Randstörungen unitärer Virasoro minimaler Modelle

von
Daniel Roggenkamp

Diplomarbeit in Physik
angefertigt im
Physikalischen Institut

vorgelegt der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu Bonn

Bonn, August 2000

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Untersuchung konformer Feldtheorien auf Flächen mit Rändern wurde von Cardy in der Mitte der 1980er Jahre begonnen [24, 25, 26]. In der Folgezeit wurde sie nicht zuletzt wegen ihrer zahlreichen Anwendungen auf kritische Systeme in zwei Dimensionen, wie integrable Gittermodelle [70, 17], "quantum impurity problems" [2, 6, 1], Quantenkabel [80], dissipative Quantensysteme [22] etc. weiterentwickelt. Ende der 1980er Jahre begann man damit, die Methoden der konformen Feldtheorie auf Flächen mit Rändern zur Beschreibung offener Strings zu verwenden [69, 19] und sie auf die Behandlung nicht orientierbarer Flächen auszudehnen, die in bestimmten offenen Stringtheorien als Weltflächen auftreten [59, 50, 21, 60, 39]. Einen großen Schub erhielt die Entwicklung dieses Gebiets mit der Entdeckung der D-branes und ihrer Bedeutung für die Stringtheorie. D-branes sind nicht-perturbative, höherdimensionale, dynamische Objekte in der Stringtheorie, auf denen offene Strings enden können. Daher werden sie in der Weltflächenbeschreibung der offenen Strings gerade durch die darin auftretenden Randbedingungen charakterisiert. Während man im geometrischen Zielraumzugang zur Beschreibung von D-branes zunächst einmal nur von Torus- und Orbifold-Modellen ausgehen kann, bietet der Weltflächenzugang die Möglichkeit, Aspekte von D-branes aufzudecken, die in diesen einfachen Modellen nicht auftreten oder keine geometrische Beschreibung besitzen. Die Entdeckung von D-branes mit nicht-kommutativen Weltvolumina [71, 10] ist ein gutes Beispiel dafür. Die Analyse konformer Feldtheorien auf Flächen mit Rändern ist also aus vielen Gründen interessant. Zum einen sind konforme Feldtheorien in zwei Dimensionen neben freien Theorien die am besten verstandenen und am rigorosesten formulierten Quantenfeldtheorien, so daß das Studium von Randeffekten in diesen Theorien ein guter Ansatzpunkt für das Verständnis von Randeffekten in allgemeinen Quantenfeldtheorien bieten kann. Auf der anderen Seite stehen natürlich die oben schon erwähnten Anwendungen auf zwei-dimensionale statistische Systeme und die offenen Stringtheorien. Trotz der regen Forschung auf dem Gebiet der konformen Feldtheorien auf Flächen mit Rändern in den letzten Jahren gibt es immer noch viele offene Fragen und Probleme. Zum Beispiel ist die Klassifikation von Randbedingungen in rationalen konformen Feldtheorien erst in den einfachsten Fällen gelungen [15, 14]. Die Behandlung symmetriebrechender Randbedingungen ist noch kaum entwickelt (siehe aber [41, 42, 20]).

In dieser Arbeit werden Randstörungen konformer Feldtheorien auf Flächen mit Rändern diskutiert. Dies sind Störungen mit auf den Rändern lokalisierten Feldern, den Randfeldern. Sie verändern die lokale Struktur der konformen Feldtheorie im Inneren der Fläche nicht und bieten daher die Möglichkeit, die Verbindung verschiedener Randbedingungen einer konformen Feldtheorie zu studieren. Zum Beispiel gewinnt man in der Anwendung auf zwei-dimensionale statistische Systeme Aussagen über ihre Randphasendiagramme, bzw. die Lage und gegenseitigen Relationen der durch konforme Theorien beschriebenen kritischen Punkte in diesen. Im Falle der Stringtheorie erhält man durch exakt marginale Störungen Beschreibungen von D-brane-Modulräumen und mit Hilfe relevanter Störungen Aussagen über die Tachyon-Kondensation instabiler D-brane Konfigurationen.
In der Arbeit werden insbesondere spezielle Randstörungen unitärer Virasoro minimaler Modelle der A-Serie untersucht. Die Ergebnisse, die in [64] vorgestellt wurden, erscheinen zunächst etwas überraschend. In fast allen Fällen werden im Renormierungsgruppenfixpunkt der Störungen Randbedingungen gefunden, die bisher in der konformen Feldtheorie auf Flächen mit Rändern und ihren Anwendungen im Bereich der statistischen Systeme kaum diskutiert wurden. Diese Randbedingungen entsprechen Superpositionen der üblichen Randbedingungen. Ihre Randoperatorspektren enthalten mehrere Randfelder der konformen Dimension null. Das deutet darauf hin, daß sie in den entsprechenden statistischen Systemen Phasenübergänge erster Ordnung beschreiben, in denen ohne äußeres Randfeld und bei ungeordneter Phase im Inneren des Systems eine langreichweitige Ordnung auf dem Rand vorhanden ist. Dies wurde für den Fall des trikritischen Ising-Modells kürzlich in [4] diskutiert. (In der Tat wurde schon in [29] über die entsprechende superpositionierte Randbedingung im trikritischen Ising-Modell berichtet.)
Ein Grund dafür, daß Superpositionen einfacher Randbedingungen in der konformen Feldtheorie bisher kaum beachtet wurden, könnte die Vermutung sein, daß sie gewisse Konsistenzbedingungen nicht erfüllen. Es scheint jedoch, daß die in [36] vorgeschlagenen Methoden zur Lösung dieser Konsistenzbedingungen auch auf Superpositionen verallgemeinert werden können.
In der Stringtheorie wurden Superpositionen identischer D-branes schon früh diskutiert. Man führte sie zunächst ein, um nichttriviale Eichgruppen in der offenen Stringtheorie zu erzeugen. Allerdings wurde dabei wenig Gewicht auf die Beschreibung der D-branes als Superpositionen von Randbedingungen gelegt. Es ist in der Tat auch fraglich, ob Superpositionen gleicher Randbedingungen, wie sie zur Beschreibung von Überlagerungen identischer D-branes nötig wären, in der konformen Feldtheorie tatsächlich natürliche Randbedingungen sind (solche tauchen zumindest in den berechneten Beispielen nicht als gestörte Randbedingungen auf). Das Verhältnis von superpositionierten Randbedingungen und D-brane-Bindungszuständen sollte aber näher untersucht werden.

Diese Arbeit ist wie folgt gegliedert. Im zweiten Kapitel werden kurz einige Grundlagen der konformen Feldtheorie auf geschlossenen Flächen diskutiert. Es gilt im wesentlichen der Vorstellung bestimmter im folgenden verwendeter Notationen. Im dritten Kapitel werden konforme Feldtheorien auf Flächen mit Rändern diskutiert. Kapitel 4 enthält einige allgemeine Aussagen über Randstörungen konformer Feldtheorien und die verwendeten Renormierungsmethoden. In Kapitel 5 werden schließlich Randstörungen der unitären Virasoro minimalen Modelle der A-Serie berechnet. Der überwiegende Teil der dazu durchgeführten Rechnungen findet sich im Anhang.

Danksagung
Ich danke Werner Nahm und Andreas Recknagel für ihre Zusammenarbeit und viele Anregungen. Ferner danke ich den anderen Mitgliedern der Arbeitsgruppe für nützliche Diskussionen.

Kapitel 2

Konforme Feldtheorie auf geschlossenen Flächen

In diesem Kapitel werden kurz einige Grundlagen der konformen Feldtheorie vorgestellt. Da es im wesentlichen dazu dienen soll, bestimmte, im Zusammenhang mit der Beschreibung konformer Feldtheorien auf Flächen mit Rändern gebrauchte Konzepte dar- und Notationen vorzustellen, wird hier auf Ausführlichkeit wenig Wert gelegt. Auch wird auf die axiomatische Einführung der Begriffe verzichtet, da der axiomatische Zugang zur konformen Feldtheorie auf Flächen mit Rändern noch kaum entwickelt ist. Für eine Einführung in die konforme Feldtheorie verweise ich aber auf [48, 30, 58, 44, 23, 12].

2.1 Konforme Symmetrie

Eine (Quanten-) Feldtheorie auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ mit Metrik g nennt man konform, falls sie kovariant unter konformen Transformationen ist. Konforme Transformationen sind dabei Diffeomorphismen $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, für die es ein $\Omega : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^{>0}$ gibt, so daß gilt

$$f^* g = \Omega g \,. \tag{2.1}$$

In der (Quanten-) Feldtheorie sind jedoch nicht nur globale Symmetrien von Bedeutung. Eine große Rolle spielen auch infinitesimale Symmetrietransformationen, die Noetherströme liefern. Man ist also nicht nur an konformen Transformationen interessiert, sondern auch an konformen Killingfeldern K, die die Gleichung

$$g(D_X K, Y) + g(X, D_Y K) = \kappa g(X, Y) \tag{2.2}$$

für ein $\kappa : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ und den Levi-Civita-Zusammenhang D zu g erfüllen.
Es stellt sich nun heraus, daß für $\dim(\mathcal{M}) = 2$ die Algebra der lokalen konformen Killingfelder unendlichdimensional ist. Dieser Fall, der im folgenden immer gemeint ist, wenn von einer konformen (Quanten-) Feldtheorie die Rede ist, ist daher besonders interessant. Zunächst einmal wird $\mathcal{M} = \mathbb{CP}^1$ als Kompaktifizierung des flachen $\mathbb{R}^2$ betrachtet. Die

Gruppe der globalen konformen Transformationen ist dann gegeben durch $\mathrm{PSl}(2,\mathbb{C})$, die durch

$$z \mapsto \frac{az+b}{dz+d}\,, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSl}(2,\mathbb{C})\,, \tag{2.3}$$

auf $\mathbb{CP}^1$ operiert.
Komplexifizierte Killingfelder werden durch holomorphe und antiholomorphe Transformationen $\epsilon, \bar{\epsilon} : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ repräsentiert:

$$K_{\epsilon,\bar{\epsilon}} = \epsilon(z)\frac{\partial}{\partial z} + \bar{\epsilon}(\bar{z})\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\,. \tag{2.4}$$

Es ist zu beachten, daß nur Killingfelder K_{ϵ,ϵ^*} die reelle Struktur respektieren und damit Killingfelder der physikalischen Mannigfaltigkeit sind, die durch $\bar{z} = z^*$ definiert ist. Die Algebra der komplexifizierten Killingfelder hat die Basis

$$l_n := -z^{1-n}\frac{\partial}{\partial z} \quad \bar{l}_n := -\bar{z}^{1-n}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad n \in \mathbb{Z}\,, \tag{2.5}$$

die folgende Vertauschungsrelationen erfüllen:

$$[l_n, l_m] = (n-m)l_{n+m}\,, \quad [\bar{l}_n, \bar{l}_m] = (n-m)\bar{l}_{n+m}\,, \quad [l_n, \bar{l}_m] = 0\,. \tag{2.6}$$

Man nennt den von den l_n bzw. $\bar{l}_n$ erzeugten Teil dieser Algebra auch Witt-Algebra. Es ist zu beachten, daß die Kombinationen

$$\tilde{l}_n^+ := l_n + \bar{l}_n\,, \quad \tilde{l}_n^- := i(l_n - \bar{l}_n) \tag{2.7}$$

Generatoren der Killingfelder der physikalischen Mannigfaltigkeit sind. Insbesondere entspricht die von den $\tilde{l}_0^\pm$, $\tilde{l}_{\pm 1}^\pm$ erzeugte Unteralgebra über $\mathbb{R}$ der Liealgebra $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ von globalen konformen Transformationen der physikalischen Manngifaltigkeit.
In der Quantenfeldtheorie ist die relevante Algebra aber eine zentrale Erweiterung der Wittalgebra, die Virasoro-Algebra $\mathcal{V}\mathrm{ir}_c$ mit Basis L_n, $n \in \mathbb{Z}$, der zentralen Ladung c und den Vertauschungsrelationen

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0}\,. \tag{2.8}$$

Man erhält also die Algebra $\mathcal{V}\mathrm{ir}_c \oplus \overline{\mathcal{V}\mathrm{ir}_{\bar{c}}}$ als Unteralgebra der Symmetriealgebra einer konformen Feldtheorie auf $\mathbb{CP}^1$.
In Quantenfeldtheorien ist der symmetrische Energie-Impuls-Tensor T_{ij} der Generator der lokalen Koordinatentransformationen und insbesondere erhaltener Noetherstrom. In konform invarianten Theorien ist er spurfrei. Dies führt in konform invarianten Theorien auf $\mathbb{CP}^1$ dazu, daß man ihn in den Koordinaten $z = x + iy$ schreiben kann als

$$T(z,\bar{z}) = T_{zz}(z)\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z + T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z})\mathrm{d}\bar{z} \otimes \mathrm{d}\bar{z} =: T(z)\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z + \overline{T}(\bar{z})\mathrm{d}\bar{z} \otimes \mathrm{d}\bar{z}\,, \tag{2.9}$$

und es gilt

$$T(z) = \sum_n z^{-n-2}L_n\,, \quad \overline{T}(\bar{z}) = \sum_n \bar{z}^{-n-2}\overline{L}_n\,. \tag{2.10}$$

2.2 Eigenschaften konformer Feldtheorien

Es wird eine konforme Feldtheorie mit Symmetrie- oder Observablenalgebra $\mathcal{W} \oplus \overline{\mathcal{W}}$, $[\mathcal{W}, \overline{\mathcal{W}}] = 0$ betrachtet. Diese Algebra besitzt, wie oben diskutiert, einen geometrischen Anteil $\mathcal{V}\mathrm{ir}_c \oplus \overline{\mathcal{V}\mathrm{ir}}_{\bar{c}}$, mit $\mathcal{V}\mathrm{ir}_c \subset \mathcal{W}$, $\overline{\mathcal{V}\mathrm{ir}}_{\bar{c}} \subset \overline{\mathcal{W}}$, $c = \bar{c}$. ($c - \bar{c} = 0 \bmod 24$ folgt aus der unten diskutierten modularen Kovarianz. Fordert man die Invarianz der Zwei-Punkt-Funktionen aller Komponenten des Energie-Impuls-Tensors unter der Invarianz-Gruppe der Metrik, so folgt $c = \bar{c}$ [48].)
Die zusätzlichen Ströme W, $\overline{W}$ haben Modenentwicklungen

$$W(z) = \sum_n z^{-n-h_W} W_n \,, \quad \overline{W}(\bar{z}) = \sum_n \bar{z}^{-n-h_{\overline{W}}} \overline{W}_n \,. \tag{2.11}$$

Für diese Moden gilt

$$[L_n, W_m] = ((h_W - 1)n - m)\, W_{n+m} \,, \tag{2.12}$$

$$\left[\overline{L}_n, \overline{W}_m\right] = \left((h_{\overline{W}} - 1)n - m\right) \overline{W}_{n+m} \,. \tag{2.13}$$

Der Hilbertraum $\mathcal{H}$ der Theorie trägt eine Darstellung von $\mathcal{W} \oplus \overline{\mathcal{W}}$ und läßt sich als direkte Summe aus Tensorprodukten von $\mathcal{W}$- und $\overline{\mathcal{W}}$-Moduln schreiben:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i,j} V_i \otimes \overline{V}_j \,. \tag{2.14}$$

Im folgenden wird angenommen, daß die V_i, $\overline{V}_i$ irreduzibel und L_0 bzw. $\overline{L}_0$ auf diesen diagonalisierbar sind. Da $L_0 + \overline{L}_0 - \frac{c}{12}$ der Hamiltonoperator der Theorie auf dem Zylinder ist und nach unten beschränkt sein soll, fordert man ferner, daß die V_i, $\overline{V}_i$ Höchstgewichtsdarstellungen von $\mathcal{W}$, $\overline{\mathcal{W}}$ sind. Das bedeutet, daß V_i durch Wirkung der Darstellung von $\mathcal{W}$ auf einen einzigen Vektor $v_i \in V_i$ erzeugt wird, der ferner die Eigenschaften

$$W_n(v_i) = 0 \,, \quad \forall n > 0 \,, W \in \mathcal{W} \tag{2.15}$$

hat. V_i ist jedoch nicht frei erzeugt, sondern es müssen Relationen R der Algebra aus dem freien Erzeugnis herausdividiert werden. Die Vektoren Rv_i nennt man Nullvektoren.
Ferner besitzen die V_i eine durch L_0 gegebene $\mathbb{N}_0$-Graduierung. Die L_0-Eigenwerte h_i der v_i nennt man konforme Dimension der Moduln V_i. Die Unteralgebra $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}$ der Null-Moden der chiralen Algebra $\mathcal{W}$ besitzt auf jedem Unterraum $V_i^{(n)} \subset V_i$ des Grades n eine Darstellung. Insbesondere ist die Darstellung der Nullmodenalgebra auf dem Höchstgewichtsunterraum $V_i^{(0)}$ irreduzibel.
Es wird ferner die Existenz eines Vakuumsektors $V_0 \otimes \overline{V}_0 \subset \mathcal{H}$ gefordert. Dabei sollen die Höchstgewichtsvektoren v_0, $\overline{v}_0$ von V_0, $\overline{V}_0$ $\mathrm{PSl}(2,\mathbb{C})$-invariant sein, d.h. es soll gelten $L_0(v_0) = L_{\pm 1}(v_0) = 0$, $\overline{L}_0(\overline{v}_0) = \overline{L}_{\pm 1}(\overline{v}_0) = 0$.
Eine konforme Feldtheorie nennt man rational, falls $\mathcal{H}$ nur aus endlich vielen $V_i \otimes \overline{V}_j$ besteht.
Konforme Feldtheorien besitzen ferner eine Feld-Zustands-Identifikation Φ, d.h. die Felder der Theorie und die Elemente des Hilbertraumes stehen in eins-zu-eins Beziehung ($|0\rangle := v_0 \otimes \overline{v}_0$):

$$\Phi(v, z, \bar{z})|0\rangle = e^{zL_{-1} + \bar{z}\overline{L}_{-1}} v \quad v \in \mathcal{H} \,. \tag{2.16}$$

Diese ist insbesondere eine Folge der Existenz eines Vakuumsektors der Theorie und der Operator-Produkt-Entwicklung (OPE),

$$\Phi(u,z,\bar{z})\Phi(v,w,\bar{w}) = \sum_l \frac{C_{uv}^{\ \ l}}{(z-w)^{h_u+h_v-h_l}(\bar{z}-\bar{w})^{\overline{h}_u+\overline{h}_v-\overline{h}_l}}\Phi(l,w,\bar{w})\,, \tag{2.17}$$

die es in konformen Feldtheorien in zwei Dimensionen gibt. Dabei ist die Anzahl der in der Summe vorkommenden Terme mit $h_u + h_v - h_l > 0$ oder $\overline{h}_u + \overline{h}_v - \overline{h}_l > 0$ endlich. Die zu den Höchstgewichtsvektoren $v_i \in V_i$, $\overline{v}_j \in \overline{V}_j$ gehörenden Felder

$$\phi_{ij}(z,\bar{z}) = \Phi(v_i \otimes \overline{v}_j, z, \bar{z}) \tag{2.18}$$

nennt man primär. Für diese folgt insbesondere

$$\begin{aligned} [L_n, \phi_{ij}(z,\bar{z})] &= z^n \left(z\frac{\partial}{\partial z} + (n+1)h_i \right) \phi_{ij}(z,\bar{z})\,, \\ \left[\overline{L}_n, \phi_{ij}(z,\bar{z})\right] &= \bar{z}^n \left(\bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + (n+1)h_j \right) \phi_{ij}(z,\bar{z})\,. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Unter endlichen Koordinatentransformationen $z \mapsto f(z)$, $\bar{z} \mapsto \bar{f}(\bar{z})$ transformieren sich Virasoro-primäre Felder, also solche, die bzgl. der Virasoro-Unteralgebra der Symmetriealgebra primär sind, wie folgt

$$\phi_{ij}(z,\bar{z}) \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{h_i} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{h}_j} \phi_{ij}(f(z),\bar{f}(\bar{z}))\,. \tag{2.20}$$

Die OPE des Energie-Impuls-Tensors mit einem solchen Feld ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T(z)\phi_{ij}(w,\bar{w}) &= \frac{h_i}{(z-w)^2}\phi_{ij}(w,\bar{w}) + \frac{1}{(z-w)}\partial_w\phi_{ij}(w,\bar{w}) + \text{reg}\,, \\ \overline{T}(\bar{z})\phi_{ij}(w,\bar{w}) &= \frac{\bar{h}_j}{(\bar{z}-\bar{w})^2}\phi_{ij}(w,\bar{w}) + \frac{1}{(\bar{z}-\bar{w})}\partial_{\bar{w}}\phi_{ij}(w,\bar{w}) + \text{reg}\,. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Für den Energie-Impuls-Tensor gilt

$$\begin{aligned} T(z) &= \Phi(L_{-2}v_0 \otimes \bar{v}_0, z, \bar{z})\,, \\ \overline{T}(\bar{z}) &= \Phi(v_0 \otimes \overline{L}_{-2}\bar{v}_0, z, \bar{z})\,, \\ T(z)T(w) &= \frac{\frac{c}{2}}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{(z-w)}\partial_w T(w) + \text{reg}\,, \\ \overline{T}(z)\overline{T}(w) &= \frac{\frac{\bar{c}}{2}}{(\bar{z}-\bar{w})^4} + \frac{2}{(\bar{z}-\bar{w})^2}\overline{T}(\bar{w}) + \frac{1}{(\bar{z}-\bar{w})}\partial_{\bar{w}}\overline{T}(\bar{w}) + \text{reg}\,. \end{aligned} \tag{2.22}$$

T und $\overline{T}$ sind also nicht Virasoro-primär. Unter endlichen Koordinatentransformationen $z \mapsto f(z)$, $\bar{z} \mapsto \bar{f}(\bar{z})$ tauchen daher zusätzliche Terme auf:

$$\begin{aligned} T(z) &\mapsto (\partial_z f(z))^2\, T(f(z)) + \frac{c}{12}\{f(z),z\}\,, \\ \overline{T}(\bar{z}) &\mapsto \left(\partial_{\bar{z}} \bar{f}(\bar{z})\right)^2 \overline{T}(\bar{f}(\bar{z})) + \frac{\bar{c}}{12}\{\bar{f}(\bar{z}),\bar{z}\}\,, \end{aligned} \tag{2.23}$$

wobei

$$\{f(z), z\} := \frac{(\partial f)(\partial^3 f) - \frac{3}{2}(\partial^2 f)^2}{(\partial f)^2} \tag{2.24}$$

die Schwarz-Ableitung ist.
Symbolisch wird die OPE im folgenden häufig als

$$\phi_{i\bar{\imath}}(z,\bar{z})\phi_{j\bar{\jmath}}(w,\bar{w}) = \sum_{k\bar{k}} \frac{C_{(i\bar{\imath})(j\bar{\jmath})}^{(k\bar{k})}}{(z-w)^{h_i+h_j-h_k}(\bar{z}-\bar{w})^{h_{\bar{\imath}}+h_{\bar{\jmath}}-h_{\bar{k}}}}\phi_{k\bar{k}}(w,\bar{w}) \tag{2.25}$$

geschrieben, wobei die Summation über die abgeleiteten Felder ("descendants") als implizit verstanden werden soll. Diese Schreibweise macht deshalb Sinn, weil die bei den abgeleiteten Feldern auftauchenden zusätzlichen Konstanten durch die Darstellung der Algebra $\mathcal{W} \oplus \overline{\mathcal{W}}$ bestimmt sind, und damit die für die OPE wichtige Information in den $C_{(i\bar{\imath})(j\bar{\jmath})}^{(k\bar{k})}$ steckt.
Eine konforme Feldtheorie ist durch ihre n-Punkt-Funktionen

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\otimes n} &\rightarrow \mathcal{F}(z_1, \ldots, z_n) \\ u_1 \otimes \ldots \otimes u_n &\mapsto \langle 0|\Phi(u_1,z_1,\bar{z}_1)\ldots\Phi(u_n,z_n,\bar{z}_n)|0\rangle = \langle\Phi(u_1,z_1,\bar{z}_1)\ldots\Phi(u_n,z_n,\bar{z}_n)\rangle \end{aligned} \tag{2.26}$$

bestimmt. Dies sind n-lineare Abbildungen in den Raum $\mathcal{F}(z_1, \ldots, z_n)$ der Abbildungen $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, die reell analytisch außerhalb der partiellen Diagonalen sind und auf den partiellen Diagonalen das singuläre Verhalten einer endlichen Summe von Termen der Form $(z_i - z_j)^r(\bar{z}_i - \bar{z}_j)^{\bar{r}}$ mit $r, \bar{r} < 0$ besitzt. n-Punkt-Funktionen können als radialgeordnete Matrixelemente angesehen werden.
Die Forderung der Kovarianz der n-Punkt-Funktionen unter $\mathcal{W} \oplus \overline{\mathcal{W}}$ liefert nun Differentialgleichungen für diese, die man Ward-Identitäten nennt. Insbesondere folgen aus der PSl(2, $\mathbb{C}$)-Invarianz des Vakuums die folgenden Differentialgleichungen für n-Punkt-Funktionen primärer Felder

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \partial_{z_i} \langle\phi_1(z_1,\bar{z}_1)\ldots\phi_n(z_n,\bar{z}_n)\rangle &= \sum_{i=1}^{n} (z_i\partial_{z_i} + h_i)\langle\phi_1(z_1,\bar{z}_1)\ldots\phi_n(z_n,\bar{z}_n)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(z_i^2\partial_{z_i} + 2z_ih_i\right)\langle\phi_1(z_1,\bar{z}_1)\ldots\phi_n(z_n,\bar{z}_n)\rangle = 0\,. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Analoge Gleichungen erhält man für die antiholomorphen Anteile. Daraus folgt die Form der Eins-, Zwei- und Drei-Punkt-Funktion bis auf Normierung

$$\langle\phi_{i\bar{\imath}}(z,\bar{z})\rangle = 0 \tag{2.28}$$

$$\langle\phi_{i\bar{\imath}}(z,\bar{z})\phi_{j\bar{\jmath}}(w,\bar{w})\rangle = \frac{C_{(i\bar{\imath})(j\bar{\jmath})}\delta_{h_i,h_j}\delta_{h_{\bar{\imath}},h_{\bar{\jmath}}}}{(z-w)^{h_i+h_j}(\bar{z}-\bar{w})^{h_{\bar{\imath}}+h_{\bar{\jmath}}}} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned} &\langle\phi_{i\bar{\imath}}(z_1,\bar{z}_1)\phi_{j\bar{\jmath}}(z_2,\bar{z}_2)\phi_{k\bar{k}}(z_3,\bar{z}_3)\rangle \\ &= \frac{C_{(i\bar{\imath})(j\bar{\jmath})(k\bar{k})}}{(z_1-z_2)^{h_{ijk}}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{h_{\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k}}}(z_1-z_3)^{h_{ikj}}(\bar{z}_1-\bar{z}_3)^{h_{\bar{\imath}\bar{k}\bar{\jmath}}}(z_2-z_3)^{h_{jki}}(\bar{z}_2-\bar{z}_3)^{h_{\bar{\jmath}\bar{k}\bar{\imath}}}}\,, \end{aligned} \tag{2.30}$$

mit $h_{ijk} = h_i + h_j - h_k$.
Neben den aus der $\mathrm{PSl}(2,\mathbb{C})$-Invarianz des Vakuums folgenden Differenzialgleichungen für die n-Punkt-Funktionen, gibt es auch Differentialgleichungen, die aus der Existenz der Algebra-Relationen bzw. Nullvektoren folgen. Diese nennt man verallgemeinerte Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichungen. Offensichtlich entkoppeln holomorphe und antiholomorphe Differentialgleichungen aus Ward-Identitäten und Nullvektoren für Felder $\phi_{i\bar{\imath}}$. Man betrachtet daher zunächst nur die holomorphen Differentialgleichungen, deren Lösungen man konforme Blöcke nennt. n-Punkt-Funktionen setzen sich dann zusammen aus Produkten von holomorphen und antiholomorphen konformen n-Punkt-Blöcken.
Normierungskonstanten der Zwei- und Drei-Punkt-Funktionen und die Form der n-Punkt-Funktionen für $n > 3$ sind durch weitere Bedingungen, die "sewing constraints", eingeschränkt. Diese gewährleisten, daß die konforme Feldtheorie auf beliebigen geschlossenen Flächen mittels Vernähen konsistent definiert werden kann. Zwei Flächen vernäht man um die Punkte $p_1 \in \Sigma_1$, $p_2 \in \Sigma_2$ wie folgt (siehe [74, 75]). Man wählt auf Scheiben mit Radius $r > 1$ Koordinaten z_1, z_2 um p_1, p_2, so daß $z_i(p_i) = 0$ für $i = 1, 2$ gilt. Dann schneidet man Scheiben vom Radius $\frac{1}{r}$ um die p_i heraus und verklebt die Kreisringe $\frac{1}{r} \leq |z_i| \leq r$ mittels $z_1 z_2 = q \in \mathbb{C}$. Die Korrelationsfunktionen auf der vernähten Fläche $\Sigma_1 \cup_q \Sigma_2$ lassen sich durch die Korrelationsfunkten auf Σ_1 und Σ_2 ausdrücken

$$\begin{aligned} \langle X(r_1, \ldots, r_n) \rangle_{\Sigma_1 \cup_q \Sigma_2} = & \\ & \sum_{v \in \mathrm{ONB}(\mathcal{H})} \langle X_1(r_1, \ldots, r_k) q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\overline{L}_0 - \frac{c}{24}} \Phi\,(v, 0, 0) \rangle_{\Sigma_1} \\ & \qquad \times \langle \Phi(v, 0, 0) X(r_{k+1}, \ldots, r_n) \rangle_{\Sigma_2} \,. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Dabei ist X_i der Anteil von X, der Feldern in Punkten r_k auf Σ_i enspricht. Die "sewing constraints" gewährleisten nun die Unabhängigkeit der Korrelationsfunktionen von der Art des Vernähens. Notwendig und hinreichend dafür sind im Falle geschlossener Flächen die modulare Kovarianz der Ein-Punkt-Funktion auf dem Torus und die Kreuzungssymmetrie der Vier-Punkt-Funktionen auf der Sphäre.
Insbesondere ist die Null-Punkt-Funktion auf dem Torus mit Torusparameter τ und $q = e^{2\pi i \tau}$ bzw. die Torus-Zustandssumme gegeben durch

$$Z(q, \bar{q}) = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}} \left(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\overline{L}_0 - \frac{c}{24}} \right) = \sum_{ij} \mathrm{tr}_{V_i} \left(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \right) \mathrm{tr}_{\overline{V}_j} \left(\bar{q}^{\overline{L}_0 - \frac{c}{24}} \right) \,. \tag{2.32}$$

$\chi_i(q) := \mathrm{tr}_{V_i} \left(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \right)$ nennt man Charakter des Moduls V_i. (Für Symmetriealgebren, die eine größere Cartan-Unteralgebra der Nullmodenalgebra als die Virasoro-Algebra besitzen kann man verallgemeinerte Charaktere einführen. Dies soll hier jedoch nicht ausgeführt werden.) Damit läßt sich die Zustandssumme schreiben

$$Z(q, \bar{q}) = \sum_{ij} M_{ij}\, \chi_i(q) \overline{\chi}_j(\bar{q}), \quad M_{ij} \in \mathbb{N}_0 \,. \tag{2.33}$$

Diese Zustandssumme darf nun nicht von der Wahl der Vernähung abhängen. Daher muß sie invariant unter den modularen Gruppe $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{Z})$ sein, deren Wirkung durch die auf dem Torus

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sl}(2, \mathbb{Z}) \tag{2.34}$$

induziert wird. Generatoren dieser Gruppe und die assoziierten Darstellungsmatrizen auf dem Raum der Charaktere werden mit

$$\begin{aligned} S : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}, &\quad \chi_i(S(q)) = \sum_j S_{ij} \chi_j(q) \\ T : \tau \mapsto \tau + 1, &\quad \chi_i(T(q)) = e^{2\pi i (h_i - \frac{c}{24})} \chi_i(q) \end{aligned} \tag{2.35}$$

bezeichnet. Modulare Invarianz bedeutet dann

$$Z(Aq, A\bar{q}) = Z(q, \bar{q}), \quad \forall A \in \mathrm{Sl}(2, \mathbb{Z}). \tag{2.36}$$

Diese Bedingung muß jedoch für fermionische Theorien etwas abgeschwächt werden, um halbzahligen Spin $h_i - \bar{h}_j$ zu ermöglichen. Man fordert dann lediglich die Invarianz unter der von S und T^2 erzeugten Untergruppe von $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{Z})$.
Für rationale Modelle gilt

$$S^2 = C, \quad S^t = S, \quad S^\dagger = S^{-1}, \tag{2.37}$$

wobei $C_{ij} = \delta_{ij^*}$ die Ladungskonjugationsmatrix ist. Die Quantendimensionen

$$\lim_{q \nearrow 1} \frac{\chi_i(q)}{\chi_0(q)} = \frac{S_{i0}}{S_{00}} \tag{2.38}$$

geben ein Maß für die Größe der Moduln V_i in Relation zum Vakuum-Modul V_0 an.
Ein wichtiges Problem in der konformen Feldtheorie ist die Bestimmung der primären Felder, die in einer bestimmten OPE (2.25) auftauchen. Dies kann mittels Berechnung der Drei-Punkt-Funktionen also durch Lösung von Differentialgleichungen angegangen werden, es ist jedoch auch möglich dieses Problem algebraisch zu behandeln [58]. Es gibt eine in diesem Formalismus sehr natürliche Art ein Fusionsprodukt Δ von Darstellungen chiraler Algebren $\mathcal{W}$ zu formulieren:

$$\Delta_{z,0}(W_n) = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{m= \\ -h_W+1}}^{n} \begin{pmatrix} n + h_W - 1 \\ m + h_W - 1 \end{pmatrix} z^{n-m} W_m \otimes 1 + 1 \otimes W_n, \ n \geq -h_W + 1 \\ \sum\limits_{\substack{m= \\ -h_W+1}}^{\infty} \begin{pmatrix} n + m - 1 \\ n - h_W \end{pmatrix} (-1)^{m+h_W-1} z^{-n-m} W_m \otimes 1 + 1 \otimes W_n, \ n \leq -h_W \end{cases}$$

Bezeichnet man mit ρ_i die Darstellungen von $\mathcal{W}$ auf den Moduln V_i so ist die Produktdarstellung zu V_i und V_j gegeben durch $(\rho_i \otimes \rho_j)\Delta$. Diese Darstellung ist im allgemeinen nicht mehr irreduzibel. In Fällen in denen sie vollreduzibel ist, benennt man mit $N_{ij}^{\ k}$ die Multiplizitäten der Darstellungen V_k in $(\rho_i \otimes \rho_j)\Delta$. Diese Fusionsregeln sind unabhängig von der formalen Variable z und bestimmen, welche Felder in der OPE auftauchen.
Es gibt nun einen sehr interessanten Zusammenhang zwischen den Fusionsregeln N und

der modularen S-Matrix rationaler konformer Feldtheorien: S diagonalisiert die Fusionsregeln. Dieses Verhalten wird durch die Verlinde-Formel

$$N_{ij}^{k} = \sum_{l} \frac{S_{il} S_{jl} S_{lk^*}}{S_{0l}} \tag{2.39}$$

beschrieben [77].
Für $N_{ij}^{k} \neq 0$ existieren nun Intertwiner

$$\begin{pmatrix} i \\ j\,k \end{pmatrix}_z^a : V_i \otimes V_j \to V_k \tag{2.40}$$

zwischen den Darstellungen $(\rho_i \otimes \rho_j)\Delta_{z,0}$ und ρ_k von $\mathcal{W}$. Dabei bezeichnet $a = 1, \ldots, N_{ij}^{k}$ den jeweiligen Fusionskanal. Mit Hilfe dieser Intertwiner lassen sich nun für $\xi \in V_i$ chirale Vertexoperatoren (CVOs) definieren:

$$\Phi_{k,j}^{(a)\,i}(\xi, z) := \begin{pmatrix} i \\ j\,k \end{pmatrix}_z^a (\xi \otimes \cdot) : V_i \to V_k\,. \tag{2.41}$$

Diese transformieren sich unter $\mathcal{W}$ wie Felder $\Phi_{ij}(\xi, z, \bar{z})$. Insbesondere gilt

$$\rho_k\,(L_n)\,\Phi_{k,j}^{(a)\,i}(\xi, z) - \Phi_{k,j}^{(a)\,i}(\xi, z)\rho_j\,(L_n) = z^n\,(z\partial_z + h_\xi(n+1))\,\Phi_{k,j}^{(a)\,i}(\xi, z)\,. \tag{2.42}$$

Erwartungswerte

$$\langle \xi_1 | \Phi_{j_1,j_2}^{(a_2)\,i_2}(\xi_2, z_2) \ldots \Phi_{j_{n-1},j_n}^{(a_n)\,i_n}(\xi_n, z_n) | \xi_{n+1} \rangle \tag{2.43}$$

mit $j_1 = i_1$, $j_n = i_n$ und $\xi_i \in V_i$ (konforme Blöcke) sind insbesondere Lösungen der holomorphen Differentialgleichungen, die die $(n+1)$-Punkt-Funktionen

$$\langle 0 | \Phi(\xi_1, \infty, \infty) \Phi(\xi_2, z_2, \bar{z}_2) \ldots \Phi(\xi_n, z_n, \bar{z}_n) \Phi(\xi_{n+1}, 0, 0) | 0 \rangle \tag{2.44}$$

mit $\xi_k \in V_{i_k} \otimes \overline{V}_{l_k}$ für beliebige l_k erfüllen müssen. Sie bilden sogar eine Basis des Lösungsraums. Allerdings sind die CVOs nicht gegenseitig lokal, d.h. die Erwartungswerte sind nur für feste Ordnungen $|z_1| > \ldots > |z_n|$ definiert. Man kann jedoch analytisch in andere Bereiche fortsetzen (nicht eindeutig), und diese Fortsetzungen sind auch Basis des Lösungsraumes der entsprechenden Differentialgleichungen für die anderen Bereiche. Die so entstehenden Basiswechsel nennt man Dualitätstransformationen. Im Falle der Vier-Punkt-Blöcke

$$\mathcal{F}_j^{i_1 i_2 i_3 i_4}(\xi_k, a_l, z_1, z_2) := \langle \xi_1 | \Phi_{i_1,j}^{(a_1)\,i_2}(\xi_2, z_1) \Phi_{j,i_4}^{(a_2)\,i_3}(\xi_3, z_2) | \xi_4 \rangle \tag{2.45}$$

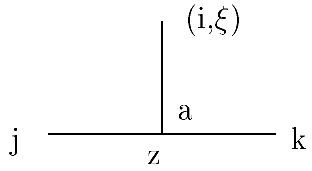
gibt es die folgenden mit "fusing" und "braiding" bezeichneten Dualitäten:
"Braiding" entspricht der analytischen Fortsetzung von dem Bereich $|z_2| > |z_3|$ in den Bereich $|z_3| > |z_2|$. Dabei gibt es die Möglichkeiten, die Punkte gegen oder im Uhrzeigersinn aneinander vorbeizuschieben. Diese Möglichkeiten werden mit $\pm$ gekennzeichnet:

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_j^{i_1 i_2 i_3 i_4}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, a_1, a_2, z_2, z_3) \\ &\qquad = \sum_{j', b_l} \mathsf{B}_{jj'}^{(\pm)} \begin{bmatrix} i_2 & i_3 \\ i_1 & i_4 \end{bmatrix}_{a_1 a_2}^{b_1 b_2} \mathcal{F}_{j'}^{i_1 i_3 i_2 i_4}(\xi_1, \xi_3, \xi_2, \xi_4, b_1, b_2, z_2, z_3) \end{aligned} \tag{2.46}$$

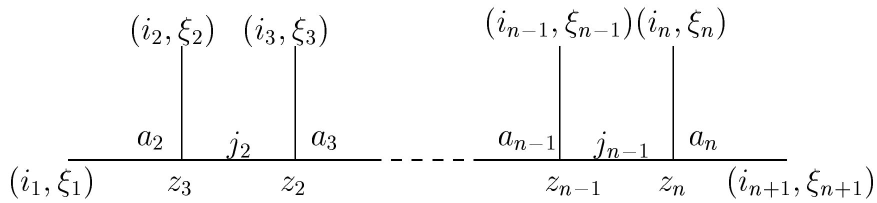
Bei "crossing" oder "fusing" setzt man analytisch fort nach $z_i \mapsto z_i - z_3$. Dabei ist $z_1 = 0$, $z_4 = \infty$ vorausgesetzt. Diese Fortsetzung entspricht einer Vertauschung von i_1 und i_3:

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_j^{i_1 i_2 i_3 i_4}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,a_1,a_2,z_2,z_3)\\ &\qquad = \sum_{j',b_l} \mathsf{F}_{jj'}\left[\begin{smallmatrix} i_2 & i_3\\ i_1 & i_4\end{smallmatrix}\right]^{b_1 b_2}_{a_1 a_2} \mathcal{F}_{j'}^{i_3 i_2 i_1 i_4}(\xi_3,\xi_2,\xi_1,\xi_4,b_1,b_2,z_2-z_3,z_1-z_3)\end{aligned} \tag{2.47}$$

Insbesondere sind die Dualitätstransformationen unabhängig von den ξ_i und z_i. Sie sind rein darstellungstheoretische Größen. Aus ihrer Definition folgen gewisse Relationen zwischen ihnen, wie die in Abschnitt A.4 verwendetet Pentagon-Identität [58]. Häufig verwendet man eine graphische Notation für CVOs und konforme Blöcke. Einen CVO (2.41) schreibt man als:



Ein Block (2.43) ist graphisch repräsentiert durch



Damit lassen sich die Dualitätstransformationen dann auf einfache Weise graphisch darstellen. Dies wird in Abschnitt A.4 verwendet, um die dort verwendete Pentagon-Identität zu zeigen.

Analog zu den holomorphen CVOs definiert man CVOs und n-Punkt-Blöcke für den antiholomorphen Anteil. Physikalische Felder $\Phi(\xi_i \otimes \overline{\xi}_{\bar\imath}, z, \bar z)$, $\xi_i \otimes \overline{\xi}_{\bar\imath} \in V_i \otimes \overline{V}_{\bar\imath}$ lassen sich nun wie folgt durch CVOs ausdrücken:

$$\Phi(\xi_i \otimes \overline{\xi}_{\bar\imath}, z, \bar z) = \sum_{j\bar\jmath,k,\bar k,a,\bar a} D_{i\bar\imath}^{j\bar\jmath k\bar k\,(a\bar a)} \Phi^{(a)\,i}_{j,k}(\xi_i,z)\,\overline{\Phi}^{(\bar a)\,\bar\imath}_{\bar k,\bar\jmath}(\overline{\xi}_{\bar\imath},\bar z)\,. \tag{2.48}$$

Dabei ist zu beachten, daß die Konstanten D durch die (semi-) Lokalitätsbedingung an physikalische Felder eingeschränkt sind.

Die Vier-Punkt-Funktionen lassen sich mit Hilfe der CVOs wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}&\langle 0|\Phi(\xi_1\otimes\overline{\xi}_1,\infty,\infty)\Phi(\xi_2\otimes\overline{\xi}_2,z_2,\bar z_2)\Phi(\xi_3\otimes\overline{\xi}_3,z_3,\bar z_3)\Phi(\xi_4\otimes\overline{\xi}_4,0,0)|0\rangle\\ &\quad = \sum_{k,\bar k} \tilde C^{\;(k,\bar k)}_{(i_1\bar\imath_1)(i_2\bar\imath_2)}\tilde C^{\;(k^*,\bar k^*)}_{(i_3\bar\imath_3)(i_4\bar\imath_4)}\tilde C^{\;(0,0)}_{(k,\bar k)(k^*,\bar k^*)}\mathcal{F}_k^{i_1i_2i_3i_4}(\xi_l,z_2,z_3)\overline{\mathcal{F}}_{\bar k}^{\bar\imath_1\bar\imath_2\bar\imath_3\bar\imath_4}(\overline{\xi}_l,\bar z_2,\bar z_3)\,.\end{aligned} \tag{2.49}$$

Die Konstanten $\tilde C$ hängen von der Normierung der CVOs ab und entsprechen den OPE-Konstanten C, falls die Normierung so gewählt ist, daß für $z \approx 0$ asymptotisch gilt:

$$\mathcal{F}_p^{ijkl}(1,z) = z^{h_p - h_i - h_j}\,(1 + P(z))\;, \quad P(0) = 0\,. \tag{2.50}$$

Aus der Unabhängigkeit der Vier-Punkt-Funktionen von der Art des Vernähens bzw. ihrer Eindeutigkeit folgt dann die Bedingung

$$C_{(i\bar{\imath})(j\bar{\jmath})}^{\;(p\bar{p})} C_{(k\bar{k})(l\bar{l})}^{\;(p^*\bar{p}^*)} C_{(p\bar{p})(p^*\bar{p}^*)}^{\;(00)} = \sum_{q,\bar{q}} \mathsf{F}_{pq}\left[\begin{smallmatrix} i & k \\ j & l \end{smallmatrix}\right] \mathsf{F}_{\bar{p}\bar{q}}\left[\begin{smallmatrix} \bar{\imath} & \bar{k} \\ \bar{\jmath} & \bar{l} \end{smallmatrix}\right] C_{(j\bar{\jmath})(l\bar{l})}^{\;(q^*\bar{q}^*)} C_{(i\bar{\imath})(k\bar{k})}^{\;(q\bar{q})} C_{(q\bar{q})(q^*\bar{q}^*)}^{\;(00)} \tag{2.51}$$

an die OPE-Konstanten.
Die die konforme Feldtheorie beschreibenden Konstanten müssen also insgesamt den folgenden Bedingungen genügen. Die physikalischen Felder sollen lokal und die “sewing relations” (modulare Invarianz der Zustandssumme und (2.51)) müssen erfüllt sein.

Kapitel 3

Konforme Feldtheorie auf Flächen mit Rändern

In diesem Kapitel wird die Konstruktion konformer Feldtheorie auf Flächen mit Rändern aus gegebenen konformen Feldtheorien auf Flächen ohne Rand diskutiert. Dabei soll die lokale Struktur der konformen Feldtheorie im Inneren der Flächen mit Rändern der der Ausgangstheorie entsprechen. Insbesondere Felder im Inneren der Flächen und deren OPE sind in beiden Fällen die gleichen. Die Einführung von Rändern verkleinert jedoch die Symmetriealgebra der Theorie (halbiert sie mindestens) und verändert damit die Ward-Identitäten der n-Punkt-Funktionen. Ferner tauchen in der Theorie zusätzliche Felder auf, die auf den Rändern lokalisiert sind und die man Randfelder nennt.
Um diese konformen Feldtheorien auf Flächen mit Rändern zu charakterisieren, geht man zunächst vor wie in der geschlossenen Theorie. Man reduziert das Problem mittels Zerschneiden und Vernähen konformer Feldtheorien auf den einfachsten Fall, die Fläche mit einem Rand, zum Beispiel die obere Halbebene. Für diese Fläche konstruiert man Lösungen der Ward-Identitäten. Alle Sätze möglicher, mit dem Vernähen konsistenter n-Punkt-Funktionen auf der Fläche mit einem Rand definieren jeweils eine Randbedingung. Diese gilt es zu untersuchen.

3.1 Symmetrien der Theorie auf der oberen Halbebene

In diesem Kapitel wird untersucht, wie sich die Einführung eines Randes auf der Riemannschen Sphäre auf die konforme Feldtheorie, die auf dieser definiert ist, auswirkt. Nach geeigneter Koordinatenwahl kann man die berandete Fläche als obere Halbebene $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ ansehen. Die Strategie ist nun, die durch den Rand hervorgerufene Einschränkung der Symmetrie der Theorie zu bestimmen und daraus Schlüsse auf die Singularitäten-Struktur der n-Punkt-Funktionen zu ziehen. Zunächst beschränke ich mich auf Theorien mit $\mathcal{W} = \mathcal{V}\mathrm{ir}$, $\overline{\mathcal{W}} = \overline{\mathcal{V}\mathrm{ir}}$. Dieser Fall wurde zuerst von Cardy in [24] untersucht.

Der Übergang von $\mathbb{CP}^1$ nach $\mathbb{H}$ bedeutet eine Reduzierung der konformen Symmetrien der Theorie, da konforme Symmetrien von $\mathbb{H}$ den Rand $\mathbb{R} \subset \mathbb{H}$ invariant lassen müssen. Die

Gruppe der globalen konformen Transformationen von $\mathbb{H}$ ist also $\mathrm{PSl}(2,\mathbb{R}) \subset \mathrm{PSl}(2,\mathbb{C})$. Die konformen Killingfelder von $\mathbb{H}$ sind ferner gegeben durch die holomorphen und antiholomorphen Abbildungen $\epsilon, \bar{\epsilon} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, für die gilt

$$\epsilon(z) = \bar{\epsilon}(\bar{z}) \quad \forall z \in \mathbb{R}\,. \tag{3.1}$$

Damit lassen sich dann konforme Killingvektorfelder von $\mathbb{H}$ als holomorphe Abbildungen

$$\epsilon^{\mathbb{H}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \epsilon^{\mathbb{H}}(z) = \begin{cases} \epsilon(z), \ \Im(z) \geq 0 \\ \bar{\epsilon}(\bar{z}), \ \Im(z) \leq 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

schreiben. Dies zeigt, daß der geometrische Anteil der Symmetriealgebra der Theorie auf $\mathbb{H}$ kleiner ist, als der der Theorie auf $\mathbb{CP}^1$.
Generator der lokalen konformen Transformationen auf dem Raum der Felder der Theorie ist das Virasoro-Feld oder der Energie-Impuls-Tensor $T_{ij}(x,y)$, dessen holomorphe und antiholomorphe Komponenten auf $\mathbb{H}$ nicht mehr unabhängig voneinander sein können. Es gilt mit $z = x + iy$:

$$T_{xy}(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad T(z) = \overline{T}(\bar{z}) \quad \forall z = \bar{z}\,, \tag{3.3}$$

was man physikalisch als die Bedingung ansehen kann, daß keine Energie über den Rand fließt. Diese Bedingung bezeichnet man als Verklebebedingung ("gluing condition"), da hier Teile der holomorphen und der antiholomorphen Symmetriealgebra am Rand identifiziert werden. Mit ihrer Hilfe sieht man leicht, daß man in der $\mathbb{H}$-Theorie $\mathcal{V}\mathrm{ir}$ anstatt $\mathcal{V}\mathrm{ir} \oplus \overline{\mathcal{V}\mathrm{ir}}$ als geometrischen Teil der Symmetriealgebra erhält.
Dazu definiert man folgende Operatoren

$$L_n^{\mathbb{H}} = \int_C \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z) - \int_C \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \bar{z}^{n+1} \overline{T}(\bar{z})\,, \tag{3.4}$$

wobei C ein Halbkreis mit Endpunkten in $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ ist. Diese bilden wegen der Verklebebedingung (3.3) die ungebrochene Virasoro-Algebra mit der zentralen Ladung $c = \bar{c}$ der $\mathbb{CP}^1$-Theorie:

$$[L_m^{\mathbb{H}}, L_n^{\mathbb{H}}] = (m-n) L_{m+n}^{\mathbb{H}} + \frac{c}{12} m(m^2-1)\delta_{m+n,0}\,. \tag{3.5}$$

Die Felder der Theorie im Inneren von $\mathbb{H}$, die "bulk"-Felder entsprechen den Feldern der ursprünglichen Theorie auf $\mathbb{CP}^1$, die auf $\mathbb{H}$ eingeschränkt werden soll. Insgesamt ändert sich die lokale Struktur der Theorie (insbesondere die OPE), im Inneren von $\mathbb{H}$ bei dieser Einschränkung nicht.
Die Wirkung der Operatoren $L_n^{\mathbb{H}}$ auf Felder $\phi_{i\bar{\imath}}(z,\bar{z})$, für $\Im(z) > 0$ ist gegeben durch

$$[L_n^{\mathbb{H}}, \phi_{i\bar{\imath}}(z,\bar{z})] = z^n(z\partial + (n+1)h_i)\phi_{i\bar{\imath}}(z,\bar{z}) + \bar{z}^n(\bar{z}\bar{\partial} + (n+1)\bar{h}_{\bar{\imath}})\phi_{i\bar{\imath}}(z,\bar{z})\,. \tag{3.6}$$

Die Felder verhalten sich wie Produkte zweier chiraler Felder unter der Wirkung der $L_n^{\mathbb{H}}$. Das motiviert die Definition des chiralen Operators auf ganz $\mathbb{C}$ im Sinne von (3.2)

$$T^{\mathbb{H}}(z) = \sum_n z^{-n-2} L_n^{\mathbb{H}} = \begin{cases} T(z), \ \Im(z) \geq 0 \\ \overline{T}(\bar{z}), \ \Im(z) \leq 0 \end{cases}, \tag{3.7}$$

und einer Abbildung P, die die antiholomorphen Anteile physikalischer Felder

$$\Phi(\xi_i \otimes \overline{\xi}_{\bar\imath}, z, \bar z) = \sum_{j\bar\jmath,k,\bar k,a,\bar a} D_{i\bar\imath}^{j\bar\jmath k\bar k\,(a\bar a)} \Phi_{j,k}^{(a)\,i}(\xi_i, z) \overline{\Phi}_{\bar k,\bar\jmath}^{(\bar a)\,\bar\imath}(\overline{\xi}_{\bar\imath}, \bar z) \,. \tag{3.8}$$

(vgl. (2.48)) in die entsprechenden holomorphen Anteile auf der unteren Halbebene abbildet:

$$P : \Phi(\xi_i \otimes \overline{\xi}_{\bar\imath}, z, \bar z) \mapsto \sum_{j\bar\jmath,k,\bar k,a,\bar a} D_{i\bar\imath}^{j\bar\jmath k\bar k\,(a\bar a)} \Phi_{j,k}^{(a)\,i}(\xi_i, z) \Phi_{\bar k,\bar\jmath}^{(\bar a)\,\bar\imath}(\xi_{\bar\imath}, z^*) \,. \tag{3.9}$$

Dabei sind $\xi_i \in V_i$, $\overline{\xi}_{\bar\imath} \in \overline{V}_{\bar\imath}$, und $\xi_{\bar\imath} \in V_{\bar\imath}$ ist das vermöge des Isomorphismus $\overline{V}_{\bar\imath} \simeq V_{\bar\imath}$ zu $\overline{\xi}_{\bar\imath}$ assoziierte Element von $V_{\bar\imath}$. Offensichtlich entspricht das konforme Transformationsverhalten von Operatoren X auf $\mathbb{H}$, dem konformen Transformationsverhalten der holomorphen Operatoren $P(X)$ auf $\mathbb{CP}^1$. Insbesondere erfüllen damit die Korrelationsfunktionen $\langle X\rangle^{\mathbb{H}}$ auf $\mathbb{H}$ die gleichen Ward-Identitäten wie $\langle P(X)\rangle^{\mathbb{CP}^1}$ auf $\mathbb{CP}^1$ und sind damit Linearkombinationen der entsprechenden konformen Blöcke der $\mathbb{CP}^1$-Theorie.
Nun ist der Raum der konformen Zwei-Punkt-Blöcke auf $\mathbb{CP}^1$ eindimensional. Daher gilt

$$\langle \phi_{ij}(z,\bar z)\rangle^{\mathbb{H}} \sim \langle P(\phi_{ij}(z,\bar z))\rangle^{\mathbb{CP}^1} \,, \tag{3.10}$$

und somit

$$\langle \phi_{ij}(z,\bar z)\rangle^{\mathbb{H}} = \frac{A_{ij}}{|z-\bar z|^{h_i+h_j}} \,. \tag{3.11}$$

Diese Verdopplung ("doubling trick"), bei der die Theorie auf $\mathbb{H}$ durch die entsprechende chirale Theorie auf $\mathbb{CP}^1$ ersetzt wird, funktioniert auch bei allgemeinen Flächen, solchen mit Rändern, aber auch nicht orientierbaren. Die n-Punkt-Funktionen auf einer solchen Fläche entsprechen den korrespondierenden chiralen $2n$-Punkt-Funktionen der Theorie auf der Schottky-Überlagerung, dem über den Rändern der Fläche verklebten Orientierungsbündel.

Im Fall allgemeiner Symmetriealgebren $\mathcal{W}$, $\overline{\mathcal{W}}$, der in [65] diskutiert wurde, ist es nun möglich auch in der $\mathbb{H}$-Theorie eine größere Symmetriealgebra $\mathcal{A}$ zu erhalten, falls $\mathcal{V}\mathrm{ir} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{W}$, $\overline{\mathcal{V}\mathrm{ir}} \subset \overline{\mathcal{A}} \subset \overline{\mathcal{W}}$, wobei hier mit $\overline{\mathcal{A}}$ die antichirale Algebra zu $\mathcal{A}$ gemeint ist. Man definiert dann allgemeine Verklebebedinungen durch Homomorphismen der antichiralen Algebren:

$$\Omega : \overline{\mathcal{W}} \to \overline{\mathcal{W}}, \quad \overline{\mathcal{A}} \simeq \Omega(\overline{\mathcal{A}}), \quad \Omega|_{\overline{\mathcal{V}\mathrm{ir}}} = \mathrm{id}_{\overline{\mathcal{V}\mathrm{ir}}}, \tag{3.12}$$

$$A(z) = \Omega(\overline{A})(\bar z) \quad \forall z \in \mathbb{R},\ A \in \mathcal{A}. \tag{3.13}$$

Einen solchen Homomorphismus nennt man lokal, da er mit der Modenentwicklung verträglich ist.
Für $W \in \mathcal{A}$ definiert man analog zu (3.4)

$$W_n^{\mathbb{H}} = \int_C \frac{dz}{2\pi i} z^{n+h(W)-1} W(z) - \int_C \frac{d\bar z}{2\pi i} \bar z^{n+\bar h(\overline{W})-1} \Omega(\overline{W})(\bar z) \,. \tag{3.14}$$

Mit Hilfe dieser Moden konstruiert man die chiralen Operatoren der Symmetriealgebra der "verdoppelten" Theorie (vgl. (3.5))

$$W^{\mathbb{H}}(z) := \sum_n z^{-n-h(W)}\, W_n^{\mathbb{H}} = \begin{cases} W(z), \ \Im(z) \geq 0 \\ \Omega(\overline{W})(\bar{z}), \ \Im(z) \leq 0 \end{cases} . \tag{3.15}$$

Für die Beschreibung der Verdopplung der Felder beschränke ich mich auf den Fall $\Omega(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{\mathcal{A}}$ und auf konforme Feldtheorien, deren irreduzible $\mathcal{W}$-Höchstgewichtsmoduln $(V_i^{\mathcal{W}})_{i\in I_{\mathcal{W}}}$ in irreduzible $\mathcal{A}$-Höchstgewichtsmoduln $(V_i^{\mathcal{A}})_{i\in I_{\mathcal{A}}}$ zerfallen. Dann sind insbesondere die $\overline{\mathcal{A}}$-Moduln $\overline{V}_i^{\overline{\mathcal{A}}}$ auch irreduzible $\Omega(\overline{\mathcal{A}})$-Moduln $\overline{V}_i^{\Omega(\overline{\mathcal{A}})}$. Da $\overline{\mathcal{A}}$ die korrespondierende antichirale Algebra zu $\mathcal{A}$ ist, gibt es eine natürliche Identifikation von $I_{\mathcal{A}} \simeq I_{\overline{\mathcal{A}}}$, die im folgenden vorausgesetzt wird. Ich definiere dann die Abbildung

$$\omega : I_{\mathcal{A}} \to I_{\mathcal{A}}, \quad \overline{V}_i^{\Omega(\overline{\mathcal{A}})} \simeq: \overline{V}_{\omega(i)}^{\overline{\mathcal{A}}} . \tag{3.16}$$

Die Verdopplungsabbildung für allgemeine Verklebebedingungen lautet dann

$$P_\Omega : \Phi(\xi_i \otimes \overline{\xi}_{\bar{\imath}}, z, \bar{z}) \mapsto \sum_{j\bar{\jmath},k,\bar{k},a,\bar{a}} D_{i\bar{\imath}}^{j\bar{\jmath}k\bar{k}\ (a\bar{a})} \Phi_{j,k}^{(a)\ i}(\xi_i, z) \Phi_{\omega(\bar{k}),\omega(\bar{\jmath})}^{(\bar{a})\ \omega(\bar{\imath})}(\xi_{\omega(\bar{\imath})}, z^*) , \tag{3.17}$$

wobei $\xi_{\omega(\bar{\imath})}$ das vermöge (3.16) und $\overline{V}_{\bar{\imath}} \simeq V_{\bar{\imath}}$ zu $\overline{\xi}_{\bar{\imath}}$ assoziierte Element von $V_{\omega(\bar{\imath})}$ ist. Korrelatoren $\langle X\rangle_\Omega^{\mathbb{H}}$ auf $\mathbb{H}$ mit Verklebebedingung Ω sind somit Linearkombinationen konformer Blöcke $\langle P_\Omega(X)\rangle^{\mathbb{CP}^1}$ auf $\mathbb{CP}^1$. Die entsprechenden Linearfaktoren für gegebenes Ω müssen zwar weiter unten beschriebenen Bedingungen genügen, sie sind jedoch im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Mit Hilfe der Vernähungseigenschaft kann man die Freiheit der Wahl der Linearfaktoren auf die Freiheit der Wahl der Konstanten A_{ij}^Ω der Ein-Punkt-Funktionen reduzieren, die dann die Korrelatoren von "bulk"-Feldern auf $\mathbb{H}$ vollständig bestimmt. Eine solche Wahl entspricht der Wahl einer Randbedingung der konformen Feldtheorie. Weiter unten wird gezeigt, daß zusätzlich noch Randfelder auftauchen, deren OPE eine zusätzliche Freiheit darstellt.

Situationen $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{W}$ oder $\overline{\mathcal{A}} \subsetneq \overline{\mathcal{W}}$ sind bisher erst in den einfachsten Fällen, nämlich bei Brechung der Symmetriealgebra durch einfache Ströme analysiert worden [41, 42, 20]. Darüber hinaus ist über symmetriebrechende Randbedingungen kaum etwas bekannt. Da die unten analysierten Virasoro minimalen Modelle sowieso nur die Virasoro-Algebra als Symmetriealgebra besitzen, somit also auch keine symmetriebrechenden Randbedingungen zulassen, sei ab dieser Stelle, falls nicht explizit anders angegeben, $\mathcal{A} = \mathcal{W}$, $\overline{\mathcal{A}} = \overline{\mathcal{W}}$ vorausgesetzt.

3.2 Ein-Punkt-Funktionen

Im letzten Kapitel wurde bereits angedeutet, daß die aus einer konformen Feldtheorie auf $\mathbb{CP}^1$ abgeleitete konforme Feldtheorie auf $\mathbb{H}$ nicht eindeutig durch einen Verklebehomomorphismus Ω bestimmt ist. Daher benenne ich eine solche Theorie mit einem zusätzlichen Symbol α. Das Tupel $a = (\alpha, \Omega)$ zusammen mit der zugrundeliegenden konformen Feldtheorie charakterisiere die konforme Feldtheorie auf $\mathbb{H}$. Es hat die Bedeutung einer Randbedingung.

Aus (3.6) folgt die Form der Ein-Punkt-Funktion primärer Felder (3.11)

$$\langle \phi_{ij}(z, \bar{z}) \rangle^{\mathbb{H}}_{(\alpha,\Omega)} = \frac{A^{(\alpha,\Omega)}_{ij}}{|z - \bar{z}|^{h_i + h_j}} \,. \tag{3.18}$$

Dabei kann $A^{(\alpha,\Omega)}_{ij}$ als lineare Abbildung

$$A^{(\alpha,\Omega)}_{ij} : \overline{V}^{(0)}_j \to \left(V^{(0)}_i \right)^* = V^{(0)}_{i^*} \tag{3.19}$$

zwischen den Höchstgewichtsunterräumen $\overline{V}^{(0)}_j$ und $V^{(0)}_{i^*}$ der irreduziblen $\overline{\mathcal{A}}$-, $\mathcal{A}$-Moduln $\overline{V}_j$, V_{i^*} aufgefaßt werden. Bezeichnet man mit

$$X^W_i : V^{(0)}_i \to V^{(0)}_i, \quad X^{\overline{W}}_i : \overline{V}^{(0)}_i \to \overline{V}^{(0)}_i \tag{3.20}$$

die Darstellungen der Nullmodenalgebra $\mathcal{A}_0$ auf diesen Höchstgewichtsunterräumen, so folgt aus den Ward-Identitäten für die Ein-Punkt-Funktionen:

$$X^W_{i^*} A^{(\alpha,\Omega)}_{ij} = A^{(\alpha,\Omega)}_{ij} X^{\overline{W}}_{\omega(j)} \,, \tag{3.21}$$

denn

$$\begin{aligned}
0 &= \langle [W^{\mathbb{H}}_0, \phi_{ij}(w, \bar{w})] \rangle^{\mathbb{H}}_{(\alpha,\Omega)} \\
&= \langle \int_C \frac{dz}{2\pi i} (z - w)^{h_W - 1} W(z) \phi_{ij}(w, \bar{w}) \\
&\qquad\qquad - \int_C \frac{d\bar{z}}{2\pi i} (\bar{z} - \bar{w})^{h_W - 1} \Omega \overline{W}(\bar{z}) \phi_{ij}(w, \bar{w}) \rangle^{\mathbb{H}}_{(\alpha,\Omega)} \\
&= \sum_{n > -h_W} \langle \oint \frac{dz}{2\pi i} (z - w)^{n-1} \Phi(W_n \phi_{ij}, w, \bar{w}) \\
&\qquad\qquad - \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} (\bar{z} - \bar{w})^{n-1} \Phi(\Omega(\overline{W})_n \phi_{ij}, w, \bar{w}) \rangle^{\mathbb{H}}_{(\alpha,\Omega)} \\
&= \langle \Phi(W_0 \phi_{ij}, w, \bar{w}) - \Phi(\Omega(\overline{W})_0 \phi_{ij}, w, \bar{w}) \rangle^{\mathbb{H}}_{(\alpha,\Omega)} \\
&= \frac{X^W_{i^*} A^{(\alpha,\Omega)}_{ij} - A^{(\alpha,\Omega)}_{ij} X^{\overline{W}}_{\omega(j)}}{|w - \bar{w}|^{h_i + h_j}}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Also ist $A^{(\alpha,\Omega)}_{ij} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_0}(\overline{V}^{(0)}_{\omega(j)}, V^{(0)}_{i^*})$. Da die $V^{(0)}_i$ aber auch irreduzible Darstellungen der Nullmodenalgebra sind, folgt nach Schurs Lemma

$$A^{(\alpha,\Omega)}_{ij} = \delta_{i^*,\omega(j)} \, \lambda^{(\alpha,\Omega)}_i \,. \tag{3.23}$$

Alle n-Punkt-Funktionen von Feldern im Inneren von $\mathbb{H}$ sind also durch die OPE und durch die Parameter $\lambda^{(\alpha,\Omega)}_i$ bestimmt [66]. Letztere sind, wie oben schon erwähnt, nicht frei wählbar, sondern müssen weiteren, unten beschriebenen Bedingungen genügen.

3.3 Randfelder

Wie oben erwähnt liegen n-Punkt-Funktionen von Feldern, die im Inneren einer Fläche mit Rändern eingefügt sind, im Raum der chiralen $2n$-Punkt-Blöcke auf der zweifachen Überlagerung der Fläche, die über dem Rand verklebt ist. Insbesondere haben Ein-Punkt-Funktionen Singularitäten auf dem Rand. An der chiralen OPE auf der Überlagerung erkennt man nun, daß man auf dem Rand chirale Felder einführen kann, die sogenannten Randfelder oder Randoperatoren, die über eine OPE an die "bulk"-Felder koppeln:

$$\phi_{i\bar{\imath}}(z,\bar{z}) = \sum_k \frac{C_{i\bar{\imath}}^{(\alpha)\,k}}{|z-\bar{z}|^{h_i+h_{\bar{\imath}}-h_k}} \psi_k^{(\alpha\alpha)}(\Re(z)), \tag{3.24}$$

wobei α die Randbedingung auf der Randkomponente des Realteils $\Re(z)$ von z bezeichnet. Diese OPE wird auch "bulk-boundary"-OPE genannt.
Während "bulk"-Felder nur im Inneren der Fläche definiert sind, können Randfelder nur auf dem Rand der Fläche eingefügt werden. Ferner sind sie im Gegensatz zu "bulk"-Feldern nicht lokal. Korrelatoren der Form

$$\langle \phi_1(z_1,\bar{z}_1)\ldots\phi_n(z_n,\bar{z}_n)\psi_1^{(\alpha\alpha)}(x_1)\ldots\psi_m^{(\alpha\alpha)}(x_m)\rangle_\alpha \tag{3.25}$$

sind zunächst nur definiert für $x_1 < \ldots < x_m$, und es gibt im allgemeinen keine eindeutige analytische Fortsetzung in andere Bereiche.
Chirale Randfelder der Theorie sind allerdings sowohl auf dem Rand, als auch im Inneren der Fläche definiert und lokal bzgl. aller Felder der Theorie.
Randfelder $\psi_i^{(\alpha\alpha)}$ transformieren sich unter der Symmetriealgebra $\mathcal{A}$ der Theorie mit Rand, daher erfüllen Korrelatoren mit eingefügten Randfeldern auch Ward-Identitäten. Insbesondere liegen (m,n)-Punkt-Funktionen, also solche mit m "bulk"- und n solchen Randfeldern im Raum der chiralen $(2m+n)$-Punkt-Blöcke der Theorie auf der Schottky-Überlagerung.
Neben den oben beschriebenen Randfelder gibt es auch noch solche, die nicht durch "bulk"-Felder erzeugt werden können. Diese randbedingungsverändernden Operatoren ("boundary condition-changing-operators" - BCCOs) beschreiben Wechsel in den Randbedingungen auf einem Rand. Falls der Wechsel der Randbedingung auch einen Wechsel der Verklebebedingung $\Omega \to \Omega'$ einschließt, so transformieren sich diese BCCOs unter der unter $\Omega^{-1}\Omega'$ invarianten Unteralgebra $\overline{\mathcal{A}}^{\Omega^{-1}\Omega'}$ von $\overline{\mathcal{A}}$.
Solche Wechsel treten zum Beispiel auf, wenn man den unendlichen Streifen $\{z = x+iy \in \mathbb{C}|\,(x,y) \in \mathbb{R}\times[0,\pi]\}$ mit unterschiedlichen Randbedingungen α, β auf den Randkomponenten $\Im(z) = 0$, $\Im(z) = \pi$ betrachtet. Dieser Streifen kann vermöge $z \mapsto \exp(z)$ auf die obere Halbebene abgebildet werden, mit einer Singularität in $z = 0$, in der die beiden Randkomponenten enden. Diese Situation ist nicht mehr konform invariant. Man kann dies jedoch nach [27, 15] auffassen als einen auf ein Vakuum wirkenden BCCO $\psi^{(\alpha\beta)}(0)|0\rangle_\beta$ (beim unendlichen Streifen existiert natürlich auch eine Singularität in ∞, an der ein BCCO $\psi^{(\beta\alpha)}(\infty)$ eingefügt werden muß). Auf diese Weise erhält man eine Korrespondenz zwischen BCCOs und Zuständen des Hilbertraumes des unendlichen Streifens mit Randbedingungen α, β.
Benennt man mit $\mathcal{H}_{\alpha\beta}$ den Hilbertraum der Streifentheorie mit Randbedingungen α und

β, so sind die BCCOs $\psi_i^{(\alpha\beta)}(x)$ für alle Randbedingungen γ Familien von Abbildungen zwischen folgenden Vektorräumen

$$\psi_i^{(\alpha\beta)}(x) : \mathcal{H}_{\alpha\gamma} \to \mathcal{H}_{\beta\gamma}. \tag{3.26}$$

Für $\gamma = \alpha$ gilt insbesondere $\psi_i^{(\alpha\beta)}(x) : \mathcal{H}_{\alpha\alpha} \to \mathcal{H}_{\alpha\beta}$. Nun enthält $\mathcal{H}_{\alpha\alpha}$ einen $Sl(2,\mathbb{R})$-invarianten Vakuumzustand $|0\rangle_\alpha$, so daß eine Feld-Zustands-Identifikation von Randfeldern $R_{\alpha\beta} = \{\psi_i^{(\alpha\beta)}\}$ und Zylinderzustandsräumen formuliert werden kann:

$$R_{\alpha\beta} \simeq \mathcal{H}_{\alpha\beta} \, ,$$

$$\Psi^{(\alpha\beta)}(v,x)|0\rangle_\alpha = e^{xL_{-1}^{\mathbb{H}}} v \, . \tag{3.27}$$

Da die Randfelder auf der Überlagerung chiralen Operatoren entsprechen, gibt es auch für diese eine OPE

$$\psi_i^{(\alpha\beta)}(x)\psi_j^{(\beta\gamma)}(y) = \sum_k \frac{C_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)\,k}}{|x-y|^{h_i+h_j-h_k}} \psi_k^{(\alpha\gamma)}(y) \, . \tag{3.28}$$

3.4 Randzustände

In diesem Kapitel wird näher untersucht, wodurch konforme Feldtheorien auf Flächen mit Rändern bestimmt sind. Zu diesem Zweck definiert man sogenannte Randzustände, die die Zustandssummen und Korrelatoren konformer Feldtheorien auf Flächen mit einem Rand charakterisieren.

3.4.1 Definition von Randzuständen

Es gibt in der Literatur im wesentlichen zwei Methoden Randzustände zu definieren (siehe [27, 65]). Eine davon ist die Definition mit Hilfe von Korrelationsfunktionen auf dem Zylinder. Diese hat den Vorteil, daß man für das spätere Ableiten weiterer Bedingungen an die Randzustände über die Zylinder-Zustandssumme kein Vernähen benötigt. Allerdings muß dann die Konsistenz mit der zweiten Definition zusätzlich gezeigt werden, die von Korrelationsfunktionen auf dem Komplement der Einheits-Kreisscheibe $D \subset \mathbb{C}$ ausgeht. Daher werde ich letztere angeben. Die Äquivalenz der beiden Definitionen folgt dann sofort aus der Vernähungseigenschaft. (Ein direkter Vergleich der beiden Methoden findet sich in [63].)

Die obere Halbebene $\mathbb{H}$ ist vermöge der folgenden Abbildung konform äquivalent zum Komplement der Einheitskreisscheibe $\mathbb{C}\backslash D$:

$$\xi : \mathbb{H} \to \mathbb{C}\backslash D, \quad z \mapsto \xi(z) = \frac{z+i}{z-i}, \quad \bar{z} \mapsto \bar{\xi}(\bar{z}) = \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i} \, . \tag{3.29}$$

Dann definiert man für Korrelatoren der $\mathbb{C}\backslash D$-,bzw. der $\mathbb{H}$-Theorie mit Verklebebedingung Ω, die keine Randfelder enthalten, Randzustände $|\alpha\rangle_\Omega$ durch

$$\begin{aligned}\langle 0|\phi_1(\xi_1,\bar{\xi}_1)\dots\phi_n(\xi_n,\bar{\xi}_n)|\alpha\rangle_\Omega^{\mathbb{CP}^1} &:= \langle\phi_1(\xi_1,\bar{\xi}_1)\dots\phi_n(\xi_n,\bar{\xi}_n)\rangle_{(\alpha,\Omega)}^{\mathbb{C}\backslash D} \\ &= \mathcal{J}(\xi_i,\bar{\xi}_i,z_i,\bar{z}_i)\langle\phi_1(z_1,\bar{z}_1)\dots\phi_n(z_n,\bar{z}_n)\rangle_{(\alpha,\Omega)}^{\mathbb{H}}\,. \qquad (3.30)\end{aligned}$$

Dabei ist $\mathcal{J}$ die Jakobimatrix der Transformation (3.29), die sich aus dem konformen Transformationsverhalten der Felder ϕ_i ergibt, und $|\alpha\rangle_\Omega$ Element eines Abschlusses des $\mathbb{CP}^1$-Hilbertraumes $\mathcal{H}$. Weiter unten wird klar werden, warum die Randzustände im allgemeinen nicht in $\mathcal{H}$ liegen. $|0\rangle$ bezeichnet das Vakuum der $\mathbb{CP}^1$-Theorie.
Aus (3.30) folgt, daß die Verklebebedingung (3.13) durch $|\alpha\rangle_\Omega$ in die $\mathbb{CP}^1$-Theorie implementiert werden muß. Beachtet man für den Spezialfall des Energie-Impuls-Tensors, daß für die Schwarzsche Ableitung gilt:

$$\{\xi,z\} = \{\bar{\xi},\bar{z}\}, \quad \forall z=\bar{z}\,, \qquad (3.31)$$

so folgt aus (3.13) für $\mathbb{C}\backslash D$:

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^{h_W} W(\xi) - \left(\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\bar{z}}\right)^{\bar{h}_{\bar{W}}} \Omega(\bar{W})(\bar{\xi}) = 0, \quad \forall\xi=\bar{\xi}^{-1}\,, \qquad (3.32)$$

für $W\in\mathcal{A}$. Setzt man nun die Modenentwicklung der W, $\Omega(\overline{W})$ ein und verwendet

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^{-1}\left(\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial\bar{z}}\right) = -\xi^{-2} \quad \forall\xi=\bar{\xi}^{-1}\,, \qquad (3.33)$$

so erhält man mit $h_W=\bar{h}_{\overline{W}}$

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)^{h_W}\left(\sum_n\left(W_n\xi^{-n-h_W}-(-1)^{h_W}\Omega(\overline{W}_n)\xi^{h_W-n}\right)\right)=0 \quad \forall\xi=\bar{\xi}^{-1}\,. \qquad (3.34)$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$W_n-(-1)^{h_W}\Omega(\overline{W}_{-n})=0 \quad \forall n\in\mathbb{Z}\,. \qquad (3.35)$$

Also muß für die Randzustände $|\alpha\rangle_\Omega$ gelten:

$$\left(W_n-(-1)^{h_W}\Omega(\overline{W}_{-n})\right)|\alpha\rangle_\Omega=0 \quad \forall n\in\mathbb{Z}\,. \qquad (3.36)$$

Im nächsten Kapitel werden Zustände konstruiert, die dieser Bedingung genügen.

3.4.2 Ishibashi-Zustände

Zu jedem irreduziblen $\mathcal{A}$-Modul $V_i^{\mathcal{A}}$ und jeder Verklebebedingung Ω läßt sich ein formaler Zustand konstruieren, der die Bedingung (3.36) erfüllt [59, 50]. Wie oben schon angedeutet liegen diese Zustände nicht im Hilbertraum der $\mathbb{CP}^1$-Theorie, daher verwende ich den Ausdruck "formaler Zustand".

Mit $(|i,n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichne ich Orthonormalbasen der $V_i^{\mathcal{A}}$.
Sei

$$U : V_i^{\mathcal{A}} \to \overline{V}_{i^*}^{\overline{\mathcal{A}}} \,, \quad \overline{V}_i^{\overline{\mathcal{A}}} \to V_{i^*}^{\mathcal{A}} \tag{3.37}$$

der chirale CT-Operator, der die folgende Eigenschaft hat:

$$UW_n = (-1)^{h_W} \overline{W}_n U \,. \tag{3.38}$$

Man definiert nun unitäre Operatoren

$$V_\Omega : \overline{V}_{\omega(i)}^{\overline{\mathcal{A}}} \to \overline{V}_i^{\overline{\mathcal{A}}} \tag{3.39}$$

durch

$$V_\Omega^{-1} \Omega(\overline{A}) V_\Omega = \overline{A} \quad \forall \overline{A} \in \overline{\mathcal{A}} \,, \tag{3.40}$$

so daß $[V_\Omega, U] = 0$ gilt. Konstruktion dieser Operatoren ist möglich, weil es sich bei den $V_i^{\mathcal{A}}$, $\overline{V}_i^{\overline{\mathcal{A}}}$ um irreduzible Höchstgewichtsmoduln handelt.
Mit Hilfe dieser Operatoren definiert man Ishibashi-Zustände $|i\rangle\rangle_\Omega$

$$|i\rangle\rangle_\Omega := \sum_{n\in\mathbb{N}} |i,n\rangle \otimes V_\Omega U |i,n\rangle \,. \tag{3.41}$$

Insbesondere sind diese formalen Zustände Summen aus Elementen von

$$V_i^{\mathcal{A}} \otimes \overline{V}_{\omega^{-1}(i^*)}^{\overline{\mathcal{A}}} \,.$$

Sie erfüllen die Bedingung (3.36), denn

$$\begin{aligned}
&\langle j,a| \otimes \langle V_\Omega U(k,b)| \left(W_n - (-1)^{h_W} \Omega(\overline{W}_{-n}) \right) |i\rangle\rangle_\Omega \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle j,a| \otimes \langle V_\Omega U(k,b)| \left(W_n - (-1)^{h_W} \Omega(\overline{W}_{-n}) \right) |i,n\rangle \otimes V_\Omega U |i,n\rangle \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\langle j,a|W_n|i,n\rangle \langle k,b|i,n\rangle - (-1)^{h_W} \langle j,a|i,n\rangle \overline{\langle k,b|U^\dagger V_\Omega^\dagger \Omega(\overline{W}_{-n}) V_\Omega U|i,n\rangle} \right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\langle j,a|W_n|i,n\rangle \delta_{k,i}\delta_{b,n} - (-1)^{h_W} \overline{\langle k,b|U^\dagger V_\Omega^\dagger \Omega(\overline{W}_{-n}) V_\Omega U|i,n\rangle} \delta_{j,i}\delta_{a,n} \right) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\langle j,a|W_n|i,n\rangle \delta_{k,i}\delta_{b,n} - \overline{\langle k,b|W_{-n}|i,n\rangle} \delta_{j,i}\delta_{a,n} \right) \\
&= 0 \,,
\end{aligned} \tag{3.42}$$

wobei $W_{-n}^\dagger = W_n$ verwendet wurde.

Man kann Randzustände, bzw. Zustände, die (3.36) erfüllen, auch als direkte Summen von Homomorphismen

$$|i\rangle\!\rangle_\Omega : V_i^{\mathcal{A}} \to \overline{V}^{\overline{\mathcal{A}}}_{\omega^{-1}(i)}, \quad A|i\rangle\!\rangle_\Omega = |i\rangle\!\rangle_\Omega A \;\; \forall A \in \mathcal{A} \tag{3.43}$$

ansehen. Da die Moduln irreduzibel sind, folgt mit Schurs Lemma die Eindeutigkeit dieser Homomorphismen bis auf Normierung. Diese wählt man so, daß gilt:

$$_\Omega\langle\!\langle j|q^{L_0-\frac{c}{24}}|i\rangle\!\rangle_\Omega := \delta_{i,j}\,\mathrm{tr}_{V_i^{\mathcal{A}}}\left(\left(|i\rangle\!\rangle_\Omega\right)^{-1} \circ q^{\overline{L}_0-\frac{c}{24}} \circ |i\rangle\!\rangle_\Omega\right) = \delta_{i,j}\chi_i(q)\,. \tag{3.44}$$

In rationalen konformen Feldtheorien lassen sich allgemeine Randzustände als Linearkombination von Ishibashizuständen schreiben

$$|\alpha\rangle_\Omega = \sum_{i\in D_\Omega} B^i_{(\alpha,\Omega)}|i\rangle\!\rangle_\Omega\,. \tag{3.45}$$

Hierbei ist zu beachten, daß ein Ishibashizustand $|i\rangle\!\rangle_\Omega$ nur dann in der Summe auftauchen kann, wenn gilt

$$V_i^{\mathcal{A}} \otimes \overline{V}^{\overline{\mathcal{A}}}_{\omega^{-1}(i^*)} \subset \mathcal{H}\,, \tag{3.46}$$

also

$$i \in D_\Omega = \{i \in I | (i, \omega^{-1}(i^*)) \in J\}. \tag{3.47}$$

Im folgenden wird wegen einfacherer Notation häufig die Menge

$$D := \bigcup_\Omega D_\Omega \tag{3.48}$$

zur Indizierung verwendet. Dabei ist dann vorausgesetzt

$$B^i_{(\alpha,\Omega)} = 0 \;\; \forall i \in D\backslash D_\Omega\,. \tag{3.49}$$

Die Koeffizienten $B^i_{(\alpha,\Omega)}$ bestimmen die konforme Feldtheorie auf der Scheibe eindeutig bis auf möglicherweise verschiedene Rand-OPEs. Weiter unten wird gezeigt, daß es im Falle von rationalen konformen Feldtheorien mit ladungskonjugierter Torus-Zustandssumme nur eine konsistente Randoperatoralgebra für gegebene $B^i_{(\alpha,\Omega)}$ gibt. In diesem Fall und in den meisten anderen bekannten Fällen charakterisieren sie die Randbedingung vollständig. Der Zusammenhang mit den oben diskutierten Koeffizienten der Ein-Punkt-Funktionen wird im nächsten Abschnitt behandelt.

3.4.3 Randzustände und Ein-Punkt-Funktionen

In diesem Kapitel wird der Zusammenhang zwischen den Konstanten $B^i_{(\alpha,\Omega)}$ und den Strukturkonstanten der "bulk-boundary-OPE" untersucht.

Zunächst einmal sei bemerkt, daß man das Vakuumfunktional auf dem Komplement der Einheitskreisscheibe schreiben kann als

$$Z^{\mathbb{C}\backslash D}_{(\alpha,\Omega)} := \langle 1 \rangle^{\mathbb{C}\backslash D}_{(\alpha,\Omega)} = B^{0}_{(\alpha,\Omega)} = Z^{\mathbb{H}}_{(\alpha,\Omega)}\,, \tag{3.50}$$

wobei $V_0^{\mathcal{A}}$ der Vakuum-$\mathcal{A}$-Modul ist. Die Null-Punkt-Funktionen konformer Feldtheorien auf Flächen mit Rändern können im allgemeinen aufgrund nicht-linearer, weiter unten beschriebener Bedingungen an die Randzustände nicht auf 1 normiert werden. Man nennt diese Größen auch Grundzustandsentartungen. Sie werden in einem späteren Kapitel genauer diskutiert.
Die Ein-Punkt-Funktion eines "bulk"-Operators auf der oberen Halbebene ist nun nach (3.18) gegeben durch

$$\langle \phi_{ij}(z,\bar{z}) \rangle^{\mathbb{H}}_{(\alpha,\Omega)} = \frac{A^{(\alpha,\Omega)}_{ij}}{|z-\bar{z}|^{h_i+h_j}}\,. \tag{3.51}$$

Man kann sie jedoch auch mit Hilfe der "bulk-boundary-OPE" (3.24) schreiben:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{ij}(z,\bar{z}) \rangle^{\mathbb{H}}_{(\alpha,\Omega)} &= \sum_k \frac{C^{(\alpha,\Omega)\,k}_{ij}}{|z-\bar{z}|^{h_i+h_j-h_k}} \langle \psi_k^{((\alpha,\Omega),(\alpha,\Omega))}(\Re(z)) \rangle^{\mathbb{H}}_{(\alpha,\Omega)} \\ &= \frac{C^{(\alpha,\Omega)\,0}_{ij}}{|z-\bar{z}|^{h_i+h_j}} \langle 1 \rangle^{\mathbb{H}}_{(\alpha,\Omega)}\,. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Vergleich von (3.51) und (3.52) ergibt mit (3.50)

$$C^{(\alpha,\Omega)\,0}_{ij} B^{0}_{(\alpha,\Omega)} = A^{(\alpha,\Omega)}_{ij}\,. \tag{3.53}$$

3.5 "Sewing Relations"

Vernähungsbedingungen konformer Feldtheorien ("sewing constraints") sind Bedingungen an die Theorie, die gewährleisten, daß man die konforme Feldtheorie auf beliebigen Flächen mit Hilfe des Vernähens konsistent definieren kann. Im Falle von geschlossenen Flächen sind dies die Kreuzungs-Symmetrie der Vier-Punkt-Funktion auf der Sphäre und die modulare Kovarianz der Ein-Punkt-Funktionen auf dem Torus. Im Falle von Flächen mit Rändern kommen zu diesen noch vier weitere Bedingungen hinzu. Eine davon, Cardys Bedingung, entspricht der Äquivalenz der beiden möglichen Konstruktionen eines Zylinders, durch Vernähen zweier Enden eines Streifens und durch Vernähen von zwei Kreisscheiben. Eine weitere ist die entsprechende Kreuzungs-Symmetrie für Randfelder, wobei hier die Anordnung der Randfelder von Bedeutung ist. Die beiden anderen Bedingungen kommen auch von der Assoziativität der OPEs, und zwar in den $(1,2)$- und den $(2,1)$-Punkt-Funktionen, wobei eine (m,n)-Punkt-Funktion m "bulk"- und n Randfelder enthält. Diese 6 Vernähungsbedingungen sind notwendige und hinreichende Bedingungen an die "Strukturkonstanten" der konformen Feldtheorie. Dies wird hier nicht gezeigt. Ich verweise aber auf [55, 62]. Lösung der Vernähungsbedingungen bedeutet vollständige Lösung der konformen Feldtheorie auf Flächen mit Rändern.

Im folgenden gebe ich die Vernähungsbedingungen für Rand-Theorien mit maximal erhaltener Symmetrie an (vgl. [55, 62]). Ferner beschränke ich mich einfacherer Notation wegen auf rationale konforme Theorien, bei denen im Fusionsprodukt zweier $\mathcal{A}$-Moduln keine Multiplizitäten auftauchen, sowie auf Randzustände, für die gilt: $n_{aa}^{i} \leq 1$. Letztere Bedingung gilt insbesondere nicht für $\mathbb{N}_0$-Linearkombinationen der unten definierten Cardy-Randzuständen. In solchen Fällen sind die primären Felder der Theorie nicht mehr allein durch die Äquivalenzklassen der zugehörigen Höchstgewichtsmoduln der Symmetriealgebra bestimmt, denn gewisse Darstellungen können mehrfach auftreten. Daher muß man sie dann mit zusätzlichen Symbolen benennen (vgl. [15, 36]).

3.5.1 "Sewing Relations" für geschlossene Flächen

1. Modulare Invarianz der Zustandssumme:

$$Z\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{a\bar{\tau}+b}{c\bar{\tau}+d}\right) = Z(\tau,\bar{\tau})\,, \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl(2,\mathbb{Z})\,. \tag{3.54}$$

Im Falle fermionischer Theorien lockert man diese Bedingung etwas, indem man nur Invarianz unter der Untergruppe von $Sl(2,\mathbb{Z})$ fordert, die von S und T^2 erzeugt wird, da Invarianz unter T bedeutet, daß für die konformen Gewichte aller vorkommenden Höchstgewichtsmoduln gelten muß: $h - \bar{h} \in \mathbb{Z}$. (Siehe (2.35) für die Definitionen.)
2. Kreuzungs-Symmetrie der $(4,0)$-Punkt-Funktion:
Aus der Forderung der Assoziativität der OPE erhält man die Bedingung an die "bulk"-OPE-Konstanten:

$$C_{(i\bar{\imath})(j\bar{\jmath})}^{\;(p\bar{p})} C_{(k\bar{k})(l\bar{l})}^{\;(p^*\bar{p}^*)} C_{(p\bar{p})(p^*\bar{p}^*)}^{\;(00)} = \sum_{q,\bar{q}} \mathsf{F}_{pq}\!\left[\begin{smallmatrix} i & k \\ j & l \end{smallmatrix}\right] \mathsf{F}_{\bar{p}\bar{q}}\!\left[\begin{smallmatrix} \bar{\imath} & \bar{k} \\ \bar{\jmath} & \bar{l} \end{smallmatrix}\right] C_{(j\bar{\jmath})(l\bar{l})}^{\;(q^*\bar{q}^*)} C_{(i\bar{\imath})(k\bar{k})}^{\;(q\bar{q})} C_{(q\bar{q})(q^*\bar{q}^*)}^{\;(00)}\,. \tag{3.55}$$

3.5.2 Zylinder-Zustandssumme und Cardys Bedingung

Die Zylinder-Korrelationsfunktionen lassen sich mittels Vernähen (siehe dazu [74, 75]) aus den Korrelationsfunktionen auf den Kreisscheiben bzw. deren Komplementen und andererseits aus denen auf dem Streifen gewinnen.
In (3.30) wurden Randzustände mit Hilfe von Korrelationsfunktionen auf $\mathbb{C}\backslash D$ definiert:

$$\langle X\rangle_{\alpha,\Omega}^{\mathbb{C}\backslash D} = \langle 0,0|X|\alpha\rangle_{\Omega}^{\mathbb{CP}^1}\,. \tag{3.56}$$

Genausogut könnte man dazu Korrelatoren auf D verwenden:

$$\langle X\rangle_{\alpha,\Omega}^{D} = {}_{\Omega}\langle\Theta\alpha|X|0,0\rangle^{\mathbb{CP}^1}\,. \tag{3.57}$$

Θ bezeichnet hierbei den CPT-Operator der Theorie auf $\mathbb{CP}^1$. Die Einführung dieses Operators trägt dem Umstand Rechnung, daß $\partial\mathbb{H}$ mit unterschiedlichen Orientierungen auf $\mathbb{S}^1$ abgebildet wird.
Beim Vernähen von D und $\mathbb{C}\backslash D$ um die Punkte 0, ∞ (in natürlichen Koordinaten) mit dem "twist"-Parameter $q^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{-\pi i}{\tau}}$ ($\frac{\tau}{\pi i}$ ist hier das Verhältnis von Radius und Länge des

entstehenden Zylinders) erhält man folgende Korrelationsfunktionen auf dem durch q charakterisierten Zylinder Z_q

$$\begin{aligned}\langle X\rangle^{Z_q}_{(\alpha,\Omega)(\beta,\Omega')} &= \sum_{v\in\mathrm{ONB}(\mathcal{H})} \langle q^{\frac{1}{2}(L_0+\overline{L}_0-\frac{c}{12})}\Phi(v,0)\rangle^{D}_{\alpha,\Omega}\langle\Phi(v,\infty)X\rangle^{\mathbb{C}\setminus D}_{\beta,\Omega'}\\ &= \sum_{v\in\mathrm{ONB}(\mathcal{H})} {}_{\Omega}\langle\Theta\alpha|q^{\frac{1}{2}(L_0+\overline{L}_0-\frac{c}{12})}|v\rangle^{\mathbb{CP}^1}\langle v|X|\beta\rangle^{\mathbb{CP}^1}_{\Omega'}\\ &= {}_{\Omega}\langle\Theta\alpha|q^{\frac{1}{2}(L_0+\overline{L}_0-\frac{c}{12})}X|\beta\rangle^{\mathbb{CP}^1}_{\Omega'}\,.\end{aligned}\tag{3.58}$$

Mit der Eigenschaft der Randfelder erhält man also

$$\langle X\rangle^{Z_q}_{(\alpha,\Omega)(\beta,\Omega')} = {}_{\Omega}\langle\Theta\alpha|q^{\frac{1}{2}(L_0+\overline{L}_0-\frac{c}{12})}X|\beta\rangle^{\mathbb{CP}^1}_{\Omega'} = {}_{\Omega}\langle\Theta\alpha|q^{L_0-\frac{c}{24}}X|\beta\rangle^{\mathbb{CP}^1}_{\Omega'}\tag{3.59}$$

Zylinderkorrelationsfunktionen können daher interpretiert werden als Übergangsfunktion von einem Rand des Zylinders mit Randbedingung (β,Ω') zu dem mit Randbedingung (α,Ω).

Nennt man den Hilbertraum der Streifentheorie $\mathcal{H}_{(\alpha,\Omega)(\beta,\Omega')}$ und den Hamiltonoperator $H_{(\alpha,\Omega)(\beta,\Omega')}$, so ergibt sich für die Korrelationsfunktion mittels Vernähung eines Streifens mit Randbedingungen (α,Ω) und (β,Ω') andererseits ($\tilde{q}=e^{2\pi i\tau}$)

$$\langle X\rangle^{Z_q}_{(\alpha,\Omega)(\beta,\Omega')} = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_{(\alpha,\Omega),(\beta,\Omega')}}\left(X\tilde{q}^{H_{(\alpha,\Omega)(\beta,\Omega')}}\right)\,.\tag{3.60}$$

Insbesondere ergibt sich damit für die Zustandssumme auf dem Zylinder

$$Z_{(\alpha,\Omega)(\beta,\Omega')}(q) = {}_{\Omega}\langle\Theta\alpha|q^{L_0-\frac{c}{24}}|\beta\rangle_{\Omega'} = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_{(\alpha,\Omega)(\beta,\Omega')}}\left(\tilde{q}^{H_{(\alpha,\Omega)(\beta,\Omega')}}\right)\,.\tag{3.61}$$

Ferner zerfällt der Zylinder-Hilbertraum $\mathcal{H}_{(\alpha,\Omega)(\beta,\Omega')}$ in irreduzible $\mathcal{A}$-Moduln

$$\mathcal{H}_{(\alpha,\Omega)(\beta,\Omega')} = \bigoplus_i \left(V_i^{\mathcal{A}}\right)^{\oplus n^i_{(\alpha,\Omega)(\beta,\Omega')}}\,,\quad n^i_{(\alpha,\Omega)(\beta,\Omega')}\in\mathbb{N}_0\,,\tag{3.62}$$

so daß mit $H_{(\alpha,\Omega)(\beta,\Omega')} = L_0^{\mathbb{H}}-\frac{c}{24}$ folgt

$$\mathrm{tr}_{\mathcal{H}_{(\alpha,\Omega)(\beta,\Omega')}}\left(\tilde{q}^{H_{(\alpha,\Omega)(\beta,\Omega')}}\right) = \sum_i n^i_{(\alpha,\Omega)(\beta,\Omega')}\chi_i(\tilde{q})\,.\tag{3.63}$$

Verwendet man nun folgende Eigenschaft des CPT-Operators

$$\Theta|i\rangle\rangle_{\Omega} = |i^*\rangle\rangle_{\Omega}\,,\tag{3.64}$$

so erhält man für $\Omega=\Omega'$ (in den anderen Fällen muß man die expliziten Eigenschaften der jeweiligen Charaktere ausnutzen) aus (3.61), (3.44) und (2.35)

$${}_{\Omega}\langle\Theta\alpha|q^{L_0-\frac{c}{24}}|\beta\rangle_{\Omega} = \sum_i B^{i^*}_{(\alpha,\Omega)}B^{i}_{(\beta,\Omega)}\chi_i(q) = \sum_i B^{i^*}_{(\alpha,\Omega)}B^{i}_{(\beta,\Omega)}S_{ij}\chi_j(\tilde{q})\,.\tag{3.65}$$

Aus (3.61), (3.65) und (3.63) ergibt sich damit Cardys Bedingung an Randzustände

$$\sum_i B^{i^*}_{(\alpha,\Omega)} B^i_{(\beta,\Omega)} S_{ij} = n^j_{(\alpha,\Omega)(\beta,\Omega)}, \quad n^j_{(\alpha,\Omega)(\beta,\Omega)} \in \mathbb{N}_0 , \tag{3.66}$$

falls alle vorkommenden $\mathcal{A}$-Charaktere linear unabhängig sind, die in [27] formuliert wurde.
Da S invertierbar ist, kann man schreiben:

$$B^i_{(\alpha,\Omega)} = \sum_k \frac{\tilde{B}^k_{(\alpha,\Omega)} S_{ki}}{\sqrt{S_{0i}}} . \tag{3.67}$$

Damit, mit der Eigenschaft der S-Matrix (2.37) und der Verlindeformel (2.39) wird Cardys Bedingung

$$\sum_{k,l} \tilde{B}^k_{(\alpha,\Omega)} \tilde{B}^l_{(\beta,\Omega)} \sum_i \frac{S_{ki^*} S_{l^*i^*} S_{i^*j^*}}{S_{0i^*}} = \sum_{k,l} \tilde{B}^k_{(\alpha,\Omega)} \tilde{B}^l_{(\beta,\Omega)} N^j_{kl^*} = n^j_{(\alpha,\Omega)(\beta,\Omega)} . \tag{3.68}$$

Die Herleitung dieser Bedingung ist auch anschaulich leicht zu verstehen. Sie reduziert sich im wesentlichen auf die Aussage, daß es unerheblich ist, ob die Zeitrichtung auf dem Zylinder senkrecht (3.59) oder parallel (3.60) zu den Rändern verläuft.
Das Spektrum der $\mathbb{H}$-Theorie mit Randbedingung (α, Ω) ist also gegeben durch die Konstanten $n^i_{(\alpha,\Omega)(\alpha,\Omega)}$. Im folgenden werde ich einen Randzustand α Cardy-Randzustand nennen, falls $n^0_{(\alpha,\Omega)(\alpha,\Omega)} = 1$ gilt. Offensichtlich bilden die Lösungen von Cardys Bedingung ein $\mathbb{N}_0$-Gitter. Auf Niveau der Zylinder-Hilberträume entspricht dabei die Addition von Randzuständen gerade

$$\mathcal{H}_{\alpha+\alpha'\,\beta+\beta'} = \mathcal{H}_{\alpha\beta} \oplus \mathcal{H}_{\alpha\beta'} \oplus \mathcal{H}_{\alpha'\beta} \oplus \mathcal{H}_{\alpha'\beta'} . \tag{3.69}$$

3.5.3 "Sewing Relations" für berandete Flächen

In diesem Unterkapitel werden alle "sewing relations" für berandete Flächen aufgeführt (vgl. [55, 27, 62, 15, 39, 67, 68]).
1. Cardys-Bedingung (3.66):

$$\sum_i B^{i^*}_a B^i_b S_{ij} = n^j_{ab}, \quad n^j_{ab} \in \mathbb{N}_0 . \tag{3.70}$$

Wie in 3.5.2 gezeigt entspricht dies der Forderung, daß man die konforme Feldtheorie auf dem Zylinder sowohl aus denen auf zwei Scheiben, als auch aus der auf einem Streifen durch Vernähen erhalten kann.
2. Kreuzungs-Symmetrie der $(0,4)$-Punkt-Funktion:

$$C^{(bcd)\ q}_{jk} C^{(abd)\ l^*}_{iq} C^{(ada)\ 0}_{l^*l} = \sum_p C^{(abc)\ p}_{ij} C^{(cda)\ p^*}_{kl} C^{(aca)\ 0}_{pp^*} \mathsf{F}_{pq}\left[\begin{smallmatrix} i & l^* \\ j & k \end{smallmatrix}\right] . \tag{3.71}$$

3. Kreuzungs-Symmetrie der $(1,2)$-Punkt-Funktion:

$$C_{(i\bar{\imath})}^{(b)\ q} C_{jq}^{(abb)\ k^*} C_{k^*k}^{(aba)\ 0} = \sum_{m,p} e^{i\pi d} \mathsf{F}_{p^*m}\left[\begin{smallmatrix} \bar{\imath}_a & k \\ i^* & j \end{smallmatrix}\right] \mathsf{F}_{mq}\left[\begin{smallmatrix} i & \bar{\imath}_a \\ j^* & k \end{smallmatrix}\right] C_{(i\bar{\imath})}^{(a)\ p} C_{jk}^{(aba)\ p^*} C_{pp^*}^{(aaa)\ 0}, \quad (3.72)$$

wobei $\bar{\imath}_a := \omega_a(\bar{\imath})$ den bzgl. des a-Verklebehomomorphismus Ω_a gespiegelten Modul bezeichnet und $d = 2h_m - h_i - h_{\bar{\imath}_a} - h_j - h_k + \frac{1}{2}(h_p + h_q)$ ist.
4. Kreuzungs-Symmetrie der $(2,1)$-Punkt-Funktion:

$$C_{(i\bar{\imath})(j\bar{\jmath})}^{\ \ (m\bar{m})} C_{(m\bar{m})}^{(a)\ k} = \sum_{x,y,z} e^{i\pi d'} \mathsf{F}_{yz}\left[\begin{smallmatrix} k & \bar{\jmath}_a \\ x^* & j \end{smallmatrix}\right] \mathsf{F}_{x^*m}\left[\begin{smallmatrix} \bar{\imath}_a & z \\ i & j \end{smallmatrix}\right] \mathsf{F}_{y\bar{m}_a}\left[\begin{smallmatrix} \bar{\imath}_a & \bar{\jmath}_a \\ m & k \end{smallmatrix}\right] C_{(i\bar{\imath})}^{(a)\ x} C_{(j\bar{\jmath})}^{(a)\ y} C_{x,y}^{(aaa)\ k^*}. \quad (3.73)$$

mit $d' = h_k + h_x - h_y - 2h_z + h_m - h_{\bar{m}_a} - h_i + h_{\bar{\imath}_a} + h_j + h_{\bar{\jmath}_a}$.

3.6 Lösung der "Sewing Relations"

Für die A- und D-Serie der Virasoro-minimalen Modelle wurden die Vernähungsbedingungen in [67, 68] für Cardy-Randzustände explizit gelöst. Insbesondere sind die Strukturkonstanten in diesen Fällen durch die Daten der "bulk"-Theorie bestimmt. Dies ist sogar eine allgemeine Eigenschaft rationaler konformer Feldtheorien mit symmetrieerhaltenden Randbedingungen und ladungskonjugierten "bulk"-Zustandssummen, wie in [37, 36] mit Methoden der topologischen Quantenfeldtheorie gezeigt wurde. (Bemerkungen dazu finden sich auch in [15].) Diese Methoden können leicht auf $\mathbb{N}_0$-Linearkombinationen von Cardy-Zuständen erweitert werden. Daher werden die grundlegenden Ideen in 3.6.5 kurz skizziert. Doch zuvor werden in 3.6.1 einige Eigenschaften von Randzuständen in allgemeinen (d.h. nicht-diagonalen) rationalen konformen Feldtheorien diskutiert, deren "sewing relations" noch nicht komplett gelöst sind. In 3.6.2 wird dann die Klassifikation von symmetrieerhaltenden Randzustände von $\widehat{\mathrm{su}}(2)_k$-WZW-Modellen angegeben. Dies wird in 3.6.3 verwendet, um Randzustände für Virasoro minimale Modelle zu klassifizieren. In 3.6.4 wird dann die in [67] konstruierte explizite Lösung der "sewing relations", die unten für die Störungsrechnung benötigt wird angegeben.

3.6.1 Symmetrieerhaltende Randzustände in RCFTs

In diesem Kapitel werden für rationale konforme Feldtheorien (RCFTs) konsistente symmetrieerhaltende Randzustände konstruiert, also solche, die Cardys Bedingung erfüllen und die volle Symmetriealgebra erhalten.
Im Falle rationaler konformer Feldtheorien mit ladungskonjugierter Zustandssumme ist dies besonders einfach. Eine solche RCFT besitzt einen Hilbertraum der folgenden Form:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i \in I} V_i \otimes \overline{V}_{i^*}. \quad (3.74)$$

Dann gibt es für jedes $i \in I$ einen Randzustand zu trivialem Verklebeautomorphismus $\Omega = \mathrm{id}$

$$B_{(i,\mathrm{id})}^{j} := \frac{S_{ij}}{\sqrt{S_{0j}}}. \quad (3.75)$$

Mit der Verlindeformel (2.39) und den Eigenschaften der S-Matrix (2.37) ergibt sich dann

$$n^k_{(i,\mathrm{id}),(j,\mathrm{id})} = \sum_l \frac{S_{il^*} S_{jl} S_{lk}}{S_{0l}} = \sum_l \frac{S_{il^*} S_{j^*l^*} \overline{S}_{l^*}^{\,k}}{S_{0l^*}} = N^k_{ij^*} \,. \tag{3.76}$$

Also ist das Spektrum der Theorie auf einer Fläche mit Rand in diesem Fall durch die Fusionsalgebra bestimmt. Diese Lösung von Cardys Bedingung wurde in [27] angegeben. Mit der Umformung (3.68) entspricht dies gerade

$$\tilde{B}^j_{(i,\mathrm{id})} = \delta^j_i \,. \tag{3.77}$$

Bei nichttrivialem Verklebehomomorphismus bzw. nicht ladungskonjugierter Zustandssumme entsprechen die Multiplizitäten n nicht mehr den Fusionsregeln N, jedoch bilden sie immer noch eine ganzzahlige Darstellung der Fusionsalgebra, sofern gewisse Vollständigkeitsannahmen gelten [62, 15, 14].
Sei $R := \{a = (\alpha, \Omega = \mathrm{id})\}$ die Menge der Randzustände. Ich nehme an, daß die Randzustände bzgl. der Umnormierung

$$B^i_a =: \frac{b^i_a}{\sqrt{S_{0i}}} \tag{3.78}$$

orthonormal und vollständig sind, d.h.

$$\sum_{i\in D} b^{i^*}_a b^i_b = \delta_{a,b} \,, \quad \sum_{a\in R} b^i_a b^j_a = \delta^{i,j^*} \,. \tag{3.79}$$

(Insbesondere bedeutet dies $|D_{\mathrm{id}}| = |R|$.)
Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(n^i n^j\right)_{ac} &= \sum_{b\in R} n^i_{ab} n^j_{bc} = \sum_{\substack{b\in R\\ k,l\in D}} \frac{b^{k^*}_a b^k_b S_{ki}}{S_{0k}} \frac{b^{l^*}_b b^l_c S_{lj}}{S_{0l}} \\ &= \sum_{l\in D} \frac{S_{li}}{S_{0l}} \frac{S_{lj}}{S_{0l}} b^{l^*}_a b^l_c = \sum_{k\in I} N^k_{ij} \sum_{l\in D} \frac{S_{lk}}{S_{0l}} b^{l^*}_a b^l_c = \sum_{k\in I} N^k_{ij} n^k_{ac} \\ &= \left(\sum_{k\in I} N^k_{ij} n^k\right)_{ac} \,. \end{aligned} \tag{3.80}$$

Dabei wurde verwendet, daß die Quotienten $\frac{S_{ji}}{S_{0j}}$ eindimensionale Darstellungen der Fusionsalgebra bilden:

$$\frac{S_{kj}}{S_{0k}} \frac{S_{ki}}{S_{0k}} = \sum_{l\in I} N^l_{ij} \frac{S_{kl}}{S_{0k}} \,. \tag{3.81}$$

Klassifikation von vollständigen orthonormalen Sätzen symmetrieerhaltender Randzustände mit $\Omega = \mathrm{id}$ entspricht also der Klassifikation von $\mathbb{N}_0$-Darstellungen der Fusionsalgebra, die den aus der Cardy-Bedingung und der Normierung resultierenden zusätzlichen Einschränkungen

$$n^{i^*} = \left(n^i\right)^t \,, \quad n^0 = 1 \tag{3.82}$$

unterliegen. (Dies gilt auch allgemeiner für festes Ω mit $\omega = \mathrm{id}$.)
Gleichung (3.80) kann vermöge

$$(\tilde{n}_a)^i_b := \left(n^i\right)_{ab}\,, \qquad (N_i)^k_j := N^k_{ji} \tag{3.83}$$

geschrieben werden als

$$\tilde{n}_a n^i = N_i \tilde{n}_a\,. \tag{3.84}$$

Die Matrizen $\tilde{n}_a$ sind also Intertwiner von Darstellungen der Fusionsalgebra.
Aus den Matrizen n^i lassen sich die Konstanten B^i_a mit Hilfe von Cardys Bedingung (3.66) berechnen:

$$\sum_i B^{i^*}_a \frac{S_{ij}}{S_{0i}} B^i_b = n^j_{ab}\,. \tag{3.85}$$

Sie entsprechen den Einträgen der Eigenvektoren der Matrizen n^i und sind somit durch die Zylinder-Zustandssummen bestimmt.

3.6.2 Randzustände für $\widehat{\mathrm{su}}(2)$-WZW-Modelle

Mit Hilfe der im letzten Kapitel vorgestellten Eigenschaften werden symmetrieerhaltende Randzustände für trivialen Verklebehomomorphismus und diagonale “bulk”-Zustandssumme konstruiert. (Diese Konstruktion gilt natürlich nicht nur für $\Omega = \mathrm{id}$, sondern für alle Ω mit $\omega = \mathrm{id}$. Es ist jedoch zu beachten, daß die Cardy-Bedingung hier nur in dem Sektor der Randbedingungen mit gleichem Verklebeautomorphismus gelöst werden.)
Zur Vereinfachung der Notation wird der Vakuumcharakter in diesem Abschnitt nicht mit 0, sondern mit 1 indiziert.
Die positiv ganzzahligen Darstellungen der Fusionsalgebra der $\widehat{\mathrm{su}}(2)_k$-WZW-Modelle ($k \in \mathbb{N}$) sind klassifiziert. Für diese Modelle gilt

$$I = \{1 \leq i \leq k+1\}, \qquad S_{ij} = \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin\left(\pi \frac{ij}{k+2}\right). \tag{3.86}$$

Damit haben mögliche $n^2 = n^{2^*}$ die Eigenwerte (Die Vakuumcharaktere sind hier mit 1 indiziert.)

$$\frac{S_{2i}}{S_{1i}} = 2\cos\left(\frac{\pi i}{k+2}\right) \leq 2\,. \tag{3.87}$$

Nun sind die einzigen symmetrischen Matrizen mit $\mathbb{N}_0$-Einträgen und Eigenwerten ≤ 2 gegeben durch die Cartan-Matrizen der A-D-E-T-Graphen, die die Eigenwerte

$$\lambda_l = 2\cos\left(\frac{\pi l}{g}\right) \tag{3.88}$$

besitzen, wobei g die Coxeter-Zahl des Graphen und $l \in \mathrm{Exp}(G)$ seine Coxeter-Exponenten sind. Die Eigenwertspektren der T-Graphen sind jedoch mit keiner modular invarianten

$\hat{\mathrm{su}}(2)_k$-"bulk"-Zustandssumme kompatibel (siehe [15]) und fallen daher aus diesen Betrachtungen heraus.
Da die n^i eine Darstellung der Fusionsalgebra bilden müssen, definiert man

$$n^1 := 1\,, \quad n^2 := \mathrm{Cartan}(G)\,, \quad n^{i+1} := n^2 n^i - n^{i-1}\,. \tag{3.89}$$

Die Einträge der Matrizen sind offensichtlich ganzzahlig. Daß sie auch nicht-negativ sind, folgt aus allgemeinen Eigenschaften von Lie-Algebren (siehe [32]).

Im $\hat{\mathrm{su}}(2)_k$-WZW-Modell sind also die irreduziblen Systeme von maximal symmetrieerhaltenden orthonormalen Randbedingungen mit trivialem Verklebeautomorphismus klassifiziert durch die Graphen A, D, E mit Coxeter-Zahl $k+2$. Die entsprechenden Randzustände eines solchen Systems sind durch $\mathrm{Exp}(G)$ charakterisiert (vgl. [15]).

3.6.3 Randzustände für minimale Modelle

Die Klassifikation der Randzustände für minimale Modelle beruht darauf, daß ihre Fusionsalgebren Tensorprodukte von $\hat{\mathrm{su}}(2)_k$-Fusionsalgebren sind.

Minimale Modelle sind klassifiziert durch zwei Graphen $A,\ G \in \{A, D, E\}$ mit Coxeter-Zahlen $h,\ g$ teilerfremd. Zentrale Ladung, Zustandssumme und modulare S-Matrix dieser Modelle sind gegeben durch

$$c = 1 - \frac{6(g-h)^2}{gh}\,, \tag{3.90}$$

$$Z = \sum_{r\in\mathrm{Exp}(A)} \sum_{s\in\mathrm{Exp}(G)} |\chi_{(r,s)}|^2 + \mathrm{nicht-diagonale\ Terme}\,, \tag{3.91}$$

$$S_{(r,s)(m,n)} = \sqrt{\frac{8}{gh}}(-1)^{(r+s)(m+n)} \sin\left(\pi\frac{g-h}{h}rm\right) \sin\left(\pi\frac{g-h}{g}sn\right). \tag{3.92}$$

Dabei bezeichnen $\chi_{(r,s)}$

$$(r,s) \sim (h-r, g-s) \in \mathrm{Exp}(A) \times \mathrm{Exp}(G) \tag{3.93}$$

die Charaktere der irreduziblen Höchstgewichtsmoduln zum konformen Gewicht

$$h_{(r,s)} = \frac{(gr-hs)^2 - 1}{4gh}\,. \tag{3.94}$$

Die Fusionsmatrizen N der minimalen Modelle lassen sich durch die $\hat{\mathrm{su}}(2)_{h-2}$ bzw. $\hat{\mathrm{su}}(2)_{g-2}$ Fusionsmatrizen $N^{(h)}$ bzw. $N^{(g)}$ ausdrücken

$$N_{(r,s),(k,l)}^{\quad\ (m,n)} = N_{r,k}^{(h)\ m} N_{s,l}^{(g)\ n} + N_{r,k}^{(h)\ h-m} N_{s,l}^{(g)\ g-n}\,. \tag{3.95}$$

Dabei ist

$$N_{ij}^{(m-2)\,k} = \begin{cases} 1\,, & |i-j| \le k \le \min\{i+j, 2m-4-i-j\}\,,\ (i+j+k) \bmod 2 = 0 \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.96}$$

Offensichtlich gilt

$$N_{(r,s)} = N_{(r,1)} N_{(1,s)}\,. \tag{3.97}$$

Also ist die Fusionsalgebra durch $N_{(1,2)}$ und $N_{(2,1)}$ erzeugt.
Die Eigenwerte von $N_{(1,2)}$, $N_{(2,1)}$ sind gegeben durch

$$\frac{S_{(1,2)(r,s)}}{S_{(1,1)(r,s)}} = (-1)^r 2\cos\left(\pi s \frac{h}{g}\right) \tag{3.98}$$

$$\frac{S_{(2,1)(r,s)}}{S_{(1,1)(r,s)}} = (-1)^s 2\cos\left(\pi r \frac{g}{h}\right)\,. \tag{3.99}$$

Ziel ist nun die Klassifikation von Randzuständen der minimalen Modelle, die aufgrund ihrer kleinen Symmetriealgebra keine nicht-trivialen Verklebeautomorphismen zulassen. Das bedeutet insbesondere, daß es genau zu den diagonalen Termen in der “bulk”-Zustandssumme Ishibashi-Zustände gibt. Die Eigenwerte der, die Randzustände charakterisierenden Darstellung n der Fusionsalgebra müssen also durch diese bestimmt sein.
Man definiert nun wie in (3.89) die Intertwiner zum Graphen G

$$V_g^1 := 1, \quad V_g^2 := \text{Cartan}(G), \quad V_g^{i+1} := V_g^2 V_g^i - V_g^{i-1}\,. \tag{3.100}$$

Die $V_h^i := N_i^{(h)}$ sind Intertwiner zu A. Dann bilden die

$$n^{(r,s)} := V_h^r \otimes V_g^s + V_h^{h-r} \otimes V_g^{g-s} \tag{3.101}$$

eine bis auf mögliche Redundanzen in der Benennung irreduzible positiv ganzzahlige Darstellung der Fusionsalgebra, die mit dem “bulk”-Spektrum (3.91) kompatibel ist. Dies ist die einzige solche Darstellung, wie in Appendix C. von [15] gezeigt wird.
Randzustände sind dabei durch $(\text{Exp}(A) \times \text{Exp}(G))/\sim$ charakterisiert, wobei $(a,b) \sim (\gamma_A(a), \gamma_G(b))$ durch die $\mathbb{Z}_2$-Automorphismen γ_A, γ_G der Graphen A, G gegeben ist.
Es ist jedoch zu bemerken, daß hier lediglich Lösungen von Cardys Bedingung klassifiziert wurden. Lösungen aller “sewing relations” für die unitären minimalen Modelle der A- und D-Serien wurden in [67, 68] konstruiert. Da im folgenden Randbedingungen der unitären A-Serie untersucht werden sollen, werden diese Lösungen im nächsten Abschnitt angegeben.

3.6.4 Lösung der “Sewing Relations” für Virasoro minimale Modelle

Für die spätere Verwendung werden hier die in [67] berechneten Strukturkonstanten für das unitäre Virasoro minimale Modell (A_m, A_{m+1}) explizit angegeben.
Die in dieser Theorie vorkommenden Höchstgewichtsdarstellungen der Virasoro-Algebra sind benannt durch (r,s), $1 \le r \le m-1$, $1 \le s \le m$, wobei (r,s) und $(m-r, m+1-s)$

die gleichen Darstellungen bezeichnen. Zu jeder Höchstgewichtsdarstellung gibt es einen Randzustand

$$|\alpha\rangle = \sum_i \frac{S_{\alpha i}}{\sqrt{S_{0i}}} |i\rangle\rangle\,, \tag{3.102}$$

wobei die S-Matrix für Virasoro minimale Modelle gegeben ist durch

$$S_{(r,s)(u,v)} = \sqrt{\frac{8}{m(m+1)}}(-1)^{(r+s)(u+v)} \sin\left(\frac{\pi}{m} ru\right) \sin\left(\frac{\pi}{m+1} sv\right)\,. \tag{3.103}$$

Die “bulk-boundary”-OPE-Konstanten lauten

$$C_i^{(\alpha)\,k} \quad = \quad C_i^{(\alpha)\,0} \frac{S_{\alpha i}(k)}{S_{\alpha i}} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}h_k}}{\mathsf{F}_{\alpha 0}\left[\begin{smallmatrix}\alpha & \alpha\\ k & k\end{smallmatrix}\right]}\,, \tag{3.104}$$

mit

$$S_{\alpha i}(k) = S_{00} e^{-2\pi(h_\alpha + h_i)} \frac{\mathsf{F}_{\alpha 0}\left[\begin{smallmatrix}\alpha & \alpha\\ k & k\end{smallmatrix}\right]}{\mathsf{F}_{00}\left[\begin{smallmatrix}k & k\\ k & k\end{smallmatrix}\right]\mathsf{F}_{k0}\left[\begin{smallmatrix}i & i\\ i & i\end{smallmatrix}\right]\mathsf{F}_{k0}\left[\begin{smallmatrix}\alpha & \alpha\\ \alpha & \alpha\end{smallmatrix}\right]} \sum_r e^{2\pi i h_r} \mathsf{F}_{kr}\left[\begin{smallmatrix}\alpha & i\\ \alpha & i\end{smallmatrix}\right]\mathsf{F}_{r0}\left[\begin{smallmatrix}i & i\\ \alpha & \alpha\end{smallmatrix}\right]. \tag{3.105}$$

(Da die “bulk”-Zustandssumme diagonal ist, werden “bulk”-Felder hier nur mit einem Darstellungsindex bezeichnet.)
Die “boundary-boundary”-OPE-Konstanten sind ferner gegeben durch

$$C_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)\,k} = \mathsf{F}_{\beta k}\left[\begin{smallmatrix}\alpha & \gamma\\ i & j\end{smallmatrix}\right]. \tag{3.106}$$

Die Fusingmatrizen für minimale Modelle werden in A.4 angegeben.

3.6.5 Topologische Quantenfeldtheorien und konforme Blöcke

In [37, 36] wurden Methoden der topologischen Quantenfeldtheorie verwendet, um die “sewing relations” für symmetrieerhaltende Randbedingungen in rationalen konformen Feldtheorien mit ladungskonjugierten Torus-Zustandssummen zu lösen. Dabei wird die Korrespondenz des Raumes der konformen Blöcke rationaler konformer Feldtheorien auf geschlossenen orientierten Flächen mit dem Zustandsraum einer drei-dimensionalen topologischen Quantenfeldtheorie verwendet. Genauer wurden in [36] Zustände konstruiert, deren assoziierte konforme Blöcke die “sewing relations” erfüllen. Mit Hilfe dieser Zustände lassen sich dann die Strukturkonstanten der Theorie berechnen bzw. durch Konstanten der zugrundeliegenden modularen Tensorkategorie ausdrücken.
Für eine Einführung in topologischen Quantenfeldtheorien siehe [76]. Eine Diskussion des Zusammenhangs von drei-dimensionalen topologischen Quantenfeldtheorien und rationalen konformen Feldtheorien in zwei Dimensionen ist zum Beispiel in [43] gegeben.
Entscheidend für die Konstruktion ist die in 3.1 erwähnte Tatsache, daß die konformen (m, n)-Punkt-Funktionen auf der berandeteten Fläche im Raum der chiralen $(2m + n)$-Punkt-Blöcke der Schottky-Überlagerung dieser Fläche liegen. Diese Überlagerung ist das über den Rändern verklebte Orientierungsbündel der Fläche und damit geschlossen und orientiert. Zu einer (m, n)-Punkt-Funktion auf der ursprünglichen Fläche wird nun

eine dekorierte drei-dimensionale Mannigfaltigkeit konstruiert, deren Rand der Schottky-Überlagerung der Fläche entspricht. Der durch diese Mannigfaltigkeit definierte Zustand der zu der rationalen konformen Feldtheorie gehörenden topologischen Quantenfeldtheorie korrespondiert dann einem konformen Block der Überlagerung, der die "sewing relations" erfüllt.

3.7 Konforme Feldtheorien auf nicht orientierbaren Flächen

Bisher wurde die Konstruktion konformer Feldtheorien auf Flächen mit Rändern diskutiert. Man kann konforme Feldtheorien jedoch auch auf allgemeinen Flächen, also auch nicht orientierbaren definieren. Dies ist für bestimmte Stringtheorien sogar notwendig, da hier natürlicherweise allgemeine Weltflächen auftauchen. Die Behandlung konformer Feldtheorien auf nicht orientierbaren Flächen funktioniert jedoch sehr ähnlich der Behandlung konformer Feldtheorien auf berandeten Flächen (siehe [59, 50, 21, 60, 39]) und soll daher hier nur angedeutet werden.

Auch bei allgemeinen Flächen nutzt man die Vernähungseigenschaft zur Konstruktion der konformen Feldtheorien auf diesen. Die "einfachste" nicht orientierbare Fläche ist die Kleinsche Flasche, bzw. der $\mathbb{RP}^2$. Der Einfachheit halber gehe ich über auf die obere Halbebene $\mathbb{H}$, mit Identifizierungsabbildung $d : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto -\frac{1}{x}$. Die Algebra der lokalen konformen Transformationen der Kleinschen Flasche ist damit ähnlich wie in 3.1 gegeben durch die holomorphen und antiholomorphen Abbildungen

$$\epsilon, \bar{\epsilon} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \epsilon(x) = \bar{\epsilon}\left(d(x)\right), \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.107}$$

Diese lassen sich genau wie im Falle der oberen Halbebene zu einer holomorphen Abbildung zusammenfassen:

$$\epsilon^K : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \epsilon^K(z) = \begin{cases} \epsilon(z), \ \Im(z) \geq 0 \\ \bar{\epsilon}(-\frac{1}{\bar{z}}), \ \Im(z) \leq 0 \end{cases} \tag{3.108}$$

Damit erhält man dann folgende Verklebebedingungen für den geometrischen Anteil der Symmetriealgebra

$$T(z) = \overline{T}\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) \quad \forall z \in \mathbb{R}, \tag{3.109}$$

die man zu einer Verklebebedingung der gesamten W-Algebra verallgemeinert:

$$W(z) = \Omega(\overline{W})\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) \quad \forall z \in \mathbb{R}. \tag{3.110}$$

Die Symmetriealgebra der konformen Feldtheorie auf der Kleinschen Flasche entspricht also, genau wie die auf der oberen Halbebene, nur noch einer chiralen Hälfte derer auf der Riemannschen Sphäre.

Wie in 3.4.1 definiert man die "Crosscap"-Zustände über die Abbildung auf das Komplement der Einheitskreisscheibe und erhält als Bedingung an diese:

$$\left(W_n - (-1)^{n+h_W}\Omega(\overline{W})_{-n}\right)|C\rangle_\Omega = 0\,. \tag{3.111}$$

Auch zu dieser Bedingung lassen sich ähnlich wie in 3.4.2 Ishibashi-Zustände konstruieren. Man muß lediglich statt (3.38)

$$UW_n = (-1)^{n+h_W}\overline{W}_n U \tag{3.112}$$

verwenden.
In rationalen Theorien lassen sich dann "Crosscap" Zustände als Linearkombination aus diesen Ishibashi Zuständen schreiben. Im Unterschied zu den Randzuständen sind diese "Crosscap" Zustände jedoch eindeutig bestimmt, was in [61] gezeigt wurde.
Die n-Punkt-Funktionen auf der Kleinschen Flasche liegen im Raum der $2n$-Punkt-Funktionen der chiralen Theorie auf der zweifachen Überlagerung, wobei ein Feld

$$\Phi(\xi_i \otimes \overline{\xi}_{\bar{\imath}}, z, \bar{z}) = \sum_{j\bar{\jmath},k,\bar{k},a,\bar{a}} D^{j\bar{\jmath}\,k\bar{k}\;(a\bar{a})}_{i\bar{\imath}} \Phi^{(a)\;i}_{j,k}(\xi_i, z)\overline{\Phi}^{(\bar{a})\;\bar{\imath}}_{\bar{k},\bar{\jmath}}(\overline{\xi}_{\bar{\imath}}, \bar{z})\,. \tag{3.113}$$

auf der Kleinschen Flasche ersetzt wird durch (vgl. (3.17))

$$\sum_{j\bar{\jmath},k,\bar{k},a,\bar{a}} D^{j\bar{\jmath}\,k\bar{k}\;(a\bar{a})}_{i\bar{\imath}} \Phi^{(a)\;i}_{j,k}(\xi_i, z)\Phi^{(\bar{a})\;\omega(\bar{\imath})}_{\omega(\bar{k}),\omega(\bar{\jmath})}(\xi_{\omega(\bar{\imath})}, \pi(z)) \tag{3.114}$$

auf der zweifachen Überlagerung. Dabei bezeichnet π gerade die Vertauschung in der $\mathbb{Z}_2$-Faser der Überlagerung [40, 45] und ist hier durch $\pi(z) = -\frac{1}{z^*}$ gegeben.
Ferner müssen auch für diesen Fall zusätzliche "sewing relations" gelten. Diese werden hier jedoch nicht weiter untersucht.

3.8 Bemerkungen zur Anwendung in der Stringtheorie

In diesem Abschnitt wird die Anwendung der konformen Feldtheorie auf Flächen mit Rändern auf den Weltflächenzugang zur Stringtheorie kurz skizziert. Dies soll im wesentlichen dazu dienen, die in der Stringtheorie üblichen Sprechweisen in die Sprache der konformen Feldtheorie zu übersetzen.

Konforme Feldtheorien auf Flächen mit Rändern bilden die Grundlage der Weltflächenbeschreibung von Stringtheorien, die offene Strings enthalten. Besonderes Interesse erfuhr die Analyse von Randbedingungen im Kontext der Stringtheorie mit der Entdeckung, daß bestimmte solitonische Lösungen der Niederenergie-Bewegungsgleichungen von geschlossenen Stringtheorien, solitonische p-branes, die das Verhalten der Theorie bei niedrigen Energien bestimmen, eine Niederenergie-Realisierung von Dirichlet-p-branes sind, höherdimensionalen dynamischen Objekten in der Stringtheorie, auf denen offene Strings enden können. Offene Strings haben nun Weltflächenbeschreibungen durch konforme Feldtheorien auf Flächen mit Rändern, und die Randbedingungen dieser konformen Feldtheorien

entsprechen den möglichen D-branes. Das Spektrum eines offenen Strings, der zwischen den durch die Randbedingungen α und β charakterisierten D-branes gespannt ist, ist durch die Zylinder-Zustandssumme $Z_{\alpha\beta}$ der konformen Feldtheorie gegeben. Insbesondere entsprechen Vertexoperatoren solcher Strings gerade BCCOs. Ferner sind Eigenschaften der D-branes, wie Dimension, Gestalt und Eichfelder in den Randbedingungen, d.h. Verklebebedingungen und $(1,0)$-Punkt-Funktionen kodiert. Man kann also aus der Analyse der konformen Feldtheorie Informationen über das D-brane-Spektrum erhalten. Der Modulraum von Randbedingungen einer konformen Feldtheorie entspricht demnach gerade dem Modulraum der D-branes einer bestimmten Stringtheorie. Deformationen von Randbedingungen entsprechen Deformationen der D-branes.
Im folgenden werden relevante Randstörungen konformer Feldtheorien diskutiert. In der Stringterminologie wird dies mit dem Namen Tachyon-Kondensation versehen. Eine Anordnung von D-branes ist stabil, falls es in den entsprechenden Spektren der Randoperatoren keine relevanten Operatoren (bzw. nicht-exakt marginalen Operatoren, die unter dem Renormierungsfluß relevant werden) gibt. Nicht stabile Konfigurationen können unter Kondensation von tachyonischen offenen Stringmoden (relevanten Randoperatoren) in andere Anordnungen zerfallen [72, 73, 18, 46, 57]. Auf Weltflächen-Niveau entspricht dies gerade den relevanten Randstörungen.
Die in dieser Arbeit dargestellten Methoden der relevanten Randstörung konformer Feldtheorien können also dazu verwendet werden, auf perturbativem Weg Aussagen über die Tachyon-Kondensation instabiler D-brane Konfigurationen zu erhalten.

Ein ausführlicher Überblick über den Weltflächenzugang zur Behandlung von D-branes findet sich in [63].

Kapitel 4

Randstörungen konformer Feldtheorien

Ein Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung von Randstörungen konformer Feldtheorien. Während exakt marginale Randstörungen, also solche, die die konforme Symmetrie der Theorie nicht brechen, sehr ausführlich in [66] diskutiert wurden, gibt es bisher in der Literatur kaum eine systematische Behandlung von relevanten Randstörungen. Ähnlich wie im Falle relevanter "bulk"-Störungen ist ihre Diskussion sehr stark vom betrachteten Modell abhängig und wird zumeist mit Methoden wie dem Thermodynamischen Bethe Ansatz (TBA) oder dem "truncated conformal space approach" (TCSA) angegangen [47, 9, 38, 34, 54, 8, 29, 53, 35, 33], die zwar gut dafür geeignet sind, Flüsse bestimmter Modelle zu untersuchen, allerdings kaum dafür, allgemeine, über das konkrete Modell hinausgehende Aussagen zu machen. Daher wird im folgenden die konforme Störungstheorie verwendet, um relevante Randstörungen zu untersuchen.
Interessant sind Randstörungen nicht nur im Gebiet der kritischen Systeme, in dem Randstörungen Aussagen über Phasenräume von Randbedingungen und Stabilität von solchen liefern, sondern auch in der Stringtheorie. In der Stringtheorie entsprechen Randbedingungen konformer Feldtheorien gerade den D-branes, auf denen der durch die konforme Feldtheorie auf der Fläche beschriebene offene String endet. Randstörungen konformer Feldtheorien beschreiben also Stabilität, Phasen- und Modulräume von D-branes und D-brane-Konfigurationen. Insbesondere bieten relevante Randstörungen die Möglichkeit Aussagen über die Tachyon-Kondensation von instabilen D-brane-Konfigurationen zu machen.
Im ersten Unterkapitel werden kurz Konzepte der konformen Störungstheorie vorgestellt. Danach werden speziell Randstörungen konformer Feldtheorien diskutiert.

4.1 Konforme Störungstheorie

Störungen konformer Feldtheorien werden, obwohl in den meisten Fällen keine Wirkung bekannt ist, in starker Anlehnung an den Pfadintegralformalismus formuliert. (Für eine Einführung in die konforme Störungstheorie siehe [82, 23, 52, 51].)

Man definiert eine Wirkung der gestörten Theorie durch

$$S := S_0 - \lambda_0^i S_i \,. \tag{4.1}$$

Dabei ist S_0 die Wirkung der ungestörten Theorie, die S_i sind Störterme und die λ_0^i Kopplungskonstanten, die diese Störungen parametrisieren.
Die gestörten n-Punkt-Funktionen von Feldern der Theorie sind dann

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \ldots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle^\lambda := \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \ldots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) e^{\lambda_0^i S_i} \rangle^0 \,. \tag{4.2}$$

Das bedeutet allerdings, daß man eine explizite Wirkung zur Störung nicht benötigt, wenn man die ungestörten n-Punkt-Funktionen kennt. Im folgenden ist mit Störung die Deformation von n-Punkt-Funktionen gemäß (4.2) mit Störtermen

$$S_i := \int_{\mathcal{U}, \epsilon, R} \chi_{i,0} \tag{4.3}$$

gemeint. Dabei ist $\chi_{i,0}$ ein "bulk"-Feld und $\mathcal{U}$ die gesamte Fläche bei "bulk"-Störungen, und χ_i Randfeld und $\mathcal{U}$ Rand der Fläche bei Randstörungen.
Die gestörten n-Punkt-Funktionen sind aber im allgemeinen nicht definiert, weil die auftauchenden Integrale divergieren können. Dabei tauchen sowohl infra-rot (IR) als auch ultra-violett (UV) Divergenzen auf, die durch die Parameter ϵ und R regularisiert werden. Das heißt, die Integration wird auf einen Ball mit Radius R um den Koordinatenursprung eingeschränkt, und die ϵ-Umgebungen der partiellen Diagonalen werden bei der Integration ausgespart.
Eine Renormierungsgruppen-Transformation ist eine Transformation auf dem Raum der Wirkungen der Quantenfeldtheorien, die die durch die Regularisierung eingefürte Skala verändert, Normierungen der Felder sowie Kopplungskonstanten transformiert, aber die n-Punkt-Funktionen invariant läßt. Die Renormierungsgruppe ist die Ein-Parameter-Gruppe von solchen Transformationen R_t mit Parameter $t := \ln(\Lambda) := \ln\left(\frac{\epsilon}{R}\right)$. Man nennt $R_t(\lambda_0) = \lambda(t, \lambda_0)$ renormierte Kopplungskonstante und $R_t(\chi_0) = \chi(t, \chi_0)$ renormiertes Feld und definiert β-Funktion und anomale Dimensionen γ wie folgt:

$$\beta^i(\lambda) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \lambda^i(t, \lambda_0) \,, \tag{4.4}$$

$$\gamma_i^{\ j}(\lambda) \chi_j = \left(\dim(\mathcal{U}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right) \chi_i \,. \tag{4.5}$$

Generator dieser Renormierungsgruppen-Transformation auf Niveau der Quantenfeldtheorie ist die Spur des Energie-Impuls-Tensors $\Theta = \mathrm{tr}(T)$. Man nennt eine Störung vom obigen Typ renormierbar, falls $\Theta = \xi^i \chi_i$. Insbesondere müssen die χ_i eine geschlossene Unteroperatoralgebra modulo irrelevanter Operatoren bilden. Dann folgt $\xi^i = \beta^i$ aus der Forderung der Invarianz der n-Punkt-Funktionen (siehe [82]). Nun hat Θ anomale Dimension 0, also gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\dim(\mathcal{U}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right) \Theta = \left(\dim(\mathcal{U}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right) (\beta^i \chi_i) \\ &= - \left(\beta^k \frac{\partial}{\partial \lambda^k} \beta^i \right) \chi_i + \beta^i \gamma_i^{\ j} \chi_j = \beta^k \left(- \frac{\partial}{\partial \lambda^k} \beta^i + \gamma_k^{\ i} \right) \chi_i \\ &\Rightarrow \gamma_k^{\ i} = \frac{\partial}{\partial \lambda^k} \beta^i \,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Eine gestörte konforme Feldtheorie ist im allgemeinen nicht mehr konform, da durch die Regularisierung eine Skala eingeführt wurde. An Fixpunkten des Renormierungsgruppenflusses ($\beta^i = 0 \Rightarrow \Theta = 0$) ist die Skaleninvarianz wieder hergestellt.
Das Skalenverhalten des Störterms zeigt, daß Störungen mit einem Operator des konformen Gewichts $h > \dim(\mathcal{U})$ zum Ausgangsfixpunkt zurückführen. Eine solche Störung nennt man daher auch irrelevant. Störungen mit Operatoren des konformen Gewichts $h < \dim(\mathcal{U})$ nennt man relevant, da sich der Renormierungsfluß in einem solchen Fall vom Ausgangsfixpunkt entfernt. Störungen mit Operatoren des konformen Gewichts $h = \dim(\mathcal{U})$ heißen marginal. Bleibt ein marginaler Operator auf dem Renormierungsfluß der Störung marginal, so nennt man ihn exakt marginal. Bei Störungen mit solchen Operatoren bleibt die konforme Invarianz erhalten, und man erhält eine kontinuierliche Familie konformer Feldtheorien, die durch die Kopplunskonstante parametrisiert ist. Es ist eine weit verbreitete Meinung, daß die kontinuierlichen Bereiche von Modulräumen konformer Feldtheorie genau durch solche exakt marginalen Störungen beschrieben werden. Daher bezeichne ich die Störungen mit exakt marginalen Operatoren auch als Deformationen der konformen Feldtheorie. Dabei ist zu bemerken, daß die Bedingung für exakte Marginalität nicht linear ist, also die exakt marginalen Operatoren im allgemeinen keinen Vektorraum bilden. Das bedeutet, daß Modulräume keine Mannigfaltigkeiten sein müssen, sondern Singularitäten besitzen können.
Ein wichtiges Resultat bzgl. relevanter "bulk"-Störungen unitärer konformer Feldtheorien ist Zamolodchikovs c-Theorem (siehe [81, 82]). Es besagt, daß es eine Funktion auf dem Raum der zwei-dimensionalen Quantenfeldtheorien gibt, die unter dem Renormierungsfluß (außerhalb von Fixpunkten) streng monoton fällt und in den Fixpunkten mit den zentralen Ladungen der Virasoro-Algebren der entsprechenden konformen Feldtheorien zusammenfällt. Das zeigt die Irreversibilität des Renormierungsflußes in diesen Situationen und liefert sogar eine "Entropie-Funktion".
Diese Ergebnisse können ferner genutzt werden, um eine geometrische Interpretation der Renormierung zu geben [52].

Konstruiert man gestörte n-Punkt-Funktionen einer konformen Feldtheorie, so berechnet man zunächst regularisierte n-Punkt-Funktionen und renormiert Kopplungskonstanten und Felder Ordnung für Ordnung:

$$\begin{aligned} \lambda^i &= (Z')^i{}_j(\lambda)\, \lambda_0^j \\ \chi_i &= Z_i{}^j(\lambda)\, \chi_{j,0}\,, \end{aligned} \tag{4.7}$$

mit

$$\begin{aligned} (Z')^j{}_i(\lambda) &= \delta^j_i + \lambda^k\, (Z')^j{}_{i,k} + \lambda^k \lambda^l\, (Z')^j{}_{i,kl} + O(\lambda^3) \\ Z_i{}^j(\lambda) &= \delta_i{}^j + \lambda^k\, Z_{i,k}{}^j + \lambda^k \lambda^l\, Z_{i,kl}{}^j + O(\lambda^3)\,. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Aus den Definitionen und dem Skalenverhalten der nicht-renormierten Kopplungskonstanten und Felder

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_0^i = \tilde{\gamma}^i_j \lambda_0^j\,, \qquad \left(\dim(\mathcal{U}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \chi_{i,0} = \tilde{\gamma}^j_i\, \chi_{j,0} \tag{4.9}$$

erhält man den Zusammenhang von β, γ, Z' und Z

$$\beta^k(\lambda)\left(\delta^i_k - \frac{\partial (Z')^i_j(\lambda)}{\partial\lambda^k}\left(Z'^{-1}(\lambda)\right)^j_l \lambda^l\right) = (Z')^i_j(\lambda)\gamma^j_l(0)\left(Z'^{-1}(\lambda)\right)^l_k \lambda^k \tag{4.10}$$

$$\gamma^j_i(\lambda) = Z_i{}^k(\lambda)\,\gamma^l_k(0)\left(Z^{-1}\right)_l{}^j(\lambda) - \beta^k \frac{\partial\left(Z^k_i(\lambda)\right)}{\partial\lambda^k}\left(Z^{-1}\right)^j_k(\lambda)\,. \tag{4.11}$$

Nun ist Z nach Wahl eines Renormierungsschemas (dies kann nach [52] als Koordinatenwahl auf dem Raum der Quantenfeldtheorien aufgefaßt werden) störungstheoretisch leicht zugänglich. Daraus lassen sich mit Hilfe von (4.10), (4.11) und (4.6) β und γ bestimmen.
Unten wird eine Ein-Feld-Störung renormiert. In diesem Fall vereinfachen sich die Gleichungen zu (vgl. [52])

$$\beta(\lambda) = \frac{\gamma(0)\lambda}{1-\lambda\frac{\partial\ln(Z'(\lambda))}{\partial\lambda}} \tag{4.12}$$

$$\gamma(\lambda) = \gamma(0) - \beta(\lambda)\frac{\partial\ln(Z(\lambda))}{\partial\lambda}\,, \tag{4.13}$$

und aus (4.12), (4.13) und (4.6) erhält man

$$\begin{aligned}
&\partial_\lambda\beta = \gamma(0) - \beta\partial_\lambda\ln(Z)\\
\Rightarrow\ &\partial_\lambda\ln(Z\beta) = \frac{\gamma(0)}{\beta} = \frac{1}{\lambda} - \partial_\lambda\ln(Z')\\
\Rightarrow\ &\partial_\lambda\ln(ZZ'\beta) = \frac{1}{\lambda}\\
\Rightarrow\ &ZZ' = \frac{C\lambda}{\beta} = \frac{C}{\gamma(0)}\left(1-\lambda\partial_\lambda\ln(Z')\right)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Aus $Z(0) = Z'(0) = 1$ folgt für die Integrationskonstante $C = \gamma(0)$ und es ergibt sich

$$Z'(\lambda)Z(\lambda) = 1 - \lambda\frac{\partial\ln(Z')}{\partial\lambda}\,. \tag{4.15}$$

Konforme Feldtheorien auf Flächen mit Rändern können nun sowohl durch "bulk"- als auch durch Randfelder gestört werden. Da in dieser Arbeit zunächst einmal nur der Modul- bzw. Phasenraum der Randbedingungen untersucht werden soll und nicht seine Verbindung zum "bulk"-Modulraum, beschränke ich mich auf die Behandlung von reinen Randstörungen. Diese haben den Vorteil, daß die "bulk"-Theorie im IR-Fixpunkt der ungestörten "bulk"-Theorie entspricht. (Dies ist sehr plausibel, da die "bulk"-OPE lokal ist und Randstörungen beliebig kleinen Einfluß auf die Singularitätenstruktur von Korrelatoren mit Feldern tief im Inneren der Fläche haben.)
In [34, 35, 33] gibt es Ansätze zur Berechnung der etwas komplizierteren kombinierten oder reinen "bulk"-Störungen konformer Feldtheorien auf Flächen mit Rändern.

4.2 Randstörungen

Es wird nun eine konforme Feldtheorie auf einer Fläche Σ mit zusammenhängendem Rand $\partial\Sigma$ und Randbedingung α auf diesem mit Randoperatoren $\psi_i^{(\alpha\alpha)}$ gestört. Die gestörten Korrelationsfunktionen sind dann gegeben durch

$$\langle X\rangle_\alpha^\lambda = \langle X\mathcal{P}\exp\left(\sum_i \lambda^i \int_{\partial\Sigma,\epsilon,R} \psi_i^{(\alpha\alpha)}\right)\rangle_\alpha . \tag{4.16}$$

Dabei sind λ^i die Kopplungskonstanten der Störungen, R ist ein IR-Regularisierungsparameter, ϵ ist ein UV-Regularisierungsparameter, der die Positionen der Störfelder voneinander und von denen der Randfelder im Korrelator trennt, und $\mathcal{P}$ ist der Pfadordnungsoperator. Die Einführung der Pfadordnung an dieser Stelle ist notwendig, da die Korrelationsfunktionen mehrerer Randoperatoren Schnitte bei zusammentreffenden Positionen aufweisen können. Falls einer der Randoperatoren $\psi_i^{(\alpha\alpha)}$ relevant ist, nehme ich an, daß $\mathrm{Span}_\mathbb{C}\{\psi_0^{(\alpha\alpha)}, \psi_i^{(\alpha\alpha)}\}$ modulo irrelevanter Operatoren eine Unteralgebra der Randoperatoralgebra ist. Ansonsten muß die Menge der Operatoren um weitere relevante Operatoren erweitert werden. Ein Randoperator ψ ist relevant, falls $h_\psi < 1$, marginal, falls $h_\psi = 1$ und irrelevant, falls $h_\psi > 1$ ist. Ein Operator ist exakt marginal, falls seine konforme Dimension auf der gesamten Renormierungskurve 1 bleibt. In [66] wurde gezeigt, daß selbst-lokale Randoperatoren exakt marginal sind. Gegenseitige Lokalität von Randoperatoren ψ_1 und ψ_2 bedeutet dabei, daß Korrelationsfunktionen, die $\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)$ enthalten eindeutige analytische Fortsetzungen von dem Bereich $x_1 < x_2$ in den Bereich $x_1 > x_2$ besitzen, und daß ferner gilt

$$\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) = \psi_2(x_2)\psi_1(x_1), \qquad \forall x_1 \neq x_2 \in \partial\Sigma . \tag{4.17}$$

Deformationen konformer Feldtheorien auf Flächen mit Rändern durch Randoperatoren werden in Abschnitt 4.4 diskutiert.
Störungen mit BCCOs können formal genauso definiert werden:

$$\langle X\rangle_\alpha^\lambda = \langle X\mathcal{P}\exp\left(\sum_i \lambda^i \int_{\partial\Sigma,\epsilon,R} \left(\psi_i^{(\beta_i\gamma_i)} + \psi_i^{(\gamma_i\beta_i)}\right)\right)\rangle_\alpha , \tag{4.18}$$

wobei nun wieder die Algebra der Operatoren $\psi_i^{(\alpha_i,\beta_i)}$, $\psi_i^{(\beta_i,\alpha_i)}$ bis auf irrelevante Operatoren geschlossen sein muß. Es ist ferner zu beachten, daß nicht wohldefinierte Produkte von Operatoren, also $\psi_i^{(\beta,\gamma)}\psi_j^{(\delta,\rho)}$ mit $\gamma \neq \delta$, Null gesetzt werden müssen.
In der Stringtheorie beschreiben solche Störungen gerade die Wechselwirkung eines offenen Strings mit offenen Strings, die auf anderen D-Branes enden. Die Bedeutung in der Theorie der Festkörperphysik ist von Modell zu Modell zu klären (siehe [3]). Zum Beispiel wurden in [79] BCCOs als Unordnungsoperatoren im Ising-Modell betrachtet.
Eine Randstörung mit einem BCCO ist jedoch nur dann überhaupt sinnvoll, falls dieser auch im Randoperatorspektrum der Theorie enthalten ist, das wiederum durch die Randbedingung festgelegt ist. Insbesondere bedeutet dies, daß man einzelne Cardy-Randbedingungen nicht mit BCCOs stören kann. Das Spektrum einer Theorie, deren

Randbedingung Linearkombinationen von Cardy-Randzuständen sind, enthält jedoch BCCOs und läßt sich somit mit diesen stören. Eine Diskussion von solchen Störungen taucht in der bisherigen Literatur nicht auf. Bestimmte Beispiele solcher Störungen von minimalen Modellen wurden aber mit Hilfe von TCSA-Methoden kürzlich untersucht [49]. Im folgenden beschränke ich mich auf Störungen mit nicht randbedingungsverändernden Operatoren.

Interessant ist nun vor allem die Berechnung der IR-Fixpunkte der Störungen bzw. die Identifikation der Randbedingungen in diesen. Randbedingungen sind durch Verklebehomomorphismus und "bulk"-Ein-Punkt-Funktionen charakterisiert. (Möglicherweise ist im allgemeinen zusätzlich noch die Angabe der "boundary-boundary"-OPE notwendig. Das ist jedoch eine offene Frage. Bisher ist in keinem Fall zu durch Verklebehomomorphismus und "bulk"-Ein-Punkt-Funktionen charakterisiertem Randzustand eine weitere Randoperatoralgebra bekannt.)
Die Berechnung der gestörten Verklebebedingung ist nun im allgemeinen recht schwierig, da diese während des Flusses gebrochen werden.
Da die "bulk"-Theorie im IR-Fixpunkt der Ausgangstheorie entspricht, können gestörte "bulk"-Ein-Punkt-Funktionen zur Untersuchung der Randbedingung im IR-Fixpunkt verwendet werden. Für ein "bulk"-Feld ϕ muß dann gelten

$$\langle \phi(0,0) \rangle_{\alpha^*} = \langle \phi(0,0) \rangle_{\alpha}^{\lambda^*} . \tag{4.19}$$

Dies kann perturbativ berechnet werden. Für die Identifikation ist jedoch zu beachten, daß die Symmetrien der Randbedingungen sich während des Flusses geändert haben können und über symmetriebrechende Randbedingungen noch kaum etwas bekannt ist.
In Kapitel 5 werden diese Methoden verwendet um Randstörungen Virasoro minimaler Modelle zu berechnen. Da diese sowieso nur die Virasoro-Algebra als Symmetriealgebra haben, braucht man sich also keine Gedanken über die Verklebebedingung zu machen. Es genügt daher die Berechnung der "bulk"-Ein-Punkt-Funktionen zur Identifizierung der Randbedingung im IR-Fixpunkt, falls es tatsächlich nur eine Randoperatoralgebra zu einer so charakterisierten Randbedingung gibt.
Die "bulk"-Ein-Punkt-Funktion des Identitätsoperators auf der Kreisscheibe, also das $T = 0$-Vakuumfunktional

$$Z_\alpha = g_\alpha := \langle 1 \rangle_\alpha \tag{4.20}$$

nennt man Grundzustandsentartung. Diese Größe entspricht universellen, geometrieunabhängigen Anteil der freien Energie des Systems und entwickelt bei der Störung Terme, die von der Geometrie der Fläche abhängen. Insbesondere sind dies bei Störung auf der Kreisscheibe Terme, die explizit vom Regularisierungsparameter abhängen. Diese müssen bei der Störungsrechnung beachtet werden. Die Grundzustandsentartung wird im nächsten Unterkapitel genauer diskutiert.

4.3 g-Vermutung

In [81, 82] zeigte A. B. Zamolodchikov, wie oben schon erwähnt, daß der Renormierungsfluß unitärer konformer Quantenfeldtheorien auf $\mathbb{CP}^1$ irreversibel ist. Genauer gab er eine Funktion an, die unter dem Renormierungsfluß einer unitären konformen Feldtheorie streng monoton fällt und in Renormierungsfixpunkten gerade der zentralen Ladung der Virsasoro-Algebra der konformen Feldtheorie in diesem Fixpunkt entspricht. Man sagt auch, daß die zentrale Ladung unter dem Renormierungsfluß streng monoton fällt und bezeichnet diese Aussage als "c-Theorem". Für Randstörungen wird ein ähnliches Verhalten vermutet [5, 7]. Unter dem Renormierungsfluß von Randstörungen einer konformen Feldtheorie auf der Kreisscheibe soll die Grundzustandsentartung

$$g_\alpha = Z_\alpha = \langle 1 \rangle_\alpha = \langle 0|\alpha\rangle \tag{4.21}$$

im obigen Sinne streng monoton fallen. Alle studierten Beispiele von Störungen mit nicht Randbedingungs-verändernden Operatoren stützen diese "g-Vermutung", die bisher allerdings noch nicht bewiesen ist. Trotzdem wird g_α auch Rand-Entropie genannt.
Im Falle von symmetrieerhaltenden Randbedingungen einer Theorie mit ladungskonjugierter Zustandssumme ist die Grundzustandsentartung gegeben durch

$$g_\alpha = \frac{S_{\alpha 0}}{\sqrt{S_{00}}} \tag{4.22}$$

und ist damit proportional zur Quantendimension des entsprechenden Höchstgewichtsmoduls α.
Berechnet man die Zylinderzustandssumme einer Theorie mit Randbedingungen α und β für große Zylinderlänge L, bzw. großen Quotienten aus Zylinderlänge und Radius $\frac{L}{R}$, so erhält man mit $q = e^{-2\pi \frac{L}{R}}$

$$\begin{aligned}
\ln\left(Z_{\alpha\beta}(q)\right) &= \ln\left(\langle\alpha|q^{L_0-\frac{c}{24}}|\beta\rangle\right) = -\frac{c}{24}\ln(q) + \ln\left(\langle\alpha|q^{L_0}|\beta\rangle\right) \\
&= \frac{\pi c L}{12R} + \ln\left(\langle\alpha|0\rangle\langle 0|\beta\rangle q^{E_0^{\alpha\beta}}\right) + O(e^{-2\pi\frac{L}{R}}) \\
&= \frac{\pi c L}{12R} - \frac{2\pi E_0^{\alpha\beta} L}{R} + \ln(g_\alpha) + \ln(g_\beta) + O(e^{-2\pi\frac{L}{R}})\,.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Die Zustandssumme zerfällt also für große $\frac{L}{R}$ in einen universellen "bulk"-Term, der nicht von den Randbedingungen abhängt, einen "bulk"-Term, der die Grundzustandsenergie $E_0^{\alpha\beta}$ enthält, und die Logarithmen der Grundzustandsentartung der Randkomponenten, die reell gewählt werden können. Insbesondere sind die g_α unabhängig von der Geometrie der Fläche, also zum Beispiel vom Radius des Zylinders (siehe auch [53]).
Auch im Falle der Kreisscheibe hat die Zustandssumme einen geometrieabhängigen Teil. Allgemein gilt für die freie Energie auf Flächen, die eine Skala R haben

$$F = -\ln(Z) = f_1 R^2 + f_2 R + f_3 \ln(R) + f_4\,, \tag{4.24}$$

wobei die ersten beiden Terme gewöhnlich "bulk"- und Randanteil genannt werden. Ferner gilt nach [28] $f_3 = -\frac{c\chi}{6}$. Dabei ist χ die Euler-Charakteristik der Fläche. Siehe dazu auch Kapitel 2 von [23]. In der Störungstheorie bedeutet dies das Auftreten von Termen, die eine explizite Abhängigkeit vom Regularisierungsparameter besitzen. Auf der Kreisscheibe sind dies Terme $\sim R$, $\sim\ln(R)$. Da solche Terme hier jedoch nicht zur Identifizierung der Randbedingung im IR-Fixpunkt verwendet werden, wird nicht näher darauf eingegangen. Eine Diskussion dieser Terme findet sich aber in [53, 35, 33].

4.4 Rand-Deformationen

Rand-Deformationen, also Randstörungen mit exakt marginalen Operatoren, sind einfacher zu behandeln. Insbesondere die Störung mit exakt marginalen Operatoren aus der chiralen Algebra sind einfach zu berechnen, da diese Felder keine reinen Randfelder sind, sondern analytische Fortsetzungen in das Innere der Fläche besitzen und damit insbesondere lokal zu allen Randfeldern sind. Das bedeutet, daß die Pfadordnung bei solchen Störungen keine Rolle spielt. Insbesondere kann diese Störung regularisiert werden, indem die Integrationen über $\mathbb{R}$ durch Integrationen über $in\epsilon + \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ersetzt werden.
Deformationen der Verklebebedingung und der "bulk"-Ein-Punkt-Funktionen unter der Störung

$$\langle X\rangle_\alpha^\lambda = \langle X \exp\left(\lambda \int_{\mathbb{R},\epsilon} dx J(x)\right)\rangle_\alpha \tag{4.25}$$

mit dem chiralen Feld $J \in \mathcal{A}$ auf $\mathbb{H}$ lassen sich dann explizit berechen. (Die folgenden Ausdrücke sind als eingefügt in ungestörte Korrelatoren zu verstehen.) Mit $z_\delta = x + i\delta$, $x \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$0 = \lim_{\delta\to 0} \exp\left(\lambda \int_{\mathbb{R},\epsilon} dx J(x)\right) \left(W(z_\delta) - \Omega(\overline{W}(\bar{z}_\delta))\right) . \tag{4.26}$$

Da die chiralen Felder $J(x)$ in das Innere von $\mathbb{H}$ fortsetzbar sind können die Integrationskurven der Störung in geschlossene Kurven um z_δ und die Punkte der anderen Felder im Korrelator deformiert werden. Korrelatoren mit den Integrationskurven um letztere verschwinden aber aufgrund der Verklebebedingung. Nun gilt aber

$$\oint_{C_z} dw J(w)W(z) = 2\pi i[J_0, W](z), \qquad \oint_{C_z} dw J(w)\Omega(\overline{W}(\bar{z})) = 0 \tag{4.27}$$

für Kurven C_z um z. Insgesamt erhält man daher

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\delta\to 0} \exp\left(\lambda \int_{\mathbb{R},\epsilon} dx J(x)\right) \left(W(z_\delta) - \Omega(\overline{W}(\bar{z}_\delta))\right) \\ &= \lim_{\delta\to 0} \left(\sum_{n\geq 0} \frac{(2\pi i\lambda)^n}{n!}[J_0, [J_0, [\ldots, W]\ldots]](z_\delta) - \Omega(\overline{W}(\bar{z}_\delta))\right) \\ &= e^{2\pi i\lambda J_0} W(x) e^{-2\pi i\lambda J_0} - \Omega(\overline{W}(x)) . \end{aligned} \tag{4.28}$$

Konjugation mit $e^{2\pi i\lambda J_0}$ ist ein Automorphismus der W-Algebra und man erhält daher als Verklebebedingung

$$W(x) = \Omega(Ad_{e^{-2\pi i\lambda J_0}}(\overline{W}))(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.29}$$

Der Verklebeautomorphismus der gestörten Theorie ist somit

$$\Omega^\lambda = \Omega Ad_{e^{-2\pi i\lambda J_0}} . \tag{4.30}$$

Um die gestörte Randbedingung bestimmen zu können, muß man nun noch die gestörten $(1,0)$-Punkt-Funktionen

$$\langle \phi_{ij}(z,\bar{z}) \rangle_\alpha^\lambda = \langle \exp\left(\lambda \int_{\mathbb{R},\epsilon} dx J(x)\right) \phi_{ij}(z,\bar{z}) \rangle_\alpha \tag{4.31}$$

berechnen.
Wie oben beschrieben können auch hier die Integrationskurven deformiert werden. Mit (zur Notation siehe (3.22))

$$\langle \oint_{C_z} dx J(x) \phi_{ij}(z,\bar{z}) \rangle_\alpha = 2\pi i \frac{X_{i^*}^J A_{ij}^\alpha}{|z-\bar{z}|^{h_i+h_j}} \tag{4.32}$$

erhält man

$$\langle \phi_{ij}(z,\bar{z}) \rangle_\alpha^\lambda = \sum_{n\geq 0} \frac{(2\pi i \lambda X_{i^*}^J)^n}{n!} \frac{A_{ij}^\alpha}{|z-\bar{z}|^{h_i+h_j}} = \frac{e^{2\pi i \lambda X_{i^*}^J} A_{ij}^\alpha}{|z-\bar{z}|^{h_i+h_j}} . \tag{4.33}$$

Die gestörten Strukturkonstanten der Ein-Punkt-Funktionen lauten also

$$\left(A_{ij}^\alpha\right)^\lambda = e^{2\pi i \lambda X_{i^*}^J} A_{ij}^\alpha . \tag{4.34}$$

Damit können die gestörten Randbedingungen identifiziert werden.
Störungen mit exakt marginalen Randfeldern ψ, die nicht chirale Felder sind, sind wesentlich aufwendiger zu behandeln. Nimmt man an, daß diese Randfelder selbstlokal sind (in [66] wird die Vermutung geäußert, daß Selbstlokalität nicht nur hinreichendes sondern auch notwendiges Kriterium für exakte Marginalität von Randoperatoren sei), so kann man die Integrale des Störfeldes wieder als unabhängige Konturintegrale ansehen. Die Rechnungen sind ähnlich wie im Fall von chiralen Feldern, jedoch sind Produkte von chiralen Feldern und nicht-chiralen Randfeldern im allgemeinen nicht chiral. Das bedeutet, daß die Verklebebedingungen sich nicht auf einfache Weise modifizieren, sondern im allgemeinen gebrochen werden. Dies gilt allerdings nicht für das Virasoro-Feld, denn der singuläre Anteil der OPE mit dem Randoperator ist eine totale Ableitung:

$$T(z)\psi(x) = \frac{\psi(x)}{(z-x)^2} + \frac{\partial_x \psi(x)}{z-x} + \text{reg} = \partial_x \left(\frac{\psi(x)}{z-x}\right) + \text{reg} . \tag{4.35}$$

Damit folgt dann

$$\int_{\mathbb{R}} dx T(z)\psi(x) = 0 \tag{4.36}$$

und die Verklebebedingung des Virasoro-Feldes ist unter der Störung invariant. Gleiches gilt natürlich für alle chiralen Operatoren, deren singuläre OPE mit dem Störfeld eine totale Ableitung ist. Daß die Verklebebedingung des Virasoro-Feldes unter der Störung invariant bleiben muß, ist natürlich nicht erstaunlich, sondern eine Konsequenz aus der exakten Marginalität der Störung.

Auch die Berechnung der gestörten $(1,0)$-Punkt-Funktionen ist im allgemeinen aufwendiger und muß eventuell Ordnung für Ordnung durchgeführt werden. Den Term erster Ordnung erhält man jedoch auf einfache Art und Weise:

$$\begin{aligned}
\langle\phi(z,\bar{z})\rangle_\alpha^\lambda &= \langle\phi(z,\bar{z})\rangle_\alpha + \lambda\int_{\mathbb{R}} dx\langle\phi(z,\bar{z})\psi(x)\rangle_\alpha + O(\lambda^2) \\
&= \langle\phi(z,\bar{z})\rangle_\alpha + \lambda\int_{\mathbb{R}} dx\frac{C_\phi^{(\alpha)\ \psi}C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ 1}Z_\alpha}{|z-\bar{z}|^{2h_\phi-1}(z-x)(\bar{z}-x)} + O(\lambda^2) \\
&= \langle\phi(z,\bar{z})\rangle_\alpha + 2\pi\lambda\frac{C_\phi^{(\alpha)\ \psi}C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ 1}Z_\alpha}{|z-\bar{z}|^{2h_\phi}} + O(\lambda^2) \\
&= \langle\phi(z,\bar{z})\rangle_\alpha\left(1+2\pi\lambda\frac{C_\phi^{(\alpha)\ \psi}C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ 1}}{C_\phi^{(\alpha)\ 1}}\right) + O(\lambda^2)\,.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Beispiele und eine Beschreibung des Modulraumes der Randbedingung konformer Feldtheorien mit $c=1$ finden sich in [66].

Kapitel 5

Relevante Randstörungen minimaler Modelle

In diesem Kapitel werden Renormierungsflüsse unitärer Virasoro minimaler Modelle der A-Serie unter wenig relevanten Randstörungen untersucht. Es zeigt sich, daß diese in den meisten Fällen nicht in Cardy-Zuständen enden, sondern in Linearkombinationen von solchen [64]. Flüsse zu Linearkombinationen von Cardy-Zuständen wurden bisher erst im Fall des tri-kritischen Ising-Modells in [29] erwähnt und kürzlich in [4] diskutiert. Im ersten Unterkapitel werden die Eigenschaften Virasoro minimaler Modelle auf Flächen mit Rändern angegeben. Danach werden Störungen mit dem relevanten Randfeld der größten konformen Dimension diskutiert.

5.1 Virasoro minimale Modelle auf Flächen mit Rändern

Virasoro minimale Modelle wurden schon in Abschnitt 3.6.3 vorgestellt. Im folgenden werden Randstörungen unitärer minimaler Modelle der A-Serie, also (A_m, A_{m+1}) berechnet.

Da die A-Serie der unitären Virasoro minimalen Modellen eine ladungskonjugierte Zustandssumme besitzt und die Symmetriealgebra die Virasoro-Algebra ist, sind wie in 3.6.4 angegeben die konformen Cardy-Randbedingungen bzw. die Randzustände genau durch die primären Felder der Theorie, die Koeffizienten der Zylinderzustandssumme durch die Fusion und die "boundary-boundary"-OPE durch die F-Matrizen gegeben. Für das Modell (A_m, A_{m+1}) benenne ich die Randbedingungen bzw. -zustände mit

$$\alpha \in K_m := \{(r,s)|1 \le r < m,\ 1 \le s \le m\}\,, \tag{5.1}$$

und es gilt

$$Z_{\alpha\beta}(q) = \sum_{\gamma \in K_m} N_{\alpha\beta}^{\ \gamma}\,\chi_\gamma(q)\,. \tag{5.2}$$

Das Spektrum der Rand-Operatoren auf einer Randkomponente mit Randbedingung $\alpha = (r,s)$ ist gegeben durch

$$\{(u,v)|\,1 \le u \le \min\{2r-1, 2(m-r)-1\},\ 1 \le v \le \min\{2s-1, 2(m-s)+1\}\}\ .$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}&\{(2n-1,2n-1)|\,1\leq n\leq \min\{r,s,m-r,m+1-s\}\}\\ &\qquad\cup\{(2n-1,2n+1)|\,1\leq n\leq \min\{r,m-r,s-1,m-s\}\}\,,\end{aligned}\tag{5.3}$$

die Teilmenge der relevanten Randoperatoren, denn für relevante Operatoren muß gelten

$$\begin{aligned}&h_{(u,v)}=\frac{((m+1)u-mv)^2-1}{4m(m+1)}<1\\ &\Rightarrow ((m+1)u-mv)^2-(2(m+\frac{1}{2}))^2<0\\ &\Rightarrow ((m+1)u-mv-2m-1)((m+1)u-mv+2m+1)<0\\ &\Rightarrow (u-2)+\frac{u-1}{m}<v<(u+2)+\frac{u+1}{m}\,,\end{aligned}\tag{5.4}$$

und $u, v \in 2\mathbb{N}_0+1$.
Offensichtlich gilt

$$0=h_{(1,1)}<h_{(3,3)}<\ldots<h_{(2i+1,2i+1)}<\ldots<h_{(j,j+2)}<\ldots<h_{(3,5)}<h_{(1,3)}<1\,.\tag{5.5}$$

Die verschiedenen Randbedingungen des minimalen Modells (A_m, A_{m+1}) lassen sich in einem Diagramm anordnen, in dem die Zeile jeweils die Anzahl der relevanten Randoperatoren in der entsprechenden Randbedingung anzeigt (unterste Zeile: keine relevanten Randoperatoren, zweitunterste Zeile: ein relevanter Randoperator, usw.). Die relevanten Anteile der Randoperatorspektren von Randbedingungen in einer Zeile stimmen überein, und die aufeinanderfolgender Zeilen unterscheiden sich jeweils um einen relevanten Randoperator. Insbesondere kommt im Randoperatorspektrum jeder instabilen Randbedingung, d.h. jeder über der untersten Zeile, ein Randoperator $\psi_{(1,3)}$ mit konformer Dimension $h_{(1,3)}=1-\frac{2}{m+1}$ vor.
Die Grundzustandsentartungen in diesem Diagramm nehmen von der Spitze nach unten und von der Mitte zu den Seiten hin ab.

....

....

$(2,3)$ $(2,4)$ $(2,5)$ .... $(2,m-3)$ $(2,m-2)$

$(2,2)$ $(3,2)$ $(4,2)$ $(5,2)$ .... $(m-3,2)$ $(m-2,2)$

$(1,2)$ $(1,3)$ $(1,4)$ $(1,5)$ $(1,6)$ .... $(1,m-2)$ $(1,m-1)$

$(1,1)$ $(2,1)$ $(3,1)$ $(4,1)$ $(5,1)$ $(6,1)$ .... $(m-2,1)$ $(m-1,1)$

In [17, 16, 70] wurden die konformen Randbedingungen unitärer minimaler Modellen mit den integrablen Randbedingungen der entsprechenden su(2)-Gittermodelle identifiziert. Für das tri-kritische Ising-Modell wurden konforme Randbedingungen im Zusammenhang mit dem entsprechenden Gittermodell schon in [29] diskutiert.
Die stabilen konformen Randbedingungen $(\alpha, 1)$ der untersten Zeile des Diagramms entsprechen gerade den Randbedingungen des Gittermodells, bei denen der Randspin fixiert

ist. Da es sich bei dem Gittermodell um ein A_m-RSOS-Modell handelt, können die Randspins nicht auf einen Wert fixiert sein, denn es bilden sich zwei Untergitter heraus, eines mit geraden und eines mit ungeraden Spins. Die konformen Randbedingungen $(\alpha, 1)$ stimmen dann mit den Randbedingungen des Gittermodells am kritischen Punkt überein, bei denen die Randspins auf die Werte α, $\alpha + 1$ fixiert sind.
Allgemeiner gibt es eine Korrespondenz zwischen konformen Randbedingungen (α_1, α_2) und α_2-mal fusionierten Randbedingungen des Gittermodells. Das Konzept der Fusion von Randbedingungen wird zum Beispiel in [17] erklärt.
Zum Beispiel entsprechen die konformen Randbedingungen $(1,1)$, $(2,1)$, $(1,2)$ des Ising-Modells ($m = 3$) im Gittermodell Randbedingungen mit Randspins fixiert auf $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,1/-1)$. Letzteres bedeutet, daß sowohl Spin 1, als auch Spin -1 am Rand des entsprechenden Untergitters angenommen werden können. Man nennt diese Randbedingung daher auch freie Randbedingung. Beim tri-kritischen Ising-Modell ($m = 4$) ist die Korrespondenz wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} & (2,2) : 1/3, 2/4 & \\ (1,2) : 2, 1/3 & & (1,3) : 3, 2/4 \\ (1,1) : 1, 2 \qquad (2,1) : 2, 3 & & (3,1) : 3, 4 \end{array}$$

5.2 Randstörungen

Im folgenden werden Störungen der unitären minimalen Modelle (A_m, A_{m+1}) auf der Halbebene mit dem Randoperator $\psi := \psi_{(1,3)}^{(\alpha\alpha)}$ betrachtet, der im Spektrum aller Randbedingungen $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $m \geq \alpha_2 \geq 2$ vorkommt, und gleichzeitig der am wenigsten relevante Randoperator ist. Die anderen Cardy-Randbedingungen $(\alpha, 1)$ sind stabil, d.h. es gibt keine relevanten Randoperatoren in ihrem Spektrum. Das konforme Gewicht von ψ ist gegeben durch

$$h_\psi = h_{(1,3)} = 1 - \frac{2}{m+1} =: 1 - y\,. \tag{5.6}$$

Das heißt, daß der Operator für Modelle mit großem m sehr wenig relevant ist. Daher erwartet man ähnlich wie im Fall der von Zamolodchikov in [82] studierten "bulk"-Störung einen perturbativ zugänglichen Fixpunkt. Da die von ψ erzeugte Unteralgebra der Fusionsalgebra in keiner Randbedingung weitere relevanten Operatoren enthält, kann eine Ein-Feld-Störung durchgeführt werden.
Zur IR-Regularisierung wird das Modell auf der Kreisscheibe mit Radius R betrachtet. Der Radiusparameter R wird zur Vereinfachung der Notation nicht ausgeschrieben, sondern sei implizit im UV-Regularisierungsparameter ϵ enthalten ($\epsilon \to \frac{\epsilon}{R}$). Ferner wird die Kreisscheibe mit Radius R durch Reskalierung auf die Einheitskreisscheibe abgebildet.
Die gestörten (k,l)-Punkt-Funktionen sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} &\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \ldots \phi_k(z_k, \bar{z}_k) \psi_1(x_1) \ldots \psi_l(x_l) \rangle_\alpha^\lambda := \\ &\qquad \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \ldots \phi_k(z_k, \bar{z}_k) \mathcal{P} \psi_1(x_1) \ldots \psi_l(x_l) \exp(\lambda S) \rangle_\alpha, \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$S := \oint_{\mathbb{S}^1_\epsilon} dx\, \psi(x)\,. \tag{5.8}$$

Störungsrechnung liefert, wie in A.1 gezeigt wird, die β-Funktion

$$\begin{aligned}\beta(\lambda) &= \frac{y\lambda}{1-\lambda\left(\frac{C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ \psi}}{y}+O(y)\right)+O(\lambda^2)} \\ &= y\lambda\left(1+\left(\frac{C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ \psi}}{y}+O(y)\right)\lambda\right)+O(\lambda^3) \qquad (5.9)\end{aligned}$$

und somit einen perturbativen Fixpunkt ($C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ \psi}$ hat Ordnung kleiner y^1 in y.)

$$\lambda^* = -\frac{y}{C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ \psi}}+O(\lambda^{*3})\,. \qquad (5.10)$$

Um nun die Randbedingung an diesem Fixpunkt zu identifizieren kann man gestörte "bulk-boundary"-Kopplungen, also $(1,0)$-Punkt-Funktionen berechnen. Zunächst wird dies für den Sonderfall des trivialen "bulk"-Feldes durchgeführt. Das gestörte $T=0$-Vakuumfunktional bzw. die gestörte Vakuumentartung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{Z_\alpha^{\lambda,\epsilon}}{Z_\alpha}\right) &= \frac{1}{Z_\alpha}\sum_{n>0}\frac{\lambda^n}{n!}\oint_\epsilon d\varphi_1\ldots\oint_\epsilon d\varphi_n\langle\mathcal{P}\psi(\varphi_1)\ldots\psi(\varphi_n)\rangle_\alpha^{connected} \\ &= \ln\left(\frac{g_\alpha^\lambda}{g_\alpha}\right)+F(\epsilon)\,. \qquad (5.11)\end{aligned}$$

Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Integrale regularisiert und pfadgeordnet sind, und daß nur zusammenhängende Graphen beitragen. F bezeichnet hier den in Kapitel 4.3 erwähnten geometrieabhängigen Teil, der nicht näher untersucht wird.
Man erhält

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{g_\alpha^\lambda}{g_\alpha}\right)+F(\epsilon) &= \frac{\lambda^2}{2Z_\alpha}\int_0^{2\pi}d\varphi_1\int_0^{2\pi}d\varphi_2\langle\psi(\varphi_1)\psi(\varphi_2)\rangle_\alpha \\ &+\frac{\lambda^3}{Z_\alpha}\int_0^{2\pi}d\varphi_1\int_0^{\varphi_1}d\varphi_2\int_0^{\varphi_2}d\varphi_3\langle\psi(\varphi_1)\psi(\varphi_2)\psi(\varphi_3)\rangle_\alpha+O(\lambda^4)\,. \qquad (5.12)\end{aligned}$$

Setzt man dann die Form der $(0,2)$- und $(0,3)$-Punkt-Funktionen ein, so ergibt sich, wie in A.2 gezeigt wird,

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{g_\alpha^\lambda}{g_\alpha}\right) &= -\left(\pi^2 yC_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ 1}+O(y^2)\right)\lambda^2 \\ &-\left(\frac{2}{3}\pi^2 C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ 1}C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ \psi}+O(y)\right)\lambda^3+O(\lambda^4)\,. \qquad (5.13)\end{aligned}$$

In A.3 wird gezeigt, daß die Terme n-ter Ordnung, $n>3$, eine andere Abhängigkeit vom Regularisierungsparameter haben und hier nicht in der gleichen Ordnung in y beitragen. Damit folgt für den IR-Fixpunkt

$$\ln\left(\frac{g_\alpha^{\lambda^*}}{g_\alpha}\right) = -\frac{\pi^2}{3}y^3\frac{C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ 1}}{(C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ \psi})^2}+O(y^4)\,. \qquad (5.14)$$

Dieses Resultat wurde auch schon in [5, 7] erhalten.
Die auftauchenden Strukturkonstanten werden in A.4 berechnet und in y entwickelt

$$\frac{C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,1}}{(C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,\psi})^2} = \frac{1}{8}(\alpha_2^2 - 1) + O(y)\,. \tag{5.15}$$

Also

$$\ln\left(\frac{g_\alpha^{\lambda^*}}{g_\alpha}\right) = -\frac{\pi^2}{24}(\alpha_2^2 - 1)y^3 + O(y^4)\,. \tag{5.16}$$

Die Grundzustandsentartung in einer Cardy-Randbedingung ist nun gegeben durch

$$g_{(r,s)} = \left(\frac{8}{m(m+1)}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{m}r\right)\sin\left(\frac{\pi}{m+1}s\right)}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{\pi}{m+1}\right)}}\,. \tag{5.17}$$

Ferner ist g additiv unter Addition von Randzuständen. Also gilt für die Randbedingungen $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = \beta^1 + \ldots + \beta^n$ mit $\beta^i = (\beta_1^i, \beta_2^i)$:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{g_{\beta^1+\ldots+\beta^n}}{g_\alpha}\right) &= \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^n \sin\left(\frac{\pi\beta_1^i}{m}\right)\sin\left(\frac{\pi\beta_2^i}{m+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi\alpha_1}{m}\right)\sin\left(\frac{\pi\alpha_2}{m+1}\right)}\right) \\ &= \ln(\sigma) + \frac{\pi^2}{24\sigma}\left(\sigma(\alpha_1^2+\alpha_2^2) - \sum_{i=1}^n s_i((\beta_1^i)^2 + (\beta_2^i)^2)\right) y^2 \\ &\quad + \frac{\pi^2}{24\sigma}\left(\sigma\alpha_1^2 - \sum_{i=1}^n s_i(\beta_1^i)^2\right) y^3 + O(y^4)\,, \end{aligned} \tag{5.18}$$

mit

$$s_i := \frac{\beta_1^i\beta_2^i}{\alpha_1\alpha_2}\,, \qquad \sigma := \sum_{i=1}^n s_i\,. \tag{5.19}$$

Bei dieser Entwicklung ist zu beachten, daß hier bei variierendem y bzw. m feste α_i betrachtet werden. Das bedeutet jedoch, daß zunächst nur der linke untere Bereich, nämlich $\alpha_i \ll m$, des Randbedingungsdiagramms in 5.1 abgedeckt ist. Die anderen Bereiche lassen sich jedoch mit Hilfe der Indizierungssymmetrien auf diesen Bereich bringen, oder sich mit einer anderen Entwicklung behandeln.
Vergleich mit der perturbativen Berechnung (5.16) ergibt die folgenden Bedingungen an die Randbedingungen am IR-Fixpunkt:

$$\sigma = 1\,, \qquad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \sum_{i=1}^n s_i((\beta_1^i)^2 + (\beta_2^i)^2)\,, \qquad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 1 = \sum_{i=1}^n s_i(\beta_1^i)^2\,. \tag{5.20}$$

Aus diesen Gleichungen und den Bedingungen $1 \leq \beta_1^i \leq m-1$, $1 \leq \beta_2^i \leq m$ folgt sofort

$$\beta_2^i = 1 \quad \forall 1 \leq i \leq n\,. \tag{5.21}$$

Insbesondere sind also nur Randbedingungen an den IR-Fixpunkten möglich, die bis auf $h = 0$-Operatoren stabil sind. Ferner gibt es eine offensichtliche Lösung dieses Gleichungssystems, denn es gilt

$$\alpha_1\alpha_2 = (\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) + (\alpha_1 + \alpha_2 - 1) = \sum_{i=1}^{\min\{\alpha_1,\alpha_2\}} (\alpha_1 + \alpha_2 - 2i + 1)$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1\alpha_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 1) \\ &\quad = (\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)\big((\alpha_1 - 1)^2 + (\alpha_2 - 1)^2 - 1\big) + (\alpha_1 + \alpha_2 - 1)^3 \\ &\quad = \sum_{i=1}^{\min\{\alpha_1,\alpha_2\}} (\alpha_1 + \alpha_2 - 2i + 1)^3 \,. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Daher ist

$$n = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}\,, \qquad \beta_1^i = \alpha_1 + \alpha_2 - 2i + 1\,, \quad \beta_2^i = 1, \quad 1 \leq i \leq n\,, \tag{5.23}$$

eine Lösung des Gleichungssystems. Es ist jedoch zu beachten, daß wegen der Invarianz von $g_{(r,s)}$ unter den Transformationen $R_1 : (r,s) \mapsto (m-r,s)$ und $R_2 : (r,s) \mapsto (r, m+1-s)$ Randbedingungen, die unter diesen ineinander übergehen, mit der bisherigen Rechnung nicht unterschieden werden können. Um dies aufzulösen wird in A.5 die gestörte "bulk"-Ein-Punkt-Funktion eines weiteren "bulk"-Feldes berechnet. Diese Rechnung zeigt, daß für die Lösung (5.23) $\beta = (R_{u_1})^{v_1}\beta^1 + \ldots + (R_{u_n})^{v_n}\beta^n$ nur dann Randbedingung im IR-Fixpunkt sein kann, wenn die v_i gerade sind. Damit ist also die Mehrdeutigkeit aufgelöst, und man erhält (5.23) als einzige "regelmäßige" Lösung.
Für $\alpha_1\alpha_2 < 16$ ist dies auch die einzige Lösung überhaupt. (Eine Randbedingung mit $\alpha_1\alpha_2 \geq 16$ tritt bei der hier gewählten Benennung zuerst bei $m = 8$ auf.) Für $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 4$ gibt es neben der regulären Lösung $\beta_1 = (1,3,5,7)$ auch noch die Lösung $\beta_1 = (4,6,6)$. Es ist jedoch unklar, ob Summen von Cardy-Randbedingungen, in denen Randbedingungen doppelt auftreten, in der konformen Feldtheorie überhaupt natürlich sind, da eine Randbedingung ja als Projektion auf einen Unterraum des "bulk"-Hilbertraumes angesehen werden kann. In der Stringtheorie werden allerdings Summen aus gleichen Randbedingung in Form von Superpositionen "gleicher" D-branes diskutiert.
Die erste nicht regelmäßige Lösung, bei der keine doppelten Randbedingungen auftreten, gibt es für $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 5$. Die regelmäßige Lösung lautet $\beta_1 = (1,3,5,7,9)$, die unregelmäßige bei der keine Cardy-Randbedingungen doppelt auftreten $\beta_1 = (1,2,3,4,5,10)$. Die Zahl der unregelmäßigen Lösungen wächst für steigende $\alpha_1\alpha_2$ stark an. Eine Möglichkeit weitere Bedingungen an die IR-Randbedingung zu bekommen, ist natürlich, die Störungstheorie zu höheren Ordnungen fortzusetzen. Eine andere Möglichkeit ist die Berechnung von weiteren "bulk"-Ein-Punkt-Funktionen. Beides ist jedoch mit einem schnell ansteigenden Aufwand verbunden. Daher wird dies im folgenden nicht durchgeführt. Obwohl für beliebiges m also mit diesen Methoden nicht alle "nicht-regelmäßigen" Lösungen ausgeschlossen werden können, ist anzunehmen, daß (5.23) tatsächlich die Randbedingung des IR-Fixpunktes für beliebiges m und α ist, denn die Regelmäßigkeit der (A_m, A_{m+1})-Modelle legen auch eine Regelmäßigkeit der Flüsse nahe. Um dies

im Einzelfall zu bestätigen, kann man TCSA-Methoden verwenden. In diesem Verfahren wird der gestörte Hamiltonoperator auf einem endlichdimensionalen Unterraum des Hilbertraumes, der die L_0-Eigenräume zu kleinen Eigenwerten enthält, explizit diagonalisiert und das Spektrum berechnet. Durch Vergleich der Dimensionen der Eigenräume lassen sich damit die Randbedingungen bestimmen. Allerdings ist diese Methode stark modellabhängig und kann daher keine allgemeinen Aussagen für beliebige m, α machen. Alle bisherigen TCSA-Rechnungen bestätigen jedoch die obige allgemeine Aussage [78]. TCSA- und TBA-Rechnungen [78, 38, 34, 35, 33, 54, 9, 29] zeigen auch die Existenz eines anderen IR-Fixpunktes unter der Störung mit ψ, der störungstheoretisch nicht zugänglich ist. Dieser entspricht bei Störungen der Randbedingung (α_1, α_2) in den berechneten Fällen gerade dem perturbativen Fixpunkt einer Störung von $(\alpha_1, \alpha_2 - 1)$ mit ψ. Dies scheint eine allgemeine Eigenschaft der Modelle zu sein.
Man erhält unter der Störung mit $\psi = \psi_{(1,3)}$ die perturbativen Flüsse

$$(\alpha_1, \alpha_2) \longrightarrow \sum_{i=1}^{\min\{\alpha_1,\alpha_2\}} (\alpha_1 + \alpha_2 - 2i + 1, 1)\,, \tag{5.24}$$

und die nicht-perturbativen Flüsse sind gegeben durch

$$(\alpha_1, \alpha_2) \longrightarrow \sum_{i=1}^{\min\{\alpha_1,\alpha_2-1\}} (\alpha_1 + \alpha_2 - 2i, 1)\,. \tag{5.25}$$

Die Randstörungen eines Virasoro minimalen Modells (A_m, A_{m+1}) mit Cardy-Randbedingung (α_1, α_2), $\alpha_2 > 1$, endet also immer in einer bis auf $h = 0$-Operatoren stabilen konformen Randbedingung, die allerdings nur für $\alpha_1 = 1$ wieder eine Cardy-Randbedingung ist. In allen anderen Fällen ist sie eine Summe aus stabilen Cardy-Randbedingungen, die außerdem bis auf Operatoren des konformen Gewichtes 0 selber stabil ist. Dieses Resultat war weitgehend unerwartet.
Die physikalische Interpretation von Randbedingungen dieser Art wurde erst kürzlich in [79] für das Ising-Modell und [4] für das trikritische Ising-Modell diskutiert.
Das Randoperatorspektrum einer Randbedingung $\beta = (\beta_1^1, 1) + \ldots + (\beta_1^n, 1)$ enthält für $\beta_1^i \neq \beta_1^j$, $\forall i \neq j$, genau n Operatoren mit konformem Gewicht 0. Das bedeutet insbesondere, daß der IR-Fixpunkt, der nach Störung einer Randbedingung (α_1, α_2), $\alpha_1, \alpha_2 > 1$ mit ψ erreicht wird, einen $(\min\{\alpha_1, \alpha_2\} - 1)$-multikritischen Phasenübergang erster Ordnung beschreibt [4]. Faßt man nämlich einen Randoperator ψ_i, dessen konforme Dimension h_i im IR-Fixpunkt 0 wird als Randmagnetfeld auf, so erhält man aus dem Skalenverhalten in der Nähe dieses Fixpunktes für die zugehörige Magnetisierung m_i

$$|m_i| \sim |\langle\psi_i\rangle|^{\frac{h_i}{1-h_i}}\,. \tag{5.26}$$

Nun gilt $\langle\psi_i\rangle(\lambda^*) = h_i(\lambda^*) = 0$ und λ^* ist eine isolierte Nullstelle von h_i. Man erhält also eine Diskontinuität der entsprechenden Magnetisierungen und Magnetisierungen $\neq 0$ in diesem Fixpunkt. An diesem Punkt im Phasendiagramm besitzt das System also ohne äußeres Magnetfeld und ohne geordnete "bulk"-Phase eine langreichweitige Ordnung von $(\min\{\alpha_1, \alpha_2\} - 1)$ Randfeldern.

Zu solchen Linearkombinationen von Cardy-Randzuständen korrespondierende integrable Randbedingungen der entsprechenden Gittermodelle sind bisher noch nicht systematisch konstruiert worden. Allerdings wurden in [13] für bestimmte A_m-Modelle einige Randgewichte angegeben, die am konformen Punkt einfachen Superpositionen von Cardy-Randbedingungen entsprechen.

Kapitel 6

Ausblick

Die in dieser Arbeit untersuchten Randstörungen der unitären Virasoro minimalen Modelle zeigen, daß Superpositionen von Cardy-Randzuständen in natürlicher Weise als konforme Randbedingungen auftreten. Die Diskussion des Spezialfalls des tri-kritischen Ising-Modells in [4] zeigt ferner, daß diese Randbedingungen recht interessante Punkte im Randphasendiagramm der entsprechenden RSOS-Modelle beschreiben. Genauer treten in diesen Punkten Phasenübergänge erster Ordnung auf, bei denen es auf dem Rand ohne äußeres Randfeld und bei ungeordneter "bulk"-Phase eine langreichweitige Ordnung gibt. Bisher existiert in der Literatur keine ausführliche Diskussion solcher Rand-Phänomene.

Ein möglicher Grund für die bisherige Vernachlässigung von Superpositionen einfacher Randbedingungen könnte die Vermutung sein, daß solche Randbedingungen nicht mit allen "sewing relations" vereinbar sind. Die in [36] vorgestellten Methoden zur Lösung der "sewing constraints" in Modellen mit ladungskonjugierten Zustandssummen sollten sich jedoch auf den Fall von Superpositionen verallgemeinern lassen und damit insbesondere Lösungen der "sewing relations" für diese liefern.

Ein besseres Verständnis solcher Superpositionen in der konformen Feldtheorie auf Flächen mit Rändern, aber auch in den Anwendungen auf offene Strings und statistische Systeme wäre wünschenswert. Letzteres könnte man zum Beispiel durch eine systematische Konstruktion und Analyse der zu Superpositionen konformer Randbedingungen gehörenden Randgewichte in den entsprechenden integrablen Gittermodellen erreichen. Einige solcher Randgewichte wurden in [13] bereits erhalten (vgl. [17]).

Desweiteren würden sicherlich Störungen von superpositionierten Randbedingungen auch mit randbedingungsverändernden Operatoren zu ihrem Verständnis beitragen. Beispiele solcher Störungen wurden inzwischen berechnet [49]. Es zeigt sich insbesondere, daß die "g-Vermutung" für solche Störungen nicht gilt.

Auch die Anwendung der hier vorgestellten Methoden auf die Störungen Virasoro minimaler Modelle der A-Serie mit anderen Randfeldern bzw. die Behandlung von Randstörungen der anderen Virasoro minimalen Modelle schließt sich in natürlicher Weise an diese Arbeit an. Gleiches gilt für die Behandlung von kombinierten "bulk"- und Randstörungen, die zu einem besseren Verständnis des Zusammenhangs von "bulk"- und Randphasenraum beitragen würde.

Eine weitere sehr interessante Frage ist die nach der Existenz eines sinnvollen Grenzwer-

tes der unitären minimalen Modelle (A_m, A_{m+1}) für große m. Die Regelmäßigkeit dieser Modelle legt die Möglichkeit nahe, einen solchen definieren zu können. Falls ein Grenzwert existiert, so müßte er im $c = 1$-Modulraum liegen. Es ist sogar zu vermuten, daß es sich dabei um den Selbstdualitätspunkt dieses Modulraumes handelt. (Eine Bemerkung dazu findet sich auch in [31].)
Mit Hilfe eines solchen Grenzwertes ließen sich die erhaltenen Resultate der Störung wahrscheinlich leicht interpretieren, denn in diesem Grenzwert wäre das Störfeld marginal (eine genaue Analyse der Randmodulräume von $c = 1$-Theorien findet sich in [66]). Auf der anderen Seite böte die Existenz eines solchen Grenzwertes unter Umständen die Möglichkeit mit Hilfe der minimalen Modelle Aussagen über symmetriebrechende Randbedingungen bei $c = 1$ treffen zu können.
Neben der weiteren Analyse von superpositionierten Randbedingungen bedarf auch der Zusammenhang zwischen den relevanten Randstörungen als Weltflächenbeschreibung der Tachyon-Kondensation instabiler D-brane Konfigurationen und den in der String-theorie üblichen Methoden aus der Stringfeldtheorie einer weiteren Klärung.
Ferner schließt sich an diese Arbeit sicherlich die Durchführung ähnlicher Rechnungen für in der Stringtheorie relevante Modelle an, die Aussagen über die Tachyon-Kondensation und Bildung von D-brane-Bindungszuständen erlauben. Für den Fall der Stringtheorie auf SU(2) wurde dies in [11] bereits durchgeführt. Physikalisch interessant sind jedoch vor allem $N = 2$-Kompaktifizierungen. Für bestimmte Punkte in den Modulräumen solcher Kompaktifizierungen, den Gepner-Punkten, in denen die korrespondierenden konformen Feldtheorien rational sind und für die in [65] Randzustände konstruiert wurden, sind die oben beschriebenen Methoden anwendbar. Für die Behandlung von Gepner-Modellen wäre zunächst ein Verständnis der einfacheren Randstörungen von $N = 2$-minimalen Modellen von Vorteil.

Anhang A

A.1 Berechnung des IR-Fixpunktes

Zunächst bezeichne ich alle unrenormierten Größen mit einem Index $_0$ und schreibe wie in (4.7)

$$\begin{aligned} \psi &= Z(\lambda)\psi_0, \qquad & Z(\lambda) &= 1 + Z_1\lambda + Z_2\lambda^2 + \dots \\ \lambda &= Z'(\lambda)\lambda_0, \qquad & Z'(\lambda) &= 1 + Z_1'\lambda + Z_2'\lambda^2 + \dots \end{aligned} \tag{A.1}$$

Man kann nun das Renormierungsschema

$$\begin{aligned} Z^{-2}\langle\psi_0(\pi)\psi_0(0)\rangle_\alpha &= Z^{-2}\langle\psi(\pi)\psi(0)\rangle_\alpha^\lambda = \langle\psi_0(\pi)\psi_0(0)\rangle_\alpha^\lambda \\ &= \langle\psi_0(\pi)\psi_0(0)\rangle_\alpha + \lambda\oint_{\mathbb{S}^1_\epsilon} ds\,\langle\psi_0(s)\psi_0(\pi)\psi_0(0)\rangle_\alpha + O(\lambda^2) \end{aligned} \tag{A.2}$$

wählen. Dabei bedeutet der Index ϵ, daß der Integrationsbereich um ϵ von den Punkten der anderen Randfelder wegbeschränkt ist. Im folgenden wird die Regularisierung häufig nicht explizit angegeben, die Integrale sind dennoch als auf diese Weise regularisiert anzusehen.
Die $(0,2)$- und $(0,3)$-Punkt-Funktionen der ungestörten Theorie in Polarkoordinaten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle\psi(\varphi_1)\psi(\varphi_2)\rangle_\alpha &= \frac{Z_\alpha C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,1}}{|2\sin(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2})|^{2h_\psi}}, \\ \langle\psi(\varphi_1)\psi(\varphi_2)\psi(\varphi_3)\rangle_\alpha &= \frac{Z_\alpha C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,\psi} C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,1}}{|2\sin(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2})2\sin(\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2})2\sin(\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2})|^{h_\psi}}. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Damit erhält man aus (A.2)

$$Z^{-2}\frac{C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,1}}{4^{1-y}} = \frac{C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,1}}{4^{1-y}} + \lambda\frac{C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,\psi} C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,1}}{2^{1-3y}}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{|\sin(\frac{\varphi}{2})|^{1-y}} + O(\lambda^2). \tag{A.4}$$

Das auftretende Integral ist in (A.46) angegeben und nicht divergent für $\epsilon \to 0$. Entwicklung in y ergibt

$$Z^{-2} = 1 + \lambda\left(4\frac{C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,\psi}}{y} + O(y)\right) + O(\lambda^2). \tag{A.5}$$

Aus (4.15) folgt dann

$$Z = 1 - \left(2\frac{C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ \psi}}{y} + O(y) \right) \lambda + O(\lambda^2)$$
$$Z' = 1 + \left(\frac{C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ \psi}}{y} + O(y) \right) \lambda + O(\lambda^2)\,. \tag{A.6}$$

Daraus läßt sich mit (4.12) und dem Skalenverhalten der nichtrenormierten Kopplungskonstante $\lambda_0 \sim \epsilon^{-y}$ ($\gamma(0) = 1 - h_\psi = y$) die β-Funktion zu dieser Störung gewinnen:

$$\begin{aligned} \beta(\lambda) &= \frac{y\lambda}{1 - \lambda\left(\frac{C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ \psi}}{y} + O(y)\right) + O(\lambda^2)} \\ &= y\lambda \left(1 + \left(\frac{C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ \psi}}{y} + O(y) \right) \lambda \right) + O(\lambda^3) \end{aligned} \tag{A.7}$$

Der IR-Fixpunkt der Störung ist somit

$$\lambda^* = -\frac{y}{C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ \psi}} \left(\frac{1}{1 + O(y)} \right) + O(\lambda^{*3})\,. \tag{A.8}$$

A.2 Berechnung der Vakuumentartung

Es soll die gestörte Vakuumentartung aus (5.11) bis zur 3. Ordnung in λ berechnet werden. Auch hier sind alle Integrale als mit Parameter ϵ regularisiert anzusehen.

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{g_\alpha^{\lambda_0}}{g_\alpha}\right) + F(\epsilon) &= \frac{\lambda_0^2}{2Z_\alpha} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \langle \psi(\varphi_1)\psi(\varphi_2)\rangle_\alpha \\ &\quad + \frac{\lambda_0^3}{Z_\alpha} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\varphi_1} d\varphi_2 \int_0^{\varphi_2} d\varphi_3 \langle \psi(\varphi_1)\psi(\varphi_2)\psi(\varphi_3)\rangle_\alpha + O(\lambda_0^4) \\ &= \frac{\lambda_0^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \frac{C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ 1}}{|2\sin(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2})|^{2h_\psi}} \\ &\quad + \frac{\lambda_0^3}{3!} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \int_0^{2\pi} d\varphi_3 \frac{C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ \psi} C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ 1}}{|2\sin(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}) 2\sin(\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}) 2\sin(\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2})|^{h_\psi}} \\ &\quad + O(\lambda_0^4) \\ &= \lambda_0^2 2^{-2h_\psi} \pi C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ 1} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|\sin(\frac{\varphi}{2})|^{2h_\psi}} \\ &\quad + \lambda_0^3 \frac{2^{-3h_\psi}}{3} \pi C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ \psi} C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ 1} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \frac{1}{|\sin(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}) \sin(\frac{\varphi_1}{2}) \sin(\frac{\varphi_2}{2})|^{h_\psi}} \\ &\quad + O(\lambda_0^4) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda_0^2 \pi C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,1} \left(-\pi y + \epsilon^{-1+2y}\,(1 + O(y))\right) \\
&\quad + \lambda_0^3 \frac{\pi}{3} C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,\psi} C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,1} \left(-8\pi + 6\pi\epsilon^y + A\epsilon^{-1+3y} + O(\epsilon, y)\right) + O(\lambda_0^4)\,. \quad \text{(A.9)}
\end{aligned}
$$

Die Integrale sind in A.6 angegeben. Ferner gilt nach A.1

$$
\lambda_0 = \frac{\lambda}{Z'} = \lambda - \left(\frac{C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,\psi}}{y} \,(1 - \epsilon^y) + O(y) \right) \lambda^2 + O(\lambda^3)\,. \tag{A.10}
$$

Für $h_\psi = 1 - y$ erhält man in niedrigster Ordnung in y

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{g_\alpha^\lambda}{g_\alpha}\right) &= -\left(\pi^2 y C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,1} + O(y^2)\right)\lambda^2 \\
&\quad - \left(\frac{2}{3}\pi^2 C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,1} C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,\psi} + O(y)\right)\lambda^3 + O(\lambda^4)\,. \quad \text{(A.11)}
\end{aligned}
$$

A.3 Höhere Terme

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß sich die Terme der Ordnung $n > 3$ in dem gestörten $T = 0$-Vakuumfunktional (5.11) in ihrer Regularisierungsabhängigkeit stark von den Termen mit $n \leq 3$ unterscheiden. Während letztere einen Grenzwert für $y \to 0$, $\epsilon \to 0$ besitzen, divergieren die $y \to 0$-Grenzwerte ersterer in ϵ. Allerdings divergieren die Terme der Ordnung $n > 3$ nicht in y, so daß diese Terme in höherer Ordnung in y zum gestörten Vakuumfunktional beitragen, als die Terme mit $n \leq 3$.
Dazu betrachtet man

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{Z_\alpha^\lambda}{Z_\alpha}\right) &= \sum_{n\geq 2} \lambda^n \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\varphi_1} d\varphi_2 \ldots \int_0^{\varphi_{n-1}} d\varphi_n \langle \psi(\varphi_1) \ldots \psi(\varphi_n) \rangle_\alpha^{connected} \\
&=: \sum_{n\geq 2} \lambda^n A_n\,, \qquad \text{(A.12)}
\end{aligned}
$$

wobei die Regularisierung mit Regularisierungsparameter ϵ als implizit verstanden werden soll. Die Terme

$$
\begin{aligned}
A_2 &= -\pi^2 y C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,1} + \pi C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,1} \epsilon^{-1+2y} + O(y, \epsilon) \\
A_3 &= -\frac{8}{3}\pi^2 C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,\psi} C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,1} + 2\pi^2 C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,\psi} C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,1} \epsilon^y + \tilde{A}\epsilon^{-1+3y} + O(y, \epsilon)
\end{aligned}
$$

wurden bereits berechnet (vgl. (A.9)). Für A_n, $n > 3$ genügt es die Beiträge niedrigster Ordnung in y zu bestimmen, die durch die höchsten Pole des Integranden erzeugt werden. Diese sind jedoch durch die OPE bestimmt und damit auch im Falle $n > 3$ ohne weiteres berechenbar. Im folgenden verwende ich $\sim$, um anzudeuten, daß nur die höchsten Singularitäten betrachtet werden.

$$
A_n = \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\varphi_1 - \epsilon} d\varphi_2 \ldots \int_0^{\varphi_{n-1} - \epsilon} d\varphi_n \langle \psi(\varphi_1) \ldots \psi(\varphi_n) \rangle_\alpha^{connected}
$$

$$\sim \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\varphi_1-\epsilon} d\varphi_2 \ldots \int_0^{\varphi_{n-2}-\epsilon} d\varphi_{n-1} \langle \psi(\varphi_1)\ldots\psi(\varphi_{n-1})\rangle_\alpha^{connected} \times$$
$$\times \int_\epsilon^{\varphi_{n-1}-\epsilon} d\varphi_n \frac{C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,\psi}}{|2\sin\left(\frac{\varphi_n-\varphi_{n-1}}{2}\right)|^{1-y}}\,.$$

Nun gilt aber nach Abschnitt A.6

$$\begin{aligned}
\int_{-z}^{-\epsilon} dx \frac{1}{|2\sin\left(\frac{x}{2}\right)|^{1-y}} &= -2^y \cos\left(\frac{x}{2}\right)\, {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1-\frac{y}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\Big|_{-z}^{-\epsilon} \\
&= \frac{1}{y}\left(1-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^y\right) + O(\epsilon) + f(z) \\
&= \ln\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{y}{2}\ln^2\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + \ldots + O(\epsilon) + f(z)\,. \qquad \text{(A.13)}
\end{aligned}$$

Da hier nur die höchste Singularität von Bedeutung ist, spielt der Term $f(z)$ keine Rolle, und man erhält

$$\begin{aligned}
A_n &\sim \left(\ln\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + O(y)\right) C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,\psi} A_{n-1} \\
&\sim \left(\ln^{n-3}\left(\frac{\epsilon}{2}\right) + O(y)\right)\left(C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,\psi}\right)^{n-3} A_3\,. \qquad \text{(A.14)}
\end{aligned}$$

Für $n > 3$ sind daher die A_n mindestens $O(y^0)$, liefern also in der Ordnung y^3 zu (5.14) keinen Beitrag. Die auftauchenden ϵ-abhängigen Terme heben sich mit anderen Termen (höheren Termen aus der renormierten Kopplungskonstante) weg oder gehören zu den geometrieabhängigen Korrekturen der freien Energie.
Dieses Argument läßt sich wie folgt formalisieren (vgl. [56]). Man schreibt dazu:

$$\begin{aligned}
A_n = &\int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\varphi_1-\epsilon} d\varphi_2 \ldots \int_0^{\varphi_{n-1}-\epsilon} d\varphi_n \langle \psi(\varphi_1)\ldots\psi(\varphi_n)\rangle_\alpha^{connected} \\
&\times \prod_{i=1}^{n-1} \Theta\left((\varphi_{i+1}-\varphi_i)^2 - \epsilon^2\right) \Theta\left((2\pi+\varphi_n-\varphi_1)^2-\epsilon^2\right)\,. \qquad \text{(A.15)}
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\epsilon} A_n = &-n \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\varphi_1-\epsilon} d\varphi_2 \ldots \int_0^{\varphi_{n-1}-\epsilon} d\varphi_n \langle \psi(\varphi_1)\ldots\psi(\varphi_n)\rangle_\alpha^{connected} \\
&\times \prod_{i=1}^{n-1} \Theta\left((\varphi_{i+1}-\varphi_i)^2-\epsilon^2\right) \delta\left(|2\pi+\varphi_n-\varphi_1|-\epsilon\right) \\
\sim &-nA_{n-1} \frac{C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,\psi}}{|2\sin\left(\frac{\epsilon}{2}\right)|^{1-y}} \sim -nA_{n-1} C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,\psi} \epsilon^{y-1}\,. \qquad \text{(A.16)}
\end{aligned}$$

Dabei bedeutet $\sim$, daß nur die singulärsten Terme mitgenommen werden. Setzt man nun A_3 ein und integriert Ordnung für Ordnung, so erhält man schließlich für die singulärsten Terme ohne Berücksichtigung der Integrationskonstanten

$$A_n \sim a_n \left(\frac{\epsilon^y}{y}\right)^{n-3}\,. \qquad \text{(A.17)}$$

Die A_n müssen jedoch endlich sein für $\epsilon > 0$, $y \to 0$. Dies muß von den bisher nicht berücksichtigten Integrationskonstanten gewährleistet werden. Zum Beispiel muß für A_4

$$A_4 = a_4 \left(\frac{\epsilon^y + C_4}{y} \right) \tag{A.18}$$

gelten Damit nun also A_4 nicht singulär in y ist, muß $C_4 = -1$ sein und man erhält $A_4 = a_4 \left(\ln \epsilon + O(y)\right)$. Iterativ sieht man leicht

$$A_n \sim \ln^{n-3} \epsilon \,. \tag{A.19}$$

A.4 Berechnung der Strukturkonstanten

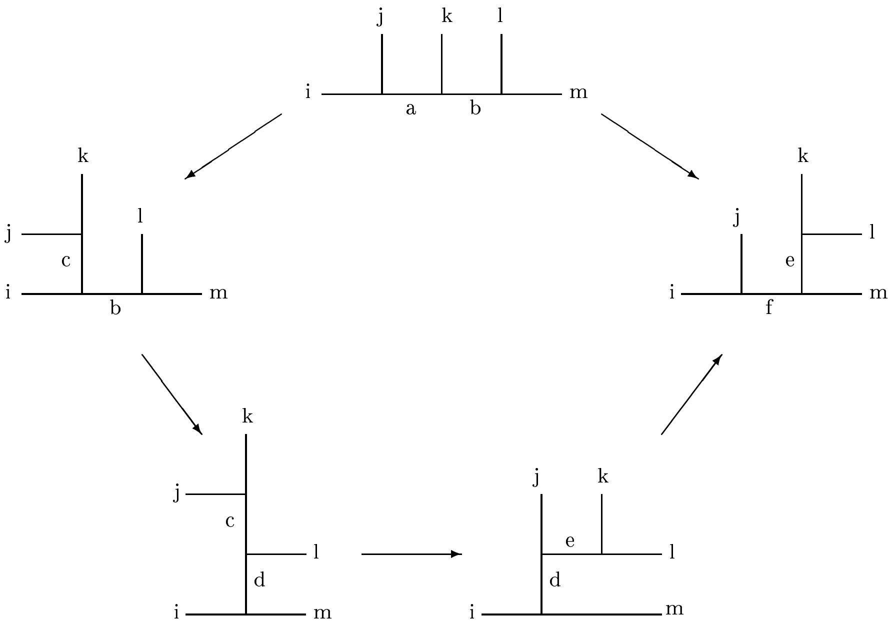
Nach 3.6.5 bzw. 3.6.4 sind die OPE-Konstanten für primäre Randoperatoren in "ladungskonjugierten" Modellen bzw. der A-Serie der Virasoro minimalen Modelle durch die Fusingmatrizen gegeben:

$$C_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)\,k} = \mathsf{F}_{\beta k}\left[\begin{smallmatrix} \alpha & \gamma \\ i & j \end{smallmatrix}\right]. \tag{A.20}$$

Diese können für Virasoro minimale Modelle wie folgt berechnet werden. Mit Hilfe des Coulomb-Gas-Formalismus lassen sich die F-Matrix-Elemente für Korrelatoren, in denen die primären Felder $(2,1)$, $(1,2)$ vorkommen, explizit berechnen (siehe zum Beispiel [30]). Mit $a_i = \frac{(m+1)}{m} r_i - s_i$, $\tilde{a}_i = -\frac{m}{m+1} a_i$ gilt

$$\begin{aligned}
&\mathsf{F}_{(r_1+(-1)^m, s_1)(r_3+(-1)^n, s_3)}\left[\begin{smallmatrix} (2,1) & (r_3,s_3) \\ (r_1,s_1) & (r_4,s_4) \end{smallmatrix}\right] \\
&\quad = \frac{\Gamma(-(-1)^n a_3)\Gamma(1+(-1)^m a_1)}{\Gamma(\frac{1}{2}(1-a_4-(-1)^n a_3+(-1)^m a_1)\Gamma(\frac{1}{2}(1+a_4-(-1)^n a_3+(-1)^m a_1)}, \\
&\mathsf{F}_{(r_1, s_1+(-1)^m)(r_3, s_3+(-1)^n)}\left[\begin{smallmatrix} (1,2) & (r_3,s_3) \\ (r_1,s_1) & (r_4,s_4) \end{smallmatrix}\right] \\
&\quad = \frac{\Gamma(-(-1)^n \tilde{a}_3)\Gamma(1+(-1)^m \tilde{a}_1)}{\Gamma(\frac{1}{2}(1-\tilde{a}_4-(-1)^n \tilde{a}_3+(-1)^m \tilde{a}_1)\Gamma(\frac{1}{2}(1+\tilde{a}_4-(-1)^n \tilde{a}_3+(-1)^m \tilde{a}_1)}.
\end{aligned}$$

Aus diesen F-Matrix-Elementen lassen sich mit Hilfe der folgenden Pentagon-Identität (siehe [58]) für die Transformation konformer Blöcke alle anderen iterativ berechnen:



Ausgeschrieben lautet diese

$$\mathsf{F}_{be}\left[\begin{smallmatrix} k & l \\ a & m \end{smallmatrix}\right] = \sum_{c,d} \mathsf{F}_{ac}\left[\begin{smallmatrix} j & k \\ i & b \end{smallmatrix}\right] \mathsf{F}_{bd}\left[\begin{smallmatrix} c & l \\ i & m \end{smallmatrix}\right] \mathsf{F}_{ce}\left[\begin{smallmatrix} k & l \\ j & d \end{smallmatrix}\right] \mathsf{F}_{da}\left[\begin{smallmatrix} i & j \\ m & e \end{smallmatrix}\right] . \tag{A.21}$$

Insbesondere gilt dann für $\Delta \in \{\Delta_1 = (2,1), \Delta_2 = (1,2)\}$ und mit den Abkürzungen $(a_1, a_2) \pm \Delta_1 = (a_1 \pm 1, a_2)$, $(a_1, a_2) \pm \Delta_2 = (a_1, a_2 \pm 1)$:

$$\mathsf{F}_{be}\left[\begin{smallmatrix} k & l \\ a & m \end{smallmatrix}\right] = \sum_{c,d} \mathsf{F}_{ac}\left[\begin{smallmatrix} \Delta & k \\ a-\Delta & b \end{smallmatrix}\right] \mathsf{F}_{bd}\left[\begin{smallmatrix} c & l \\ a-\Delta & m \end{smallmatrix}\right] \mathsf{F}_{ce}\left[\begin{smallmatrix} k & l \\ \Delta & d \end{smallmatrix}\right] \mathsf{F}_{da}\left[\begin{smallmatrix} a-\Delta & \Delta \\ m & e \end{smallmatrix}\right] . \tag{A.22}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man alle Fusingmatrixelemente auf solche zurück-führen, die ein $(1,2)$- bzw. $(2,1)$-Feld enthalten.
Die benötigten Strukturkonstanten für eine Randbedingung $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ergeben sich mit den Abkürzungen $\delta_\alpha := \alpha_2 - \alpha_1$

$$\begin{aligned}
A(\delta_\alpha, \alpha_2) &:= \Gamma(\delta_\alpha - \tfrac{\alpha_2}{m+1})\,\Gamma(\delta_\alpha - \tfrac{\alpha_2 - 1}{m+1})\,\Gamma(1 - \delta_\alpha + \tfrac{\alpha_2}{m+1}) \ , \\
B(\delta_\alpha, \alpha_2) &:= \Gamma^2(1 + \delta_\alpha - \tfrac{\alpha_2 + 1}{m+1})\,\Gamma(1 - \delta_\alpha + \tfrac{\alpha_2 - 1}{m+1}) \ , \\
C(\delta_\alpha, \alpha_2) &:= \Gamma^2(1 + \delta_\alpha - \tfrac{\alpha_2 + 1}{m+1})\,\Gamma(-\delta_\alpha + \tfrac{\alpha_2 + 1}{m+1}) \ , \\
D(\delta_\alpha, \alpha_2) &:= \Gamma(1 + \delta_\alpha - \tfrac{-\alpha_2 + 1}{m+1})\,\Gamma(-1 + \delta_\alpha - \tfrac{\alpha_2 - 2}{m+1})\,\Gamma(2 - \delta_\alpha + \tfrac{\alpha_2 - 2}{m+1}) \ .
\end{aligned}$$

zu

$$\begin{aligned}
C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ 1} &= \mathsf{F}_{\alpha(1,1)}\left[\begin{smallmatrix} \alpha & \alpha \\ (1,3) & (1,3) \end{smallmatrix}\right] \\
&= \frac{\Gamma(2-\frac{2}{m+1})\Gamma(2-\frac{3}{m+1})\Gamma(1-\frac{2}{m+1})}{\Gamma(1-\frac{1}{m+1})} \left(\frac{A(\delta_\alpha, \alpha_2)}{B(\delta_\alpha, \alpha_2)} + \frac{A(-\delta_\alpha, -\alpha_2)}{B(-\delta_\alpha, -\alpha_2)} \right) , \\
C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ \psi} &= \mathsf{F}_{\alpha(1,3)}\left[\begin{smallmatrix} \alpha & \alpha \\ (1,3) & (1,3) \end{smallmatrix}\right]
\end{aligned} \tag{A.23}$$

$$= \frac{\Gamma^2(-1+\frac{2}{m+1})\Gamma(-1+\frac{3}{m+1})\Gamma(2-\frac{2}{m+1})\Gamma(2-\frac{3}{m+1})}{\Gamma(-2+\frac{4}{m+1})\Gamma^2(\frac{1}{m+1})\Gamma^2(1-\frac{1}{m+1})} \left(\frac{A(\delta_\alpha,\alpha_2)}{C(\delta_\alpha,\alpha_2)} + \frac{A(-\delta_\alpha,-\alpha_2)}{C(-\delta_\alpha,-\alpha_2)} \right)$$
$$+ \frac{\Gamma(-2+\frac{3}{m+1})\Gamma(3-\frac{4}{m+1})\Gamma(3-\frac{3}{m+1})}{\Gamma(1-\frac{1}{m+1})\Gamma(\frac{1}{m+1})\Gamma(2-\frac{2}{m+1})} \left(\frac{A(\delta_\alpha,\alpha_2)}{D(\delta_\alpha,\alpha_2)} + \frac{A(-\delta_\alpha,-\alpha_2)}{D(-\delta_\alpha,-\alpha_2)} \right). \quad (A.24)$$

Entwicklung von $\frac{C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,1}}{\left(C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,\psi}\right)^2}$ in $y = \frac{2}{m+1}$ ergibt

$$\frac{C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,1}}{\left(C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,\psi}\right)^2} = \frac{1}{8}(\alpha_2^2 - 1) + O(y)\,. \quad (A.25)$$

A.5 Berechnung der (1,0)-Punkt-Funktionen

In diesem Kapitel werden gestörte (1,0)-Punkt-Funktionen berechnet, um Redundanzen in der Identifizierung der gestörten Randbedingung aufzulösen. Es gilt

$$\ln\left(\frac{\langle\phi(z,\bar z)\rangle_\alpha^\lambda}{\langle\phi(z,\bar z)\rangle_\alpha}\right) = \lambda \oint d\varphi \frac{\langle\phi(z,\bar z)\psi(\varphi)\rangle_\alpha}{\langle\phi(z,\bar z)\rangle_\alpha} + O(\lambda^2)\,. \quad (A.26)$$

Nun ist die (1,1)-Punkt-Funktion auf der Kreisscheibe gegeben durch

$$\langle\phi(r)\psi^{(\alpha\alpha)}(e^{i\varphi})\rangle_\alpha = \frac{C_\phi^{(\alpha)\,\psi} C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,1} Z_\alpha}{|1-2r\cos(\varphi)+r^2|^{h_\psi}(1-r^2)^{2h_\phi-h_\psi}}, \qquad r,\varphi\in\mathbb{R}. \quad (A.27)$$

Für $z = \bar z = 0$ erhält man also

$$\ln\left(\frac{\langle\phi(0,0)\rangle_\alpha^\lambda}{\langle\phi(0,0)\rangle_\alpha}\right) = 2\pi\lambda \frac{C_\phi^{(\alpha)\,\psi} C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,1}}{C_\phi^{(\alpha)\,1}} + O(\lambda^2)\,. \quad (A.28)$$

Insbesondere folgt für den Fixpunkt $\lambda^* = -\frac{y}{C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,\psi}} + O(y^2)$

$$\ln\left(\frac{\langle\phi(0,0)\rangle_\alpha^{\lambda^*}}{\langle\phi(0,0)\rangle_\alpha}\right) = -2\pi y \frac{C_\phi^{(\alpha)\,\psi} C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,1}}{C_\phi^{(\alpha)\,1} C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\,\psi}} + O(y^2)\,, \quad (A.29)$$

wobei verwendet wurde, daß die höheren Terme wieder mindestens Ordnung y^0 haben (vgl. A.3). Für die Strukturkonstanten gilt

$$\frac{C_\phi^{(\alpha)\,\psi}}{C_\phi^{(\alpha)\,1}} = \frac{S_{\alpha\phi}(\psi)}{S_{\alpha\phi}} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}h_\psi}}{\mathsf{F}_{\alpha 1}\left[\begin{smallmatrix}\alpha & \alpha\\ \psi & \psi\end{smallmatrix}\right]} \quad (A.30)$$

mit

$$S_{\alpha i}(k) = S_{11} e^{-2\pi(h_\alpha+h_\phi)} \frac{\mathsf{F}_{\alpha 1}\left[\begin{smallmatrix}\alpha & \alpha\\ k & k\end{smallmatrix}\right]}{\mathsf{F}_{11}\left[\begin{smallmatrix}k & k\\ k & k\end{smallmatrix}\right]\mathsf{F}_{k1}\left[\begin{smallmatrix}\phi & \phi\\ \phi & \phi\end{smallmatrix}\right]\mathsf{F}_{k1}\left[\begin{smallmatrix}\alpha & \alpha\\ \alpha & \alpha\end{smallmatrix}\right]} \sum_r e^{2\pi i h_r} \mathsf{F}_{kr}\left[\begin{smallmatrix}\alpha & \phi\\ \alpha & \phi\end{smallmatrix}\right]\mathsf{F}_{r1}\left[\begin{smallmatrix}\phi & \phi\\ \alpha & \alpha\end{smallmatrix}\right]. \quad (A.31)$$

Nun gilt nach [58]

$$\mathsf{F}_{11}\left[\begin{smallmatrix} k & k \\ k & k \end{smallmatrix}\right] = \frac{S_{11}}{S_{1k}} \qquad \mathsf{F}_{k1}\left[\begin{smallmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}\right] = \frac{S_{1k}}{S_{1\alpha}} \mathsf{F}_{\alpha 1}\left[\begin{smallmatrix} k & k \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}\right] = \frac{S_{1k}}{S_{1\alpha}} C_{kk}^{(\alpha\alpha\alpha)\ 1} . \tag{A.32}$$

Daraus folgt

$$\frac{C_\phi^{(\alpha)\ \psi}}{C_\phi^{(\alpha)\ 1}} C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ 1} = \frac{S_{1\alpha}}{S_{\alpha\phi}} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(h_\psi - 4h_\alpha - 4h_\phi)}}{\mathsf{F}_{\psi 1}\left[\begin{smallmatrix} \phi & \phi \\ \phi & \phi \end{smallmatrix}\right] C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ 1}} \sum_r e^{2\pi i h_r} \mathsf{F}_{\psi r}\left[\begin{smallmatrix} \alpha & \phi \\ \alpha & \phi \end{smallmatrix}\right] \mathsf{F}_{r1}\left[\begin{smallmatrix} \phi & \phi \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}\right] . \tag{A.33}$$

Für den Spezialfall $\phi = \phi_{(1,2)}$ werden nun diese Strukturkonstanten berechnet. Nach A.4 gilt

$$\mathsf{F}_{\psi 1}\left[\begin{smallmatrix} \phi & \phi \\ \phi & \phi \end{smallmatrix}\right] = \frac{\Gamma(1-y)\,\Gamma(2-y)}{\Gamma\left(1-\frac{y}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{3}{2}y\right)} = 1 + O(y) . \tag{A.34}$$

Für $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ setze $\alpha_\pm := (\alpha_1, \alpha_2 \pm 1)$, so daß

$$h_{\alpha_\pm} = h_\alpha + \frac{m}{4(m+1)} \pm \frac{1}{2}\left(\alpha_1 - \alpha_2 + \frac{\alpha_2}{m+1}\right) . \tag{A.35}$$

Ferner gilt

$$\frac{S_{1\alpha}}{S_{\alpha\phi}} = (-1)^{\alpha_1} \frac{\sin\left(\pi\alpha_2 \frac{m}{m+1}\right)}{\sin\left(\pi 2\alpha_2 \frac{m}{m+1}\right)} = \frac{(-1)^{\alpha_1+\alpha_2}}{2\cos\left(\frac{\pi\alpha_2}{m+1}\right)} . \tag{A.36}$$

Damit erhält man dann

$$\frac{C_\phi^{(\alpha)\ \psi} C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ 1}}{C_\phi^{(\alpha)\ 1}} = \frac{-1}{2i\cos\left(\frac{\pi\alpha_2 y}{2}\right)} \left(e^{\frac{i\pi\alpha_2 y}{2}} \mathsf{F}_{\psi\alpha_+}\left[\begin{smallmatrix} \alpha & \phi \\ \alpha & \phi \end{smallmatrix}\right] \mathsf{F}_{\alpha_+ 1}\left[\begin{smallmatrix} \phi & \phi \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}\right] + e^{-\frac{i\pi\alpha_2 y}{2}} \mathsf{F}_{\psi\alpha_-}\left[\begin{smallmatrix} \alpha & \phi \\ \alpha & \phi \end{smallmatrix}\right] \mathsf{F}_{\alpha_- 1}\left[\begin{smallmatrix} \phi & \phi \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}\right] \right) .$$

Die benötigten Fusingmatrizen lassen sich nach Abschnitt A.4 berechnen:

$$\begin{aligned}
\mathsf{F}_{\psi\alpha_+}\left[\begin{smallmatrix} \alpha & \phi \\ \alpha & \phi \end{smallmatrix}\right] &= \frac{\Gamma\left(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2\frac{y}{2}\right)\Gamma(2-y)}{\Gamma\left(\alpha_1 - \alpha_2 + (\alpha_2 - 1)\frac{y}{2} + 1\right)\Gamma\left(1-\frac{y}{2}\right)} \\
\mathsf{F}_{\psi\alpha_-}\left[\begin{smallmatrix} \alpha & \phi \\ \alpha & \phi \end{smallmatrix}\right] &= \frac{\Gamma\left(-\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_2\frac{y}{2}\right)\Gamma(2-y)}{\Gamma\left(-\alpha_1 + \alpha_2 - (\alpha_2 + 1)\frac{y}{2} + 1\right)\Gamma\left(1-\frac{y}{2}\right)} \\
\mathsf{F}_{\alpha_+ 1}\left[\begin{smallmatrix} \phi & \phi \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}\right] &= \frac{\Gamma\left(1 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_2\frac{y}{2}\right)\Gamma(1-y)}{\Gamma\left(1 - \alpha_1 + \alpha_2 - (\alpha_2 + 1)\frac{y}{2} + 1\right)\Gamma\left(1-\frac{y}{2}\right)} \\
\mathsf{F}_{\alpha_- 1}\left[\begin{smallmatrix} \phi & \phi \\ \alpha & \alpha \end{smallmatrix}\right] &= \frac{\Gamma\left(1 + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2\frac{y}{2}\right)\Gamma(1-y)}{\Gamma\left(1 + \alpha_1 - \alpha_2 + (1 - \alpha_2)\frac{y}{2} + 1\right)\Gamma\left(1-\frac{y}{2}\right)}
\end{aligned} \tag{A.37}$$

Insgesamt

$$\begin{aligned}
\frac{C_\phi^{(\alpha)\ \psi} C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ 1}}{C_\phi^{(\alpha)\ 1} C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ \psi}} &= \frac{\tan\left(\frac{\pi\alpha_2 y}{2}\right)}{C_{\psi\psi}^{(\alpha\alpha\alpha)\ \psi}} \frac{\Gamma(2-y)\Gamma(1-y)}{\Gamma^2\left(1-\frac{y}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_2\frac{y}{2}\right)\Gamma\left(1-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_2\frac{y}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\alpha_1-\alpha_2+(\alpha_2-1)\frac{y}{2}\right)\Gamma\left(1-\alpha_1+\alpha_2-(\alpha_2+1)\frac{y}{2}\right)} \\
&= \tan\left(\frac{\pi\alpha_2 y}{2}\right)\left(\frac{\alpha_2^2 - 1}{4\alpha_2} + O(y)\right) .
\end{aligned} \tag{A.38}$$

Die letzte Gleichung folgt mit (A.24). Man erhält schließlich

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\langle\phi(0,0)\rangle_\alpha^{\lambda^*}}{\langle\phi(0,0)\rangle_\alpha}\right) &= -2\pi y\tan\left(\frac{\pi\alpha_2 y}{2}\right)\left(\frac{\alpha_2^2-1}{4\alpha_2}\right)+O(y^2)\\ &= -\frac{\pi^2}{4}y^2(\alpha_2^2-1)+O(y^2)\,.\end{aligned}\tag{A.39}$$

Nun gilt aber für einen Randzustand $\beta=\beta^1+\ldots+\beta^n$

$$\langle\phi(0,0)\rangle_\beta=\sum_i\frac{S_{\beta^i\phi}}{\sqrt{S_{1\phi}}}\,.\tag{A.40}$$

Daher gilt in diesem Fall

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\langle\phi(0,0)\rangle_\beta}{\langle\phi(0,0)\rangle_\alpha}\right) &= \ln\left(\sum_i\frac{S_{\beta^i\phi}}{S_{\alpha\phi}}\right)\\ &= \ln\left(\sum_i\left((-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1^i+\beta_2^i}\frac{\sin\left(\frac{\pi\beta_1^i}{m}\right)\sin\left(\frac{2\pi\beta_2^i}{m+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi\alpha_1}{m}\right)\sin\left(\frac{2\pi\alpha_2}{m+1}\right)}\right)\right)\,.\end{aligned}\tag{A.41}$$

Entwicklung in y ergibt mit

$$\epsilon^i:=(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1^i+\beta_2^i}\,,\qquad \tilde{s}_i:=\epsilon^i\frac{\beta_1^i\beta_2^i}{\alpha_1\alpha_2}\,,\qquad \tilde{\sigma}:=\sum_i\tilde{s}_i\,,\tag{A.42}$$

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\langle\phi(0,0)\rangle_\beta}{\langle\phi(0,0)\rangle_\alpha}\right) &= \ln(\tilde{\sigma})\\ &+\frac{\pi^2}{3!4\tilde{\sigma}}\left(\tilde{\sigma}\left(\alpha_1^2+4\alpha_2^2\right)-\sum_i\tilde{s}_i\left((\beta_1^i)^2+4(\beta_2^i)^2\right)\right)y^2+O(y^3)\,.\end{aligned}\tag{A.43}$$

Vergleich mit der perturbativen Rechnung ergibt $\tilde{\sigma}=1$. Aus der Berechnung der gestörten Grundzustandsentartung wurde aber schon $\sigma=\sum_i s_i=1$, $\tilde{s}_i=\epsilon^i s_i$ gefolgert (vgl. (5.18), (5.19), (5.20)). Aus der Positivität der α_i, β_i^j folgt insbesondere $\epsilon^i=1$, $\forall i$.
Die Gestalt der S_{ij} zeigt nun, daß sich ϵ^i bei $\phi=\phi_{(i_1,i_2)}$ unter den Transformationen $R_1:(\beta_1^i,\beta_2^i)\mapsto(m-\beta_1^i,\beta_2^i)$, bzw. $R_2:(\beta_1^i,\beta_2^i)\mapsto(\beta_1^i,m+1-\beta_2^i)$ wie folgt verhält:

$$R_1:\epsilon^i\mapsto\epsilon^i(-1)^{m+1+i_1}\,,\qquad R_2:\epsilon^i\mapsto\epsilon^i(-1)^{m+i_2}\,.\tag{A.44}$$

Aus obiger Rechnung für $\phi_{(1,2)}$ folgt daher, daß für ungerades m weder R_1 noch R_2 einen möglichen Endrandzustand in einen möglichen Endrandzustand transformieren. Für diesen Fall ist also die Redundanz aufgehoben. Um die gleiche Aussage für gerades m zu zeigen könnte man zum Beispiel die gestörte $(1,0)$-Punkt-Funktion des Feldes $\phi_{(2,3)}$ berechnen. Die Rechnung ist aber etwas aufwendiger und wird daher hier nicht angegeben. Es ist jedoch zu bemerken, daß man ohnehin aufgrund der Regelmäßigkeit der (A_m,A_{m+1})-Modelle eine Aufhebung der Redundanz auch für gerades m erwarten sollte.

A.6 Integrale

Es gilt

$$\int \frac{dx}{|2\sin(\frac{x}{2})|^{n-my}} = -2^{1-n+my}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1+n-my}{2},\frac{3}{2},\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) \tag{A.45}$$

Damit folgt insbesondere

$$\int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} \frac{dx}{|2\sin(\frac{x}{2})|^{n-my}} = -2^{2-n+my}\cos(\tfrac{\epsilon}{2})\,{}_2F_1\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1+n}{2}-\tfrac{m}{2}y,\tfrac{3}{2},\cos^2(\tfrac{\epsilon}{2})\right) \tag{A.46}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
&{}_2F_1\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1+n}{2}-\tfrac{m}{2}y,\tfrac{3}{2},\cos^2(\tfrac{\epsilon}{2})\right) = \\
&\quad \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1-n+my}{2})}{\Gamma(\frac{2-n+my}{2})}\,{}_2F_1\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1+n-my}{2},\tfrac{1+n-my}{2},1-\cos^2(\tfrac{\epsilon}{2})\right) \\
&\quad +\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{-1+n-my}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1+n-my}{2})}(1-\cos^2(\tfrac{\epsilon}{2}))^{\frac{1-n+my}{2}}\,{}_2F_1\left(1,\tfrac{2-n+my}{2},\tfrac{3-n+my}{2},1-\cos^2(\tfrac{\epsilon}{2})\right)
\end{aligned} \tag{A.47}$$

Da ${}_2F_1(a,b,c,z)\to 1$ für $z\to 0$, gilt für kleines ϵ und $n=m=1$

$${}_2F_1\left(\tfrac{1}{2},1-\tfrac{1}{2}y,\tfrac{3}{2},\cos^2(\tfrac{\epsilon}{2})\right) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{y}{2})}{\Gamma(\frac{1+y}{2})} + \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{y}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{y}{2}\right)}\epsilon^y + O(y,\epsilon)\,, \tag{A.48}$$

bzw. für $n=m=2$

$$\begin{aligned}
{}_2F_1\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}-y,\tfrac{3}{2},\cos^2\left(\tfrac{\epsilon}{2}\right)\right) &= \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(-\frac{1}{2}+y)}{\Gamma(y)}\,{}_2F_1\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}-y,\tfrac{3}{2}-y,1-\cos^2(\tfrac{\epsilon}{2})\right) \\
&\quad+\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-y)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2}-y)}(1-\cos^2(\tfrac{\epsilon}{2}))^{-\frac{1}{2}+y}\,{}_2F_1\left(1,y,\tfrac{1}{2}+y,1-\cos^2(\tfrac{\epsilon}{2})\right) \\
&= \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(-\frac{1}{2}+y)}{\Gamma(y)} + \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-y)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2}-y)}\epsilon^{-1+2y} + O(\epsilon^{1+y})\,.
\end{aligned} \tag{A.49}$$

Also

$$\begin{aligned}
\int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} \frac{dx}{|2\sin(\frac{x}{2})|^{1-y}} &= 2^y\sqrt{\pi}\left(\frac{\Gamma(\frac{y}{2})}{\Gamma(\frac{1+y}{2})} + \epsilon^y\frac{\Gamma(-\frac{y}{2})}{\Gamma(1-\frac{y}{2})}\right) + O(\epsilon) \\
&= \frac{2}{y}\left(1-\epsilon^y\right) + O(y,\epsilon)\,,
\end{aligned} \tag{A.50}$$

$$\begin{aligned}
\int_\epsilon^{2\pi-\epsilon} \frac{dx}{|2\sin(\frac{x}{2})|^{2-2y}} &= 4^y\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(-\frac{1}{2}+y)}{\Gamma(y)} + 4^y\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2}-y)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2}-y)}\epsilon^{-1+2y} + O(\epsilon^{1+y}) \\
&= -\pi y + \epsilon^{-1+2y} + O(\epsilon^{1+y})\,.
\end{aligned} \tag{A.51}$$

Im folgenden wird nun das Integral über die Drei-Punkt-Funktion berechnet, wobei ϵ der Regularisierungsparameter ist.

$$\begin{aligned} I(y,\epsilon) &:= \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \int_0^{2\pi} d\varphi_3 \frac{1}{|2\sin\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right) 2\sin\left(\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\right) 2\sin\left(\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}\right)|^{1-y}} \\ &= 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi_2 \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi_3 \frac{1}{|2\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right) 2\sin\left(\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\right) 2\sin\left(\frac{\varphi_3}{2}\right)|^{1-y}} \end{aligned}$$

Nach den Substitutionen $z_i = \tan\left(\frac{\varphi_i}{2}\right)$ erhält man

$$\begin{aligned} I(y,\epsilon) &= 8^y\pi \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} dz_2 \frac{1}{(1+z_1^2)^y(1+z_2^2)^y|z_1z_2(z_1-z_2)|^{1-y}} \\ &= 8^y\pi \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \frac{1}{(1+z_1^2)^y(1+z_1^2x^2)^y|z_1|^{2-3y}|x(1-x)|^{1-y}}\,, \end{aligned}$$

mit $z_2 = xz_1$. Partielle Integration in z_1 ergibt nun

$$\begin{aligned} I(y,\epsilon) = 8^y\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|x(1-x)|^{1-y}} & \left(-\frac{2}{1-3y} \frac{1}{(1+z_1^2)^y(1+x^2z_1^2)^y|z_1|^{1-3y}}\Big|_{\tilde{\epsilon}}^{\infty} \right. \\ & \left. -\frac{2y}{1-3y} \int dz_1 \frac{1}{|z_1|^{2-3y}(1+z_1^2)^y(1+x^1z_1^2)^y} \left(\frac{z_1^2}{1+z_1^2} + \frac{x^2z_1^2}{1+x^2z_1^2} \right) \right) \\ =: S(y,\epsilon) + \tilde{I}(y,\epsilon)\,, & \end{aligned} \tag{A.52}$$

wobei man $\tilde{\epsilon} = \max\{\pi\epsilon, \frac{\pi\epsilon}{|x|}, \frac{\pi\epsilon}{|1-x|}\}$ aus den Regularisierungen $|z_i| > \pi\epsilon$, $|z_1 - z_2| > \pi\epsilon$ erhält. S ist hierbei der Randterm und $\tilde{I}$ das verbleibende "zweifache" Integral, bei dem zunächst die obige Substitution wieder rückgängig gemacht wird.

$$\begin{aligned} \tilde{I}(y,\epsilon) &= -\frac{8^y\pi y}{1-3y} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \frac{\sin^{1+y}\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}{|\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)|^{1-y}} \\ &= -\frac{8^y\pi y}{1-3y} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \frac{\sin^{1+y}\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}{|\cos^2\left(\frac{\varphi_1}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)|^{1-y}}\,. \end{aligned} \tag{A.53}$$

Nun gilt aber

$$\begin{aligned} \int dz \frac{1}{\left(\cos^2\left(\frac{w}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{z}{2}\right)\right)^{1-y}} &= \frac{2^{1-y}}{y} \mathrm{sign}(\sin(z)) \frac{\left(\cos\left(\frac{w}{2}\right) - \cos(z)\right)^y}{|\sin\left(\frac{w}{2}\right)|} \\ & \times \mathrm{AF}_1\left(y, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1+y, \frac{\cos\left(\frac{w}{2}\right) - \cos(z)}{2\cos^2\left(\frac{w}{4}\right)}, -\frac{\cos\left(\frac{w}{2}\right) - \cos(z)}{2\sin^2\left(\frac{w}{4}\right)}\right)\,. \end{aligned} \tag{A.54}$$

AF_1 ist dabei Appells hypergeometrische Funktion.
Daher

$$\begin{aligned} \tilde{I}(y,\epsilon) = -\frac{2^{3+2y}\pi}{1-3y} \int_{\epsilon}^{2\pi-\epsilon} & d\varphi_1 \sin^y\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) - \cos\left(\frac{\varphi_1}{2}+\epsilon\right)\right)^y \\ & \mathrm{AF}_1\left(y, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1+y, \frac{\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) - \cos(\frac{\varphi_1}{2}+\epsilon)}{2\cos^2\left(\frac{\varphi_1}{4}\right)}, -\frac{\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) - \cos(\frac{\varphi_1}{2}+\epsilon)}{2\sin^2\left(\frac{\varphi_1}{4}\right)}\right)\,. \end{aligned} \tag{A.55}$$

Aufgespalten in zwei Integrale über die Integrationsbereiche $\epsilon \leq \varphi_1 \leq \pi$, $\pi \leq \varphi_1 \leq 2\pi - \epsilon$ ist jeweils nur eines der Argumente

$$\frac{\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) - \cos\left(\frac{\varphi_2}{2} + \epsilon\right)}{2\cos^2\left(\frac{\varphi_1}{4}\right)} =: \frac{\Delta(\epsilon, \varphi_1)}{2\cos^2\left(\frac{\varphi_1}{4}\right)}, \quad -\frac{\Delta(\epsilon, \varphi_1)}{2\sin^2\left(\frac{\varphi_1}{4}\right)}$$

von AF_1 im Integrationsbereich singulär. Nun sind beide Terme von der Ordnung ϵ. Daher kann AF_1 nach dem jeweils nicht singulären Term entwickelt werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{AF}_1\left(y, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1+y, a, b\right) &= {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, y, 1+y, a\right) + O(yb) \\ &= {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, y, 1+y, b\right) + O(ya)\,. \end{aligned} \tag{A.56}$$

Man erhält damit

$$\begin{aligned} \tilde{I}(y,\epsilon) = &-\frac{2^{3+2y}\pi}{1-3y}\int_\epsilon^\pi d\varphi_1 \sin^y\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\Delta(\epsilon,\varphi_1) \\ &\times\left({}_2F_1\left(\frac{1}{2}, y, 1+y, -\frac{\Delta(\epsilon,\varphi_1)}{2\sin^2\left(\frac{\varphi_1}{4}\right)}\right) + O(\epsilon y)\right) \\ &-\frac{2^{3+2y}\pi}{1-3y}\int_\pi^{2\pi-\epsilon} d\varphi_1 \sin^y\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)\Delta(\epsilon,\varphi_1) \\ &\times\left({}_2F_1\left(\frac{1}{2}, y, 1+y, \frac{\Delta(\epsilon,\varphi_1)}{2\cos^2\left(\frac{\varphi_1}{4}\right)}\right) + O(\epsilon y)\right)\,. \end{aligned} \tag{A.57}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, y, 1+y, -d\right) &= \frac{\Gamma(1+y)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+y\right)}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, y, \frac{1}{2}, 1+d\right) \\ &\quad+\frac{\Gamma(1+y)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(y)}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}+y, 1, \frac{3}{2}, 1+d\right) \\ &= \frac{\Gamma(1+y)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+y\right)}d^{-y} \\ &\quad+y\frac{\Gamma(1+y)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}d^{-1}\,{}_2F_1\left(1-y, 1, \frac{3}{2}, 1+\frac{1}{d}\right)\,. \end{aligned} \tag{A.58}$$

Setzt man dies in (A.57) ein, so stellt man fest, daß die Integrale des zweiten Summanden jeweils lediglich reguläre Terme enthalten, denn die d^{-1} sind in den entsprechenden Integrationsbereichen regulär. Daher sind die Integrale dieser Terme $O(y)$. Man erhält schließlich

$$\begin{aligned} \tilde{I}(y,\epsilon) &= -\frac{2^{3+4y}\pi}{1-3y}\int_\epsilon^\pi d\varphi_1 \cos^y\left(\frac{\varphi_1}{4}\right)\sin^{3y}\left(\frac{\varphi_1}{4}\right) \\ &\quad-\frac{2^{3+4y}\pi}{1-3y}\int_\pi^{2\pi-\epsilon} d\varphi_1 \sin^y\left(\frac{\varphi_1}{4}\right)\cos^{3y}\left(\frac{\varphi_1}{4}\right) + O(\epsilon, y) \\ &= -16\pi^2 + O(y, \epsilon^y, \epsilon)\,. \end{aligned} \tag{A.59}$$

Nun muß noch S berechnet werden. Nachdem man das verbleibende Integral in Integrationsbereiche aufgespalten hat, läßt es sich integrieren, und man erhält lediglich geometrieabhängige Terme:

$$S(y,\epsilon) = \frac{A}{\epsilon^{1-3y}}\,. \tag{A.60}$$

Beachtet man ferner weitere Terme der Ordnung ϵ^y, die man durch Ableiten des Ausgangsintegrals problemlos berechnen kann

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\epsilon} I(y,\epsilon) &= -6\pi \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi_2 \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi_3 \frac{\delta\left(\varphi_2^2-\epsilon^2\right)\Theta\left(\varphi_3^2-\epsilon^2\right)\Theta\left((\varphi_2-\varphi_3)^2-\epsilon^2\right)}{|2\sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)2\sin\left(\frac{\varphi_2-\varphi_3}{2}\right)2\sin\left(\frac{\varphi_3}{2}\right)|^{1-y}} \\
&= -12\pi\epsilon^{y-1}\int_{\epsilon}^{2\pi-\epsilon} d\varphi_3 \frac{1}{|2\sin\left(\frac{\varphi_3}{2}\right)|^{2-2y}} \\
&= -12\pi\epsilon^{y-1}\left(-\pi y+\epsilon^{-1+2y}\right)+O(y) \\
&= 12\pi^2 y\epsilon^{y-1} - 12\pi\epsilon^{-2+3y}+O(y)
\end{aligned} \tag{A.61}$$

$$\Rightarrow I(y,\epsilon) = 12\pi^2\epsilon^y - \frac{12\pi}{-1+3y}\epsilon^{-1+3y} + O(y,\epsilon^0)\,, \tag{A.62}$$

so ergibt sich insgesamt:

$$I(y,\epsilon) = -16\pi^2 + 12\pi^2\epsilon^y + \frac{A}{\epsilon^{1-3y}} + O(y,\epsilon)\,. \tag{A.63}$$

Literaturverzeichnis

[1] I. Affleck, *A current algebra approach to the Kondo effect*, Nucl. Phys., B336 (1990), p. 517.

[2] ——, *Conformal field theory approach to the Kondo effect*, Acta Phys. Polon., B26 (1995), pp. 1869–1932. cond-mat/9512099.

[3] ——, *Boundary condition changing operators in conformal field theory and condensed matter physics*, Nucl. Phys. Proc. Suppl., 58 (1997), p. 35. hep-th/9611064.

[4] ——, *Edge critical behaviour of the 2-dimensional tri-critical Ising model*, (2000). cond-mat/0005286.

[5] I. Affleck and A. Ludwig, *Universal noninteger ground-state degeneracy in critical quantum systems*, Phys.Rev.Lett., 67 (1991), pp. 161–164.

[6] I. Affleck and A. W. W. Ludwig, *The Kondo effect, conformal field theory and fusion rules*, Nucl. Phys., B352 (1991), pp. 849–862.

[7] ——, *Exact conformal field theory results on the multichannel Kondo effect: Single fermion Green's function, selfenergy and resistivity*, Phys.Rev.B, 48 (1993), p. 7297.

[8] I. Affleck, M. Oshikawa, and H. Saleur, *Boundary critical phenomena in the three-state Potts model*, (1998). cond-mat/9804117.

[9] C. Ahn and C. Rim, *Boundary flows in general coset theories*, J.Phys.A, 32 (1999), pp. 2509–2525. hep-th/9805101.

[10] A. Y. Alekseev, A. Recknagel, and V. Schomerus, *Non-commutative world-volume geometries: Branes on SU(2) and fuzzy spheres*, JHEP, 09 (1999), p. 023. hep-th/9908040.

[11] ——, *Brane dynamics in background fluxes and non-commutative geometry*, JHEP, 05 (2000), p. 010. hep-th/0003187.

[12] L. Alvarez-Gaumé, G. Sierra, and C. Gomez, *Topics in conformal field theory*, in Physics and mathematics of strings, Teaneck, NJ, 1990, pp. 16–184.

[13] M. T. Batchelor, *Surface operator content of the A_L face models*, Physica A, 251 (1998), pp. 132–142.

[14] R. Behrend, P. Pearce, V. Petkova, and J.-B. Zuber, *On the classification of bulk and boundary conformal field theories*, Phys. Lett., B444 (1998), p. 163. hep-th/9809097.

[15] ——, *Boundary conditions in rational conformal field theories*, Nucl. Phys., B570 (2000), p. 525. hep-th/9908036.

[16] R. Behrend, P. Pearce, and J.-B. Zuber, *Integrable boundaries, conformal boundary conditions and A-D-E fusion rules*, J.Phys.A, 31 (1998), pp. 763–770. hep-th/9807142.

[17] R. E. Behrend and P. A. Pearce, *Integrable and conformal boundary conditions for sl(2) A-D- E lattice models and unitary minimal conformal field theories*, (2000). hep-th/0006094.

[18] N. Berkovits, A. Sen, and B. Zwiebach, *Tachyon condensation in superstring field theory*, (2000). hep-th/0002211.

[19] M. Bianchi and A. Sagnotti, *Open strings and the relative modular group*, Phys. Lett., B231 (1989), p. 389.

[20] L. Birke, J. Fuchs, and C. Schweigert, *Symmetry breaking boundary conditions and WZW orbifolds*, (1999). hep-th/9905038.

[21] C. G. Callan, C. Lovelace, C. R. Nappi, and S. A. Yost, *Adding holes and crosscaps to the superstring*, Nucl. Phys., B293 (1987), p. 83.

[22] C. G. Callan and L. Thorlacius, *Open string theory as dissipative quantum mechanics*, Nucl. Phys., B329 (1990), p. 117.

[23] J. L. Cardy, *Conformal invariance and statistical mechanics.* Lectures given at the Les Houches Summer School in Theoretical Physics, 1988.

[24] J. L. Cardy, *Conformal invariance and surface critical behavior*, Nucl. Phys., B240 (1984), p. 514.

[25] ——, *Effect of boundary conditions on the operator content of two-dimensional conformally invariant theories*, Nucl. Phys., B275 (1986), p. 200.

[26] ——, *Operator content of two-dimensional conformally invariant theories*, Nucl. Phys., B270 (1986), pp. 186–204.

[27] ——, *Boundary conditions, fusion rules and the Verlinde formula*, Nucl. Phys., B324 (1989), p. 581.

[28] J. L. Cardy and I. Peschel, *Finite size dependence of the free energy in two-dimensional critical systems*, Nucl. Phys., B300 (1988), p. 377.

[29] L. Chim, *Boundary S-matrix for the tricritical Ising model*, Int. J. Mod. Phys., A11 (1996), pp. 4491–4512. hep-th/9510008.

[30] P. DiFrancesco, P. Mathieu, and D. Senechal, *Conformal field theory.* New York, USA: Springer (1997) 890 p.

[31] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, and H. Verlinde, $c = 1$ *conformal field theories on Riemann surfaces*, Commun. Math. Phys., 115 (1988), pp. 649–690.

[32] P. Dorey, *Partition functions, intertwiners and the Coxeter element*, Int. J. Mod. Phys., A8 (1993), pp. 193–208. hep-th/9205040.

[33] P. Dorey, M. Pillin, R. Tateo, and G. M. T. Watts, *One-point functions in perturbed boundary conformal field theories*, (2000). hep-th/0007077.

[34] P. Dorey, A. Pocklington, R. Tateo, and G. Watts, *TBA and TCSA with boundaries and excited states*, Nucl.Phys.B, 525 (1998), pp. 641–663. hep-th/9712197.

[35] P. Dorey, I. Runkel, R. Tateo, and G. Watts, *g-function flow in perturbed boundary conformal field theories*, (1999). hep-th/9909216.

[36] G. Felder, J. Fröhlich, J. Fuchs, and C. Schweigert, *Correlation functions and boundary conditions in RCFT and three-dimensional topology*, (1999). hep-th/9912239.

[37] ——, *Conformal boundary conditions and three-dimensional topological field theory*, Phys. Rev. Lett., 84 (2000), p. 1659. hep-th/9909140.

[38] P. Fendley, H. Saleur, and N. Warner, *Exact solution of a massless scalar field with a relevant boundary interaction*, Nucl.Phys.B, 430 (1994), pp. 577–596. hep-th/9406125.

[39] D. Fioravanti, G. Pradisi, and A. Sagnotti, *Sewing constraints and nonorientable open strings*, Phys. Lett., B321 (1994), pp. 349–354. hep-th/9311183.

[40] J. Fuchs and C. Schweigert, *Branes: From free fields to general backgrounds*, Nucl. Phys., B530 (1998), p. 99. hep-th/9712257.

[41] J. Fuchs and C. Schweigert, *Symmetry breaking boundaries. I: General theory*, Nucl. Phys., B558 (1999), p. 419. hep-th/9902132.

[42] ——, *Symmetry breaking boundaries. II: More structures, examples*, Nucl. Phys., B568 (2000), p. 543. hep-th/9908025.

[43] L. Funar, $(2+1)-d$ *topological quantum field theory and* $2-d$ *conformal field theory*, Commun. Math. Phys., 171 (1995), p. 405.

[44] M. R. Gaberdiel, *An introduction to conformal field theory*, Rept. Prog. Phys., 63 (2000), p. 607. hep-th/9910156.

[45] K. Gawedzki, *Conformal field theory: A case study*, (1999). hep-th/9904145.

[46] D. Ghoshal and A. Sen, *Tachyon condensation and brane descent relations in p-adic string theory*, (2000). hep-th/0003278.

[47] S. Ghoshal and A. Zamolodchikov, *Boundary S matrix and boundary state in two-dimensional integrable quantum field theory*, Int. J. Mod. Phys., A9 (1994), pp. 3841–3886. hep-th/9306002.

[48] P. Ginsparg, *Applied conformal field theory.* Lectures given at Les Houches Summer School in Theoretical Physics, Les Houches, France, Jun 28 - Aug 5, 1988.

[49] K. Graham, I. Runkel, and G. Watts, *Unveröffentlichte Resultate.*

[50] N. Ishibashi, *The boundary and crosscap states in conformal field theories*, Mod. Phys. Lett., A4 (1989), p. 251.

[51] T. R. Klassen and E. Melzer, *The thermodynamics of purely elastic scattering theories and conformal perturbation theory*, Nucl. Phys., B350 (1991), pp. 635–689.

[52] M. Lässig, *Geometry of the renormalization group with an application in two-dimensions*, Nucl. Phys., B334 (1990), p. 652.

[53] A. LeClair, G. Mussardo, H. Saleur, and S. Skorik, *Boundary energy and boundary states in integrable quantum field theories*, Nucl. Phys., B453 (1995), pp. 581–618. hep-th/9503227.

[54] F. Lesage, H. Saleur, and P. Simonetti, *Boundary flows in minimal models*, Phys.Lett.B, 427 (1998), pp. 85–92. hep-th/9802061.

[55] D. C. Lewellen, *Sewing constraints for conformal field theories on surfaces with boundaries*, Nucl. Phys., B372 (1992), pp. 654–682.

[56] A. W. W. Ludwig and J. L. Cardy, *Perturbative evaluation of the conformal anomaly at new critical points with applications to random systems*, Nucl. Phys., B285 (1987), p. 687.

[57] J. Majumder and A. Sen, *Vortex pair creation on brane-antibrane pair via marginal deformation*, JHEP, 06 (2000), p. 010. hep-th/0003124.

[58] G. Moore and N. Seiberg, *Classical and quantum conformal field theory*, Commun. Math. Phys., 123 (1989), p. 177.

[59] T. Onogi and N. Ishibashi, *Conformal field theories on surfaces with boundaries and crosscaps*, Mod. Phys. Lett., A4 (1989), p. 161.

[60] J. Polchinski and Y. Cai, *Consistency of open superstring theories*, Nucl. Phys., B296 (1988), p. 91.

[61] G. Pradisi, A. Sagnotti, and Y. S. Stanev, *The open descendants of nondiagonal SU(2) WZW models*, Phys. Lett., B356 (1995), pp. 230–238. hep-th/9506014.

[62] ——, *Completeness conditions for boundary operators in 2d conformal field theory*, Phys. Lett., B381 (1996), pp. 97–104. hep-th/9603097.

[63] A. Recknagel, *Boundary conformal field theory and the world-sheet-approach to D-branes, unveröffentlicht*, (2000).

[64] A. Recknagel, D. Roggenkamp, and V. Schomerus, *On relevant boundary perturbations of unitary minimal models*, Nucl. Phys., B588 (2000), pp. 552–564. hep-th/0003110.

[65] A. Recknagel and V. Schomerus, *D-branes in Gepner models*, Nucl. Phys., B531 (1998), p. 185. hep-th/9712186.

[66] ——, *Boundary deformation theory and moduli spaces of D-branes*, Nucl.Phys.B, 545 (1999), pp. 233–282. hep-th/9811237.

[67] I. Runkel, *Boundary structure constants for the A-series minimal models*, Nucl.Phys.B, 549 (1999), pp. 563–578. hep-th/9811178.

[68] ——, *Structure constants for the D-series Virasoro minimal models*, (1999). hep-th/9908046.

[69] A. Sagnotti, *Open strings and their symmetry groups.* Talk presented at the Cargese Summer Institute on Non- Perturbative Methods in Field Theory, Cargese, Italy, Jul 16-30, 1987.

[70] H. Saleur and M. Bauer, *On some relations between local height probabilities and conformal invariance*, Nucl. Phys., B320 (1989), p. 591.

[71] V. Schomerus, *D-branes and deformation quantization*, JHEP, 06 (1999), p. 030. hep-th/9903205.

[72] A. Sen, *Tachyon condensation on the brane antibrane system*, JHEP, 08 (1998), p. 012. hep-th/9805170.

[73] A. Sen and B. Zwiebach, *Tachyon condensation in string field theory*, JHEP, 03 (2000), p. 002. hep-th/9912249.

[74] H. Sonoda, *Sewing conformal field theories*, Nucl. Phys., B311 (1988), p. 401.

[75] ——, *Sewing conformal field theories. 2*, Nucl. Phys., B311 (1988), p. 417.

[76] V. G. Turaev, *Quantum invariants of knots and three manifolds.* Berlin, Germany: de Gruyter (1994) 588 p. (de Gruyter studies in mathematics, 18).

[77] E. Verlinde, *Fusion rules and modular transformations in 2-d conformal field theory*, Nucl. Phys., B300 (1988), p. 360.

[78] G. Watts, *Unveröffentlichte Resultate.*

[79] ——, *On the boundary Ising model with disorder operators*, (2000). hep-th/0002218.

[80] E. Wong and I. Affleck, *Tunneling in quantum wires: A boundary conformal field theory approach*, Nucl. Phys., B417 (1994), p. 403.

[81] A. B. Zamolodchikov, *Irreversibility of the flux of the renormalization group in a 2-d field theory*, JETP Lett., 43 (1986), pp. 730–732.

[82] A. B. Zamolodchikov, *Renormalization group and perturbation about fixed points in two-dimensional field theory*, Sov.J.Nucl.Phys, 46 (1987), p. 1090.