Universität Bonn
Physikalisches Institut

Allgemeine Störungstheorie des Algebraischen Bethe-Ansatzes im Fall des inhomogenen XXX-Modells

by

Klaus Ruhlig

Abstract

The matrixelements for a perturbation expansion to arbitrary order of the inhomogeneous XXX model are derived using concepts of the algebraic Bethe-Ansatz.

Post address:
Nußallee 12
D-53115 Bonn
Germany
e-mail:
ruhlig@avzw02.physik.uni-bonn.de

BONN-IB-95-35
Bonn University
December 1995

Universität Bonn
Physikalisches Institut

Allgemeine Störungstheorie des des Algebraischen Bethe-Ansatzes im Fall des inhomogenen XXX-Modells

von

Klaus Ruhlig

Dieser Forschungsbericht wurde von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn als Diplomarbeit angenommen.

Datum: 28. November 1995
Referent: Prof. R. Flume Korreferent: Prof. G. von Gehlen

Contents

1 Einleitung **4**

2 Der Algebraische Bethe-Ansatz **5**
2.1 Definition des XXX-Modells . . . 5
2.2 Der Algebraische Bethe-Ansatz . . . 6
2.3 Klassifikation der Bethe-Zustände bzgl. ihres Spins . . . 13
2.4 Lösungen der Bethe-Ansatz-Gleichungen . . . 17
2.5 Skalarprodukte . . . 18
2.6 Inhomogenes Modell . . . 20

3 Störungstheorie des inhomogenen XXX-Modells **23**
3.1 Ableitung des Hamilton-Operators des inhomogenen XXX-Modells aus der Transfer-Matrix . . . 23
3.2 Symmetrie des Störoperators H_1 . . . 26
3.3 Analytische Betrachtungen zu den Matrixelementen . . . 27
3.4 Algebraische Berechnung aller Matrixelemente . . . 30

4 Zusammenfassung und Ausblick **41**

Literaturverzeichnis **42**

1 Einleitung

Im Jahr 1928 wurde die Heisenberg-Spin-Kette von W. Heisenberg als einfaches Modell zum Studium von Magnetismus eingeführt [1]. H. Bethe konnte dieses dann 1931 im Fall des XXX-Modells exakt mit dem nach ihm benannten Bethe-Ansatz lösen [2]. 1981 wurde eine algebraische Version dieses Bethe-Ansatzes der sogenannte Algebraische Bethe-Ansatz von L.D. Faddeev und L.A. Takhtadzhan entwickelt und mit diesem das XYZ-Modell gelöst [3]. Der Algebraische Bethe-Ansatz konnte danach auch bei der Lösung verschiedener anderer Probleme verwendet werden, so z.B. bei relativistischen Quantenfeldtheorien wie dem Sine-Gordon-Modell [4] oder beim Hubbard-Modell [5], welches mit der Hoch-Temperatur-Supraleitung verbunden ist. Einen umfassenden Überblick über das Gebiet des Algebraischen Bethe-Ansatzes und über viele der später in dieser Arbeit benutzten Konzepte findet man in [6].

Betrachtet man das XXX-Modell und läßt zu, daß die Kopplungen zwischen den Spin-Zuständen im Verlauf der Kette variieren können, so erhält man ein Modell, an dem man Magnetismus in Gegenwart von Verunreinigungen studieren kann. Dieses Modell stellt sich aber als nicht integrabel heraus, so daß in dieser Arbeit die Voraussetzungen für eine Störungsrechnung beliebiger Ordnung geschaffen werden sollen, d.h. es werden alle für diese Störungsentwicklung notwendigen Matrixelemente berechnet.
Hierzu werden im zweiten Kapitel alle für die späteren Rechnungen relevanten Grundlagen besprochen, d.h. der Algebraische Bethe-Ansatz selbst, alle Eigenfunktionen des Hamilton-Operators des XXX-Modells und die Skalarprodukte zwischen den Bethe-Wellenfunktionen. Im dritten Kapitel wird dann auf die eigentliche Störungsrechnung eingegangen. Hierbei wird zuerst der Hamilton-Operator des inhomogenen XXX-Modells aus der Transfer-Matrix hergeleitet, dessen Symmetrie betrachtet und danach analytische Aussagen über die Matrixelemente gemacht. Das Kapitel schließt mit der algebraischen Berechnung aller für die Störungsrechnung relevanten Matrixelemente.

2 Der Algebraische Bethe-Ansatz

Nachfolgend werden die Aspekte des Algebraischen Bethe-Ansatzes besprochen, die für unsere Störungsrechnung relevant sind.

2.1 Definition des XXX-Modells

Das XXX-Modell ist eine eindimensionale Spin-Quanten-Kette mit N Plätzen, wobei jeder Platz eine lokale Spin $\frac{1}{2}$-Variable besitzt:

$$\vec{s}_n = \frac{1}{2}\vec{\sigma}_n \tag{2.1.1}$$

mit $\vec{\sigma}_n = (\sigma_n^1, \sigma_n^2, \sigma_n^3)$ und

$$\sigma_n^j := \overbrace{I \otimes \ldots \otimes I \otimes \underbrace{\sigma^j}_{n-te\ \ Stelle} \otimes I \otimes \ldots \otimes I}^{insgesamt\ \ N\ \ Faktoren}. \tag{2.1.2}$$

Hierbei ist $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Einheit und die σ^j sind die üblichen Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.1.3}$$

welche im Raum $h_n = \mathbf{C}^2$ wirken, so daß der gesamte Hilbert-Raum der Kette $H_N = \prod_{n=1}^N \otimes h_n$ ist. Die Pauli-Matrizen erfüllen die bekannten Kommutator-Relationen $[\sigma_p,\sigma_q] = 2i\epsilon_{pqr}\sigma_r$, wobei ϵ_{pqr} der vollständig antisymmetrische Tensor mit $\epsilon_{123} = 1$ ist. Die σ_n^j an verschiedenen Plätzen kommutieren, weshalb diese die Kommutator-Relationen $[\sigma_m^p,\sigma_n^q] = 2i\sum_{r=1}^3 \epsilon_{pqr}\delta_{mn}\sigma_n^r$ besitzen.

Der Hamilton-Operator dieser Kette lautet dann

$$H = \frac{J}{4}\sum_{n=1}^N \{\vec{\sigma}_n\vec{\sigma}_{n+1} - I_N\} \tag{2.1.4}$$

mit

$$\vec{\sigma}_n\vec{\sigma}_{n+1} := \sigma_n^1\sigma_{n+1}^1 + \sigma_n^2\sigma_{n+1}^2 + \sigma_n^3\sigma_{n+1}^3, \quad I_N = \overbrace{I \otimes \ldots \otimes I}^{N\ \ Faktoren} \tag{2.1.5}$$

und periodischen Randbedingungen, d.h. $\vec{s}_{n+N} = \vec{s}_n$.

Im Fall $J \leq 0$ ist der Hamilton-Operator ein positiver Operator und man erhält den Fall des Ferromagnetismus. Für $J \geq 0$ ist H entsprechend ein negativer Operator und es ergibt sich der Fall des Antiferromagnetismus.

2.2 Der Algebraische Bethe-Ansatz

Um das XXX-Modell mit Hilfe des Algebraischen Bethe-Ansatzes zu lösen, definiert man zuerst folgenden sogenannten Lax-Operator:

$$L_n(\lambda) := \frac{1}{2}\left[\frac{\eta - 2\lambda}{\eta} I \otimes I_N + \vec{\sigma} \otimes \vec{\sigma}_n\right] \tag{2.2.1}$$

mit η =beliebige Konstante und $\vec{\sigma} \otimes \vec{\sigma}_n := \sigma^1 \otimes \sigma_n^1 + \sigma^2 \otimes \sigma_n^2 + \sigma^3 \otimes \sigma_n^3$. Der Lax-Operator ist eine 2×2 Matrix über dem Ring der Operatoren R_N in H_N:

$$L_n(\lambda) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\eta-2\lambda}{\eta} I_N + \sigma_n^3 & \sigma_n^- \\ \sigma_n^+ & \frac{\eta-2\lambda}{\eta} I_N - \sigma_n^3 \end{pmatrix} \tag{2.2.2}$$

mit $\sigma_n^\pm = \sigma_n^1 \pm \sigma_n^2$. Der Lax-Operator wirkt im Raum $\mathbf{C}^2 \otimes H_N =: h_0 \otimes H_N$.

Nun führt man die sogenannte Monodromie-Matrix ein:

$$T(\lambda) = L_N(\lambda) \cdots L_1(\lambda) \tag{2.2.3}$$

Das Produkt ist zu verstehen als Produkt von 2×2 Matrizen über R_N, d.h. $T(\lambda)$ ist auch eine 2×2 Matrix über R_N:

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \tag{2.2.4}$$

Bildet man die Spur von $T(\lambda)$ im Raum h_0, d.h. die Spur in der Algebra von Matrizen über R_N, so erhält man die Transfer-Matrix:

$$F(\lambda) = tr_0 T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda) \tag{2.2.5}$$

Betrachtet man zwei verschiedene Parameter λ und μ, dann werden die zugehörigen Transfer-Matrizen kommutieren, wenn es eine nichtsinguläre 4×4 Matrix $R(\lambda - \mu)$ gibt, so daß

$$R(\lambda - \mu)\,(T(\lambda) \otimes T(\mu)) = (T(\mu) \otimes T(\lambda))\,R(\lambda - \mu). \tag{2.2.6}$$

In diesem Fall hat man nämlich

$$T(\lambda) \otimes T(\mu) = R^{-1}(\lambda - \mu)\,(T(\mu) \otimes T(\lambda))\,R(\lambda - \mu). \tag{2.2.7}$$

und somit ist

$$
\begin{aligned}
F(\lambda)F(\mu) &= tr_0 T(\lambda) tr_0 T(\mu) = tr_0\left(T(\lambda)\otimes T(\mu)\right) \\
&= tr_0\left(R^{-1}(\lambda-\mu)\left(T(\mu)\otimes T(\lambda)\right)R(\lambda-\mu)\right) \\
&= tr_0\left(T(\mu)\otimes T(\lambda)\right) = tr_0 T(\mu) tr_0 T(\lambda) = F(\mu)F(\lambda) \qquad (2.2.8)
\end{aligned}
$$

(2.2.6) ist erfüllt, wenn die gleiche Relation für die Lax-Operatoren gilt:

$$
R(\lambda-\mu)\left(L_n(\lambda)\otimes L_n(\mu)\right) = \left(L_n(\mu)\otimes L_n(\lambda)\right)R(\lambda-\mu). \qquad (2.2.9)
$$

Die Tensorprodukte hier und in (2.2.6) sind zu verstehen als Tensorprodukte in der Matrix-Algebra über R_N.

Beweis: Für Matrizen A_n und B_n über einem kommutativen Ring gilt die Beziehung

$$
\prod_{n=1}^{N}(A_n\otimes B_n) = \prod_{n=1}^{N} A_n \otimes \prod_{n=1}^{N} B_n, \qquad (2.2.10)
$$

was in unserem Fall erfüllt ist, da die Matrix-Elemente von $L_n(\lambda)$ für verschiedene n miteinander kommutieren. Somit hat man:

$$
\begin{aligned}
R(\lambda-\mu)\left(T(\lambda)\otimes T(\mu)\right) &= R(\lambda-\mu)\Big([L_N(\lambda)\cdots L_1(\lambda)]\otimes[L_N(\mu)\cdots L_1(\mu)]\Big) \\
&= R(\lambda-\mu)[L_N(\lambda)\otimes L_N(\mu)][L_{N-1}(\lambda)\otimes L_{N-1}(\mu)]\cdots[L_1(\lambda)\otimes L_1(\mu)] \\
&= [L_N(\mu)\otimes L_N(\lambda)]R(\lambda-\mu)[L_{N-1}(\lambda)\otimes L_{N-1}(\mu)]\cdots[L_1(\lambda)\otimes L_1(\mu)] = \ldots \\
&= [L_N(\mu)\otimes L_N(\lambda)][L_{N-1}(\mu)\otimes L_{N-1}(\lambda)]\cdots[L_1(\mu)\otimes L_1(\lambda)]R(\lambda-\mu) \\
&= \Big([(L_N(\mu)\cdots L_1(\lambda)]\otimes[L_N(\mu)\cdots L_1(\lambda)]\Big)R(\lambda-\mu) \\
&= \left(T(\mu)\otimes T(\lambda)\right)R(\lambda-\mu)
\end{aligned}
$$

Eine Matrix $R(\lambda-\mu)$, die (2.2.9) erfüllt, ist [7]:

$$
R(\lambda-\mu) = \begin{pmatrix} f(\mu,\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(\mu,\lambda) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & g(\mu,\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(\mu,\lambda) \end{pmatrix} \qquad (2.2.11)
$$

mit

$$
f(\mu,\lambda) = 1 + \frac{\eta}{\mu-\lambda}\,, \text{ und } \qquad g(\mu,\lambda) = \frac{\eta}{\mu-\lambda}. \qquad (2.2.12)
$$

Aus (2.2.6) kann man nun die Kommutator-Relationen für die Matrix-Elemente der Monodromie-Matrix berechnen. Die für uns wichtigen lauten:

$$[B(\lambda),B(\mu)] = 0; \qquad [C(\lambda),C(\mu)] = 0; \tag{2.2.13}$$

$$[A(\lambda),A(\mu)] = 0; \qquad [D(\lambda),D(\mu)] = 0; \tag{2.2.14}$$

$$A(\mu)B(\lambda) = f(\mu,\lambda)B(\lambda)A(\mu) + g(\lambda,\mu)B(\mu)A(\lambda); \tag{2.2.15}$$

$$D(\mu)B(\lambda) = f(\lambda,\mu)B(\lambda)D(\mu) + g(\mu,\lambda)B(\mu)D(\lambda). \tag{2.2.16}$$

$$[C(\lambda), B(\mu)] = g(\lambda,\mu)\{A(\lambda)D(\mu) - A(\mu)D(\lambda)\} \tag{2.2.17}$$

Definiert man das sogenannte Vakuum als den Vektor

$$|0\rangle = \prod_{n=1}^{N} \otimes |0\rangle_n \ , \text{ mit } |0\rangle_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2.18}$$

so gilt:

$$L_n(\lambda)|0\rangle = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda)|0\rangle & * \\ 0 & \delta(\lambda)|0\rangle \end{pmatrix} \tag{2.2.19}$$

mit $\alpha(\lambda) = \frac{\eta-2\lambda}{2\eta} + \frac{1}{2}$ und $\delta(\lambda) = \frac{\eta-2\lambda}{2\eta} - \frac{1}{2}$.

Für die Monodromie-Matrix ergibt sich wegen der Multiplikationsregel für Dreiecksmatrizen analog:

$$T(\lambda)|0\rangle = \begin{pmatrix} A(\lambda)|0\rangle & B(\lambda)|0\rangle \\ C(\lambda)|0\rangle & D(\lambda)|0\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^N(\lambda)|0\rangle & * \\ 0 & \delta^N(\lambda)|0\rangle \end{pmatrix} \tag{2.2.20}$$

Somit hat man folgende Eigenwertgleichungen:

$$A(\lambda)|0\rangle = a(\lambda)|0\rangle \text{ und } D(\lambda)|0\rangle = d(\lambda)|0\rangle \tag{2.2.21}$$

mit $a(\lambda) = \alpha^N(\lambda) = \left(\frac{\eta-\lambda}{\eta}\right)^N$ und $d(\lambda) = \delta^N(\lambda) = \left(-\frac{\lambda}{\eta}\right)^N$.

Der Operator $C(\lambda)$ vernichtet den Vakuumzustand:

$$C(\lambda)|0\rangle = 0 \tag{2.2.22}$$

Nun soll ein Eigenzustand zur Transfer-Matrix (2.2.5) konstruiert werden. Hierzu berechnet man zuerst die Wirkung von $A(\lambda)$ auf einen Vektor

$$|\Phi(\{\lambda_j\})\rangle = \prod_{j=1}^{l} B(\lambda_j)|0\rangle. \tag{2.2.23}$$

Kommutiert man mit Hilfe des ersten Terms in der Kommutator-Relation (2.2.15) den Operator $A(\lambda)$ an den $B(\lambda)'s$ vorbei und läßt ihn anschließend auf das Vakuum wirken, so erhält man:

$$A(\lambda)\prod_{j=1}^{l} B(\lambda_j)|0\rangle = a(\lambda)\prod_{j=1}^{l} f(\lambda,\lambda_j)\prod_{j=1}^{l} B(\lambda_j)|0\rangle + \text{andere Terme} \tag{2.2.24}$$

Aus (2.2.15) folgt, daß man insgesamt 2^l Terme erhält. Die 2^l-1 anderen Terme können nach folgender Überlegung zu l Termen zusammengefaßt werden:
Man wendet auf $|\Phi(\{\lambda_j\})\rangle$ einmal die Kommutator-Relation (2.2.15) an:

$$\begin{aligned} A(\lambda)B(\lambda_1)\cdots B(\lambda_l)|0\rangle &= f(\lambda,\lambda_1)B(\lambda_1)A(\lambda)B(\lambda_2)\cdots B(\lambda_l)|0\rangle \\ &+ g(\lambda_1,\lambda)B(\lambda)A(\lambda_1)B(\lambda_2)\cdots B(\lambda_l)|0\rangle \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

Benutzt man für den zweiten Term in (2.2.25) nun (2.2.15) bis das $A(\lambda)$ vor dem Vakuum steht, so hat man

$$g(\lambda_1,\lambda)B(\lambda)A(\lambda_1)B(\lambda_2)\cdots B(\lambda_l)|0\rangle = a(\lambda_1)g(\lambda_1,\lambda)\prod_{j=2}^{l} f(\lambda_1,\lambda_j)B(\lambda)B(\lambda_2)\cdots B(\lambda_l)|0\rangle \tag{2.2.26}$$

+ andere Terme, in denen aber wegen des zweiten Termes in (2.2.15) $B(\lambda_1)$ wieder auftritt, und in denen somit Wellenfunktionen der Form

$$B(\lambda_1)\cdots B(\lambda_{k-1})B(\lambda)B(\lambda_{k+1})\cdots B(\lambda_l) =: |\Phi_k\rangle \tag{2.2.27}$$

mit $k \neq 1$ vorkommen. Mit (2.2.26) hat man einen der l unbekannten Terme berechnet. Die anderen $l-1$ Terme müssen von der gleichen Form wie (2.2.26), d.h. gleich

$$a(\lambda_k)g(\lambda_k,\lambda)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{l} f(\lambda_k,\lambda_j)|\Phi_k\rangle \tag{2.2.28}$$

sein, da man wegen (2.2.13) statt mit dem Term $A(\lambda)B(\lambda_1)\cdots B(\lambda_l)|0\rangle$ auch mit dem Term $A(\lambda)B(\lambda_k)B(\lambda_1)\cdots B(\lambda_{k-1})B(\lambda_{k+1})\cdots B(\lambda_l)|0\rangle$ hätte beginnen können und so mit den selben Überlegungen, wie unter (2.2.26) angestellt, zu einem Term wie (2.2.28) geführt worden wäre. Damit hat man also alle $l+1$ Terme, die aus $A(\lambda)B(\lambda_1)\cdots B(\lambda_l)|0\rangle$ resultieren:

$$\begin{aligned} A(\lambda)\prod_{j=1}^{l} B(\lambda_j)|0\rangle &= a(\lambda)\prod_{j=1}^{l} f(\lambda,\lambda_j)\prod_{j=1}^{l} B(\lambda_j)|0\rangle \\ &+ \sum_{k=1}^{l} a(\lambda_k)g(\lambda_k,\lambda)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{l} f(\lambda_k,\lambda_j)|\Phi_k\rangle \end{aligned} \tag{2.2.29}$$

Mit (2.2.16) und den gleichen Schritten wie zuvor, bekommt man entsprechend:

$$\begin{aligned} D(\lambda)\prod_{j=1}^{l} B(\lambda_j)|0\rangle &= d(\lambda)\prod_{j=1}^{l} f(\lambda_j,\lambda)\prod_{j=1}^{l} B(\lambda_j)|0\rangle \\ &+ \sum_{k=1}^{l} d(\lambda_k) g(\lambda,\lambda_k)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{l} f(\lambda_j,\lambda_k)|\Phi_k\rangle \end{aligned} \tag{2.2.30}$$

Man sieht, daß jeweils nur der erste Term in (2.2.29) und (2.2.30) zu einer Eigenwertgleichung führt und die anderen Terme unerwünscht sind. Diese unerwünschten Terme fallen aber weg, wenn die $\lambda_j' s$ die Gleichungen $(k = 1, ..., l)$

$$\tilde{\Lambda}_k(\lambda_1, ...,\lambda_l) = a(\lambda_k)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{l} f(\lambda_k,\lambda_j) - d(\lambda_k)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{l} f(\lambda_j,\lambda_k) = 0 \tag{2.2.31}$$

erfüllen. Dies sind die sogenannten Bethe-Ansatz-Gleichungen. In unserem Fall lauten sie explizit:

$$\tilde{\Lambda}_k(\lambda_1, ...,\lambda_l) = \left(\frac{\eta-\lambda_k}{\eta}\right)^N \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{l} \frac{\lambda_j-\lambda_k-\eta}{\lambda_j-\lambda_k} - \left(-\frac{\lambda_k}{\eta}\right)^N \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{l} \frac{\lambda_j-\lambda_k+\eta}{\lambda_j-\lambda_k} = 0 \tag{2.2.32}$$

Sind die $\lambda_j' s$ Lösungen dieser Gleichungen, d.h. sogenannte Bethe-Parameter, so erhält man die Eigenwertgleichung

$$F(\lambda)|\Phi(\{\lambda_j\})\rangle = \Lambda(\lambda;\lambda_1, ...,\lambda_l)|\Phi(\{\lambda_j\})\rangle \tag{2.2.33}$$

mit

$$\begin{aligned} \Lambda(\lambda;\lambda_1, ...,\lambda_l) &= a(\lambda)\prod_{j=1}^{l} f(\lambda,\lambda_j) + d(\lambda)\prod_{j=1}^{l} f(\lambda_j,\lambda) \\ &= \left(\frac{\eta-\lambda}{\eta}\right)^N \prod_{j=1}^{l} \frac{\lambda_j-\lambda-\eta}{\lambda_j-\lambda} + \left(-\frac{\lambda}{\eta}\right)^N \prod_{j=1}^{l} \frac{\lambda_j-\lambda+\eta}{\lambda_j-\lambda}. \end{aligned} \tag{2.2.34}$$

Die Bethe-Wellenfunktionen, d.h. die Wellenfunktionen (2.2.23) mit den entsprechenden Bethe-Parametern, sind nun auch Eigenfunktionen zum XXX-Hamilton-Operator. Dies ergibt sich aus folgendem:

Der Lax-Operator an der Stelle $\lambda = 0$ ist ein Permutations-Operator

$$L(\lambda = 0) = \frac{1}{2}\left[I \otimes I_N + \vec{\sigma} \otimes \vec{\sigma}_n\right] =: P_{N+1}^{n,0}, \tag{2.2.35}$$

d.h.

$$P_{N+1}^{n,0}\Big(\underbrace{e}_{\text{0-te Stelle}}\otimes I\otimes\cdots\otimes\underbrace{f}_{\text{n-te Stelle}}\otimes I\otimes\cdots\otimes I\Big)=\underbrace{f}_{\text{0-te Stelle}}\otimes I\otimes\cdots\otimes\underbrace{e}_{\text{n-te Stelle}}\otimes I\otimes\cdots\otimes, \qquad (2.2.36)$$

für alle e und f in $\mathbf{C}^2$. Der unter Index $N+1$ soll darauf hinweisen, daß der Operator im Raum $h_0\otimes H_N$ wirkt.
Für die Transfer-Matrix an der Stelle $\lambda=0$ folgt daraus:

$$\begin{aligned} F(\lambda=0) &= tr_0T(\lambda=0)=tr_0[L_N(\lambda=0)\cdots L_1(\lambda=0)]=tr_0[P_{N+1}^{N,0}\cdots P_{N+1}^{2,0}P_{N+1}^{1,0}] \\ &= tr_0[P_{N+1}^{N,0}\cdots P_{N+1}^{3,0}P_{N+1}^{2,1}P_{N+1}^{2,0}]=tr_0[P_{N+1}^{N,0}\cdots P_{N+1}^{1,2}P_{N+1}^{3,0}P_{N+1}^{2,0}] \\ &= \ldots=tr_0[P_{N+1}^{1,2}\cdots P_{N+1}^{N-1,N}P_{N+1}^{N,0}]=tr_0[(I\otimes P_N^{1,2})\cdots(I\otimes P_N^{N-1,N})P_{N+1}^{N,0}] \\ &= tr_0[I\otimes(P_N^{1,2}\cdots P_N^{N-1,N})P_{N+1}^{N,0}]=P_N^{1,2}\cdots P_N^{N-1,N}tr_0P_{N+1}^{N,0} \\ &= P_N^{1,2}\cdots P_N^{N-1,N}=:U\ ,\ \text{da } tr_0P_{N+1}^{N,0}=I_N \end{aligned} \qquad (2.2.37)$$

Hierbei wurde benutzt, daß für Permutationsoperatoren gilt:

$P^{n,0}P^{m,0}=P^{m,n}P^{n,0}$, $\quad P^{n,m}=P^{m,n}$, und $P^{n,m}P^{l,o}=P^{l,o}P^{n,m}$, für $m\neq o,l$ und $n\neq o,l$

Außerdem ist

$$P_{N+1}^{n,m}=I\otimes P_N^{n,m}\ ,\ \text{für } n\neq 0 \text{ und } m\neq 0,$$

wobei $P_N^{n,m}$ ein Permutationsoperator im Raum H_N ist. Aus (2.2.37) wird deutlich, daß U ein Shift-Operator ist, d.h. man hat für jeden lokalen Operator x_n

$$Ux_nU=x_{n+1}. \qquad (2.2.38)$$

Man definiert den Impuls-Operator P als $U=\exp(iP)$.
Weiterhin ist

$$\frac{d}{d\lambda}L_n(\lambda)|_{\lambda=0}=-\frac{1}{\eta}I\otimes I_N. \qquad (2.2.39)$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}(lnF(\lambda))|_{\lambda=0} &= \frac{d}{d\lambda}F(\lambda)|_{\lambda=0}F^{-1}(\lambda=0) \\ &= -\frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^{N}tr_0[P_{N+1}^{N,0}\cdots P_{N+1}^{j-1,0}P_{N+1}^{j+1,0}\cdots P_{N+1}^{1,0}]F^{-1}(\lambda=0) \\ &= -\frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^{N}\Big\{P_N^{1,2}\cdots P_N^{j-2,j-1}P_N^{j-1,j+1}P_N^{j+1,j+2}\cdots P_N^{N-1,N}\ P_N^{N-1,N}\cdots P_N^{1,2}\Big\} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^{N}\left\{P_N^{1,2}\cdots P_N^{j-2,j-1}P_N^{j,j+1}P_N^{j-1,j}P_N^{j,j+1}P_N^{j+1,j+2}\cdots P_N^{N-1,N}\,P_N^{N-1,N}\cdots P_N^{1,2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^{N}\left\{P_N^{1,2}\cdots P_N^{j-2,j-1}P_N^{j,j+1}P_N^{j-2,j-1}\cdots P_N^{1,2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{\eta}\sum_{j=1}^{N}P_N^{j,j+1} = -\frac{1}{2\eta}\sum_{j=1}^{N}[I_N + \vec{\sigma_n}\vec{\sigma}_{n+1}]. \qquad (2.2.40)$$

Hieraus entnimmt man, daß man den XXX-Hamilton-Operator schreiben kann als

$$H = \frac{J}{4}\sum_{n=1}^{N}\{\vec{\sigma}_n\vec{\sigma}_{n+1} - I_N\} = -\frac{J\eta}{2}\frac{d}{d\lambda}(lnF(\lambda))|_{\lambda=0} - \frac{NJ}{2}I_N. \qquad (2.2.41)$$

Als Eigenwert des Shift-Operators erhält man $\Lambda(\lambda = 0) = \prod_{j=1}^{l}\frac{\lambda_j-\eta}{\lambda_j}$, d.h. das Spektrum ist multiplikativ. Für den Impuls bekommt man als Eigenwert

$$P_N = \frac{1}{i}\sum_{j=1}^{l} ln\left[\frac{\lambda_j-\eta}{\lambda_j}\right] =: \sum_{j=1}^{l} p_j. \qquad (2.2.42)$$

Hierbei kann man die p_j als Impulse eines Pseudo-Teilchens interpretieren.

Da nach (2.2.8) $[F(\lambda),F(\mu)] = 0$ und somit $[lnF(\lambda),F(\mu)] = 0$, folgt durch Differentiation $[H, F(\mu)] = 0$, d.h. die Bethe-Wellenfunktionen sind auch Eigenfunktionen zum XXX-Hamilton-Operator. Dabei ist $[F(\lambda),F(\mu)] = 0$ gleichbedeutend mit der Tatsache, daß die Bethe-Wellenfunktionen selbst nicht von λ abhängen. Daher hat man:

$$\begin{aligned} H|\Phi(\{\lambda_j\})\rangle &= [-\frac{J\eta}{2}\frac{d}{d\lambda}(lnF(\lambda))|_{\lambda=0} - \frac{NJ}{2}I_N]|\Phi(\{\lambda_j\})\rangle \\ &= -\frac{J\eta}{2}\frac{d}{d\lambda}[lnF(\lambda))|\Phi(\{\lambda_j\})\rangle]|_{\lambda=0} - \frac{NJ}{2}I_N|\Phi(\{\lambda_j\})\rangle \\ &= [-\frac{J\eta}{2}\frac{d}{d\lambda}(ln\Lambda(\lambda;\lambda_1,...,\lambda_l))|_{\lambda=0} - \frac{NJ}{2}]|\Phi(\{\lambda_j\})\rangle \end{aligned} \qquad (2.2.43)$$

Hieraus errechnet man den Energieeigenwert E nach

$$E = -\frac{J\eta}{2}\frac{d}{d\lambda}(ln\Lambda(\lambda;\lambda_1,...,\lambda_l))|_{\lambda=0} - \frac{NJ}{2}I_N. \qquad (2.2.44)$$

Es gilt:

$$\frac{d}{d\lambda}\prod_{j=1}^{l}\frac{\lambda_j-\lambda-\eta}{\lambda_j-\lambda}\Big|_{\lambda=0} = -\prod_{j=1}^{l}\frac{\lambda_j-\eta}{\lambda_j}\sum_{k=1}^{l}\frac{-\eta}{\lambda_k^2} \qquad (2.2.45)$$

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\eta-\lambda}{\eta}\Big|_{\lambda=0} = -\frac{N}{\eta} \qquad (2.2.46)$$

Daraus folgt:

$$\frac{d}{d\lambda}(ln\Lambda(\lambda;\lambda_1,...,\lambda_l))|_{\lambda=0} = -\sum_{j=1}^{l}\frac{\eta}{\lambda_j(\lambda_j-\eta)} - \frac{N}{\eta} \tag{2.2.47}$$

Hiermit erhält man für den Energieeigenwert:

$$E = \frac{J}{2}\sum_{j=1}^{l}\frac{\eta^2}{\lambda_j(\lambda_j-\eta)} \tag{2.2.48}$$

Im ferromagnetischen Fall $J \leq 0$ ist H ein positiver Operator, d.h. alle Energien sind positiv. Der physikalische Grundzustand ist daher der Vakuumzustand $|0\rangle$, da dessen Energie Null ist. Im antiferromagnetischen Fall $J \geq 0$ sind die Energien des Spektrums sämtlich negativ, weshalb $|0\rangle$ nicht der physikalische Grundzustand sein kann. Der Zustand mit der niedrigsten Energie ist dann der, für den $l = \frac{N}{2}$ ist (siehe unten).

2.3 Klassifikation der Bethe-Zustände bzgl. ihres Spins

Als nächstes soll jetzt auf den Spin der Bethe-Zustände und deren Vollständigkeit eingegangen werden. Hierzu definiert man die Gesamt-Spin-Operatoren:

$$S^1 = \sum_{i=1}^{N} s_i^1; \quad S^2 = \sum_{i=1}^{N} s_i^2; \quad S^3 = \sum_{i=1}^{N} s_i^3 \tag{2.3.1}$$

und die Auf- und Absteigeoperatoren

$$S^+ = \sum_{j=1}^{N}(s_j^1 + is_j^2); \quad S^- = \sum_{j=1}^{N}(s_j^1 - is_j^2). \tag{2.3.2}$$

Um die Wirkung der Spin-Operatoren auf die Wellenfunktionen und den Hamilton-Operator zu berechnen, definiert man den folgenden Kommutator im Hilbertraum der physikalischen Zustände H_N [8]:

$$[S^a, T(\lambda)]_N := \begin{pmatrix} [S^a,A(\lambda)] & [S^a,B(\lambda)] \\ [S^a,C(\lambda)] & [S^a,D(\lambda)] \end{pmatrix} \tag{2.3.3}$$

Betrachtet man nun diesen Kommutator von S^a und $L_n(\lambda)$, so ergibt sich:

$$[S^a, L_n(\lambda)]_N \quad = \quad [s_n^a, L_n(\lambda)]_N = \frac{1}{2}[s_n^a, \sum_{b=1}^{3}\sigma^b \otimes s_n^b]_N = \frac{1}{2}\sum_{b=1}^{3}\sigma^b \otimes [s_n^a, s_n^b]_N$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{i}{2}\sum_{\substack{b=1\\c=1}}^{3}\sigma^b\otimes\epsilon_{abc}s_n^c = -\frac{i}{2}\sum_{\substack{b=1\\c=1}}^{3}\epsilon_{acb}\sigma^b\otimes s_n^c = -\frac{1}{4}\sum_{c=1}^{3}[\sigma^a,\sigma^c]_0\otimes s_n^c \\
&= -\frac{1}{4}[\sigma^a,\sum_{c=1}^{3}\sigma^c\otimes s_n^c]_0 = -\frac{1}{2}[\sigma^a, L_n(\lambda)]_0
\end{aligned}
\tag{2.3.4}
$$

Hierbei bezeichnet $[\,,\,]_0$ den Kommutator im Raum h_0. Man erkennt also, daß man den obigen Kommutator im Raum H_N durch einen Kommutator im Raum h_0 berechnen kann.
Damit erhält man für den Kommutator mit der Monodromie-Matrix:

$$
\begin{aligned}
[S^a, T(\lambda)]_N &= [S^a, L_N(\lambda)\cdots L_1(\lambda)]_N = \sum_{n=1}^{N} L_N(\lambda)\cdots[s_n^a, L_n(\lambda)]_N\cdots L_1(\lambda) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} L_N(\lambda)\cdots[\sigma^a, L_n(\lambda)]_0\cdots L_1(\lambda) = -\frac{1}{2}[\sigma^a, T(\lambda)]_0
\end{aligned}
\tag{2.3.5}
$$

Die letzte Zeile folgt dabei aus der Berechnung des Kommutators

$$
\begin{aligned}
[\sigma^a, T(\lambda)]_0 &= \sigma^a L_N(\lambda)\cdots L_1(\lambda) - L_N(\lambda)\cdots L_1(\lambda)\sigma^a \\
&= L_N(\lambda)\sigma^a L_{N-1}(\lambda)\cdots L_1(\lambda) + [\sigma^a, L_N(\lambda)]_0 L_{N-1}(\lambda)\cdots L_1(\lambda) - L_N(\lambda)\cdots L_1(\lambda)\sigma^a \\
&= L_N(\lambda)L_{N-1}(\lambda)\sigma^a L_{N-2}(\lambda)\cdots L_1(\lambda) + L_N(\lambda)[\sigma^a, L_{N-1}(\lambda)]_0 L_{N-2}(\lambda)\cdots L_1(\lambda) \\
&\quad +[\sigma^a, L_N(\lambda)]_0 L_{N-1}(\lambda)\cdots L_1(\lambda) - L_N(\lambda)\cdots L_1(\lambda)\sigma^a = \ldots \\
&= L_N(\lambda)\cdots L_1(\lambda)\sigma^a + \sum_{n=1}^{N} L_N(\lambda)\cdots[\sigma^a, L_n(\lambda)]_0\cdots L_1(\lambda) - L_N(\lambda)\cdots L_1(\lambda)\sigma^a \\
&= \sum_{n=1}^{N} L_N(\lambda)\cdots[\sigma^a, L_n(\lambda)]_0\cdots L_1(\lambda).
\end{aligned}
$$

Hiermit erhält man:

$$
\begin{aligned}
[S^3, T(\lambda)]_N &= -\frac{1}{2}[\sigma^3, T(\lambda)]_0 \\
&= -\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A(\lambda) & B(\lambda)\\ C(\lambda) & D(\lambda)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}A(\lambda) & B(\lambda)\\ C(\lambda) & D(\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\} \\
&= \begin{pmatrix}0 & -B(\lambda)\\ C(\lambda) & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.3.6}
$$

$$
[S^1, T(\lambda)]_N = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}C(\lambda)-B(\lambda) & D(\lambda)-A(\lambda)\\ A(\lambda)-D(\lambda) & B(\lambda)-C(\lambda)\end{pmatrix}
\tag{2.3.7}
$$

$$
[S^2, T(\lambda)]_N = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix}-[C(\lambda)+B(\lambda)] & A(\lambda)-D(\lambda)\\ A(\lambda)-D(\lambda) & B(\lambda)+C(\lambda)\end{pmatrix}
\tag{2.3.8}
$$

Man sieht, daß $[S^a, F(\lambda)] = 0$ und damit auch $[S^a, H] = 0$, d.h. der Hamilton-Operator ist invariant unter SU(2). Es gibt daher eine Entartung der Zustände wegen der Drehimpuls-Erhaltung. Nachfolgend soll deshalb gezeigt werden, wie man die noch fehlenden Zustände erzeugen kann.

$B(\lambda)$ ist wegen $[S^3, B(\lambda)] = -B(\lambda)$ ein Absteigeoperator bzgl. S^3 und $C(\lambda)$ ein Aufsteigeoperator bzgl. S^3, da $[S^3, C(\lambda)] = C(\lambda)$. Daher hat man wegen $S^3|0\rangle = \frac{N}{2}$ als Eigenwert der dritten Komponente des Spins:

$$S^3|\Phi(\{\lambda_j\})\rangle = (\frac{N}{2} - l)|\Phi(\{\lambda_j\})\rangle \tag{2.3.9}$$

Nun soll die Wirkung von S^+ auf einen Bethevektor $|\Phi(\{\lambda_j\})\rangle$ berechnet werden. Es gilt:

$$[S^+, B(\lambda)] = [S^1 + iS^2, B(\lambda)] = A(\lambda) - D(\lambda) \tag{2.3.10}$$

Mit $S^+|0\rangle = 0$ ergibt sich hieraus:

$$\begin{aligned} S^+|\Phi(\{\lambda_j\})\rangle &= S^+B(\lambda_1)\cdots B(\lambda_l)|0\rangle \\ &= B(\lambda_1)S^+B(\lambda_2)\cdots B(\lambda_l)|0\rangle + [A(\lambda_1) - D(\lambda_1)]B(\lambda_2)\cdots B(\lambda_l)|0\rangle = \ldots \\ &= \sum_{j=1}^{l} B(\lambda_1)\cdots B(\lambda_{j-1})[A(\lambda_j) - D(\lambda_j)]B(\lambda_{j+1})\cdots B(\lambda_l)|0\rangle \\ &\quad + B(\lambda_1)\cdots B(\lambda_l)S^+|0\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{l} B(\lambda_1)\cdots B(\lambda_{j-1})[A(\lambda_j) - D(\lambda_j)]B(\lambda_{j+1})\cdots B(\lambda_l)|0\rangle \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Man erkennt, daß beim Durchkommutieren der $A(\lambda)$'s und $D(\lambda)$'s nur Vektoren auftreten, in denen jeweils ein $B(\lambda_j)$ fehlt:

$$S^+|\Phi(\{\lambda_j\})\rangle = \sum_{k=1}^{l} Q_k(\{\lambda_j\})B(\lambda_1)\cdots B(\lambda_{k-1})B(\lambda_{k+1})\cdots B(\lambda_l)|0\rangle \tag{2.3.12}$$

Um die unbekannten $Q_k(\{\lambda_j\})$'s zu erhalten, betrachtet man zuerst den Term $[A(\lambda_1) - D(\lambda_1)]B(\lambda_2)\cdots B(\lambda_l)|0\rangle$. Einen Term, in dem $B(\lambda_1)$ fehlt, kann man nur erhalten, wenn man die jeweils ersten Terme der Kommutator-Relationen (2.2.15) und (2.2.16) benutzt. Somit ergibt sich:

$$[A(\lambda_1) - D(\lambda_1)]B(\lambda_2)\cdots B(\lambda_l)|0\rangle = [a(\lambda_1)\prod_{j=2}^{l} f(\lambda_1, \lambda_j) - d(\lambda_1)\prod_{j=2}^{l} f(\lambda_j, \lambda_1)]B(\lambda_2)\cdots B(\lambda_l)|0\rangle \tag{2.3.13}$$

+ Terme, die wegen der zweiten Terme in (2.2.15) und (2.2.16) $B(\lambda_1)$ wieder enthalten. Weitere Terme, die $B(\lambda_1)$ nicht enthalten, kann es nicht geben, da in dem Ausdruck

$$\sum_{j=1}^{l} B(\lambda_1)\cdots B(\lambda_{j-1})[A(\lambda_j) - D(\lambda_j)]B(\lambda_{j+1})\cdots B(\lambda_l)|0\rangle$$

bereits alle anderen $[A(\lambda_j) - D(\lambda_j)]$ hinter $B(\lambda_1)$ stehen und somit nicht mehr an diesem vorbeikommutiert werden müssen. Somit hat man

$$Q_1(\{\lambda_j\}) = a(\lambda_1)\prod_{k=2}^{l} f(\lambda_1, \lambda_k) - d(\lambda_1)\prod_{k=2}^{l} f(\lambda_k, \lambda_1). \tag{2.3.14}$$

Die anderen $Q_k(\{\lambda_j\})$'s müssen nun von der gleichen Form sein, d.h.

$$Q_k(\{\lambda_j\}) = a(\lambda_1)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{l} f(\lambda_1, \lambda_j) - d(\lambda_1)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{l} f(\lambda_j, \lambda_1), \tag{2.3.15}$$

da man wegen (2.2.13) auch mit dem Ausdruck

$$S^+B(\lambda_k)B(\lambda_1)\cdots B(\lambda_{k-1})B(\lambda_{k+1})\cdots B(\lambda_l)|0\rangle \tag{2.3.16}$$

hätte beginnen können und mit den gleichen Überlegungen zu solch einem Term gelangt wäre. Nach den Bethe-Ansatz-Gleichungen (2.2.31) ist (2.3.15) nun aber gleich Null, so daß man

$$S^+|\Phi(\{\lambda_j\})\rangle = 0 \tag{2.3.17}$$

erhält. Dies bedeutet, daß die Bethe-Zustände Höchstgewichtszustände bzgl. der Wirkung der SU(2) sind. Aus (2.3.9) ergibt sich hierdurch eine Beschränkung für die Anzahl l an $B(\lambda_j)$'s:

$$0 \leq l \leq \frac{N}{2} \tag{2.3.18}$$

Die restlichen Spin-Eigenfunktionen bekommt man durch sukzessive Anwendung von S^- auf diese Höchstgewichtszustände. Da aus (2.3.7) und (2.3.8) $[S^-, F(\lambda)] = 0$ und somit $[S^-, H] = 0$ folgt, sind dies auch Eigenfunktionen zu H, und daher ist jeder Energieeigenwert durch die SU(2)-Invarianz $(N - 2l + 1)$-fach entartet. Außerdem wird deutlich, daß während S^- nur innerhalb eines Spin-Multipletts operiert, man durch Anwendung von $B(\lambda)$ von einem Höchstgewichtszustand eines Multipletts zum Höchstgewichtszustand des im Sinne des Eigenwerts von $\vec{S}^2$ darunterliegenden Multipletts springt.

Man kann zeigen, daß das so erhaltene System von Eigenfunktionen in H_N vollständig ist [10], [11].

2.4 Lösungen der Bethe-Ansatz-Gleichungen

Um die Bethe-Ansatz-Gleichungen zu lösen, macht man folgende Ersetzungen:

$$\eta = i \text{ , und } \lambda_j \to \lambda_j + \frac{i}{2} \tag{2.4.1}$$

Dann gehen die Bethe-Ansatz-Gleichungen über in

$$\left(\frac{\lambda_j - \frac{i}{2}}{\lambda_j + \frac{i}{2}}\right)^N = e^{ip_j} = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{l} \left(\frac{\lambda_j - \lambda_k - i}{\lambda_j - \lambda_k + i}\right), \qquad j = 1, ..., l. \tag{2.4.2}$$

Und für den Energieeigenwert erhält man:

$$E = -\frac{J}{2} \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\lambda_k^2 + \frac{1}{4}} \tag{2.4.3}$$

Im Fall $l = 1$ hat man nur die Gleichung

$$\left(\frac{\lambda_k - \frac{i}{2}}{\lambda_k + \frac{i}{2}}\right)^N = e^{ip_k N} = 1. \tag{2.4.4}$$

Für den Impuls p_k erhält man somit als Lösung

$$p_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 0, ..., N-1 \tag{2.4.5}$$

und daraus als Lösung für λ_k

$$\lambda_k = \frac{1}{2} \cot\left(\frac{p_k}{2}\right). \tag{2.4.6}$$

Im Fall $N \to \infty$ wird der Impuls kontinuierlich und liegt im Intervall $[0, 2\pi]$. λ_j nimmt dann entsprechend Werte im Bereich $]-\infty, \infty[$ an.
Die Gleichungen im Fall $l \geq 2$ vereinfachen sich im Limes $N \to \infty$. Die Lösungen λ_j sind dann in den sogenannten Strings angeordnet [9]. Ein String der Länge $2M + 1$ und Zentrum x wird gebildet durch die komplexen Zahlen der Form

$$\lambda_m = x + im \text{ , mit } m = -M, -M+1, ..., M-1, M \quad , \tag{2.4.7}$$

wobei M ganzzahlig oder halbzahlig und x eine reelle Zahl ist. Die Zahl l der umgeklappten Spins kann dann geschrieben werden als

$$l = \sum_M (2M+1)\nu_M. \tag{2.4.8}$$

ν_M gibt dabei die Anzahl an Strings der Länge $2M+1$ an.
Dieses Gruppieren der Lösungen in Strings, die sogenannte String-Hypothese ist im Grenzprozeß $N \to \infty$, so daß l/N endlich bleibt, was für den antiferromagnetischen Fall relevant ist, nicht vollständig bewiesen.

2.5 Skalarprodukte

Um Skalarprodukte einzuführen, wird das zu $|0\rangle$ duale Vakuum $\langle 0|$ definiert durch

$$\langle 0|0\rangle = 1, \qquad \langle 0|\Phi(\{\lambda_j\})\rangle = 0. \tag{2.5.1}$$

Betrachtet wird nun die Wellenfunktion

$$|\Phi(\{\lambda_j\})\rangle = \prod_{j=1}^{l} B(\lambda_j)|0\rangle. \tag{2.5.2}$$

Mit $B^\dagger(\lambda) := [B(\lambda)]^\dagger$ und $[B^\dagger(\lambda), B^\dagger(\mu)] = 0$ wegen (2.2.13) ergibt sich für den hierzu dualen Vektor

$$\langle\Phi(\{\lambda_j\})| := (|\Phi(\{\lambda_j\})\rangle)^\dagger = \langle 0| \prod_{j=1}^{l} B^\dagger(\lambda_j). \tag{2.5.3}$$

Mit unseren Ersetzungen $\lambda_j \to \lambda_j + \frac{i}{2}$ und $\eta = i$ erhält man aus den Bethe-Ansatz-Gleichungen Lösungen, für die $\{\lambda_j\} = \{\lambda_j^*\}$ gilt, d.h. mit λ_j ist auch das hierzu konjugiert-komplexe λ_j^* Element der gleichen Lösungsmenge [12]. Damit bekommt man

$$\langle\Phi(\{\lambda_j\})| = \prod_{j=1}^{l} B^\dagger(\lambda_j^*). \tag{2.5.4}$$

Unser Lax-Operator besitzt folgende Eigenschaft:

$$\sigma^2 L_n(\lambda_j)\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\lambda_j + s_n^3 & s_n^- \\ s_n^+ & i\lambda_j - s_n^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\lambda_j - s_n^3 & -s_n^+ \\ -s_n^- & i\lambda_j + s_n^3 \end{pmatrix} \tag{2.5.5}$$

Außerdem gilt für den Lax-Operator

$$(L_n(\lambda_j))^* = L_n^*(\lambda_j) = \begin{pmatrix} -i\lambda_j^* + s_n^3 & s_n^+ \\ s_n^- & -i\lambda_j^* - s_n^3 \end{pmatrix}, \tag{2.5.6}$$

wobei der Stern Adjunktion von Operatoren in H_N (ohne Matrix-Transposition) und komplexes Konjugieren von c-Zahlen bezeichnet. Daher ist

$$L_n^*(\lambda_j^*) = \begin{pmatrix} -i\lambda_j + s_n^3 & s_n^+ \\ s_n^- & -i\lambda_j - s_n^3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} i\lambda_j - s_n^3 & -s_n^+ \\ -s_n^- & i\lambda_j + s_n^3 \end{pmatrix}. \tag{2.5.7}$$

Somit erhält man als Ergebnis

$$L_n^*(\lambda_j^*) = -\sigma^2 L_n(\lambda_j)\sigma^2. \tag{2.5.8}$$

Für die Monodromie-Matrix ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} T^*(\lambda_j^*) &= L_N^*(\lambda_j^*) \cdots L_1^*(\lambda_j^*) = (-1)\sigma^2 L_N(\lambda_j)\sigma^2 (-1)\sigma^2 L_{N-1}(\lambda_j)\sigma^2 \cdots (-1)\sigma^2 L_1(\lambda_j)\sigma^2 \\ &= (-1)^N \sigma^2 L_N(\lambda_j) \cdots L_1(\lambda_j)\sigma^2 \text{ , da } \sigma_i^2 = 1. \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

Damit hat man

$$T^*(\lambda_j^*) = (-1)^N \sigma^2 T(\lambda_j)\sigma^2, \tag{2.5.10}$$

d.h.

$$T^*(\lambda_j^*) = \begin{pmatrix} A^\dagger(\lambda_j^*) & B^\dagger(\lambda_j^*) \\ C^\dagger(\lambda_j^*) & D^\dagger(\lambda_j^*) \end{pmatrix} = (-1)^N \sigma^2 T(\lambda_j)\sigma^2 = (-1)^N \begin{pmatrix} D(\lambda_j) & -C(\lambda_j) \\ -B(\lambda_j) & A(\lambda_j) \end{pmatrix} \tag{2.5.11}$$

Hieraus folgt

$$B^\dagger(\lambda_j^*) = (-1)^N(-C(\lambda)). \tag{2.5.12}$$

Für den dualen Vektor erhält man also

$$\langle \Phi(\{\lambda_j\})| = \langle 0| \prod_{j=1}^{l} B^\dagger(\lambda_j) = (-1)^{l(N+1)} \langle 0| \prod_{j=1}^{l} C(\lambda_j) \tag{2.5.13}$$

und für das Skalarprodukt

$$\langle \Phi(\{\lambda_j\})|\Phi(\{\mu_k\})\rangle = (-1)^{l^C(N+1)} \langle 0| \prod_{j=1}^{l^C} C(\lambda_j) \prod_{k=1}^{l^B} B(\mu_k)|0\rangle. \tag{2.5.14}$$

Da der Vektor $\prod_{k=1}^{l^B} B(\mu_k)|0\rangle$ Eigenzustand vom hermiteschen Operator S^3 zum Eigenwert $\frac{N}{2} - l^B$ ist, verschwindet das Skalarprodukt für $l^C \neq l^B$, d.h. für unterschiedliche Anzahl von $C(\lambda)$ und $B(\lambda)$. Das Skalarprodukt kann man mit Hilfe der Kommutator-Relationen (2.2.15)-(2.2.17) berechnen. Im einfachsten Fall $l=1$ ist das Skalarprodukt gleich

$$\langle 0|C(\lambda^C)B(\lambda^B)|0\rangle = g(\lambda^C,\lambda^B)\{a(\lambda^C)d(\lambda^B)-a(\lambda^B)d(\lambda^C)\}. \tag{2.5.15}$$

Ein Verfahren, um Skalarprodukte zu beliebigem l zu berechnen, wurde von Korepin [13] entwickelt.

Die Norm der Wellenfunktionen berechnet man aus den Skalarprodukten. Im Fall $l=1$ erhält man mit der Regel von de L'Hospital

$$\begin{aligned}\langle 0|C(\lambda)B(\lambda)|0\rangle &= \lim_{\mu\to\lambda}\left(\frac{i}{\lambda-\mu}\{a(\lambda)d(\mu)-a(\mu)d(\lambda)\}\right)\\ &= \lim_{\mu\to\lambda}(-i)\{(i\lambda+\frac{1}{2})^N N(i\mu-\frac{1}{2})^{N-1}-N(i\mu+\frac{1}{2})^{N-1}(i\lambda-\frac{1}{2})^N\}\\ &= N(-\lambda^2-\frac{1}{4})^{N-1}. \end{aligned}\tag{2.5.16}$$

Es existiert eine Methode, um die Norm von beliebigen Bethe-Zuständen zu berechnen [13].

2.6 Inhomogenes Modell

Das Verfahren des Algebraischen Bethe-Ansatzes funktioniert auch im inhomogenen Fall [14]. Da die $R(\lambda-\mu)$-Matrix in (2.2.9) nur von der Differenz $\lambda-\mu$ abhängt, kann man bei den Lax-Operatoren lokale Unordnungsparameter z_n einführen:

$$L_n(\lambda-z_n)=\frac{1}{2}\left[\frac{\eta-2(\lambda-z_n)}{\eta}I\otimes I_N+\vec{\sigma}\otimes\vec{\sigma}_n\right] \tag{2.6.1}$$

Dann erhält man die Kommutator-Relation

$$R(\lambda-\mu)\left(L_n(\lambda-z_n)\otimes L_n(\mu-z_n)\right)=\left(L_n(\mu-z_n)\otimes L_n(\lambda-z_n)\right)R(\lambda-\mu). \tag{2.6.2}$$

Die Monodromie-Matrix ist gegeben durch

$$T(\lambda;z_1,...,z_N)=L_N(\lambda-z_N)\cdots L_1(\lambda-z_1), \tag{2.6.3}$$

d.h.

$$T(\lambda;z_1,...,z_N)=\begin{pmatrix} A(\lambda;z_1,...,z_N) & B(\lambda;z_1,...,z_N)\\ C(\lambda;z_1,...,z_N) & D(\lambda;z_1,...,z_N)\end{pmatrix}, \tag{2.6.4}$$

und es gilt somit die Kommutator-Relation

$$R(\lambda-\mu)\,(T(\lambda;z_1,...,z_N)\otimes T(\mu;z_1,...,z_N)) = (T(\mu;z_1,...,z_N)\otimes T(\lambda;z_1,...,z_N))\,R(\lambda-\mu). \tag{2.6.5}$$

Die Transfer-Matrix lautet entsprechend

$$F(\lambda;z_1,...,z_N) = tr_0 T(\lambda;z_1,...,z_N). \tag{2.6.6}$$

Transfer-Matrizen zu gleichen Sätzen von Unordnungsparametern kommutieren dann:

$$[F(\lambda;z_1,...,z_N), F(\mu;z_1,...,z_N)] = 0 \tag{2.6.7}$$

Es ergeben sich die gleichen Kommutator-Relationen wie im homogenen Fall (2.2.13)-(2.2.17)

$$[B(\lambda;z_1,...,z_N),B(\mu;z_1,...,z_N)] = 0; \qquad [C(\lambda;z_1,...,z_N),C(\mu;z_1,...,z_N)] = 0; \tag{2.6.8}$$

$$[A(\lambda;z_1,...,z_N),A(\mu;z_1,...,z_N)] = 0; \qquad [D(\lambda;z_1,...,z_N),D(\mu;z_1,...,z_N)] = 0; \tag{2.6.9}$$

$$\begin{aligned} A(\mu;z_1,...,z_N)B(\lambda;z_1,...,z_N) &= f(\mu,\lambda)B(\lambda;z_1,...,z_N)A(\mu;z_1,...,z_N) \\ &\quad + g(\lambda,\mu)B(\mu;z_1,...,z_N)A(\lambda;z_1,...,z_N); \end{aligned} \tag{2.6.10}$$

$$\begin{aligned} D(\mu;z_1,...,z_N)B(\lambda;z_1,...,z_N) &= f(\lambda,\mu)B(\lambda;z_1,...,z_N)D(\mu;z_1,...,z_N) \\ &\quad + g(\mu,\lambda)B(\mu;z_1,...,z_N)D(\lambda;z_1,...,z_N); \end{aligned} \tag{2.6.11}$$

$$\begin{aligned} [C(\lambda;z_1,...,z_N), B(\mu;z_1,...,z_N)] &= g(\lambda,\mu)\{A(\lambda;z_1,...,z_N)D(\mu;z_1,...,z_N) \\ &\quad - A(\mu;z_1,...,z_N)D(\lambda;z_1,...,z_N)\}. \end{aligned} \tag{2.6.12}$$

Die Wirkung der Operatoren auf das Vakuum ist gegeben durch

$$A(\lambda;z_1,...,z_N)|0\rangle = \prod_{n=1}^{N}\left(\frac{\eta-(\lambda-z_n)}{\eta}\right)|0\rangle; \tag{2.6.13}$$

$$D(\lambda;z_1,...,z_N)|0\rangle = \prod_{n=1}^{N}\left(\frac{-(\lambda-z_n)}{\eta}\right)|0\rangle; \tag{2.6.14}$$

$$C(\lambda;z_1,...,z_N)|0\rangle = 0. \tag{2.6.15}$$

Als Eigenzustand zur Transfer-Matrix konstruiert man

$$|\Phi(\lambda_1,...,\lambda_l;z_1,...,z_N)\rangle = \prod_{n=1}^{l} B(\lambda_n;z_1,...,z_N)|0\rangle. \tag{2.6.16}$$

Als Eigenwert der Transfer-Matrix zu diesem Zustand ergibt sich mit (2.6.8)-(2.6.11) und den gleichen Überlegungen wie zuvor im homogenen Fall

$$\begin{aligned}\Lambda(\lambda;\lambda_1,...,\lambda_l;z_1,...,z_N) &= \prod_{i=1}^{N}\frac{\eta-(\lambda-z_i)}{\eta}\prod_{j=1}^{l}\frac{\lambda_j-\lambda-\eta}{\lambda_j-\lambda} \\ &+ \prod_{i=1}^{N}\left[\frac{-(\lambda-z_i)}{\eta}\right]\prod_{j=1}^{l}\frac{\lambda_j-\lambda+\eta}{\lambda_j-\lambda}, \qquad (2.6.17)\end{aligned}$$

wenn die Bethe-Ansatz-Gleichungen

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}_k(\lambda_1,...,\lambda_l;z_1,...,z_N) = &\prod_{i=1}^{N}\frac{\eta-(\lambda_k-z_i)}{\eta}\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{l}\frac{\lambda_j-\lambda_k-\eta}{\lambda_j-\lambda_k} \\ - &\prod_{i=1}^{N}\left[-\frac{\lambda_k-z_i}{\eta}\right]\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{l}\frac{\lambda_j-\lambda_k+\eta}{\lambda_j-\lambda_k} \\ = &\ 0 \qquad (2.6.18)\end{aligned}$$

erfüllt sind.

3 Störungstheorie des inhomogenen XXX-Modells

In diesem Kapitel soll eine Methode entwickelt werden, um das inhomogene XXX-Modell störungstheoretisch zu behandeln, d.h. es wird ein Verfahren angegeben, das es gestattet, alle Matrixelemente für eine Störungsrechnung beliebiger Ordnung zu berechnen.

3.1 Ableitung des Hamilton-Operators des inhomogenen XXX-Modells aus der Transfer-Matrix

Beim inhomogenen XXX-Modell können die Kopplungen von Platz zu Platz variieren, d.h. der Hamilton-Operator ist gegeben durch:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} J_n [\vec{\sigma}_n \vec{\sigma}_{n+1} - I_N] \tag{3.1.1}$$

Es liegt nun nahe zu fragen, ob man wie im homogenen Fall den Hamilton-Operator aus der Transfer-Matrix ableiten und damit dann Eigenfunktionen zu diesem konstruieren kann. Im folgenden soll gezeigt werden, daß der Hamilton-Operator tatsächlich auf diese Weise erhalten werden kann, man auf diese Weise aber keine Eigenfunktionen erhält, da die Ableitungen der Transfer-Matrix nicht mehr mit der Transfermatrix selbst kommutieren. Hierzu macht man folgende Ersetzungen des Spektralparameters λ und der Inhomogenitäten z_i aus Kapitel 2.6 [15]:

$$\lambda \to \epsilon\lambda \text{ , und} \qquad z_i \to \epsilon z_i. \tag{3.1.2}$$

Dann hat der Lax-Operator folgende Form:

$$L_n(\epsilon\lambda, \epsilon z_n) = \frac{1}{2} \left[\frac{\eta - 2\epsilon(\lambda - z_n)}{\eta} I \otimes I_N + \vec{\sigma} \otimes \vec{\sigma}_n \right] \tag{3.1.3}$$

Die Bethe-Ansatz-Gleichungen gehen dann über in:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_k(\lambda_1, ..., \lambda_l; \epsilon z_1, ... \epsilon z_N) = & \prod_{i=1}^{N} \frac{\eta - (\lambda_k - \epsilon z_i)}{\eta} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{l} \frac{\lambda_j - \lambda_k - \eta}{\lambda_j - \lambda_k} \\ - & \prod_{i=1}^{N} \left[-\frac{\lambda_k - \epsilon z_i}{\eta} \right] \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{l} \frac{\lambda_j - \lambda_k + \eta}{\lambda_j - \lambda_k} \\ = & \; 0 \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Erfüllen die $\{\lambda_j\}$ diese Gleichungen, so erhält man folgende Eigenwertgleichungen:

$$F(\epsilon\lambda;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N)|\Phi(\lambda_1,...,\lambda_l;\epsilon z_1,...\epsilon z_N)\rangle = \Lambda(\epsilon\lambda;\lambda_1,...,\lambda_l;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N)|\Phi(\lambda_1,...,\lambda_l;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N)\rangle \tag{3.1.5}$$

und damit auch

$$\begin{aligned} ln(F(\epsilon\lambda;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N))|\Phi(\lambda_1,...,\lambda_l;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N)\rangle &= \\ & ln(\Lambda(\epsilon\lambda;\lambda_1,...,\lambda_l;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N))|\Phi(\lambda_1,...,\lambda_l;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N)\rangle \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

mit

$$|\Phi(\lambda_1,...,\lambda_l;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N)\rangle = \prod_{n=1}^{l} B(\lambda_n;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N)|0\rangle. \tag{3.1.7}$$

und

$$\begin{aligned} \Lambda(\epsilon\lambda;\lambda_1,...,\lambda_l;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N) &= \prod_{i=1}^{N} \frac{\eta-\epsilon(\lambda-z_i)}{\eta} \prod_{j=1}^{l} \frac{\lambda_j-\epsilon\lambda-\eta}{\lambda_j-\epsilon\lambda} \\ &+ \prod_{i=1}^{N} \left[\frac{-\epsilon(\lambda-z_i)}{\eta}\right] \prod_{j=1}^{l} \frac{\lambda_j-\epsilon\lambda+\eta}{\lambda_j-\epsilon\lambda} \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Es ist zu beachten, daß die Lösungen der Bethe-Ansatz-Gleichungen nun selbst von ϵ abhängen, d.h. $\lambda = \lambda(\epsilon)$.

Für den Lax-Operator gelten folgende Beziehungen:

$$\frac{d}{d\epsilon} L_n(\epsilon\lambda, \epsilon z_n)\Big|_{\epsilon=0} = -\frac{(\lambda-z_n)}{\eta} I \otimes I_N \tag{3.1.9}$$

und

$$L_n(0,0) = \frac{1}{2}\left[I \otimes I_N + \vec{\sigma} \otimes \vec{\sigma}_n\right] = P_{N+1}^{n,0} \tag{3.1.10}$$

Hiermit kann man nun die logarithmische Ableitung der Transfermatrix berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} ln(F(\epsilon\lambda;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N))\Big|_{\epsilon=0} &= \\ & F^{-1}(0,0) tr_0 \left\{\sum_{n=1}^{N} L_N(0,0)\cdots L_{n-1}(0,0)(-1)\frac{(\lambda-z_n)}{\eta}(I\otimes I_N)L_{n+1}(0,0)\cdots L_1(0,0)\right\} \\ &= -F^{-1}(0,0)\sum_{n=1}^{N}\frac{(\lambda-z_n)}{\eta} tr_0\left\{P_{N+1}^{N,0}\cdots P_{N+1}^{n-1,0}(I\otimes I_N)P_{N+1}^{n+1,0}\cdots P_{N+1}^{1,0}\right\} \\ &= -\frac{1}{\eta}\sum_{n=1}^{N}(\lambda-z_n)P_N^{n,n+1} \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Der Hamilton-Operator des inhomogen XXX-Modells ist also gegeben durch:

$$\begin{aligned} H &= -\frac{J\eta}{2}\frac{d}{d\epsilon}ln(F(\epsilon\lambda;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N))\Big|_{\epsilon=0} - \frac{J}{2}\sum_{n=1}^{N}(\lambda - z_n)I_N \\ &= \frac{J}{4}\sum_{n=1}^{N}(\lambda - z_n)[\vec{\sigma}_n\vec{\sigma}_{n+1} - I_N] =: \lambda H_0 - H_1 \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

bzw.

$$\frac{d}{d\epsilon}ln(F(\epsilon\lambda;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N))\Big|_{\epsilon=0} = -\frac{2}{J\eta}[\lambda H_0 - H_1] - \frac{1}{\eta}\sum_{n=1}^{N}(\lambda - z_n)I_N \tag{3.1.13}$$

Die Wellenfunktionen (3.1.7) sind nun aber nicht wie im homogenen Fall Eigenfunktionen des Hamilton-Operators (3.1.12), da diese wegen $[F(\lambda;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N), F(\mu;\epsilon' z_1,...,\epsilon' z_N)] \neq 0$ nun von ϵ abhängig sind. Daher erhält man durch Differentiation aus (3.1.6) keine Eigenwertgleichung für H, sondern es ergibt sich [16]:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\epsilon}ln(F(\epsilon\lambda;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N))|_{\epsilon=0}|\Phi(\lambda_1,...,\lambda_l;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N)\rangle|_{\epsilon=0} \\ + \quad & ln(F(\epsilon\lambda;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N))|_{\epsilon=0}\frac{d}{d\epsilon}|\Phi(\lambda_1,...,\lambda_l;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N)\rangle|_{\epsilon=0} \\ = \quad & \frac{d}{d\epsilon}ln(\Lambda(\epsilon\lambda;\lambda_1,...,\lambda_l;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N))|_{\epsilon=0}|\Phi(\lambda_1,...,\lambda_l;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N)\rangle|_{\epsilon=0} \\ + \quad & ln(\Lambda(\epsilon\lambda;\lambda_1,...,\lambda_l;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N))|_{\epsilon=0}\frac{d}{d\epsilon}|\Phi(\lambda_1,...,\lambda_l;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N)\rangle|_{\epsilon=0} \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Benutzt man nun (3.1.13) und die Abkürzungen

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle &:= |\Phi(\lambda_1(0),...,\lambda_l(0);0,...,0)\rangle \\ |\bar{\Phi}\rangle = |\bar{\Phi}(\lambda_1,...,\lambda_l;z_1,...,z_N)\rangle &:= \frac{d}{d\epsilon}|\Phi(\lambda_1,...,\lambda_l;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N)\rangle|_{\epsilon=0} \\ E = E(\lambda;\lambda_1,...,\lambda_l;z_1,...,z_N)) &:= \frac{d}{d\epsilon}ln(\Lambda(\epsilon\lambda;\lambda_1(\epsilon),...,\lambda_l(\epsilon);\epsilon z_1,...,\epsilon z_N))|_{\epsilon=0} \\ P &:= lnF(0;0) \\ h &:= ln(\Lambda(0;\lambda_1(0),...,\lambda_l(0);0)), \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

so bekommt man den folgenden Ausdruck:

$$[\lambda H_0 - H_1]|\Phi\rangle = -\frac{J}{2}[\eta E + \sum_{n=1}^{N}(\lambda - z_n)]|\Phi\rangle + \frac{J\eta}{2}[P - hI_N]|\bar{\Phi}\rangle \qquad (3.1.16)$$

Hierbei entspricht $|\Phi\rangle$ der Bethe-Wellenfunktion im homogenen Fall. Wegen des Terms mit $|\bar{\Phi}\rangle$ ergibt sich keine Eigenwertgleichung für H.
Um nun wenigstens näherungsweise einen Eigenvektor zu H zu erhalten, wählt man $|z_n| \ll \lambda$, so daß man H_1 als kleine Störung von H_0 betrachten und entsprechend eine Störungsentwicklung bzgl. der Wellenfunktionen $|\Phi\rangle$ durchführen kann.
Die Gesamtheit der Eigenfunktionen von H_0 ist gegeben durch

$$(S^-)^n|\Phi(\{\lambda_j\})\rangle, \qquad (3.1.17)$$

wobei $\{\lambda_j\} = \{\lambda_1, ..., \lambda_l\}$ mit $l = 1, ..., \frac{N}{2}$ alle Lösungen der Bethe-Ansatz-Gleichungen durchlaufen. Um eine Störungsentwicklung in beliebiger Ordnung zu erhalten, ist es daher notwendig, alle Matrixelemente der Form

$$\langle (S^-)^k\Phi(\{\lambda_j^1\})|H_1(S^-)^n|\Phi(\{\lambda_j^2\})\rangle \qquad (3.1.18)$$

für beliebige Bethe-Parameter $\{\lambda_j^1\}$ bzw. $\{\lambda_j^2\}$ und k bzw. n zu berechnen. Dies soll in den folgenden Kapiteln geschehen.

3.2 Symmetrie des Störoperators H_1

Man kann leicht zeigen, daß auch der inhomogene Hamilton-Operator SU(2)-invariant ist. Da die Aussagen des Kapitels 2.3 auch im inhomogenen Fall gelten, hat man nämlich

$$[S^a, F(\epsilon\lambda; \epsilon z_1, ..., \epsilon z_N)] = 0 \qquad (3.2.1)$$

und somit auch

$$[S^a, H] = 0 \text{ bzw. } [S^a, H_1] = 0, \qquad (3.2.2)$$

da S^a unabhängig von ϵ ist. Somit hat die Drehimpuls-Entartung der Zustände im homogenen Fall auch noch im inhomogenen Fall Bestand.
Für die Berechnung der Matrixelemente (3.1.18) folgt hieraus:

$$\langle (S^-)^k\Phi(\{\lambda_j^1\})|H_1(S^-)^n|\Phi(\{\lambda_j^2\})\rangle = 0 \text{ für } k \neq n. \qquad (3.2.3)$$

Es ergibt sich nämlich für $k > n$ (und für $k < n$ analog)

$$\begin{aligned}\langle (S^-)^k\Phi(\{\lambda_j^1\})|H_1(S^-)^n|\Phi(\{\lambda_j^2\})\rangle &= \langle \Phi(\{\lambda_j^1\})|(S^+)^k H_1(S^-)^n|\Phi(\{\lambda_j^2\})\rangle \\ &= \langle \Phi(\{\lambda_j^1\})|H_1(S^+)^k(S^-)^n|\Phi(\{\lambda_j^2\})\rangle = 0, \quad (3.2.4)\end{aligned}$$

da $(S^+)^k(S^-)^n$ für $k > n$ den S^3-Höchstgewichtszustand $|\Phi(\{\lambda_j^2\})\rangle$ vernichtet.
Für k=n erhält man:

$$\frac{\langle (S^-)^n \Phi(\{\lambda_j^1\})|H_1(S^-)^n|\Phi(\{\lambda_j^2\})\rangle}{\|(S^-)^n|\Phi(\{\lambda_j^1\})\rangle\|\|(S^-)^n|\Phi(\{\lambda_j^2\})\rangle\|} = \frac{\langle \Phi(\{\lambda_j^1\})|H_1|\Phi(\{\lambda_j^2\})\rangle}{\||\Phi(\{\lambda_j^1\})\rangle\|\||\Phi(\{\lambda_j^2\})\rangle\|} \tag{3.2.5}$$

Damit ist die Berechnung der Matrixelemente (3.1.18) zurückgeführt auf die Berechnung von

$$\langle \Phi(\{\lambda_j^1\})|H_1|\Phi(\{\lambda_j^2\})\rangle. \tag{3.2.6}$$

3.3 Analytische Betrachtungen zu den Matrixelementen

Man kann weitere Aussagen über die Matrixelemente (3.2.6) erhalten, wenn man mit (3.1.16) das Matrixelement zwischen gleichen Bethe-Wellenfunktionen berechnet:

$$\langle \Phi|\lambda H_0 - H_1|\Phi\rangle = -\frac{J}{2}[\eta E + \sum_{n=1}^{N}(\lambda - z_n)]\langle \Phi|\Phi\rangle \tag{3.3.1}$$

Mit (3.1.16) ergibt sich für das Matrixelement zwischen verschiedenen Bethe-Wellenfunktionen:

$$\langle \tilde{\Phi}|\lambda H_0 - H_1|\Phi\rangle = \frac{J\eta}{2}[\tilde{h} - h]\langle \tilde{\Phi}|\bar{\Phi}\rangle \tag{3.3.2}$$

Die Gleichung (3.3.1) kann man unter der Voraussetzung, daß man E kennt, dazu verwenden, die Diagonalelemente von (3.2.6) für beliebiges l zu berechnen. Der Ausdruck (3.3.2) ist hingegen nicht so geeignet, die Nicht-Diagonal-Elemente der Störungsmatrix zu berechnen, da man hierzu den Zustand $\Phi(\{\lambda_j\})\rangle$ nach ϵ differenzieren muß. Hierbei treten dann die Ableitungen der einzelnen $B(\lambda_j; \epsilon z_1, ..., \epsilon z_N)$ zwischen den urspünglichen auf. Für diese kann man keine einfachen Kommutator-Relationen mit den $B(\lambda_j; \epsilon z_1, ..., \epsilon z_N)$ angeben, so daß man zu komplizierteren Ausdrücken als bei der im folgenden Kapitel beschriebenen algebraischen Methode geführt wird, bei der man schon bekannte Resultate verwenden kann.

Nachfolgend soll nun der explizite Ausdruck für E in (3.3.1) berechnet werden.
Es gilt:

$$\frac{d}{d\epsilon}\prod_{i=1}^{N}\frac{\eta - \epsilon(\lambda - z_i)}{\eta}\bigg|_{\epsilon=0} = -\sum_{k=1}^{N}\frac{(\lambda - z_k)}{\eta} \tag{3.3.3}$$

$$\frac{d}{d\epsilon}\prod_{j=1}^{l}\frac{\lambda_j(\epsilon)-\epsilon\lambda-\eta}{\lambda_j(\epsilon)-\epsilon\lambda}\Big|_{\epsilon=0} = \sum_{k=1}^{l}\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{l}\frac{\lambda_j(0)-\eta}{\lambda_j(0)}\quad\frac{\eta(\frac{d\lambda_k(\epsilon)}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}-\lambda)}{\lambda_k^2(0)} \tag{3.3.4}$$

$$\frac{d}{d\epsilon}\prod_{i=1}^{N}\left[\frac{-\epsilon(\lambda-z_i)}{\eta}\right]\Big|_{\epsilon=0} = 0 \tag{3.3.5}$$

Mit diesen Identitäten und (3.1.8) erhält man

$$\begin{aligned} E &= \frac{d}{d\epsilon}ln(\Lambda(\epsilon\lambda;\lambda_1,...,\lambda_l;\epsilon z_1,...,\epsilon z_N))|_{\epsilon=0} \\ &= \left[\prod_{j=1}^{l}\frac{\lambda_j(0)-\eta}{\lambda_j(0)}\right]^{-1}\left\{-\sum^{N}\frac{(\lambda-z_k)}{\eta}\prod_{j=1}^{l}\frac{\lambda_j(0)-\eta}{\lambda_j(0)}+\sum_{k=1}^{l}\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{l}\frac{\lambda_j(0)-\eta}{\lambda_j(0)}\quad\frac{\eta(\frac{d\lambda_k(\epsilon)}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}-\lambda)}{\lambda_k^2(0)}\right\} \\ &= -\sum^{N}\frac{(\lambda-z_k)}{\eta}+\eta\sum_{k=1}^{l}\frac{\frac{d\lambda_k(\epsilon)}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}-\lambda}{\lambda_k(0)(\lambda_k(0)-\eta)}. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Setzt man dies in (3.3.1) ein, dann ergibt sich:

$$\frac{\langle\Phi|\lambda H_0-H_1|\Phi\rangle}{\langle\Phi|\Phi\rangle} = -\frac{J}{2}\eta^2\sum_{k=1}^{l}\frac{\frac{d\lambda_k(\epsilon)}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}-\lambda}{\lambda_k(0)(\lambda_k(0)-\eta)} \tag{3.3.7}$$

Um den Ausdruck für $\frac{d\lambda_k(\epsilon)}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}$ zu erhalten, entwickelt man (3.1.4) in eine Potenzreihe um $\epsilon=0$:

$$\tilde{\Lambda}_k(\lambda_1,...,\lambda_l;\epsilon z_1,...\epsilon z_N) = \sum_{n=0}^{\infty}\epsilon^n\quad\frac{d^n\tilde{\Lambda}_k(\lambda_1,...,\lambda_l;\epsilon z_1,...\epsilon z_N)}{d\epsilon^n}\Big|_{\epsilon=0} \tag{3.3.8}$$

Die Gleichung $\tilde{\Lambda}_k(\lambda_1,...,\lambda_l;\epsilon z_1,...\epsilon z_N) = 0$ bestimmt die ϵ-Abhängigkeit der λ's. Die Gleichung $\tilde{\Lambda}_k(\lambda_1,...,\lambda_l;\epsilon z_1,...\epsilon z_N)|_{\epsilon=0} = 0$ liefert die Bethe-Ansatz-Gleichungen des homogenen Falles. Die Lösung der $\lambda_j(\epsilon)'s$ in erster Näherung und damit auch deren erste Ableitung, erhält man aus der Bedingung:

$$\frac{d\tilde{\Lambda}_k(\lambda_1,...,\lambda_l;\epsilon z_1,...\epsilon z_N)}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = 0 \tag{3.3.9}$$

Es gelten folgende Beziehungen:

$$\frac{d}{d\epsilon}\left(\prod_{i=1}^{N}\frac{\eta-(\lambda_k(\epsilon)-\epsilon z_n)}{\eta}\right)\Big|_{\epsilon=0} = -\frac{1}{\eta}\left[\frac{\eta-\lambda_k(0)}{\eta}\right]^{N-1}\sum_{n=1}^{N}(\frac{d\lambda_k(\epsilon)}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}-z_n) \quad (3.3.10)$$

$$\frac{d}{d\epsilon}\left(\prod_{i=1}^{N}\frac{-(\lambda_k(\epsilon)-\epsilon z_n)}{\eta}\right)\Big|_{\epsilon=0} = -\frac{1}{\eta}\left[\frac{-\lambda_k(0)}{\eta}\right]^{N-1}\sum_{n=1}^{N}(\frac{d\lambda_k(\epsilon)}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}-z_n) \quad (3.3.11)$$

$$\frac{d}{d\epsilon}\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{N}\frac{\lambda_k(\epsilon)-\lambda_j(\epsilon)\pm\eta}{\lambda_k(\epsilon)-\lambda_j(\epsilon)}\right)\Big|_{\epsilon=0} =$$

$$\mp\eta\sum_{n=1}^{l}\prod_{\substack{j=1\\j\neq k\\j\neq n}}^{l}\left(\frac{\lambda_k(0)-\lambda_j(0)\pm\eta}{\lambda_k(0)-\lambda_j(0)}\right)\frac{\frac{d\lambda_k(\epsilon)}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}-\frac{d\lambda_j(\epsilon)}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}}{(\lambda_k(0)-\lambda_j(0))^2} \quad (3.3.12)$$

Mit diesen Identitäten ergibt sich für die Ableitung von $\tilde{\Lambda}_k(\lambda_1,...,\lambda_l;\epsilon z_1,...\epsilon z_N)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\Lambda}_k(\lambda_1,...,\lambda_l;\epsilon z_1,...\epsilon z_N)}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} &= -\frac{1}{\eta}\left[\frac{\eta-\lambda_k(0)}{\eta}\right]^{N-1}\sum_{n=1}^{N}(\frac{d\lambda_k(\epsilon)}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}-z_n)\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{l}\frac{\lambda_j-\lambda_k-\eta}{\lambda_j-\lambda_k}\\
&-\eta\left[\frac{\eta-\lambda_k(0)}{\eta}\right]^{N}\sum_{n=1}^{l}\prod_{\substack{j=1\\j\neq k\\j\neq n}}^{l}\left(\frac{\lambda_k(0)-\lambda_j(0)+\eta}{\lambda_k(0)-\lambda_j(0)}\right)\frac{\frac{d\lambda_k(\epsilon)}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}-\frac{d\lambda_j(\epsilon)}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}}{(\lambda_k(0)-\lambda_j(0))^2}\\
&+\frac{1}{\eta}\left[\frac{-\lambda_k(0)}{\eta}\right]^{N-1}\sum_{n=1}^{N}(\frac{d\lambda_k(\epsilon)}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}-z_n)\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{l}\frac{\lambda_j-\lambda_k+\eta}{\lambda_j-\lambda_k}\\
&-\eta\left[\frac{-\lambda_k(0)}{\eta}\right]^{N}\sum_{n=1}^{l}\prod_{\substack{j=1\\j\neq k\\j\neq n}}^{l}\left(\frac{\lambda_k(0)-\lambda_j(0)-\eta}{\lambda_k(0)-\lambda_j(0)}\right)\frac{\frac{d\lambda_k(\epsilon)}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}-\frac{d\lambda_j(\epsilon)}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}}{(\lambda_k(0)-\lambda_j(0))^2}=0 \quad (3.3.13)
\end{aligned}$$

Der zweite und der vierte Term kann jeweils durch die Bedingung $\frac{d\lambda_k(\epsilon)}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} = \frac{d\lambda_j(\epsilon)}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}$ zum Verschwinden gebracht werden. Der erste und der dritte Term sind gleich Null, wenn $\sum_{n=1}^{N}(\frac{d\lambda_k(\epsilon)}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}-z_n)=0$, d.h.

$$\frac{d\lambda_k(\epsilon)}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}z_n \quad (3.3.14)$$

für alle k gilt, was verträglich mit der ersten Bedingung ist.

Setzt man (3.3.14) in (3.3.7) ein, so bekommt man für die Diagonal-Elemente des Störoperators mit $\lambda = 0$:

$$\frac{\langle\Phi|H_1|\Phi\rangle}{\langle\Phi|\Phi\rangle} = \frac{J}{2}\eta^2 \quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n \quad \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\lambda_k(0)(\lambda_k(0)-\eta)} \tag{3.3.15}$$

Mit der Ersetzung $\lambda_j(0) \to \lambda_j(0) + \frac{i}{2}$ und $\eta = i$ erhält man:

$$\frac{\langle\Phi|H_1|\Phi\rangle}{\langle\Phi|\Phi\rangle} = -\frac{J}{2} \quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n \quad \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\lambda_k^2 + \frac{1}{4}} \tag{3.3.16}$$

mit $\lambda_k := \lambda_k(0)$. Im Falle eines nichtentarteten Energieniveaus entspricht dieser Ausdruck der Änderung dieses Energieniveaus in erster Ordnung bei Einführung von Inhomogenitäten. Man sieht, daß die Kopplungkonstante im homogenen Fall (2.4.3) durch den Mittelwert der Kopplungen z_n modifiziert wird.

3.4 Algebraische Berechnung aller Matrixelemente

In Kapitel 2.5 wurde gezeigt, daß man die Berechnung der Matrixelemente (3.2.6) zurückführen kann auf die Berechnung von

$$\langle 0| \prod_{j=1}^{n^C} C(\lambda_j^C)\, H_1 \prod_{k=1}^{n^B} B(\lambda_k^B)|0\rangle. \tag{3.4.1}$$

Um ein Matrixelement dieser Form zu berechnen, verwendet man eine ähnliche Strategie wie in [6]. Man zerlegt die Monodromie-Matrix in vier Teile:

$$T(\lambda) = T(4|\lambda)T(3|\lambda)T(2|\lambda)T(1|\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \tag{3.4.2}$$

mit $(j = 1, 2, 3, 4)$

$$T(j|\lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{A}_j(\lambda) & \tilde{B}_j(\lambda) \\ \tilde{C}_j(\lambda) & \tilde{D}_j(\lambda) \end{pmatrix} \tag{3.4.3}$$

Hierbei besitzen die einzelnen Monodromie-Matrizen folgende Form :

$$\begin{aligned} T(1|\lambda) &= L_{i-1}(\lambda)\cdots L_1(\lambda) \\ T(2|\lambda) &= L_i(\lambda) \\ T(3|\lambda) &= L_{i+1}(\lambda) \\ T(4|\lambda) &= L_N(\lambda)\cdots L_{i+2}(\lambda) \end{aligned}$$

Die Stelle i, von der die Zerlegung abhängt, wird dabei entsprechend dem Index i der Summanden $\vec{\sigma_i}\vec{\sigma_{i+1}}$ im Störperator H_1 gewählt.

Die Kommutator-Relationen zwischen den Matrixelementen der jeweiligen Monodromie-Matrix sind gegeben durch:

$$R(\lambda-\mu)\left(T(j|\lambda)\otimes T(j|\mu)\right)=\left(T(j|\mu)\otimes T(j|\lambda)\right)R(\lambda-\mu) \tag{3.4.4}$$

Die Matrixelemente von verschiedenen Matrizen kommutieren, d.h. es gilt:

$$[T^{ab}(j|\lambda),T^{cd}(k|\lambda)]=0\ ,\ \text{für jedes a, b, c, d und } j\neq k \tag{3.4.5}$$

Ist $|0\rangle_j$ das Vakuum für $T(j|\lambda)$, so ist das Vakuum $|0\rangle$ für $T(\lambda)$ gegeben durch

$$|0\rangle=|0\rangle_4\otimes|0\rangle_3\otimes|0\rangle_2\otimes|0\rangle_1. \tag{3.4.6}$$

Für die Eigenwerte der Vakua gilt

$$A_j(\lambda)|0\rangle_j = a_j(\lambda)|0\rangle_j, \qquad D_j(\lambda)|0\rangle_j=d_j(\lambda)|0\rangle_j \tag{3.4.7}$$

$$C_j(\lambda)|0\rangle_j = 0 \tag{3.4.8}$$

und

$$a(\lambda)=a_1(\lambda)a_2(\lambda)a_3(\lambda)a_4(\lambda), \qquad d(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)d_3(\lambda)d_4(\lambda). \tag{3.4.9}$$

Hierbei wirken die Operatoren $\tilde{O}_j:=\{\tilde{A}_j,\tilde{B}_j,\tilde{C}_j,\tilde{D}_j\}$ im gesamten Raum H_N und die Operatoren $O_j:=\{A_j,B_j,C_j,D_j\}$ nur in den jeweiligen Unterräumen, d.h:

$$\tilde{O}_4(\lambda) = O_4(\lambda)\otimes I_3\otimes I_2\otimes I_1 \tag{3.4.10}$$

$$\tilde{O}_3(\lambda) = I_4\otimes O_3(\lambda)\otimes I_2\otimes I_1 \tag{3.4.11}$$

$$\tilde{O}_2(\lambda) = I_4\otimes I_3\otimes O_2(\lambda)\otimes I_1 \tag{3.4.12}$$

$$\tilde{O}_1(\lambda) = I_4\otimes I_3\otimes I_2\otimes O_1(\lambda), \tag{3.4.13}$$

wobei die I_j die Einheiten in den betreffenden Unterräumen bezeichnen.

Zerlegt man in dem Vektor $\prod_{j=1}^{n^B}B(\lambda_j^B)|0\rangle_j$ die $B(\lambda)$ wie oben angegeben, kommutiert die so entstehenden $A_j(\lambda)$ und $D_j(\lambda)$ an den $B_j(\lambda)$ und $C_j(\lambda)$ vorbei und läßt sie anschließend auf die jeweiligen Vakua wirken, so erhält man [6]:

$$\prod_{j=1}^{n^B}B(\lambda_j^B)|0\rangle = \sum_{\{\lambda^{BI}\}\cup\{\lambda^{BII}\}\cup\{\lambda^{BIII}\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\}}\ \prod_{j_B\in I}^{n_1^B}\ \prod_{k_B\in II}^{n_2^B}\ \prod_{l_B\in III}^{n_3^B}\ \prod_{m_B\in IV}^{n_4^B} K_B$$

$$\times B_4(\lambda_{m_B}^{BIV})|0\rangle_4\otimes B_3(\lambda_{l_B}^{BIII})|0\rangle_3\otimes B_2(\lambda_{k_B}^{BII})|0\rangle_2\otimes B_1(\lambda_{j_B}^{BI})|0\rangle_1 \tag{3.4.14}$$

mit

$$K_B = a_2(\lambda_{j_B}^{BI})d_1(\lambda_{k_B}^{BII})a_3(\lambda_{j_B}^{BI})d_1(\lambda_{l_B}^{BIII})a_4(\lambda_{j_B}^{BI})d_1(\lambda_{m_B}^{BIV})a_3(\lambda_{k_B}^{BII})d_2(\lambda_{l_B}^{BIII})$$

$$\times a_4(\lambda_{k_B}^{BII})d_2(\lambda_{m_B}^{BIV})a_4(\lambda_{l_B}^{BIII})d_3(\lambda_{m_B}^{BIV})f(\lambda_{j_B}^{BI},\lambda_{k_B}^{BII})f(\lambda_{j_B}^{BI},\lambda_{l_B}^{BIII})$$

$$\times f(\lambda_{j_B}^{BI},\lambda_{m_B}^{BIV})f(\lambda_{k_B}^{BII},\lambda_{l_B}^{BIII})f(\lambda_{k_B}^{BII},\lambda_{m_B}^{BIV})f(\lambda_{l_B}^{BIII},\lambda_{m_B}^{BIV}) \qquad (3.4.15)$$

Hierbei läuft die Summation über alle Zerlegungen der Menge der Bethe-Parameter $\{\lambda^B\} = \{\lambda_j^B\}$ in vier disjunkte Teilmengen $\{\lambda^{BI}\}$, $\{\lambda^{BII}\}$, $\{\lambda^{BIII}\}$ und $\{\lambda^{BIV}\}$ mit

$$card\{\lambda^{BI}\} = n_1^B, \qquad card\{\lambda^{BII}\} = n_2^B, \qquad (3.4.16)$$

$$card\{\lambda^{BIII}\} = n_3^B, \qquad card\{\lambda^{BIV}\} = n_4^B. \qquad (3.4.17)$$

Die Produkte laufen über die gesamte Indexmenge der jeweiligen Teilmengen und über alle nachfolgenden Faktoren.
Entsprechend erhält man für den adjungierten Zustand:

$$\langle 0| \prod_{j=1}^{n^C} C(\lambda_j^C) = \sum_{\{\lambda^{CI}\}\cup\{\lambda^{CII}\}\cup\{\lambda^{CIII}\}\cup\{\lambda^{CIV}\}=\{\lambda^C\}} \prod_{j_C\in I}^{n_1^C} \prod_{k_C\in II}^{n_2^C} \prod_{l_C\in III}^{n_3^C} \prod_{m_C\in IV}^{n_4^C} K_C$$

$$\times {}_1\langle 0|C(\lambda_{j_C}^{CI}) \otimes {}_2\langle 0|C(\lambda_{k_C}^{CII}) \otimes {}_3\langle 0|C(\lambda_{l_C}^{CIII}) \otimes {}_4\langle 0|C(\lambda_{m_C}^{CIV}) \qquad (3.4.18)$$

mit

$$K_C = d_2(\lambda_{j_C}^{CI})a_1(\lambda_{k_C}^{CII})d_3(\lambda_{j_C}^{CI})a_1(\lambda_{l_C}^{CIII})d_4(\lambda_{j_C}^{CI})a_1(\lambda_{m_C}^{CIV})d_3(\lambda_{k_C}^{CII})a_2(\lambda_{l_C}^{CIII})$$

$$\times d_4(\lambda_{k_C}^{CII})a_2(\lambda_{m_C}^{CIV})d_4(\lambda_{l_C}^{CIII})a_3(\lambda_{m_C}^{CIV})f(\lambda_{k_C}^{CII},\lambda_{j_C}^{CI})f(\lambda_{l_C}^{CIII},\lambda_{j_C}^{CI})$$

$$\times f(\lambda_{m_C}^{CIV},\lambda_{j_C}^{CI})f(\lambda_{l_C}^{CIII},\lambda_{k_C}^{CII})f(\lambda_{m_C}^{CIV},\lambda_{k_C}^{CII})f(\lambda_{m_C}^{CIV},\lambda_{l_C}^{CIII}) \qquad (3.4.19)$$

Weiterhin gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}(\sigma^1\otimes\sigma^1+\sigma^2\otimes\sigma^2+\sigma^3\otimes\sigma^3)\,(|0\rangle_n\otimes|0\rangle_n) &= |0\rangle_n\otimes|0\rangle_n \\ (\sigma^1\otimes\sigma^1+\sigma^2\otimes\sigma^2+\sigma^3\otimes\sigma^3)\,(|0\rangle_n\otimes\sigma^-|0\rangle_n) &= 2\sigma^-|0\rangle_n\otimes|0\rangle_n-|0\rangle_n\otimes\sigma^-|0\rangle_n\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left(\sigma^1 \otimes \sigma^1 + \sigma^2 \otimes \sigma^2 + \sigma^3 \otimes \sigma^3\right)\left(\sigma^-|0\rangle_n \otimes |0\rangle_n\right) &= 2|0\rangle_n \otimes \sigma^-|0\rangle_n - \sigma^-|0\rangle_n \otimes |0\rangle_n \\
\left(\sigma^1 \otimes \sigma^1 + \sigma^2 \otimes \sigma^2 + \sigma^3 \otimes \sigma^3\right)\left(\sigma^-|0\rangle_n \otimes \sigma^-|0\rangle_n\right) &= \sigma^-|0\rangle_n \otimes \sigma^-|0\rangle_n
\end{aligned}
\tag{3.4.20}
$$

Für unseren Lax-Operator ist $B_3(\lambda) = B_2(\lambda) = \frac{1}{2}\sigma^-$ und daher annihilieren diese bei mehr als einmaliger Anwendung auf den Vakuum-Zustand $|0\rangle_3$ bzw. $|0\rangle_2$ diesen. Es gibt also nur die vier möglichen Kombinationen

$$
n_2^B = 0 \wedge n_3^B = 0, \quad n_2^B = 0 \wedge n_3^B = 1, \quad n_2^B = 1 \wedge n_3^B = 0 \text{ und } n_2^B = 1 \wedge n_3^B = 1 \tag{3.4.21}
$$

für die Zerlegungen $\{\lambda^{BII}\}$ und $\{\lambda^{BIII}\}$, alle anderen annihilieren den Vakuum-Zustand. Schreibt man jetzt diese möglichen Zerlegungen der Teilmengen $\{\lambda^{BII}\}$ und $\{\lambda^{BIII}\}$ aus und berücksichtigt die Beziehungen (3.4.20), so erhält man:

$$
\begin{aligned}
\vec{\sigma}_i\vec{\sigma}_{i+1}\prod_{j=1}^{n^B} B(\lambda_j^B)|0\rangle = \vec{\sigma}_i\vec{\sigma}_{i+1}\Bigg\{ & \sum_{\{\lambda^{BI}\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\}} \prod_{j_B\in I}^{n_1^B} \prod_{m_B\in IV}^{n_4^B} K_B \\
& \times B_4(\lambda_{m_B}^{BIV})|0\rangle_4 \otimes |0\rangle_3 \otimes |0\rangle_2 \otimes B_1(\lambda_{j_B}^{BI})|0\rangle_1 \\
+ & \sum_{\{\lambda^{BI}\}\cup\{\lambda^{BII}\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\}, n_2^B=1} \prod_{j_B\in I}^{n_1^B} \prod_{m_B\in IV}^{n_4^B} K_B \\
& \times B_4(\lambda_{m_B}^{BIV})|0\rangle_4 \otimes |0\rangle_3 \otimes \frac{1}{2}\sigma^-|0\rangle_2 \otimes B_1(\lambda_{j_B}^{BI})|0\rangle_1 \\
+ & \sum_{\{\lambda^{BI}\}\cup\{\lambda^{BIII}\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\}, n_3^B=1} \prod_{j_B\in I}^{n_1^B} \prod_{m_B\in IV}^{n_4^B} K_B \\
& \times B_4(\lambda_{m_B}^{BIV})|0\rangle_4 \otimes \frac{1}{2}\sigma^-|0\rangle_3 \otimes |0\rangle_2 \otimes B_1(\lambda_{j_B}^{BI})|0\rangle_1 \\
+ & \sum_{\{\lambda^{BI}\}\cup\{\lambda^{BII}\}\cup\{\lambda^{BIII}\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\}, n_2^B=n_3^B=1} \prod_{j_B\in I}^{n_1^B} \prod_{m_B\in IV}^{n_4^B} K_B \\
& \times B_4(\lambda_{m_B}^{BIV})|0\rangle_4 \otimes \frac{1}{2}\sigma^-|0\rangle_3 \otimes \frac{1}{2}\sigma^-|0\rangle_2 \otimes B_1(\lambda_{j_B}^{BI})|0\rangle_1 \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
= \sum_{\{\lambda^{BI}\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\}} \prod_{j_B\in I}^{n_1^B} \prod_{m_B\in IV}^{n_4^B} K_B B_4(\lambda_{m_B}^{BIV})|0\rangle_4 \otimes |0\rangle_3 \otimes |0\rangle_2 \otimes B_1(\lambda_{j_B}^{BI})|0\rangle_1
$$

$$+ \sum_{\{\lambda^{BI}\}\cup\{\lambda^{BII}\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\},n_2^B=1} \prod_{j_B\in I}^{n_1^B} \prod_{m_B\in IV}^{n_4^B} K_B$$

$$\times\Big\{2B_4(\lambda_{m_B}^{BIV})|0\rangle_4 \otimes \sigma^-|0\rangle_3 \otimes \frac{1}{2}|0\rangle_2 \otimes B_1(\lambda_{j_B}^{BI})|0\rangle_1$$

$$-B_4(\lambda_{m_B}^{BIV})|0\rangle_4 \otimes |0\rangle_3 \otimes \frac{1}{2}\sigma^-|0\rangle_2 \otimes B_1(\lambda_{j_B}^{BI})|0\rangle_1\Big\}$$

$$+ \sum_{\{\lambda^{BI}\}\cup\{\lambda^{BIII}\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\},n_3^B=1} \prod_{j_B\in I}^{n_1^B} \prod_{m_B\in IV}^{n_4^B} K_B$$

$$\times\Big\{2B_4(\lambda_{j_B}^{BIV})|0\rangle_4 \otimes \ \frac{1}{2}|0\rangle_3 \otimes \sigma^-|0\rangle_2 \otimes B_1(\lambda_{m_B}^{BI})|0\rangle_1$$

$$-B_4(\lambda_{m_B}^{BIV})|0\rangle_4 \otimes \ \frac{1}{2}\sigma^-|0\rangle_3 \otimes |0\rangle_2 \otimes B_1(\lambda_{j_B}^{BI})|0\rangle_1\Big\}$$

$$+ \sum_{\{\lambda^{BI}\}\cup\{\lambda^{BII}\}\cup\{\lambda^{BIII}\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\},n_3^C=n_3^B=1} \prod_{j_B\in I}^{n_1^B} \prod_{m_B\in IV}^{n_4^B} K_B$$

$$\times B_4(\lambda_{m_B}^{BIV})|0\rangle_4 \otimes \frac{1}{2}\sigma^-|0\rangle_3 \otimes \frac{1}{2}\sigma^-|0\rangle_2 \otimes B_1(\lambda_{j_B}^{BI})|0\rangle_1 \qquad (3.4.22)$$

Führt man nun auch in (3.4.18) die gleichen Zerlegungen für die Teilmengen $\{\lambda^{CII}\}$ und $\{\lambda^{CIII}\}$ aus und wendet das Ergebnis auf (3.4.22) an, so erkennt man, daß für $n^B \neq n^C$ das Element $\langle 0| \prod_{j=1}^{n^C} C(\lambda_j^C)\vec{(\sigma)}_i\vec{\sigma}_{i+1} \prod_{k=1}^{n^B} B(\lambda_k^B)|0\rangle$ gleich Null ist, da die Skalarprodukte in den einzelnen Teilräumen für ungleiche Anzahl an $C_j(\lambda)$ und $B_j(\lambda)$ verschwinden, und in jedem Term von (3.4.22) jeweils n^B $B_j(\lambda)$ enthalten sind. Für $n^B = n^C =: l$ ergibt sich mit $n_1 := n_1^C = n_1^B$ und $n_4 := n_4^C = n_4^B$:

$$\langle 0| \prod_{j=1}^{l} C(\lambda_j^C)\vec{\sigma}_i\vec{\sigma}_{i+1} \prod_{k=1}^{l} B(\lambda_k^B)|0\rangle =$$

$$\sum_{\substack{\{\lambda^{CI}\}\{\lambda^{CIV}\}=\{\lambda^C\} \\ \{\lambda^{BI}\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\}}} \prod_{j_C\in CI}^{n_1} \prod_{m_C\in CIV}^{n_4} K_C \prod_{j_B\in BI}^{n_1} \prod_{m_B\in BIV}^{n_4} K_B$$

$$\times \quad S^1(\lambda^{CI};\lambda^{BI})S^4(\lambda^{CIV};\lambda^{BIV})$$

$$+ \ 2 \sum_{\substack{\{\lambda^{CI}\}\cup\{\lambda^{CII}\}\cup\{\lambda^{CIV}\}=\{\lambda^C\} \\ \{\lambda^{BI}\}\cup\{\lambda^{BIII}\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\},n_2^C=n_3^B=1}} \prod_{j_C\in CI}^{n_1} \prod_{m_C\in CIV}^{n_4} K_C \prod_{j_B\in BI}^{n_1} \prod_{m_B\in BIV}^{n_4} K_B$$

$$\times \quad S^1(\lambda^{CI};\lambda^{BI})S^2(\lambda^{CII};\lambda^{BIII})S^4(\lambda^{CIV};\lambda^{BIV})$$

$$- \sum_{\substack{\{\lambda^{CI}\}\cup\{\lambda^{CII}\}\cup\{\lambda^{CIV}\}=\{\lambda^C\}\\ \{\lambda^{BI}\}\cup\{\lambda^{BII}\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\},n_2^C=n_2^B=1}} \prod_{j_C\in CI}^{n_1}\prod_{m_C\in CIV}^{n_4} K_C \prod_{j_B\in BI}^{n_1}\prod_{m_B\in BIV}^{n_4} K_B$$

$$\times \quad S^1(\lambda^{CI};\lambda^{BI})S^2(\lambda^{CII};\lambda^{BII})S^4(\lambda^{CIV};\lambda^{BIV})$$

$$+ \; 2 \sum_{\substack{\{\lambda^{CI}\}\cup\{\lambda^{CIII}\}\cup\{\lambda^{CIV}\}=\{\lambda^C\}\\ \{\lambda^{BI}\}\cup\{\lambda^{BII}\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\},n_3^C=n_2^B=1}} \prod_{j_C\in CI}^{n_1}\prod_{m_C\in CIV}^{n_4} K_C \prod_{j_B\in BI}^{n_1}\prod_{m_B\in BIV}^{n_4} K_B$$

$$\times \quad S^1(\lambda^{CI};\lambda^{BI})S^3(\lambda^{CIII};\lambda^{BII})S^4(\lambda^{CIV};\lambda^{BIV})$$

$$- \sum_{\substack{\{\lambda^{CI}\}\cup\{\lambda^{CIII}\}\cup\{\lambda^{CIV}\}=\{\lambda^C\}\\ \{\lambda^{BI}\}\cup\{\lambda^{BIII}\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\},n_3^C=n_3^B=1}} \prod_{j_C\in CI}^{n_1}\prod_{m_C\in CIV}^{n_4} K_C \prod_{j_B\in BI}^{n_1}\prod_{m_B\in BIV}^{n_4} K_B$$

$$\times \quad S^1(\lambda^{CI};\lambda^{BI})S^3(\lambda^{CIII};\lambda^{BIII})S^4(\lambda^{CIV};\lambda^{BIV})$$

$$+ \sum_{\substack{\{\lambda^{CI}\}\cup\{\lambda^{CII}\}\cup\{\lambda^{CIII}\}\cup\{\lambda^{CIV}\}=\{\lambda^C\}\\ \{\lambda^{BI}\}\cup\{\lambda^{BII}\}\cup\{\lambda^{BIII}\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\},n_2^C=n_2^B=1,n_3^C=n_3^B=1}} \prod_{j_C\in CI}^{n_1}\prod_{m_C\in CIV}^{n_4} K_C \prod_{j_B\in BI}^{n_1}\prod_{m_B\in BIV}^{n_4} K_B$$

$$\times \quad S^1(\lambda^{CI};\lambda^{BI})S^2(\lambda^{CII};\lambda^{BII})S^3(\lambda^{CII};\lambda^{BII})S^4(\lambda^{CIV};\lambda^{BIV}) \tag{3.4.23}$$

Hierbei wurde benutzt, daß ${}_2\langle 0|0\rangle_2 = 1$ und ${}_3\langle 0|0\rangle_3 = 1$ ist.
Weiterhin wurde von folgenden Abkürzungen für die Skalarprodukte in den Unterräumen Gebrauch gemacht:

$$S^1(\lambda^{CI};\lambda^{BI}) \;:=\; {}_1\langle 0|\prod_{j\in CI}^{n_1} C_1(\lambda_j^{CI})\prod_{k\in BI}^{n_1} B_1(\lambda_k^{BI})|0\rangle_1 \tag{3.4.24}$$

$$S^4(\lambda^{CIV};\lambda^{BIV}) \;:=\; {}_4\langle 0|\prod_{j\in CIV}^{n_4} C_4(\lambda_j^{CIV})\prod_{k\in BIV}^{n_4} B_4(\lambda_k^{BIV})|0\rangle_4 \tag{3.4.25}$$

$$S^2(\lambda;\mu) := {}_2\langle 0|C_2(\lambda)B_2(\mu)|0\rangle_2 = S^3(\lambda;\mu) := {}_3\langle 0|C_3(\lambda)B_3(\mu)|0\rangle_3 = 1 \tag{3.4.26}$$

Das Skalarprodukt $\langle 0|\prod_{j=1}^{l} C(\lambda_j^C)\prod_{k=1}^{l} B(\lambda_k^B)|0\rangle$ nimmt in unserer Zerlegung folgende Form an:

$$\langle 0| \prod_{j=1}^{l} C(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^{l} B(\lambda_k^B)|0\rangle =$$

$$\sum_{\substack{\{\lambda^{CI}\}\{\lambda^{CIV}\}=\{\lambda^C\} \\ \{\lambda^{BI}\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\}}} \prod_{j_C\in CI}^{n_1} \prod_{m_C\in CIV}^{n_4} K_C \prod_{j_B\in BI}^{n_1} \prod_{m_B\in BIV}^{n_4} K_B$$

$$\times \quad S^1(\lambda^{CI};\lambda^{BI}) S^4(\lambda^{CIV};\lambda^{BIV})$$

$$+ \sum_{\substack{\{\lambda^{CI}\}\cup\{\lambda^{CII}\}\cup\{\lambda^{CIV}\}=\{\lambda^C\} \\ \{\lambda^{BI}\}\cup\{\lambda^{BII}\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\}, n_2^C=n_2^B=1}} \prod_{j_C\in CI}^{n_1} \prod_{m_C\in CIV}^{n_4} K_C \prod_{j_B\in BI}^{n_1} \prod_{m_B\in BIV}^{n_4} K_B$$

$$\times \quad S^1(\lambda^{CI};\lambda^{BI}) S^2(\lambda^{CII};\lambda^{BII}) S^4(\lambda^{CIV};\lambda^{BIV})$$

$$+ \sum_{\substack{\{\lambda^{CI}\}\cup\{\lambda^{CIII}\}\cup\{\lambda^{CIV}\}=\{\lambda^C\} \\ \{\lambda^{BI}\}\cup\{\lambda^{BIII}\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\}, n_3^C=n_3^B=1}} \prod_{j_C\in CI}^{n_1} \prod_{m_C\in CIV}^{n_4} K_C \prod_{j_B\in BI}^{n_1} \prod_{m_B\in BIV}^{n_4} K_B$$

$$\times \quad S^1(\lambda^{CI};\lambda^{BI}) S^3(\lambda^{CIII};\lambda^{BIII}) S^4(\lambda^{CIV};\lambda^{BIV})$$

$$+ \sum_{\substack{\{\lambda^{CI}\}\cup\{\lambda^{CII}\}\cup\{\lambda^{CIII}\}\cup\{\lambda^{CIV}\}=\{\lambda^C\} \\ \{\lambda^{BI}\}\cup\{\lambda^{BII}\}\cup\{\lambda^{BIII}\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\}, n_2^C=n_2^B=1, n_3^C=n_3^B=1}} \prod_{j_C\in CI}^{n_1} \prod_{m_C\in CIV}^{n_4} K_C \prod_{j_B\in BI}^{n_1} \prod_{m_B\in BIV}^{n_4} K_B$$

$$\times \quad S^1(\lambda^{CI};\lambda^{BI}) S^2(\lambda^{CII};\lambda^{BII}) S^3(\lambda^{CII};\lambda^{BII}) S^4(\lambda^{CIV};\lambda^{BIV}) \qquad (3.4.27)$$

Verwendet man das Ergebnis für das Skalarprodukt, so ergibt sich für das Matrixelement:

$$\langle 0| \prod_{j=1}^{l} C(\lambda_j^C) \vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_{i+1} \prod_{k=1}^{l} B(\lambda_k^B)|0\rangle = \langle 0| \prod_{j=1}^{l} C(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^{l} B(\lambda_k^B)|0\rangle$$

$$+ \; 2 \sum_{\substack{\{\lambda^{CI}\}\cup\{\lambda^{CII}\}\cup\{\lambda^{CIV}\}=\{\lambda^C\} \\ \{\lambda^{BI}\}\cup\{\lambda^{BIII}\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\}, n_2^C=n_3^B=1}} \prod_{j_C\in CI}^{n_1} \prod_{m_C\in CIV}^{n_4} K_C \prod_{j_B\in BI}^{n_1} \prod_{m_B\in BIV}^{n_4} K_B$$

$$\times \quad S^1(\lambda^{CI};\lambda^{BI}) S^2(\lambda^{CII};\lambda^{BIII}) S^4(\lambda^{CIV};\lambda^{BIV})$$

$$- \; 2 \sum_{\substack{\{\lambda^{CI}\}\cup\{\lambda^{CII}\}\cup\{\lambda^{CIV}\}=\{\lambda^C\} \\ \{\lambda^{BI}\}\cup\{\lambda^{BII}\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\}, n_2^C=n_2^B=1}} \prod_{j_C\in CI}^{n_1} \prod_{m_C\in CIV}^{n_4} K_C \prod_{j_B\in BI}^{n_1} \prod_{m_B\in BIV}^{n_4} K_B$$

$$\times \quad S^1(\lambda^{CI};\lambda^{BI})S^2(\lambda^{CII};\lambda^{BII})S^4(\lambda^{CIV};\lambda^{BIV})$$

$$+ \; 2 \sum_{\substack{\{\lambda^{CI}\}\cup\{\lambda^{CIII}\}\cup\{\lambda^{CIV}\}=\{\lambda^C\} \\ \{\lambda^{BI}\}\cup\{\lambda^{BII}\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\}, n_3^C=n_2^B=1}} \prod_{j_C\in CI}^{n_1} \prod_{m_C\in CIV}^{n_4} K_C \prod_{j_B\in BI}^{n_1} \prod_{m_B\in BIV}^{n_4} K_B$$

$$\times \quad S^1(\lambda^{CI};\lambda^{BI})S^3(\lambda^{CIII};\lambda^{BII})S^4(\lambda^{CIV};\lambda^{BIV})$$

$$- \; 2 \sum_{\substack{\{\lambda^{CI}\}\cup\{\lambda^{CIII}\}\cup\{\lambda^{CIV}\}=\{\lambda^C\} \\ \{\lambda^{BI}\}\cup\{\lambda^{BIII}\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\}, n_3^C=n_3^B=1}} \prod_{j_C\in CI}^{n_1} \prod_{m_C\in CIV}^{n_4} K_C \prod_{j_B\in BI}^{n_1} \prod_{m_B\in BIV}^{n_4} K_B$$

$$\times \quad S^1(\lambda^{CI};\lambda^{BI})S^3(\lambda^{CIII};\lambda^{BIII})S^4(\lambda^{CIV};\lambda^{BIV}) \qquad (3.4.28)$$

Benennt man nun die Teilmengen $\{\lambda^{BII}\}$ und $\{\lambda^{BIII}\}$ beide in $\{\mu_1\}$ um, wobei man dies auch in K_B berücksichtigen muß, so kann man jeweils den zweiten und den dritten Term und den vierten und den fünften Term zusammenfassen:

$$\langle 0| \prod_{j=1}^{l} C(\lambda_j^C)\vec{\sigma}_i\vec{\sigma}_{i+1} \prod_{k=1}^{l} B(\lambda_k^B)|0\rangle = \langle 0| \prod_{j=1}^{l} C(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^{l} B(\lambda_k^B)|0\rangle$$

$$+ \; 2 \sum_{\substack{\{\lambda^{CI}\}\cup\{\lambda^{CII}\}\cup\{\lambda^{CIV}\}=\{\lambda^C\} \\ \{\lambda^{BI}\}\cup\{\mu_1\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\}, n_2^C=n_3^B=1}} \prod_{j_C\in CI}^{n_1} \prod_{m_C\in CIV}^{n_4} K_C$$

$$\times \quad \left\{ \prod_{j_B\in BI}^{n_1} \prod_{m_B\in BIV}^{n_4} K_B(\lambda^{BIII}\to\mu_1) - \prod_{j_B\in BI}^{n_1} \prod_{m_B\in BIV}^{n_4} K_B(\lambda^{BII}\to\mu_1) \right\}$$

$$\times \quad S^1(\lambda^{CI};\lambda^{BI})S^2(\lambda^{CII};\mu_1)S^4(\lambda^{CIV};\lambda^{BIV})$$

$$+ \; 2 \sum_{\substack{\{\lambda^{CI}\}\cup\{\lambda^{CIII}\}\cup\{\lambda^{CIV}\}=\{\lambda^C\} \\ \{\lambda^{BI}\}\cup\{\mu_1\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\}, n_3^C=n_2^B=1}} \prod_{j_C\in CI}^{n_1} \prod_{m_C\in CIV}^{n_4} K_C$$

$$\times \quad \left\{ \prod_{j_B\in BI}^{n_1} \prod_{m_B\in BIV}^{n_4} K_B(\lambda^{BII}\to\mu_1) - \prod_{j_B\in BI}^{n_1} \prod_{m_B\in BIV}^{n_4} K_B(\lambda^{BIII}\to\mu_1) \right\}$$

$$\times \quad S^1(\lambda^{CI};\lambda^{BI})S^3(\lambda^{CIII};\mu_1)S^4(\lambda^{CIV};\lambda^{BIV}) \qquad (3.4.29)$$

Beachtet man jetzt, daß $S^2(\lambda;\mu) = S^3(\lambda;\mu) = 1$ ist und benennt die Teilmengen $\{\lambda^{CII}\}$ und

$\{\lambda^{CIII}\}$ in $\{\mu_2\}$ um, so kann man auch den zweiten und den dritten Term noch zusammenfassen:

$$
\begin{aligned}
\langle 0| \prod_{j=1}^{l} C(\lambda_j^C)\vec{\sigma}_i\vec{\sigma}_{i+1} \prod_{k=1}^{l} B(\lambda_k^B)|0\rangle &= \langle 0| \prod_{j=1}^{l} C(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^{l} B(\lambda_k^B)|0\rangle \\
&+ \ 2 \sum_{\substack{\{\lambda^{CI}\}\cup\{\mu_2\}\cup\{\lambda^{CIV}\}=\{\lambda^C\} \\ \{\lambda^{BI}\}\cup\{\mu_1\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\}, n_3^C=n_2^B=1}} \Big\{ \prod_{j_C\in CI}^{n_1} \prod_{m_C\in CIV}^{n_4} K_C(\lambda^{CII}\to\mu_2) - \prod_{j_C\in CI}^{n_1} \prod_{m_C\in CIV}^{n_4} K_C(\lambda^{CIII}\to\mu_2)\Big\} \\
&\times \ \Big\{ \prod_{j_B\in BI}^{n_1} \prod_{m_B\in BIV}^{n_4} K_B(\lambda^{BIII}\to\mu_1) - \prod_{j_B\in BI}^{n_1} \prod_{m_B\in BIV}^{n_4} K_B(\lambda^{BII}\to\mu_1)\Big\} \\
&\times \ S^1(\lambda^{CI};\lambda^{BI})S^4(\lambda^{CIV};\lambda^{BIV})
\end{aligned}
\tag{3.4.30}
$$

Setzt man nun für K_B bzw. K_C die entsprechenden Ausdrücke aus (3.4.15) bzw. (3.4.19) ein, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
\langle 0| \prod_{j=1}^{l} C(\lambda_j^C)\vec{\sigma}_i\vec{\sigma}_{i+1} \prod_{k=1}^{l} B(\lambda_k^B)|0\rangle &= \langle 0| \prod_{j=1}^{n^C} C(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^{n^B} B(\lambda_k^B)|0\rangle \\
&+ \ 2 \sum_{\substack{\{\lambda^{CI}\}\cup\{\mu_2\}\cup\{\lambda^{CIV}\}=\{\lambda^C\} \\ \{\lambda^{BI}\}\cup\{\mu_1\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\}, card\{\mu_1\}=card\{\mu_2\}=1}} \prod_{j_C\in CI}^{n_1} \prod_{m_C\in CIV}^{n_4} \prod_{j_B\in BI}^{n_1} \prod_{m_B\in BIV}^{n_4} \\
&\times \ f(\lambda_{m_C}^{CIV},\lambda_{j_C}^{CI})f(\lambda_{j_B}^{BI},\lambda_{m_B}^{BIV})f(\lambda_{j_B}^{BI},\mu_1)f(\mu_1,\lambda_{m_B}^{BIV})f(\mu_2,\lambda_{j_C}^{CI})f(\lambda_{m_C}^{CIV},\mu_2) \\
&\times \ d_2(\lambda_{j_C}^{CI})d_3(\lambda_{j_C}^{CI})a_1(\lambda_{m_C}^{CIV})d_4(\lambda_{j_C}^{CI})a_2(\lambda_{m_C}^{CIV})a_3(\lambda_{m_C}^{CIV})a_2(\lambda_{j_B}^{BI})a_3(\lambda_{j_B}^{BI}) \\
&\times \ a_4(\lambda_{j_B}^{BI})d_1(\lambda_{m_B}^{BIV})d_2(\lambda_{m_B}^{BIV})d_3(\lambda_{m_B}^{BIV})d_1(\mu_1)a_4(\mu_1)a_1(\mu_2)d_4(\mu_2) \\
&\times \ \{d_2(\mu_1)-a_3(\mu_1)\}\{d_3(\mu_2)-a_2(\mu_2)\}S^1(\lambda^{CI};\lambda^{BI})S^4(\lambda^{CIV};\lambda^{BIV})
\end{aligned}
\tag{3.4.31}
$$

Mit den Ersetzungen $\lambda_j = \lambda_j + \frac{i}{2}$ und $\eta = i$ sind die Eigenwerte der Vakua gegeben durch:

$$a_1(\lambda) = (i\lambda + \frac{1}{2})^{i-1}, \quad a_2(\lambda) = a_3(\lambda) = (i\lambda + \frac{1}{2}), \quad a_4(\lambda) = (i\lambda + \frac{1}{2})^{N-i-1} \tag{3.4.32}$$

$$d_1(\lambda) = (i\lambda - \frac{1}{2})^{i-1}, \quad d_2(\lambda) = d_3(\lambda) = (i\lambda - \frac{1}{2}), \quad d_4(\lambda) = (i\lambda - \frac{1}{2})^{N-i-1} \tag{3.4.33}$$

$$\text{und } f(\lambda,\mu) = 1 + \frac{i}{\mu - \lambda} \quad . \tag{3.4.34}$$

Mit diesen Ersetzungen nimmt (3.4.31) die folgende Form an:

$$
\begin{aligned}
\langle 0| & \prod_{j=1}^{l} C(\lambda_j^C)\vec{\sigma}_i\vec{\sigma}_{i+1} \prod_{k=1}^{l} B(\lambda_k^B)|0\rangle = \langle 0| \prod_{j=1}^{n^C} C(\lambda_j^C) \prod_{k=1}^{n^B} B(\lambda_k^B)|0\rangle \\
+ & \quad 2 \sum_{\substack{\{\lambda^{CI}\}\cup\{\mu_2\}\cup\{\lambda^{CIV}\}=\{\lambda^C\} \\ \{\lambda^{BI}\}\cup\{\mu_1\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\},card\{\mu_1\}=card\{\mu_2\}=1}} \prod_{j_C\in CI}^{n_1} \prod_{m_C\in CIV}^{n_4} \prod_{j_B\in BI}^{n_1} \prod_{m_B\in BIV}^{n_4} \\
\times & \quad (i\lambda_{j_C}^{CI} - \frac{1}{2})^{N-i+1}(i\lambda_{m_C}^{CIV} + \frac{1}{2})^{i+1}(i\lambda_{j_B}^{BI} + \frac{1}{2})^{N-i+1}(i\lambda_{m_B}^{BIV} - \frac{1}{2})^{i+1} \\
\times & \quad (i\mu_1 - \frac{1}{2})^{i-1}(i\mu_1 + \frac{1}{2})^{N-i-1}(i\mu_2 + \frac{1}{2})^{i-1}(i\mu_2 - \frac{1}{2})^{N-i-1} \\
\times & \quad \frac{\lambda_{j_C}^{CI} - \lambda_{m_C}^{CIV} - i}{\lambda_{j_C}^{CI} - \lambda_{m_C}^{CIV}} \frac{\lambda_{m_B}^{BIV} - \lambda_{j_B}^{BI} - i}{\lambda_{m_B}^{BIV} - \lambda_{j_B}^{BI}} \frac{\mu_1 - \lambda_{j_B}^{BI} - i}{\mu_1 - \lambda_{j_B}^{BI}} \frac{\lambda_{m_B}^{BIV} - \mu_1 - i}{\lambda_{m_B}^{BIV} - \mu_1} \\
\times & \quad \frac{\lambda_{j_C}^{CI} - \mu_2 - i}{\lambda_{j_C}^{CI} - \mu_2} \frac{\mu_2 - \lambda_{m_C}^{CIV} - i}{\mu_2 - \lambda_{m_C}^{CIV}} S^1(\lambda^{CI};\lambda^{BI})S^4(\lambda^{CIV};\lambda^{BIV})
\end{aligned}
\tag{3.4.35}
$$

Multipliziert man dieses Ergebnis nun mit z_i, subtrahiert den Term mit der Normierungskonstanten I_N und summiert über alle i, so ergibt sich als Endergebnis für das Diagonal-Matrixelement mit dem Störoperator $H_1 = \frac{J}{4}\sum_{k=1}^{N} z_k\,(\vec{\sigma}_k\vec{\sigma}_{k+1} - I_N)$:

$$
\begin{aligned}
\langle 0| & \prod_{j=1}^{l} C(\lambda_j^C)\, H_1 \prod_{k=1}^{l} B(\lambda_k^B)|0\rangle = \\
& \frac{J}{2} \sum_{k=1}^{N} z_k \sum_{\substack{\{\lambda^{CI}\}\cup\{\mu_2\}\cup\{\lambda^{CIV}\}=\{\lambda^C\} \\ \{\lambda^{BI}\}\cup\{\mu_1\}\cup\{\lambda^{BIV}\}=\{\lambda^B\},card\{\mu_1\}=card\{\mu_2\}=1}} \prod_{j_C\in CI}^{n_1} \prod_{m_C\in CIV}^{n_4} \prod_{j_B\in BI}^{n_1} \prod_{m_B\in BIV}^{n_4} \\
\times & \quad (i\lambda_{j_C}^{CI} - \frac{1}{2})^{N-k+1}(i\lambda_{m_C}^{CIV} + \frac{1}{2})^{k+1}(i\lambda_{j_B}^{BI} + \frac{1}{2})^{N-k+1}(i\lambda_{m_B}^{BIV} - \frac{1}{2})^{k+1} \\
\times & \quad (i\mu_1 - \frac{1}{2})^{k-1}(i\mu_1 + \frac{1}{2})^{N-k-1}(i\mu_2 + \frac{1}{2})^{k-1}(i\mu_2 - \frac{1}{2})^{N-k-1} \\
\times & \quad \frac{\lambda_{j_C}^{CI} - \lambda_{m_C}^{CIV} - i}{\lambda_{j_C}^{CI} - \lambda_{m_C}^{CIV}} \frac{\lambda_{m_B}^{BIV} - \lambda_{j_B}^{BI} - i}{\lambda_{m_B}^{BIV} - \lambda_{j_B}^{BI}} \frac{\mu_1 - \lambda_{j_B}^{BI} - i}{\mu_1 - \lambda_{j_B}^{BI}} \frac{\lambda_{m_B}^{BIV} - \mu_1 - i}{\lambda_{m_B}^{BIV} - \mu_1} \\
\times & \quad \frac{\lambda_{j_C}^{CI} - \mu_2 - i}{\lambda_{j_C}^{CI} - \mu_2} \frac{\mu_2 - \lambda_{m_C}^{CIV} - i}{\mu_2 - \lambda_{m_C}^{CIV}} S^1(\lambda^{CI};\lambda^{BI})S^4(\lambda^{CIV};\lambda^{BIV})
\end{aligned}
\tag{3.4.36}
$$

Die Nicht-Diagonal-Matrixelemente, d.h. die Elemente mit $n^C \neq n^B$, sind hingegen gleich Null.
Die Berechnung der Matrixelemente (3.2.6) ist somit auf die aus Kapitel 2.5 bekannte Berechnung der Skalarprodukte zurückgeführt und daher abgeschlossen, womit die Grundlage für eine Störungsrechnung gelegt ist.

4 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Diplomarbeit wurden die Voraussetzungen geschaffen, die Energieniveaus des inhomogenen XXX-Modells in einer Störungstheorie bis zu beliebigen Ordnungen zu erhalten. Hierzu wurden alle in solch einer Störungsentwicklung auftretenden Matrixelemente berechnet. Damit ist es nun möglich, die Auswirkungen von Verunreinigungen auf den Magnetismus eines Quantensystems zu untersuchen.
Als Anwendung dieser Methode kann man zum Beispiel die niedrigliegenden Anregungen im ferromagnetischen Fall berechnen, da hier im Gegensatz zum antiferromagnetischen Fall wegen der endlichen Anzahl der Bethe-Parameter auch nur endlich viele Zerlegungen dieser Lösungsmengen zu betrachten sind [17].
Weiterhin sind folgende Verallgemeinerungen unserer Methode möglich:

- Störungstheorie für XXX-Modelle mit beliebigem Spin
- Störungstheorie für das XXZ-Modell, d.h. dem Heisenberg-Modell, bei dem sich eine Spin-Kopplung von den beiden anderen unterscheidet

Danksagung

Ich möchte mich bei Herrn Prof. Flume für die Aufnahme in die Arbeitsgruppe, die Themenstellung und die Unterstützung bei der Bearbeitung dieser bedanken. Weiterer Dank für technische Unterstützung gilt A. Wißkirchen und M. Rösgen.

References

[1] W. Heisenberg, Zur Theorie des Ferromagnetismus, *Zeitschrift für Physik* **49** (9-10), 619-636, (1928)

[2] H. Bethe; Zur Theorie der Metalle I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette, *Zeitschrift für Physik* **71**, 205-226, (1931).

[3] L.A. Takhtadzhan, L.D. Faddeev; The Quantum Method of the Inverse Problem and the XYZ-Model, *Russian Math. Surveys* **34**, 11-68, (1979).

[4] N.M. Bogoliubov, A.G. Izergin, V.E. Korepin, Structure of the Vacuum in the Quantum Sine-Gordon Model, *Phys. Lett.* **159B**, 345-347, (1985).

[5] E.H. Lieb, F.Y. Wu, Absence of Mott Transition in an exact Solution of the short-range One-Band Model in One-Dimension, *Phys. Rev. Lett.* **20**, 1445-1449, (1968)

[6] V.E. Korepin, N.M. Bogoliubov, A.G. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge University Press, (1993)

[7] H.M. Babujian; Exact Solution of the Isotropic Heisenberg Chain with arbitrary Spin: Thermodynamics of the Model, *Nucl. Phys.* **B215**, 317-336, (1983).

[8] L.A. Takhtajan; Introduction to algebraic Bethe Ansatz, in *Exactly solvable Problems in Condensed Matter and Relativistic Field Theory*, 175-219, Springer: Berlin, (1985)

[9] L.D. Faddeev; Lectures on the Quantum Inverse Scattering Method, in *Integrable Systems*, 24-70, World Scientific: Singapur, (1987)

[10] A.N. Kirillov; Combinatorial Identities and Completeness of Eigenstates of the Heisenberg Magnet, *J. Sov. Math.* **30**, 2298, (1985).

[11] A.N. Kirillov; Completeness of States of the generalized Heisenberg Magnet, *J. Sov. Math.* **36**, 115, (1987).

[12] A.A. Vladimirov; Proof of the Invariance of the Bethe-Ansatz Solutions under Complex Conjugation, *Theor. Math. Phys.* **66**, 102-105, (1986).

[13] V.E. Korepin; Calculation of Norms of Bethe Wave Functions, *Comm. Math. Phys.* **86**, 391-418, (1982).

[14] H. J. De Vega; Yang-Baxter Algebras, Integrable Theories and Quantum Groups, *Int. J. Mod. Phys.* **A, Vol. 4, No. 10**, 2371-2463, (1989)

[15] H.M. Babujian, R. Flume; private Mitteilung

[16] H.M. Babujian; private Mitteilung an R. Flume

[17] T.-D. Albert; *Störungstheoretische Berechnung der untersten Anregungen eines inhomogenen XXX-Modells*, Diplomarbeit, Universität Bonn, (1995)