-t\Delta_T} - \sum_{i=1}^{16} \mathrm{Tr}_{L^2} e^{-t\Delta_{B_i}^d} \\ &+\; \sum_{i=1}^{16} \sum_{j,q} \sum_n e^{-t\beta_n(j,q)} \;. \qquad (17)\end{aligned}$$

Dabei sind $\beta_n(j,q)$ die Eigenwerte des Laplace-Operators $\Delta_{\mathbb{EH}}^{j,q\;d}$ mit Dirichlet-Randbedingungen bei einem Radius R_0. Die Bestimmung der Eigenwerte $\beta_n(j,q)$ aus der Streuphase $f(\beta,j,q)$ ist ein Standard-Problem der Quantenmechanik:

Nach Gleichung (15) lassen sich die Eigenwerte asymptotisch leicht aus der Streuphase berechnen (die rechte Seite von Gleichung (15) muß bei $\rho_0 = \rho(R_0)$ verschwinden):

$$2\sqrt{2\beta_n}\,\rho_0 - \frac{\pi}{2}\sqrt{(1+2j)^2+4\beta_n} + \pi\, f(\beta_n,j,q) = \frac{2n+1}{2}\,\pi \;.$$

Sei jetzt der Radius des Rumpftorus $4R_0$. Bilden wir den Limes $R_0 \to \infty$, dann divergieren die beiden letzten Terme auf der rechten Seite von Gleichung (17) (einzeln). Wie im Wärmeleitungsbeweis des Atiyah-Singer Index Satzes heben sich diese Divergenzen aber gegenseitig auf [Gil84], d.h. wir erhalten ein Ergebnis, das nicht mehr von R_0 abhängt und genau durch die Streuphase bestimmt wird.

A Die Differentialgleichung

Der Winkelanteil der Eigenfunktionen $\Psi_E(r,\theta,\psi,\varphi)$ des Laplace-Operators kann wegen der hohen Symmetrie (vgl. Abschnitt 1.2) durch den folgenden Ansatz absepariert werden

$$\Psi_E(r,\theta,\psi,\varphi) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{j} A^j_{2q}(\beta|z)\,\left(e^{\mathrm{i}q\psi}\; d^j_{sm}(\theta) + e^{-\mathrm{i}q\psi}\; d^j_{-sm}(\theta)\right)\, e^{\mathrm{i}m\varphi}\;.$$

Die Funktionen $A^j_{2q}(\beta|.)$ erfüllen die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
0 &= \left\{\frac{d^2}{dz^2} + \frac{2\,z}{z^2-1}\frac{d}{dz} + \frac{(\beta z - j(j+1))(z^2-1) - q^2}{(z^2-1)^2}\right\} A^j_{2q}(\beta|z) \\
j &\in \mathbb{N}, \qquad 0 \le q \le \left[\frac{j}{2}\right]\;, \\
z &:= \frac{r^2}{a^2}\,, \qquad \beta := \frac{a^2\,E}{4}\;,
\end{aligned}$$

oder in der Koordinate r

$$\begin{aligned}
\Bigg\{ \left(1-\frac{a^4}{r^4}\right)\frac{d^2}{dr^2} \;&+\; \left(\frac{3}{r}+\frac{a^4}{r^5}\right)\frac{d}{dr} \\
&-\; \frac{4j(j+1)}{r^2} - \frac{4q^2}{r^2}\frac{a^4}{r^4-a^4} + E\Bigg\}\, A^j_{2q}(\beta|z) = 0\;.
\end{aligned}$$

Mit der Variablentransformation

$$\begin{aligned}
X &:= z^2 - 1 = \frac{r^4}{a^4} - 1\;, \qquad X \ge 0\;, \\
\tilde{A}^j_{2q}(\beta|X) &= A^j_{2q}(\beta|z)
\end{aligned}$$

erhält man aus Differentialgleichung (18) die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
L\,\tilde{A}^j_{2q}(\beta|X) &= \beta\,\tilde{A}^j_{2q}(\beta|X)\;, \qquad (18) \\
L &:= -\frac{d}{dX}\left(p(x)\,\frac{d}{dX}\right) + q(X)\;, \\
p(X) &:= 4\sqrt{X+1}\,X\;, \\
q(X) &:= \frac{j(j+1)}{\sqrt{X+1}} + \frac{q^2}{X\,\sqrt{X+1}}\;.
\end{aligned}$$

Der Operator L ist damit formal selbstadjungiert, p, p', q sind stetig und $p > 0$ auf $(0,\infty)$.

Um die Spektraldichte des Differentialoperators L zu berechnen, scheint zunächst eine weitere Normalisierung des Differentialoprators L auf die Form

$$-\frac{d^2}{dw^2} + V(w)$$

sinnvoll. In diesem Fall kann man mit der WKB-Methode die Spektraldichte störungstheoretisch bestimmen (vgl. [EF99]). Allerdings macht dies eine Substitution $z = g(w)$ mit

$$\begin{aligned} w + c &= \int^{g(w)} \frac{\xi \, d\xi}{\sqrt{\xi^3 - \xi}} \\ &= 2\mathrm{i}\Big(E(-1, \arcsin(\sqrt{g(w)})) - F(-1, \arcsin(\sqrt{g(w)})\Big) \end{aligned}$$

notwendig, wobei $F(k, \varphi), E(k, \varphi)$ die elliptischen Integrale erster und zweiter Art bezeichnen.
Sei

$$A^j_{2q}(\beta|z) = (z^2 - 1)^{\frac{q}{2}} \, u(z) \; ,$$

dann erfüllt u die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= u''(z) + \frac{2(q+1)z}{z^2 - 1} \, u'(z) + \frac{\beta z + \mu}{z^2 - 1} \, u(z) \; , \\ \mu &:= q(q+1) - j(j+1) \; . \end{aligned}$$

Bei einer Entwicklung um die schwach singulären Stellen bei $z = \pm 1$ bieten sich die folgenden Variablentransformationen an

$$\left.\begin{aligned} \zeta &:= \tfrac{1}{2}(z-1) \\ \hat{u}(\zeta) &= u(z) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \zeta(\zeta+1) \, \hat{u}''(\zeta) + (q+1)(2\zeta+1) \, \hat{u}'(\zeta) \\ +(\beta(2\zeta+1) + \mu) \, \hat{u}(\zeta) = 0 \; , \end{aligned} \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} \chi &:= \tfrac{1}{2}(z+1) \\ \hat{v}(\chi) &= u(z) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \chi(\chi-1) \, \hat{v}''(\chi) + (q+1)(2\chi-1) \, \hat{v}'(\chi) \\ +(\beta(2\chi-1) + \mu) \, \hat{v}(\chi) = 0 \; . \end{aligned} \tag{20}$$

Für Lösungen $\hat{u}(\beta, j, q|.)$ und $\hat{v}(\beta, j, q|.)$ gilt

$$\hat{v}(\beta, j, q|\chi) = u(\beta, j, q|z) = \hat{u}(\beta, j, q|\zeta) = \hat{u}(\beta, j, q|\chi - 1) \; , \tag{21}$$

$$\hat{v}(\beta, j, q|\chi) = u(\beta, j, q|z) = u(-\beta, j, q| - z) = \hat{u}(-\beta, j, q| - \chi) \; . \tag{22}$$

Die Differentialgleichung (20) läßt sich umschreiben zu

$$0 = \chi^2 \, \hat{v}''(\chi) + \chi \, P(\chi) \, \hat{v}'(\chi) + Q(\chi) \, \hat{v}(\chi)$$

$$\text{mit} \quad \begin{aligned} P(\chi) &= (q+1)\tfrac{2\chi-1}{\chi-1} \overset{|\chi|<1}{=} (q+1)(1 - \textstyle\sum_{k=1}^\infty \chi^k) \; , \\ Q(\chi) &= \chi\tfrac{\beta(2\chi-1)+\mu}{\chi-1} \overset{|\chi|<1}{=} (\mu+\beta)\chi - (\mu-\beta) \textstyle\sum_{k=2}^\infty \chi^k \; . \end{aligned}$$

Dabei ist $\mu = 0$ aufgrund der Bedingungen an q ausgeschloßen. Die Stelle $\chi = 0$ ist schwach singulär; die Wurzeln sind $r = -q, 0$. Wegen $\hat{v}(\beta, j, q|\chi) = \hat{v}(-\beta, j, q| - \chi + 1)$ ist die Stelle $\chi = 1$ dann schwach singulär mit Wurzeln $r = -q, 0$.
Entsprechend sind die Stellen $\zeta = -1$ und $\zeta = 0$ schwach singuläre Stellen der Differentialgleichung (19) mit Wurzeln $r = -q, 0$.
Es existiert eine reguläre Lösung in $\chi = 0, z = -1$ der Form

$$\hat{v}_{reg}(\chi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(-1)}(\beta, j, q)\ \chi^k\ , \tag{23}$$

die mindestens Konvergenzradius 1 hat (vgl. [Rab72]). Außerdem existiert eine in $\chi = 0$ singuläre Lösung für $\chi > 0$ der Form

$$\hat{v}_{sing}(\chi) = \hat{v}_{reg}(\chi)\ \ln \chi + \frac{1}{\chi^q} \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(-1)}(\beta, j, q)\ \chi^k\ , \tag{24}$$

die ebenfalls mindestens Konvergenzradius 1 hat und linear unabhängig von $\hat{v}_{reg}$ ist(vgl. [Rab72]).
Entwicklungen derselben Form existieren dann um $\zeta = 0, z = 1$

$$\hat{u}_{reg}(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)}(\beta, j, q)\ \zeta^k\ , \tag{25}$$

$$\hat{u}_{sing}(\zeta) = \hat{u}_{reg}(\zeta)\ \ln \zeta + \frac{1}{\zeta^q} \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(1)}(\beta, j, q)\ \zeta^k\ . \tag{26}$$

Die Lösungen finden sich in Anhang B. Hat man eine reguläre Lösung gefunden, deren Potenzreihenentwicklung um die schwach singuläre Stelle den Konvergenzradius Unendlich hat, existiert nach Gleichung (21) auch eine derartige Potenzreihenentwicklung um die andere schwach singuläre Stelle. Es folgt dann aus Gleichung (21) durch Umordnung der Reihen

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(-1),\infty}(\beta, j, q)\ \chi^k &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1),\infty}(\beta, j, q)\ (\chi - 1)^k \\ \forall_k \qquad a_k^{(-1),\infty}(\beta, j, q) &= \sum_{k=l}^{\infty} (-1)^{k-l} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} a_k^{(1),\infty}(\beta, j, q)\ .\end{aligned} \tag{27}$$

Für eine asymptotische Entwicklung in $\zeta \geq 0$ bzw. $\chi \geq 0$ führt man die Variablentransformationen

$$\begin{aligned} \rho^2 &:= \zeta\ , \quad \rho \geq 0\ , & \lambda^2 &:= \chi\ , \quad \lambda \geq 0\ , \\ \rho &= \tfrac{1}{\sqrt{2}\,a}\sqrt{r^2 - a^2}\ , & \lambda &= \tfrac{1}{\sqrt{2}\,a}\sqrt{r^2 + a^2}\ , \\ \tilde{u}(\rho) &= \hat{u}(\zeta)\ , & \tilde{v}(\lambda) &= \hat{v}(\chi) \end{aligned}$$

aus und erhält die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}(\rho^2+1)\,\tilde{u}''(\rho) &+ \left(-\frac{\rho^2+1}{\rho}+\frac{2(q+1)(2\rho^2+1)}{\rho}\right)\,\tilde{u}'(\rho)\\ &+ (4\beta(2\rho^2+1)+4\mu)\,\tilde{u}(\rho)=0\,, \qquad (28)\\ (\lambda^2-1)\,\tilde{v}''(\lambda) &+ \left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}+\frac{2(q+1)(2\lambda^2-1)}{\lambda}\right)\,\tilde{v}'(\lambda)\\ &+ (4\beta(2\lambda^2-1)+4\mu)\,\tilde{v}(\lambda)=0\,. \qquad (29)\end{aligned}$$

Es gilt (formal) $\tilde{u}(\beta|\rho)=\tilde{v}(-\beta|\mathrm{i}\lambda)$. Für $\rho^2>1$ erhält man als konvergente Reihenentwicklung

$$\begin{aligned}\tilde{u}''(\rho) &= \left(-\frac{4q+3}{\rho}+\frac{2(q+1)}{\rho^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\rho^{2k}}\right)\,\tilde{u}'(\rho)\\ &- \left(8\beta+\frac{4(\mu-\beta)}{\rho^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\rho^{2k}}\right)\,\tilde{u}(\rho)\,. \qquad (30)\end{aligned}$$

B Die Lösung als Potenzreihe

Die Landau-Symbole O und o sind wie folgt definiert

$$\begin{aligned}f(x)=O(x^k) &\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{x^k}\right|=c<\infty\,,\\ f(x)=o(x^k) &\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^k}=0\,.\end{aligned}$$

B.1 Die asymptotische Entwicklung

Setzt man Ansatz (14) in die Differentialgleichung (30) ein, erhält man folgende Rekusionsrelation

$$\begin{aligned}p_{-2} &= p_{-1}=0\,,\\ \forall k\geq 0: \quad p_{k+1} &= -\frac{(2q+\frac{3}{2}+k)(2q+\frac{1}{2}-k)+4(\beta-\mu)}{2\mathrm{i}(k+1)}p_k\\ &- 8\beta\,\frac{k+q}{k+1}p_{k-1}+8\beta\,\frac{(2q-\frac{1}{2}+k)(k-\frac{1}{2})}{2\mathrm{i}(k+1)}p_{k-2}\,.\end{aligned}$$

Asymptotisch kann diese Rekursionsrelation gelöst werden. Dazu betrachtet man

$$\forall k\geq 0: \qquad \frac{p_{k+1}}{p_k} = -\frac{(2q+\frac{3}{2}+k)(2q+\frac{1}{2}-k)+4(\beta-\mu)}{2\mathrm{i}(k+1)} \qquad (31)$$

$$- \quad 8\beta\,\frac{k+q}{k+1}\frac{p_{k-1}}{p_k} + 8\beta\,\frac{(2q-\frac{1}{2}+k)(k-\frac{1}{2})}{2\mathrm{i}(k+1)}\frac{p_{k-2}}{p_{k-1}}\frac{p_{k-1}}{p_k}\;.$$

Nach einem Potenzvergleich folgt, daß für $k \to \infty$ a priori nur $\frac{p_{k+1}}{p_k} \sim k$ und $\frac{p_{k+1}}{p_k} \sim c + \frac{1}{k}$ möglich sind.
Aus Abschnitt 4.1 wissen wir, daß sich die Lösungen $\hat{\varphi}$ asymptotisch wie Hankel-Funktionen verhalten. Die Hankelfunktionen und die Koeffizienten ihrer asymptotischen Entwicklung sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 f''(x) + x\,f'(x) + (x^2 - n^2) f(x)\;,\\
H_1(n|x) &:= \frac{e^{\mathrm{i}x}}{\sqrt{x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{x^k}\;,\\
H_2(n|x) &:= f_1^*(x)\;,\\
\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{(k+\frac{1}{2}+n)(k+\frac{1}{2}-n)}{2\mathrm{i}(k+1)}\;.
\end{aligned}$$

Für das asymptotische Verhalten der Koeffizienten der Gleichung (31) setzen wir also

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{(k+a)(k+b)}{2\mathrm{i}(k+1)}$$

ein und entwickeln beide Seiten in Potenzen von k. Der zweite und dritte Term auf der rechten Seite von Gleichung (31) sind zusammen von der Ordnung $O(k^{-2})$ und liefern damit keine Korrektur für den Parameter der Hankelfunktionen. Aus Gleichung (31) folgt damit

$$\begin{aligned}
&-\frac{\mathrm{i}}{2}k + \frac{\mathrm{i}}{2}(1-a-b) + \frac{i}{2}\frac{-ab+a+b-1}{k} + O(k^{-2})\\
=\;&-\frac{\mathrm{i}}{2}k + \frac{i}{2}\frac{(2q+\frac{3}{2})(2q+\frac{1}{2}) + 4(\beta-\mu)}{k} + O(k^{-2})\;,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2} + \sqrt{(2j+1)^2 + 4\beta}\;,\\
b &= \frac{1}{2} - \sqrt{(2j+1)^2 + 4\beta}\;.
\end{aligned}$$

Eine Entwicklung von $\frac{p_{k+1}}{p_k}$ bis zur Ordnung $O(k^{-2})$ legt dabei die Parameter unseres Ansatzes eindeutig fest. Damit haben die Lösungen der Differentialgleichung (28) asymptotisch die Gestalt

$$\hat{\varphi}_1(\rho) \sim \frac{1}{\rho^{2q+1}}\,H_1(\alpha\,|2\sqrt{2\beta}\,\rho)\;,$$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_2(\rho) &\sim \frac{1}{\rho^{2q+1}} H_2(\alpha\,|2\sqrt{2\beta}\,\rho)\,, \\ \text{wobei} \quad \alpha &= \sqrt{(1+2j)^2+4\beta}\,. \end{aligned}$$

Nach Anhang A läßt sich daraus das asymptotische Verhalten der Lösungen der Differentialgleichung (29) bestimmen

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_1(\lambda) &\sim \frac{1}{\lambda^{2q+1}} H_1(\tilde{\alpha}\,|2\sqrt{2\beta}\,\lambda)\,, \\ \hat{\varphi}_2(\lambda) &\sim \frac{1}{\lambda^{2q+1}} H_2(\tilde{\alpha}\,|2\sqrt{2\beta}\,\lambda)\,, \\ \text{wobei} \quad \tilde{\alpha} &= \sqrt{(1+2j)^2-4\beta}\,. \end{aligned}$$

Allerdings läßt sich mit dieser Entwicklung nicht das Verhalten der Lösungen an der schwach singulären Stelle $z = 1$ bestimmen (vgl. dazu Anhang B.4)

B.2 Die regulären Lösungen im Fall $E = 0$

B.2.1 Die Entwicklung um $\chi = 0$, $z = -1$

Setzt man Ansatz (23) in die Differentialgleichung (20) ein, erhält man für $E = 0$ als Rekursionsrelation der Koeffizienten $(a_k^{(-1)})_{k \geq j+1}$

$$\begin{aligned} a_1^{(-1)} &= \frac{\mu}{q+1} a_0^{(-1)}\,, \\ \forall k \geq 1: \quad a_{k+1}^{(-1)} &= \frac{(k+j+q+1)(k-j+q)}{(k+1)(k+q+1)} a_k^{(-1)} \\ \Leftarrow \quad a_k^{(-1)} &= \frac{(j+q+1)_k\,(-j+q)_k}{k!\,(q+1)_k}\,. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\hat{v}_{reg}(\chi) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} j+q+1, & -j+q \\ q+1 & \end{matrix} \middle| \chi \right)\,,$$

wobei die Reihenentwicklung von ${}_2F_1$ ein Polynom der Ordnung $j - q$ beschreibt und danach abbricht.

B.2.2 Die Entwicklung um $\zeta = 0$, $z = 1$

Setzt man Ansatz (25) in die Differentialgleichung (19) ein, erhält man für $E = 0$ als Rekursionsrelation der Koeffizienten $(a_k^{(1)})_{k \geq j+1}$

$$a_1^{(1)} = \frac{\mu}{q+1} a_0^{(1)}\,,$$

$$\begin{aligned} \forall k \geq 1: \quad a_{k+1}^{(1)} &= -\frac{(k+j+q+1)(k-j+q)}{(k+1)(k+q+1)}\, a_k^{(1)} \\ \Leftarrow \qquad a_k^{(1)} &= (-1)^k \frac{(j+q+1)_k\,(-j+q)_k}{k!\,(q+1)_k}\,. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\hat{u}_{reg}(\zeta) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} j+q+1, & -j+q \\ q+1 & \end{matrix} \,\middle|\, -\zeta\right),$$

wobei die Reihenentwicklung von ${}_2F_1$ ein Polynom der Ordnung $j-q$ beschreibt und danach abbricht.

B.3 Die singulären Lösungen im Fall $E = 0$

B.3.1 Die Entwicklung um $\chi = 0$, $z = -1$

Setzt man Ansatz (24) in die Differentialgleichung (20) ein, erhält man für $E = 0$ als Rekursionsrelation der Koeffizienten $(b_k^{(-1)})_{k \geq j+1}$

$$\begin{aligned} b_{j+1}^{(-1)} &= \frac{2j+1}{(j+1)(j-q+1)}\, a_{j-q}^{(-1)}\,, \\ \forall k \geq j+1: \quad b_{k+1}^{(-1)} &= \frac{(k-j)(k+j+1)}{(k+1)(k-q+1)}\, b_k^{(-1)} \\ \Leftarrow \quad b_{n+j+1}^{(-1)} &= \frac{n!\,(n+2j+1)!}{(n+j-q+1)!\,(n+j+1)!}\,\frac{j!\,(j-q)!}{(2j)!}\, a_{j-q}^{(-1)}\,. \end{aligned}$$

Die Folge $(b_n^{(-1)})_{n \in \mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge. Damit bricht die Reihenentwicklung für $\hat{v}_{sing}$ nicht ab und hat Konvergenzradius 1.
Es gilt

$$\begin{aligned} \hat{v}_{sing}(\chi) &= \hat{v}_{reg}(\chi)\, \ln \chi + \frac{1}{\chi^q} \sum_{k=0}^{j} b_k^{(-1)}\, \chi^k + \frac{j!\,(j-q)!}{(2j)!}\, a_{j-q}^{(-1)} \\ &\times \sum_{r=j-q+1}^{\infty} \frac{(r-j+q-1)!\,(r+j+q)!}{(r+q)!}\, \frac{\chi^r}{r!} \\ &= \hat{v}_{reg}(\chi)\, \ln \chi + \frac{1}{\chi^q} \sum_{k=0}^{j} b_k^{(-1)}\, \chi^k + (-1)^{j-q} \frac{j!\,(j+q)!}{q!\,(2j)!}\, a_{j-q}^{(-1)} \\ &\times \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{(-\epsilon)} \sum_{r=j-q+1}^{\infty} \frac{(-j+q-\epsilon)_r\,(j+q+1)_r}{(q+1)_r}\, \frac{\chi^r}{r!} \end{aligned}$$

Mit der Entwicklung der Gamma-Funktion durch die Digamma-Funktion

$$\begin{aligned} (-j+q-\epsilon)_r &= \frac{\Gamma(-j+q+r-\epsilon)}{\Gamma(-j+q-\epsilon)} \\ &= (-j+q)_r \left(1-\epsilon\left(\Psi_0(-j+q+r)-\Psi_0(-j+q)\right)+O(\epsilon^2)\right) , \end{aligned}$$

und $(r-1<j-q)$

$$\begin{aligned} \Psi_0(-j+q+r)-\Psi_0(-j+q) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{-j+q+n}-\frac{1}{-j+q+r+n}\right) \\ &= -\sum_{n=0}^{r-1}\frac{1}{j-q-n} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{(-\epsilon)}\sum_{r=j-q+1}^{\infty}\frac{(-j+q-\epsilon)_r\,(j+q+1)_r}{(q+1)_r}\,\frac{\chi^r}{r!} \\ =\; & -\frac{\partial}{\partial\epsilon}\Big|_0\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} j+q+1, & -j+q-\epsilon \\ q+1 & \end{matrix}\,\Big|\,\chi\right) \\ +\; & \sum_{r=0}^{j-q}\sum_{n=0}^{r-1}\frac{1}{j-q-n}\,\frac{(-j+q)_r\,(j+q+1)_r}{(q+1)_r}\,\frac{\chi^r}{r!} . \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \forall\, 0\le k\le q-1: \quad c_k^{(-1)} &= b_k^{(-1)} , \\ \forall\, 0\le r\le j-q: \quad c_{q+r}^{(-1)} &= b_{q+r}^{(-1)}+(-1)^{j-q}\,\frac{j!\,(j+q)!}{q!\,(2j)!}\,a_{j-q}^{(-1)} \\ &\quad\times\;\frac{(-j+q)_r\,(j+q+1)_r}{(q+1)_r}\sum_{n=0}^{r-1}\frac{1}{j-q-n} \end{aligned}$$

hat die singuläre Lösung die folgende Gestalt

$$\begin{aligned} \hat{v}_{sing}(\chi) &= \hat{v}_{reg}(\chi)\,\ln\chi+\sum_{k=0}^{j}c_k^{(-1)}\,\chi^{k-q} \\ &- (-1)^{j-q}\,\frac{j!\,(j+q)!}{q!\,(2j)!}\,a_{j-q}^{(-1)}\,\frac{\partial}{\partial\epsilon}\Big|_0\,{}_2F_1\left(\begin{matrix} j+q+1, & -j+q-\epsilon \\ q+1 & \end{matrix}\,\Big|\,\chi\right) . \end{aligned}$$

B.3.2 Die Entwicklung um $\zeta = 0$, $z = 1$

Setzt man Ansatz (26) in die Differentialgleichung (19) ein, erhält man für $E = 0$ als Rekursionsrelation der Koeffizienten der Koeffizienten $(b_k^{(1)})_{k \geq j+1}$

$$\begin{aligned} b_{j+1}^{(1)} &= -\frac{2j+1}{(j+1)(j-q+1)}\, a_{j-q}^{(1)} \,, \\ \forall k \geq j+1 : \; b_{k+1}^{(1)} &= -\frac{(k-j)(k+j+1)}{(k+1)(k-q+1)}\, b_k^{(1)} \\ \Leftarrow \quad b_{n+j+1}^{(1)} &= (-1)^{n+1} \frac{n!\,(n+2j+1)!}{(n+j-q+1)!\,(n+j+1)!} \, \frac{j!\,(j-q)!}{(2j)!}\, a_{j-q}^{(1)} \,. \end{aligned}$$

Die Folge $(b_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge. Damit bricht die Reihenentwicklung für $\hat{u}_{sing}$ nicht ab und hat Konvergenzradius 1. Insbesondere gilt

$$b_{n+j+1}^{(1)} = (-1)^{n+j+1-q}\, b_{n+j+1}^{(-1)} \,.$$

Die asymptotische Entwicklung der Potenzreihe ergibt sich dann analog zu Anhang B.3.1.

B.4 Die regulären Lösungen im Fall $E \neq 0$

B.4.1 Die Entwicklung um $\chi = 0$, $z = -1$

Setzt man Ansatz (23) in die Differentialgleichung (20) ein, erhält man für $E \neq 0$ als Rekursionsrelation der Koeffizienten $(a_k^{(-1)})_{k \geq j+1}$

$$\begin{aligned} a_1^{(-1)} &= \frac{\mu - \beta}{q+1}\, a_0^{(-1)} \,, \\ \frac{a_{k+1}^{(-1)}}{a_k^{(-1)}} &= \frac{k(k+2q+1) + \mu - \beta}{(k+1)(k+q+1)} + \frac{2\beta}{(k+1)(k+q+1)} \frac{a_{k-1}^{(-1)}}{a_k^{(-1)}} \\ &= 1 + \frac{q-1}{k+q+1} + \frac{\mu - \beta - 2q}{(k+1)(k+q+1)} \\ &\quad + \frac{2\beta}{(k+1)(k+q+1)} \frac{a_{k-1}^{(-1)}}{a_k^{(-1)}} \,. \end{aligned} \tag{32}$$

Man erkennt, daß nur Lösungen mit

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}^{(-1)}}{a_k^{(-1)}} = \begin{cases} 1 & \text{Konvergenzradius } 1 \\ 0 & \text{Konvergenzradius } \infty \end{cases}$$

möglich sind. Dabei entspricht eine Lösung der Rekursionsgleichung (32) mit Konvergenzradius 1 einer generischen Lösung, eine mit Konvergenzradius ∞ einer minimalen Lösung. Die Existenzfrage einer minimalen Lösung behandeln wir in Abschnitt 4.2.1.

Die Lösungen mit Konvergenzradius 1

Konvergiert $\frac{a_{k+1}^{(-1)}}{a_k^{(-1)}}$ gegen eine reelle Zahl $\neq 0$, dann ist der zweite Term auf der rechten Seite von Gleichung (32) von der Ordnung $O(k^{-2})$, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{a_{k+1}^{(-1)}}{a_k^{(-1)}} &= 1 + \frac{q-1}{k+q+1} + O(k^{-2}) \\ &= \frac{k+2q}{k+q+1} + O(k^{-2}) \\ \Leftarrow \quad a_{k+1}^{(-1),1} &\approx \frac{(k+2q)!}{(k+q+1)!} \end{aligned}$$

Mit

$$\frac{1}{(1-x)^q} \overset{|x|<1}{=} \sum_{l=0}^{\infty} (q)_l \frac{x^l}{l!}$$

folgt für $|\chi| < 1$

$$\begin{aligned} \hat{v}_{reg}(\chi) &\approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+2q-1)!}{(k+q)!} \chi^k \\ &\approx \begin{cases} \frac{1}{\chi^q (1-\chi)^q} & \text{für } q \geq 1 \\ \ln(1-\chi) & \text{für } q = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Die Lösungen mit Konvergenzradius ∞

Konvergiert $\frac{a_{k+1}^{(-1)}}{a_k^{(-1)}}$ gegen 0, so konvergiert $\frac{a_{k+1}^{(-1)}}{a_k^{(-1)}}$ auch mit $\frac{1}{k^2}$ gegen 0. Denn ein Ansatz

$$\frac{a_{k+1}^{(-1)}}{a_k^{(-1)}} = \frac{b}{k+a}$$

eingesetzt in Gleichung (32) führt zum Widerspruch. Wir machen einen Ansatz

$$\frac{a_{k+1}^{(-1)}}{a_k^{(-1)}} = \frac{-2\beta}{(k+a)(k+b)} ,$$

und bestimmen a, b so, daß Gleichung (32) bis auf Terme der Ordnung $O(k^{-3})$ erfüllt ist. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} a &= q + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\tilde{\alpha} , \\ b &= q + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\tilde{\alpha} , \\ \tilde{\alpha} &= \sqrt{(1+2j)^2 - 4\beta} . \end{aligned}$$

Die Koeffizienten des Ansatzes sind allerdings durch eine Entwicklung bis zur Ordnung $O(k^{-3})$ nicht eindeutig bestimmbar. Denn es gilt

$$\frac{1}{(k+a)(k+b)} - \frac{1}{(k+c)(k+d)} = \frac{a+b-c-d}{k^3} + O(k^{-4}).$$

Durch diese asymptotische Entwicklung können wir daher nur die relative Phase der Hankelfunktionen, nicht aber ihre Parameter (wie in Anhang B.1) bestimmen. Wegen

$$\frac{1}{(k+a)(k+b)} - \frac{1}{(k+1)(k+2q+2)} = O(k^{-4})$$

gilt asymptotisch

$$\begin{aligned} a_k^{(-1),\infty} &\approx \frac{(-2\beta)^k}{k!\,(k+2q+1)!} , \\ \hat{v}_{reg}(\chi) &\approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2\beta)^k}{k!(k+2q+1)!}\,\chi^k \\ &\approx \frac{1}{(2\beta\chi)^{q+\frac{1}{2}}}\, J(1+2q\,|2\sqrt{2\beta}\,\sqrt{\chi}) . \end{aligned}$$

B.4.2 Die Entwicklung um $\zeta = 0$, $z = 1$

Setzt man den Ansatz (25) in die Differentialgleichung (19) ein, erhält man für $E \neq 0$ als Rekursionsrelation der Koeffizienten $(a_k^{(1)})_{k \geq j+1}$

$$\begin{aligned} a_1^{(1)} &= -\frac{\mu+\beta}{q+1}\, a_0^{(1)} , \\ \frac{a_{k+1}^{(1)}}{a_k^{(1)}} &= -\frac{k(k+2q+1)+\mu+\beta}{(k+1)(k+q+1)} - \frac{2\beta}{(k+1)(k+q+1)}\,\frac{a_{k-1}^{(1)}}{a_k^{(1)}} . \end{aligned} \tag{33}$$

Man erkennt, daß nur Lösungen mit

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}^{(1)}}{a_k^{(1)}} = \begin{cases} -1 & \text{Konvergenzradius } 1 \\ 0 & \text{Konvergenzradius } \infty \end{cases}$$

möglich sind. Ist $(a_k^{(-1)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Lösung der Rekursionrelation (32) zu den Parametern (j,q,β), dann ist $(a_k^{(1)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k^{(1)} := (-1)^k\, a_k^{(-1)}$ eine Lösung von Rekursionsrelation (33) zu $(j,q,-\beta)$.
Man erhält daher die asymptotischen Entwicklungen der Lösungen aus denen aus Anhang B.4.1, indem man (formal) β durch $-\beta$ und χ durch $-\zeta$ ersetzt.

B.5 Die singulären Lösungen im Fall $E \neq 0$

B.5.1 Die Entwicklung um $\chi = 0$, $z = -1$

Setzt man Ansatz (24) in die Differentialgleichung (20) ein, erhält man für $E \neq 0$ als Rekursionsrelation der Koeffizienten $(b_k^{(-1)})_{k\geq j+1}$

$$\begin{aligned}
\frac{b_{k+q+1}^{(-1)}}{b_{k+q}^{(-1)}} &= \frac{k(k+2q+1)+\mu-\beta}{(k+1)(k+q+1)} + \frac{2\beta}{(k+1)(k+q+1)}\,\frac{b_{k+q-1}^{(-1)}}{b_{k+q}^{(-1)}} \\
&\quad + \frac{2k+q+2}{(k+1)(k+q+1)}\,\frac{a_k^{(-1)}}{b_{k+q}^{(-1)}}\left(\frac{k+q+\frac{1}{2}}{k+\frac{q}{2}+1} - \frac{a_{k+1}^{(-1)}}{a_k^{(-1)}}\right) \\
&= 1 + \frac{q-1}{k+q+1} + \frac{\mu-\beta-2q}{(k+1)(k+q+1)} + \frac{2\beta}{(k+1)(k+q+1)}\,\frac{b_{k+q-1}^{(-1)}}{b_{k+q}^{(-1)}} \\
&\quad + \frac{2k+q+2}{(k+1)(k+q+1)}\,\frac{a_k^{(-1)}}{b_{k+q}^{(-1)}}\left(\frac{k+q+\frac{1}{2}}{k+\frac{q}{2}+1} - \frac{a_{k+1}^{(-1)}}{a_k^{(-1)}}\right)\,, \qquad (34)
\end{aligned}$$

wobei $b_{-1}^{(1)} = 0$ für $q = 0$ zu setzen ist.

Die Lösungen mit Konvergenzradius 1

Zunächst wählen wir die Koeffizienten $(a_k^{(-1),1})_{k\geq 0}$ der regulären Lösung mit Konvergenzradius 1.
Konvergiert $\frac{b_{k+1}^{(-1)}}{b_k^{(-1)}}$ gegen eine reelle Zahl $\neq 0$, dann ist der vierte Term auf der rechten Seite von Gleichung (34) von der Ordnung $O(k^{-2})$. Der entscheidende Term ist der fünfte. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{2k+q+2}{(k+1)(k+q+1)}\,\frac{a_k^{(-1)}}{b_{k+q}^{(-1)}}\left(\frac{k+q+\frac{1}{2}}{k+\frac{q}{2}+1} - \frac{a_{k+1}^{(-1)}}{a_k^{(-1)}}\right) \\
=\ &\left(-\frac{(q-1)}{(k+1)(k+q+1)} + O(k^{-3})\right)\frac{a_k^{(-1)}}{b_{k+q}^{(-1)}}\,.
\end{aligned}$$

Für $q \neq 1$ bei einem Verhalten

$$\frac{a_k^{(-1)}}{b_{k+q}^{(-1)}} \leq \gamma\, k^\delta + \underbrace{P(k)}_{deg(P)\leq\delta-1}$$

muß $\delta \leq 2$ gelten, da sich andernfalls ein Konvergenzradius von 0 ergäbe (im Widerspruch zu Anhang A). Für $\delta = 2$ folgt aus Gleichung (34), daß $\frac{b_{k+q+1}^{(-1)}}{b_{k+q}^{(-1)}}$ gegen $1-\gamma(q+1)$ konvergiert. Andererseits gilt

$$\frac{b_{k+q+1}^{(-1)}}{b_{k+q}^{(-1)}} = \frac{a_{k+1}^{(-1)}}{a_k^{(-1)}} \frac{1+\frac{P(k)}{k^\delta}}{(1+\frac{1}{k})^\delta + \frac{P(k+1)}{k^\delta}} \overset{k\to\infty}{\to} 1 \ .$$

Also gilt $\delta = 1$ und $\gamma \neq 0$. Aus Gleichung (34) folgt dann

$$\frac{b_{k+q+1}^{(-1)}}{b_{k+q}^{(-1)}} = 1 + \frac{(1-\gamma)\,(q-1)}{k+q+1} + o(k^{-2}) \ .$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}\frac{b_{k+q+1}^{(-1)}}{b_{k+q}^{(-1)}} &= \frac{a_{k+1}^{(-1)}}{a_k^{(-1)}} \left(1 - \frac{1}{k} + O(k^{-2})\right) \\ &= 1 + \frac{q-2}{k} + O(k^{-2}) \ .\end{aligned}$$

Für $q \geq 2$ ist $\gamma = \frac{q-2}{q-1}$ und aus Gleichung (34) folgt

$$\begin{aligned}\frac{b_{k+q+1}^{(-1)}}{b_{k+q}^{(-1)}} &= 1 + \frac{q-2}{k+q+1} + o(k^{-2}) \\ &= \frac{k+2q-1}{k+q+1} + o(k^{-2}) \\ \Leftarrow \quad b_{k+q+1}^{(-1),1} &\approx \frac{(k+2q-1)!}{(k+q+1)!} \ .\end{aligned}$$

Wie in Anhang B.4.1 gilt dann asymptotisch

$$\hat{v}_{sing}(\chi) \approx \ln\chi\, \hat{v}_{reg} + \frac{1}{\chi^{2q}(1-\chi)^{q-1}}$$

(zur Betrachtung der Linearkombinationen von $\hat{v}_{sing}$ und $\hat{v}_{reg}$: s. Abschnitt 4.2). Im Fall $q = 0$ sind beide Terme an $\chi = 1$ logarithmisch divergent. Die in $\chi = 1$ reguläre Lösung ergibt sich aus der Linearkombination

$$\hat{v}_{sing}(\chi) - \hat{v}_{reg}(\chi) = \ln(\chi)\ \ln(1-\chi) \ ,$$

und diese Lösung ist eindeutig fortsetzbar in χ auf $(1,\infty)$.
Konvergiert $\frac{b_{k+1}^{(-1)}}{b_k^{(-1)}}$ gegen 0, muß bei einem Verhalten

$$\frac{a_k^{(-1)}}{b_{k+q}^{(-1)}} \;=\; f(k)$$

in

$$\frac{b_{k+q+1}^{(-1)}}{b_{k+q}^{(-1)}} \;=\; \underbrace{\frac{a_{k+1}^{(-1)}}{a_k^{(-1)}}}_{\to 1}\,\frac{f(k)}{f(k+1)} \overset{!}{\to} 0$$

die Funktion f stärker wachsen als ein Polynom, denn andernfalls wäre der Konvergenzradius gleich 1. Genauer muß f mindestens ein Wachstum der folgenden Form aufweisen

$$f(k) \sim e^{\gamma\, k^{\delta}} \qquad \text{mit } \gamma > 0,\ \delta > 1\ .$$

Damit wächst in Gleichung (34) der vierte Term mit $\frac{1}{k^2}\exp\left(\gamma\, k^{\delta}\right)$ der fünfte mit $\frac{1}{k^2}\exp\left(\gamma\left((k+1)^{\delta} - k^{\delta}\right)\right)$. Dann divergiert aber $|\frac{b_{k+1}^{(-1)}}{b_k^{(-1)}}|$, was zu einem Widerspruch führt.

Die Lösungen mit Konvergenzradius ∞

Wir wählen die Koeffizienten $(a_k^{(-1),\infty})_{k\geq 0}$ der regulären Lösung mit Konvergenzradius ∞. Bei einem Verhalten

$$\frac{a_k^{(-1)}}{b_{k+q}^{(-1)}} \;\leq\; \gamma\, k^{\delta} + \underbrace{P(k)}_{deg(P)\leq\delta-1}$$

muß $\delta \leq 1$ gelten, da sich andernfalls ein Konvergenzradius von 0 ergäbe (im Widerspruch zu Anhang A). Für $\delta = 1$ folgt aus Gleichung (34), daß $\frac{b_{k+q+1}^{(-1)}}{b_{k+q}^{(-1)}}$ gegen $1+2\gamma$ konvergiert, was – wie im vorangegangenen Abschnitt – zu einem Widerspruch führt.
Sei $\delta = 0$, konvergiert $\frac{b_{k+q+1}^{(-1)}}{b_{k+q}^{(-1)}}$ gegen 0, so konvergiert $\frac{b_{k+q+1}^{(-1)}}{b_{k+q}^{(-1)}}$ auch mit $\frac{1}{k^2}$ gegen 0. Denn ein Ansatz

$$\frac{b_{k+q+1}^{(-1)}}{b_{k+q}^{(-1)}} \;=\; \frac{b}{k+a}$$

eingesetzt in Gleichung (34) führt zum Widerspruch. Wir machen einen Ansatz

$$\frac{b^{(-1)}_{k+q+1}}{b^{(-1)}_{k+q}} = \frac{-2\beta}{(k+a_\gamma)(k+b_\gamma)} ,$$

und bestimmen a, b so, daß Gleichung (34) bis auf Terme der Ordnung $O(k^{-3})$ erfüllt ist. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} a_\gamma &= q+\frac{3}{2}+\gamma+\frac{1}{2}\hat{\alpha} , \\ b_\gamma &= q+\frac{3}{2}+\gamma-\frac{1}{2}\hat{\alpha} , \\ \hat{\alpha} &= \sqrt{(1+2j)^2-4\beta+4\gamma^2} . \end{aligned}$$

Für $\frac{a^{(-1)}_k}{b^{(-1)}_{k+q}} = o(k^0)$ gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(k+1)(k+2q+2)} \frac{\ln(2\beta)+c-\Psi_0(k+2q+2)-\Psi_0(k+1)}{\ln(2\beta)+c-\Psi_0(k+2q+1)-\Psi_0(k)} \\ &= \frac{1}{k^2}-\frac{2q+3}{k^3}-\frac{2}{k^3\left(\ln(2\beta)+c-\ln(k^2)\right)}+O(k^{-4}) \\ &= \frac{1}{k^2}-\frac{2q+3}{k^3}+o(k^{-4}) \\ &= \frac{1}{(k+a)(k+b)}+o(k^{-4}) , \\ \text{mit}\quad a &= q+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\tilde{\alpha} , \\ b &= q+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\tilde{\alpha} , \\ \tilde{\alpha} &= \sqrt{(1+2j)^2-4\beta} \end{aligned}$$

und dann asymptotisch

$$\begin{aligned} b^{(-1),\infty}_{k+q} &\approx \frac{(-2\beta)^k}{k!\,(k+2q+1)!}\Big(\ln(2\beta)+c-\Psi_0(k+2q+1)-\Psi_0(k)\Big) \\ \hat{v}_{sing}(\chi) &\approx \frac{1}{(2\beta\chi)^{q+\frac{1}{2}}}\Big(\pi\, Y(1+2q|2\sqrt{2\beta}\sqrt{\chi})+c\, J(1+2q|2\sqrt{2\beta}\sqrt{\chi})\Big) . \end{aligned}$$

B.5.2 Die Entwicklung um $\zeta = 0$, $z = 1$

Setzt man Ansatz (26) in die Differentialgleichung (19) ein, erhält man für $E \neq 0$ als Rekursionsrelation der Koeffizienten $(b_k^{(1)})_{k \geq j+1}$

$$\begin{aligned} \frac{b_{k+q+1}^{(1)}}{b_{k+q}^{(1)}} &= -\frac{k(k+2q+1)+\mu+\beta}{(k+1)(k+q+1)} - \frac{2\beta}{(k+1)(k+q+1)} \frac{b_{k+q-1}^{(1)}}{b_{k+q}^{(1)}} \\ &\quad - \frac{2k+q+2}{(k+1)(k+q+1)} \frac{a_k^{(1)}}{b_{k+q}^{(1)}} \left(\frac{k+q+\frac{1}{2}}{k+\frac{q}{2}+1} + \frac{a_{k+1}^{(1)}}{a_k^{(1)}} \right), \end{aligned} \tag{35}$$

wobei $b_{-1}^{(1)} = 0$ für $q = 0$ zu setzen ist.
Nach Anhang B.4.2 gilt: Ist $(a_k^{(-1)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Lösung der Rekursionrelation (32) zu den Parametern (j, q, β), dann ist $(a_k^{(1)})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_k^{(1)} := (-1)^k \, a_k^{(-1)}$ eine Lösung von Rekursionsrelation (33) zu $(j, q, -\beta)$.
Ist $(b_k^{(-1)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Lösung der Rekursionrelation (34) zu den Parametern (j, q, β) und $(a_k^{(-1)})_{k \in \mathbb{N}}$, dann ist $(b_k^{(-1)})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $b_k^{(1)} := (-1)^k \, b_k^{(-1)}$ eine Lösung von Rekursionsrelation (35) zu $(j, q, -\beta)$ und $(a_k^{(1)})_{k \in \mathbb{N}}$.
Die asymptotische Entwicklung der Potenzreihen ergibt sich dann analog zu Anhang B.5.1.

C Die Nullstellenberechnung

Das MAPLE-Programm zur Nullstellenbrechnung der Kettenbrüche aus Abschnitt 4.2.1 nach dem Gautschi-Algorithmus [Gau67] lautet:

```
> ♯ Parameter;
> ♯ Rechengenauigkeit;
> delta:=10E − 18;
> ♯ Dezimalstellen;
> Digits:=20;
> ♯ Schrittweite bei der Nullstellensuche;
> iter:=200;
> ♯ Schrittbreite bei der Nullstellensuche;
> width:=2;
> ♯ Kettenbruch mit umgeordneten Koeffizienten;
> F:=proc(beta,j,q)
  global delta:
  local i,f,y:
    unassign('x'):
    f[1]:=0: y[1]:=0: y[2]:=1:
    for i from 1 by 1 while abs(y[1]-y[2])>delta do
      f[2]:=2*beta*x*(x+q)/
```

```
        (x*(x+2*q+1)+q*(q+1)-j*(j+1)-beta+subs(x=x+1,f[1])):
      y[1]:=y[2]: y[2]:=traperror(evalf(subs(x=1,f[2]))):
      if y[2]='division by zero' then y[2]:=y[1]+10 fi:
      f[1]:=f[2]
    od:
    q*(q+1)-j*(j+1)-beta+y[2];
  end;
> ♯ Intervallschachtelung;
> NN:=proc(a,b,fa,fb,j,q)
  global fd,delta:
  local i,aus,p1,p2,p3,f1,f2,f3:
    p1:=a: p2:=b: f1:=fa: f2:=fb: aus:=0:
    for i from 0 while aus=0 do
      p3:=(p1+p2)/2: f3:=F(p3,j,q):
      if f1*f3<0 then p2:=p3: f2:=f3: fi:
      if f1*f3>=0 then p1:=p3: f1:=f3: fi:
      if abs(p1-p2)<delta or (f3=0) then aus:=1 fi:
    od:
    fprintf(fd,'%.14f',evalf(p3)):
    if abs(f3)>1 then fprintf(fd,' POL') fi:
    fprintf(fd,'\n'):
  end;
> ♯ Nullstellensuche;
> fd:=fopen(result,WRITE,TEXT);
> fprintf(fd,'%f\n%e\n',Digits,delta);
> for j from 0 to 10 do
    for q from 0 to trunc(j/2) do
      a:=0: b:=a+width: fb:=F(b,j,q):
      fprintf(fd,'%f\n%f\n',j,q):
      for m from 0 to iter do
        a:=b: b:=b+width: fa:=fb: fb:=F(b,j,q):
        if fa*fb<0 then NN(a,b,fa,fb,j,q) fi:
      od:
    od:
  od:
  close(fd);
```

D Die Streuphase

Die Streuphase $f(\beta, j, q)$ wird durch Parabeln der Form

$$\beta = a_0(j,q) + a_1(j,q)\, f + a_2(j,q)\, f^2$$

approximiert (vgl. Abschnitt 4.4). Δa_i bestimmt das Konfindenz-Intervall des Parameters a_i, R ist der Regressionskoeffizient des Fits und σ_{est} die empirische Varianz.

(j,q)	a_0	Δa_0	a_1	Δa_1	a_2	Δa_2	R^2	σ^2_{est}
(0,0)	0.78	0.01	6.9	0.01	6.875	0.001	1.000000	0.000
(1,0)	-4.3	0.3	7.0	0.1	6.689	0.010	1.000000	0.035
(2,0)	-0.5	0.5	21.0	0.2	6.858	0.010	1.000000	0.125
(3,0)	11.9	1.0	35.1	0.2	6.843	0.020	0.999999	0.317
(4,0)	32.5	1.5	49.5	0.4	6.807	0.030	0.999999	0.588
(5,0)	61.5	2.0	64.1	0.6	6.764	0.040	0.999998	0.917
(6,0)	99.9	2.4	78.3	0.8	6.748	0.050	0.999998	1.454
(2,1)	-9.5	1.5	14.4	0.4	6.848	0.020	0.999999	0.931
(3,1)	-4.3	2.0	28.6	0.5	6.829	0.035	0.999998	1.380
(4,1)	9.1	2.5	43.0	0.7	6.798	0.040	0.999998	1.871
(5,1)	30.8	4.0	57.6	1.0	6.755	0.050	0.999998	2.294
(6,1)	60.6	4.0	72.4	1.0	6.698	0.060	0.999998	3.690
(7,1)	98.8	4.0	87.5	2.0	6.624	0.100	0.999993	4.378
(8,1)	145.2	5.0	102.8	1.8	6.530	0.130	0.999991	4.842
(4,2)	-9.8	5.0	36.7	1.2	6.772	0.070	0.999990	7.646
(5,2)	4.8	6.0	51.4	1.6	6.728	0.090	0.999990	8.421
(6,2)	27.2	6.0	66.3	2.0	6.667	0.100	0.999986	8.740
(7,2)	57.6	7.0	81.6	2.0	6.587	0.130	0.999984	8.835
(8,2)	96.3	8.0	97.1	2.0	6.486	0.170	0.999982	11.759
(9,2)	143.1	8.1	112.8	2.9	6.360	0.200	0.999981	12.036
(10,2)	198.1	8.5	128.9	3.3	6.203	0.250	0.999980	11.724
(11,2)	261.3	9.0	145.3	3.8	6.008	0.300	0.999980	10.823
(6,3)	1.3	8.0	59.3	2.0	6.710	0.100	0.999980	28.852
(7,3)	16.4	12.0	78.3	4.2	6.328	0.300	0.999936	26.754
(8,3)	57.2	10.0	89.4	5.0	6.592	0.140	0.999977	23.861
(9,3)	97.0	10.0	104.9	3.0	5.508	0.160	0.999975	21.205
(10,3)	141.0	11.0	122.5	4.0	6.251	0.260	0.999964	28.844
(11,3)	196.5	12.0	138.9	4.0	6.082	0.320	0.999964	27.549
(12,3)	262.9	13.0	154.1	4.2	6.020	0.330	0.999967	28.066
(13,3)	335.1	12.5	170.9	4.8	5.810	0.390	0.999968	25.460
(8,4)	-15.9	10.0	89.0	3.0	6.158	0.250	0.999964	71.621
(9,4)	35.9	19.0	106.8	7.0	5.815	0.600	0.999858	61.333
(10,4)	74.3	20.0	124.2	8.0	5.515	0.700	0.999869	53.054
(11,4)	120.4	20.0	142.3	9.0	5.128	0.900	0.999881	44.768
(12,4)	193.8	17.0	149.0	5.0	5.967	0.380	0.999941	58.679
(13,4)	258.0	18.0	166.0	6.0	5.752	0.450	0.999942	53.675
(14,4)	330.3	17.0	183.4	7.0	5.492	0.540	0.999945	47.529
(15,4)	410.9	18.0	201.1	7.0	5.177	0.650	0.999949	40.464
(10,5)	45.5	11.0	108.7	5.0	6.383	0.250	0.999913	150.416
(11,5)	87.3	20.0	124.6	5.0	6.278	0.280	0.999917	137.844
(12,5)	136.5	21.0	140.9	6.0	6.147	0.300	0.999919	129.137
(13,5)	193.6	21.0	157.6	6.0	5.990	0.350	0.999920	120.870
(14,5)	258.6	22.0	174.6	6.5	5.802	0.400	0.999922	111.764
(15,5)	331.7	20.0	191.9	8.0	5.579	0.500	0.999924	101.370
(12,6)	77.0	25.0	136.0	8.0	6.087	0.400	0.999848	270.145
(13,6)	127.3	28.0	152.6	8.0	5.936	0.500	0.999858	240.000
(14,6)	184.8	30.0	169.7	8.0	5.751	0.500	0.999865	216.341
(15,6)	250.1	28.0	187.2	8.0	5.528	0.500	0.999871	195.023
(16,6)	323.3	25.0	205.1	9.0	5.263	0.700	0.999878	173.256
(17,6)	404.4	29.0	223.4	10.0	4.947	0.800	0.999886	150.852

Die Koeffizienten $(a_i(j,q))_{i=1,2}$ werden durch Graphen der Form

$$\begin{aligned} a_0(j,q) &= a_{00}(q) + a_{01}(q)j + a_{02}(q)j^2 \ , \\ a_1(j,q) &= a_{10}(q) + a_{11}(q)j \end{aligned}$$

gut approximiert.

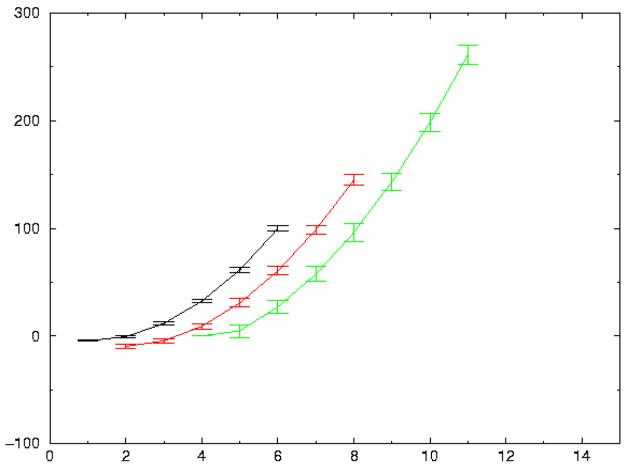

Abbildung 2: Die Koeffizienten $a_0(j,0), a_0(j,2), a_0(j,2)$

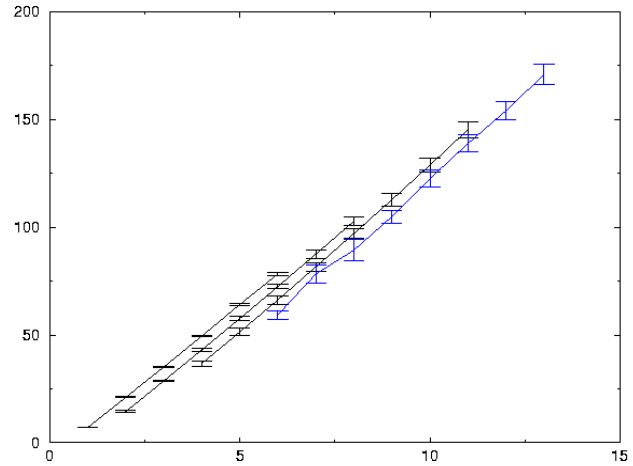

Abbildung 3: Die Koeffizienten $a_1(j,0), a_0(j,2), a_0(j,2), a_0(j,3)$

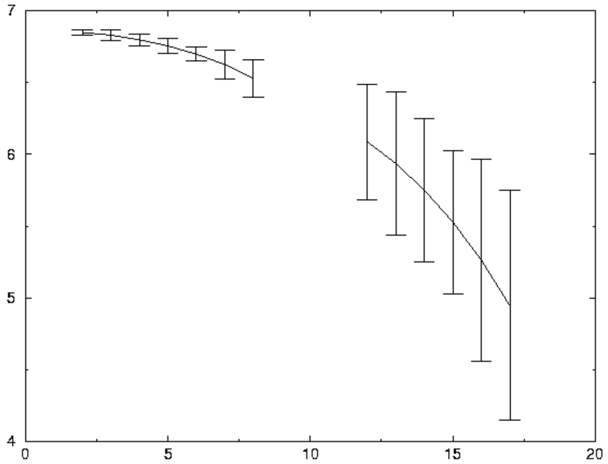

Abbildung 4: Die Koeffizienten $a_2(j,2), a_2(j,6)$

q	a_{00}	a_{01}	a_{02}	a_{10}	a_{11}
0	0.64	-9.13	4.28	-7.52	14.29
1	4.90	-15.44	4.12	-15.60	14.73
2	42.61	-29.23	4.47	-26.30	15.51
3	28.10	-29.26	4.07	-35.21	15.78
4	-94.25	-16.59	3.35	-32.74	15.48
5	62.09	-40.88	3.92	-58.39	16.65
6	61.12	-41.20	3.92	-74.54	17.49

Der Koeffizient $a_2(j,q)$ beschreibt eine monoton fallende Funktion in j für festes q. Die Graphen von $a_2(j,2)$ und $a_2(j,6)$ haben wir in einer Abbildung dargestellt. Die Abbildung zeigt den typischen Verlauf von $a_2(j,q)$.
Die Abhängigkeit der Koeffizienten $a_{10}(q), a_{11}(q)$ ist linear in q.
Für die Koeffizienten $a_{00}(q)$, $a_{01}(q)$, $a_{02}(q)$ konnte keine Abhängigkeit von q festgestellt werden.

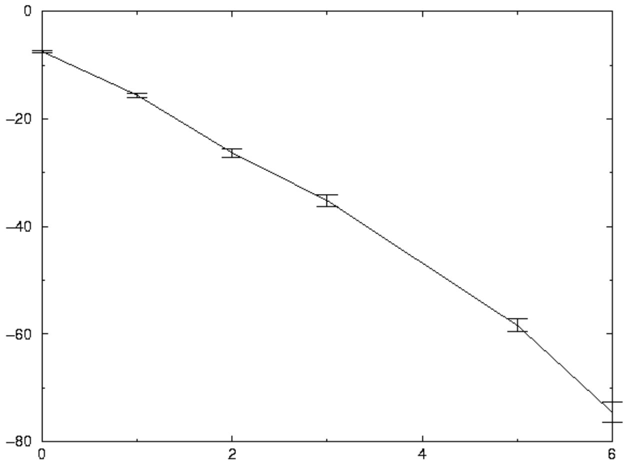

Abbildung 5: Der Koeffizient $a_{10}(q)$

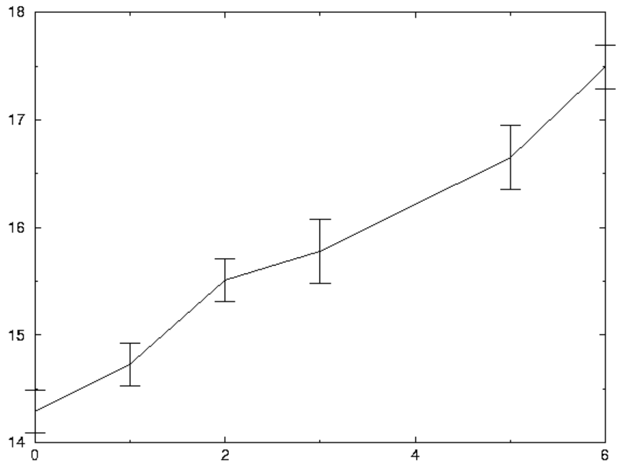

Abbildung 6: Der Koeffizient $a_{11}(q)$

Literatur

[Asp96] P. S. Aspinwall. K3 surfaces and string duality. 1996. hep-th/9611137.

[BFRM95] M. Bianchi, F. Fucito, G. C. Rossi, and M. Martellini. ALE instantons in string effective theory. *Nucl. Phys.*, B440:129, 1995.

[BGPP78] V. A. Belinsky, G. W. Gibbons, D. N. Page, and C. N. Pope. Asymptotically Euclidean Bianchi IX metrics in quantum gravity. *Phys. Lett.*, B76:433, 1978.

[Boz88] Y. D. Bozhkov. A construction of almost anti-selfdual connections on Kummer surfaces. *SERIDCA Bulg. math. pub.*, 14:283, 1988.

[Can87] P. Candelas. Lectures on complex manifolds. *Proceedings*, Superstrings '87:1, 1987. Trieste 1987 Spring School.

[CL55] E. A. Coddington and N. Levinson. Theory of ordinary differential equations. 1955. New York, USA: McGraw-Hill 429 P. (International Series in Pure and Applied Mathematics).

[EF99] R. Estrada and S. A. Fulling. Distributional asymptotic expansions of spectral functions and of the associated Green kernels. *Electron. J. Differ. Equ.*, 7, 1999.

[EH78] T. Eguchi and A. J. Hanson. Asymptotically flat selfdual solutions to Euclidean gravity. *Phys. Lett.*, B74:249, 1978.

[EH79] T. Eguchi and A. J. Hanson. Selfdual solutions to Euclidean gravity. *Ann. Phys.*, 120:82, 1979.

[Gau67] W. Gautschi. Computational aspects of three-term recurrence relations. *SIAM Review*, 9:24, 1967.

[GH78] G. W. Gibbons and S. W. Hawking. Gravitational multi - instantons. *Phys. Lett.*, B78:430, 1978.

[Gil84] P. B. Gilkey. Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer index theorem. 1984. Wilmington, USA: Publish or Perish 349 P.

[GM86] G. W. Gibbons and N. S. Manton. Classical and quantum dynamics of BPS monopoles. *Nucl. Phys.*, B274:183, 1986.

[Gre96] B. R. Greene. String theory on Calabi-Yau manifolds. 1996. hep-th/9702155.

[Hen91] P. Henrici. Applied and computational complex analysis. Vol. II, 1991. New York, USA: John Wiley & Sons 662 P.

[HP78] S. W. Hawking and C. N. Pope. Symmetry breaking by instantons in supergravity. *Nucl. Phys.*, B146:381, 1978.

[JT80a] A. Jaffe and C. H. Taubes. Vortices and monopoles - Structure of static gauge theories. 1980. Boston, USA: Birkhäuser 287 P. (Progress in Physics, 2).

[JT80b] W. B. Jones and W. J. Thron. Continued fractions: Analytic theory and applications. 1980. Massachusetts, USA: Addison-Wesley 428 P. (Encyclopedia of mathematics and its applications).

[Lüt88] C. A. Lütken. Geometry of the Z-fold. *J. Phys.*, A21:1889, 1988.

[MS71] P. Moon and D. E. Spencer. Field theory handbook. 1971. Berlin, Germany: Springer 236 P.

[OY96] H. Ooguri and Z. Yin. Tasi lectures on perturbative string theories. 1996.

[Pag78] D. N. Page. A physical picture of the K3 gravitational instanton. *Phys. Lett.*, B80:55, 1978.

[Per77] O. Perron. Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band II, 1977. Darmstadt, Deutschland: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 314 P.

[Pol98] J. Polchinski. String theory. Vol. II, 1998. Cambridge, UK: Cambridge University Press 531. P.

[Pra79] M. K. Prasad. Equivalence of Eguchi-Hanson metric to two-center Gibbons-Hawking metric. *Phys. Lett.*, B83:310, 1979.

[Rab72] A. L. Rabenstein. Introduction to ordinary differential equations. 1972. New York, USA: Academic Press 526 P.

[Tau81] C. H. Taubes. The existence of multi-monopole solutions to the nonabelian, Yang-Mills Higgs equations for arbitrary simple gauge groups. *Commun. Math. Phys.*, 80:343, 1981.

[Tau82] C. H. Taubes. Self-dual Yang-Mills connections on non-self-dual 4-manifolds. *J. Diff. Geom.*, 17:139, 1982.

[Wal88] M. A. Walton. The heterotic string on the simplest Calabi-Yau manifold and its orbifold limits. *Phys. Rev.*, D37:377, 1988.

[Wil28] A. H. Wilson. A generalized spheroidal wave function. *Proc. Soc. London*, A118:617, 1928.

[Yau77] S. T. Yau. Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, 74:1798, 1977.