Nichtrenormierungstheoreme für chirale Vertizes in Komponentenfeldern

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Die Veröffentlichung "Supergauge Transformations in four Dimensions" von J. Wess und B. Zumino aus dem Jahr 1974 [1] beinhaltet das erste global supersymmetrisch-invariante Modell in 4 Dimensionen. Es besteht an physikalischen Freiheitsgraden nur aus einem Boson- und einem Fermion-Feld und einer linearen Symmetrietransformation zwischen den beiden Feldern, der Supersymmetrie. Zusätzlich gibt es ein Hilfsfeld mit algebraischer Bewegungsgleichung, das bewirkt, daß diese Transformationen eine geschlossene Algebra bilden.
Bis zum Ende des Jahres 1975 waren viele Konsequenzen aus dieser neuen Symmetrie für das sogenannte Wess-Zumino-Modell bekannt. Die mögliche Anzahl der unabhängigen Parameter des Modells reduzierte sich von 20 auf zunächst 3 [2]: ein Massenparameter und eine Kopplungskonstante sowie ein Parameter für die Wellenfunktionsrenormierung. Quadratische Divergenzen, der Vakuumerwartungswert des Energie-Impulstensors, Vakuum-Diagramme und Tadpoles verschwanden [3, 4]. Doch die Supersymmetrie verbessert das Divergenzverhalten des Modells noch darüber hinaus. Insbesondere fand man durch Rechnungen in 1. [5] und 2. Ordnung [2] der Störungstheorie, daß die Massen- sowie die Kopplungsterme nicht renormiert werden, obwohl entsprechende supersymmetrisch-invariante Counterterme existieren. Nur die Wellenfunktionsrenormierung bleibt in jeder Ordnung als ein freier Parameter der Theorie. Die Entwicklung des Superraumformalismus [6] erlaubte es, die Abwesenheit von Divergenzen zu den Massen- und Kopplungstermen aufgrund der Struktur der Feynmanregeln im Superraum und einer expliziten Auswertung der Supergraphen bei verschwindendem Quadrat des Viererimpulses zu verstehen [7]. Doch da die Divergenzstruktur einer Theorie nicht davon abhängt, in welchem Formalismus sie präsentiert wird, ob im Superraumformalismus oder im Komponentenfeldformalismus, blieb der tiefere Grund für das Verschwinden dieser Divergenzen weiterhin rätselhaft.
Im Anschluß trugen einige Autoren dazu bei [8, 9], den Formalismus zu vereinfachen und die fortan als "Nichtrenormierungstheoreme" bezeichnete Aussage über die Abwesenheit der Divergenzen der Massen- und Kopplungsterme transparenter zu machen, welche in dieser Form in alle Lehrbücher der Supersymmetrie, z.B. [10, 11, 12, 13], Eingang gefunden haben. Gerade das verbesserte Divergenzverhalten von supersymmetrischen Theorien hat zusammen mit weiteren wünschenswerten Eigenschaften, z.B. einer Lösung des "Hierarchie-Problems", zu einem intensiven Studium dieser Theorien geführt, obwohl bisher kein experimenteller Hinweis für ein Vorliegen der Supersymmetrie in der Natur gefunden werden konnte. So war es ein Nachteil, daß die Formulierung der Nichtrenormierungstheoreme auf den Superraumformalismus angewiesen war, zu-

mal viele physikalisch relevante Modelle aufgrund ihrer algebraischen Sturktur nicht im Superraum formuliert werden können.
Erst der Beweis der Nichtrenormierungstheoreme unabhängig von der expliziten Gestalt der Supergraphen im Superraum in [14] ermöglichte es, diesen Sachverhalt aus der algebraischen Struktur des Modells zu verstehen. Die Analyse beruht wesentlich auf der kohomologischen Struktur der Supersymmetrie-Transformationen, nämlich daß der Wechselwirkungsanteil der Wirkung eine zweite Supersymmetrie-Variation eines niederdimensionalen Feldmonoms ist. In der Folge können nun Modelle studiert werden, die keine Formulierung im Superraum erlauben. Damit können unter anderem auch die supersymmetrischen Eichtheorien in der Wess-Zumino-Eichung [15, 16] und schließlich auch die minimale supersymmetrische Erweiterung des Standard-Modells (MSSM) studiert werden. Dies ist besonders relevant, da alle eher phänomenologisch orientierten Arbeiten den Komponentenfeldformalismus und nicht den Superraumformalismus nutzen. Aus diesem Grund ist eine Aufklärung der UV-Struktur der Modelle in Komponentenfeldern hilfreich.
In einem ersten Schritt sollen in dieser Arbeit die Nichtrenormierungstheoreme für die chiralen Vertizes im Wess-Zumino-Modell in Komponentenfeldern ohne die Hilfsfelder F, $\bar{F}$ abgeleitet werden. Dieses Modell kann als stark vereinfachtes Spielzeugmodell für den Materiesektor des MSSM angesehen werden [17].
Dazu werden im wesentlichen zwei Komponenten benötigt. Zum einen muß man berücksichtigen, daß nach der Elimination der Felder F, $\bar{F}$ die Feldtransformationen nichtlinear sind und die Supersymmetrie-Algebra sich nur noch "on-shell", d.h. auf den Bewegungsgleichungen schließt. Die Renormierung des Wess-Zumino-Modells mit nichtlinearen Feldtransformationen wurde jedoch bereits in [18, 19] vorgeführt, worauf in dieser Arbeit zurückgegriffen wird. Zum anderen werden analog zu [14] die chiralen und antichiralen Wechselwirkungsvertizes an ein äußeres Feldmultiplett der Massendimension Null gekoppelt, welches als Kopplungsfeld interpretiert wird. Die Nichtrenormierungstheoreme ergeben sich damit als direkte Konsequenzen der Supersymmetrie-Ward-Identitäten des erweiterten Modells mit Hilfe einer neuen R'-Symmetrie. Das ursprüngliche Modell erhält man im Limes des konstanten Kopplungsfeldes.
Das Ergebnis dieser Arbeit ist, daß die chiralen Vertizes des Wess-Zumino-Modells weiterhin konvergent bis auf Wellenfunktionsrenormierungen sind. In Analogie zur Formulierung im Superraum verbietet die R'-Symmetrie das Auftreten von Countertermen für die Renormierung der Massen bzw. Kopplungskonstante, wodurch nur ein freier Parameter in jeder Ordnung übrig bleibt. Als Folge der Nicht-Linearität der Feldtransformationen ändert sich aber letztlich auch die Struktur der Nichtrenormierungsthoereme, so daß, im Gegensatz zum Wess-Zumino-Modell mit Hilfsfeldern, nicht mehr alle Beiträge

der chiralen Vertizes bei $p^2 = 0$ verschwinden.
Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut:
Das 2. Kapitel stellt das Wess-Zumino-Modell mit seinen bekannten Eigenschaften sowie die Formulierung der Nichtrenormierungstheoreme für die chiralen Vertizes im Superraumformalismus vor. Anschließend werden im 3. Kapitel die Hilfsfelder im Modell mit konstanter Kopplung eliminiert und die algebraische Renormierung des Modells diskutiert. Das 4. Kapitel führt die lokalen Kopplungen ein und zeigt wie die R'-Symmetrie es erlaubt, die Vertizes des gewöhnlichen Wess-Zumino-Modells aus denen des erweiterten zurückzuerhalten. Es beinhaltet die Ergebnisse für die Nichtrenormierungstheoreme im Modell ohne Hilfsfelder sowie eine Diskussion einiger exemplarischer Vertizes des Modells.

2. Wess-Zumino-Modell mit Hilfsfeldern

In diesem Kapitel wird das Wess-Zumino-Modell mit den Hilfsfeldern F, $\bar{F}$ als Ausgangspunkt für die anschließende Diskussion eingeführt. Die Ward-Identitäten als Hilfsmittel zur Ableitung der Folgerungen aus der Supersymmetrie des Modells werden vorgestellt und die Form der Nichtrenormierungstheoreme der chiralen Vertizes basierend auf der Analyse der Feynmanregeln für die Supergraphen wird kurz skizziert.

2.1. Supersymmetrie

Das Wess-Zumino-Modell ist das einfachste und kleinste supersymmetrische Modell in 4 Dimensionen. Es beinhaltet nur ein komplexes, skalares Feld $\varphi(x)$ mit kanonischer Dimension 1, ein Weyl-Feld $\psi_\alpha(x)$ mit Dimension $\frac{3}{2}$ sowie ein weiteres komplexes, skalares Feld $F(x)$ mit Dimension 2.
Die Supersymmetrie-Transformationen der Felder können weitgehend aus der Forderung nach einer linear realisierten Boson-Fermion-Symmetrie hergeleitet werden. Man fordert:

$$\begin{aligned} &\delta_\alpha \varphi = \psi_\alpha, \\ &\bar{\delta}_{\dot\alpha} \bar{\varphi} = \bar{\psi}_{\dot\alpha}. \end{aligned} \tag{1}$$

Die explizite Gestalt der Supersymmetrie-Transformationen folgt mit der Einschränkung $\delta_\alpha \bar{\varphi} = 0$ für ein chirales Supermultiplett und weiteren Einschränkungen wie Lorentzinvarianz, Parität und einer geschlossenen Algebra:

$$\begin{aligned} &\delta_\alpha \varphi = \psi_\alpha && \bar{\delta}_{\dot\alpha} \varphi = 0 \\ &\delta_\alpha F = 0 && \bar{\delta}_{\dot\alpha} F = i\, \partial\!\!\!/_{\beta\dot\alpha} \psi^\beta \\ &\delta_\alpha \psi^\beta = 2\delta_\alpha^\beta F && \bar{\delta}_{\dot\alpha} \psi_\beta = 2i\, \partial\!\!\!/_{\beta\dot\alpha} \varphi \\ &\delta_\alpha \bar{\varphi} = 0 && \bar{\delta}_{\dot\alpha} \bar{\varphi} = \bar{\psi}_{\dot\alpha} \\ &\delta_\alpha \bar{\psi}_{\dot\beta} = 2i\, \partial\!\!\!/_{\alpha\dot\beta} \bar{\varphi} && \bar{\delta}_{\dot\alpha} \bar{\psi}^{\dot\beta} = -2\delta_{\dot\alpha}^{\dot\beta} \bar{F} \\ &\delta_\alpha \bar{F} = -i\, \partial\!\!\!/_{\alpha\dot\beta} \bar{\psi}^{\dot\beta} && \bar{\delta}_{\dot\alpha} \bar{F} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Damit lautet die Supersymmetrie-Algebra:

$$\begin{aligned} &\{\delta_\alpha, \delta_\beta\} = \left\{\overline{\delta}_{\dot\alpha}, \overline{\delta}_{\dot\beta}\right\} = 0 \\ &\left\{\delta_\alpha, \overline{\delta}_{\dot\alpha}\right\} = 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu. \end{aligned} \tag{3}$$

2.2. Klassische Wirkung

Die Wirkung des Wess-Zumino-Modells besteht aus einem kinetischen, einem Massen- sowie einem Wechselwirkungsanteil, die jeweils für sich invariant unter den Transformationen (2) sind:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{WZ} &= \Gamma_{kin} + \Gamma_m + \Gamma_{int} \\
&= \int dx \Big[\Big(\partial^\mu \varphi \partial_\mu \bar{\varphi} + \frac{i}{2} \psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} + F\bar{F} \Big) \\
&\qquad\qquad - \frac{m}{2} \Big(2\varphi F - \frac{1}{2}\psi^2 + c.c. \Big) \\
&\qquad\qquad - \frac{\lambda}{12} \Big(3\varphi^2 F - \frac{3}{2}\varphi\psi^2 + c.c. \Big) \Big].
\end{aligned} \tag{4}
$$

Die Felder F, $\bar{F}$, die zunächst eingeführt wurden, um eine geschlossene Algebra zu erhalten, stellen keine physikalischen Freiheitsgrade des Modells dar, da sie nicht propagieren und also ihre Bewegungsgleichungen rein algebraisch zu lösen sind.
Im Superraumformalismus, der für die Ableitung der Nichtrenormierungstheoreme bisher unentbehrlich war und in Appendix B kurz vorgestellt wird, lautet die klassische Wirkung des Wess-Zumino-Modells:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{WZ} = \frac{1}{16} \int dV A e^{2i\Theta\sigma\bar{\Theta}\partial} \bar{A} + \frac{1}{4} \int dS \left(\frac{m}{2} A^2 + \frac{\lambda}{12} A^3 \right) \\
+ \frac{1}{4} \int d\bar{S} \left(\frac{m}{2} \bar{A}^2 + \frac{\lambda}{12} \bar{A}^3 \right),
\end{aligned} \tag{5}
$$

$$
A(x,\Theta) = \varphi(x) + \Theta\psi(x) + \Theta^2 F(x), \qquad \bar{A}(x,\bar{\Theta}) = \bar{\varphi}(x) + \bar{\Theta}\bar{\psi}(x) + \bar{\Theta}^2 \bar{F}(x). \tag{6}
$$

Dabei ist A ($\bar{A}$) ein chirales (antichirales) Superfeld in chiraler (antichiraler) Darstellung. Die Wirkung ist invariant unter den Supersymmetrietransformationen B.10 bzw. B.12.

2.3. Ward-Identität

Die Symmetrien der klassischen Wirkung können auch in funktionaler Form über die Ward-Identität-Operatoren (z.B. [20]) ausgedrückt werden. Wenn $\delta_T\Phi$ die infinitesimale Transformation mit dem Generator T der Symmetrie-Gruppe ist, dann ist:

$$
W_T = -i \sum_\Phi \int \delta_T \Phi \frac{\delta}{\delta\Phi} \tag{7}
$$

der dazu gehörige Ward-Identität-Operator. Die Invarianz der klassischen Wirkung läßt sich dann schreiben als:

$$W_T \Gamma = 0. \tag{8}$$

Gleichung (8) heißt Ward-Identität. Die Algebra der Generatoren

$$[\delta_{T_a}, \delta_{T_b}] = f_{abc} \delta_{T_c} \tag{9}$$

überträgt sich mit der Def.(7) auf die Operatoren W_T:

$$[W_{T_a}, W_{T_b}] = -i f_{abc} W_{T_c}. \tag{10}$$

Die Ward-Identität-Operatoren sind, wie in Kapitel 3.2 deutlich wird, die geeigneten Objekte für die algebraische Renormierung eines Modells, da sie die Symmetrie eines Modells auch in höheren Ordnungen der Störungstheorie ausdrücken, wenn Γ als das erzeugende Funktional für 1PI-Diagramme (s. Appendix A) verstanden wird. Mit den Transformationen (2) erhalten wir für die Operatoren W_α und $\overline{W}_{\dot\alpha}$ im Wess-Zumino-Modell:

$$\begin{aligned} W_\alpha(\Gamma) &= -i \int dx \Big(\psi_\alpha \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi} + 2\bar{F} \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi^\alpha} - 2i \ \partial\!\!\!/_{\alpha\dot\beta} \bar{\varphi} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_{\dot\beta}} - i \ \partial\!\!\!/_{\alpha\dot\beta} \bar{\psi}^{\dot\beta} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{F}} \Big) \\ \overline{W}_{\dot\alpha}(\Gamma) &= -i \int dx \Big(\bar{\psi}_{\dot\alpha} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\varphi}} - 2\bar{F} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}^{\dot\alpha}} - 2i \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_\beta} \ \partial\!\!\!/_{\beta\dot\alpha} \varphi + i \frac{\delta \Gamma}{\delta F} \ \partial\!\!\!/_{\beta\dot\alpha} \psi^\beta \Big). \end{aligned} \tag{11}$$

Die Operatoren erfüllen also folgende Algebra:

$$\begin{aligned} &\{W_\alpha, W_\beta\} = \left\{\overline{W}_{\dot\alpha}, \overline{W}_{\dot\beta}\right\} = 0 \\ &\left\{W_\alpha, \overline{W}_{\dot\alpha}\right\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} W_\mu, \end{aligned} \tag{12}$$

wobei W_μ der zu den Translationen gehörende Ward-Identität-Operator ist:

$$W_\mu = -i \sum_\phi \int dx \partial_\mu \phi \frac{\delta}{\delta \phi}. \tag{13}$$

Da die klassische Wirkung und das Vertex-Funktional translationsinvariant sind, gilt:

$$W_\mu \Gamma = 0. \tag{14}$$

Die Supersymmetrie-Ward-Identitäten (11) sind für das Vertexfunktional erfüllt, d.h.:

$$W_\alpha(\Gamma) = \overline{W}_{\dot\alpha}(\Gamma) = 0. \tag{15}$$

Aus ihnen folgen die bekannten Eigenschaften supersymmetrischer Modelle, d.h. sie können insbesondere benutzt werden, um die Eigenschaften des Wess-Zumino-Modells zu überprüfen. So folgt zum Beispiel unmittelbar aus der Ward-Identität, daß alle Tadpole-Diagramme im Wess-Zumino-Modell in allen Ordnungen verschwinden:

$$\frac{\delta}{\delta\psi^\beta} W_\alpha(\Gamma)\bigg|_{\phi_i=0} = \epsilon_{\alpha\beta}\Gamma_\varphi(0) = 0. \tag{16}$$

Die 1PI Greenschen Funktionen erhält man aus dem Vertexfunktional durch Ableitung nach den Feldern des Modells, d.h.:

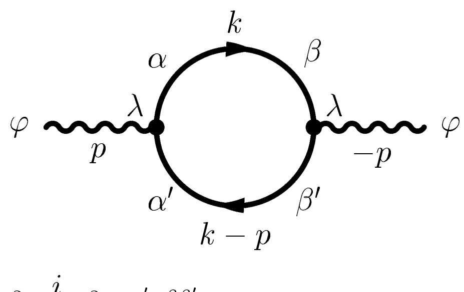
$$\frac{\delta^m}{\delta\phi^{i_1}(x_1)...\delta\phi^{i_m}(x_m)}\Gamma\bigg|_{\phi_i=0} =: \Gamma_{\phi^{i_1}...\phi^{i_m}}(x_1...x_m). \tag{17}$$

$$\phi^i = \varphi, \psi^\alpha, F, c.c.$$

Entsprechend folgt, daß die nach *power-counting* quadratisch divergenten Diagramme verschwinden, da sich fermionische und bosonische Beiträge gegenseitig aufheben, wie an dem Beispiel $\Gamma_{\varphi\varphi}$ in 1-Loop erkannt werden kann. (Für eine Zusammenfassung der Feynmanregeln des Wess-Zumino-Modells s. Appendix C):

$$\Gamma^{(1)}_{\varphi\varphi} = \Gamma^f_{\varphi\varphi} + \Gamma^b_{\varphi\varphi} = 0. \tag{18}$$

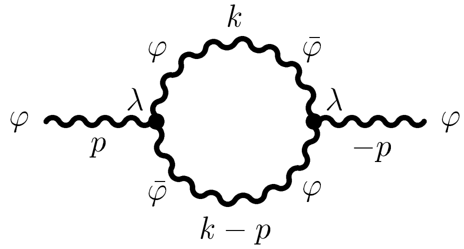
Der fermionische Beitrag $\Gamma^f_{\varphi\varphi}$ lautet:



$$= 2\frac{i}{\hbar}\int dp \left[\lambda^2(\frac{i}{8\hbar})^2 \epsilon^{\alpha\alpha'}\epsilon^{\beta\beta'}\Delta_{c\alpha\beta}(k)\Delta_{c\alpha'\beta'}(k-p)\right] \tag{19}$$

$$= i\hbar(\frac{\lambda m}{2})^2 \int dp \left[\frac{1}{((k-p)^2-m^2)(k^2-m^2)}\right]. \tag{20}$$

Der bosonische Beitrag $\Gamma^{b}_{\varphi\varphi}$ lautet:



$$= 4\frac{i}{\hbar}\int dp\left[\lambda^2(\frac{-im}{4\hbar})^2\Delta_c(k)\Delta_c(k-p)\right] \tag{21}$$

$$= -i\hbar(\frac{\lambda m}{2})^2\int dp\left[\frac{1}{((k-p)^2-m^2)(k^2-m^2)}\right]. \tag{22}$$

Entsprechend folgt, daß $\Gamma_{\varphi\cdots\varphi}$ in allen Schleifenordnungen Null ist. Eine ausführliche Diskussion des Wess-Zumino-Modells und dessen Renormierung findet man in [21].

2.4. Nichtrenormierungstheoreme im Supergraphenformalismus

Auffällig an der Wirkung des Wess-Zumino-Modells im Superraumformalismus (5) ist, daß sowohl der Massenterm als auch der Wechselwirkungsterm chirale Integrale sind, d.h. sie werden nicht als Integrale über den gesamten Superraum, sondern nur über einen Teilraum geschrieben (B.19). Als eine direkte Konsequenz aus den Superraum-Feynmanregeln für das Wess-Zumino-Modell, die hier nicht abgeleitet werden sollen, folgt nun, daß jeder Beitrag zum Vertexfunktional Γ als Integral über den gesamten Superraum geschrieben werden kann:

$$\Gamma = \sum_n \int d^2\theta d^2\bar{\theta}\int d^4x_1\cdots d^4x_n F_1(x_1,\theta,\bar{\theta})\cdots F_n(x_n,\theta,\bar{\theta})G(x_1,\cdots,x_n), \tag{23}$$

Die Terme $F(x,\theta,\bar{\theta})$ sind Produkte von Superfeldern und kovarianten Ableitungen von Superfeldern während $G(x_1,\cdots,x_n)$ eine translationsinvariante Funktion ist, die nur noch von den Ortskoordinaten abhängt. Da es also keine Beiträge

$$\int d^2\theta\int d^4x_1\cdots d^4x_n A(1)\cdots A(n)G(x_1,\cdots,x_n) \qquad i=(x_i,\theta) \tag{24}$$

gibt, kann es auch insbesondere keine unabhängigen Counterterme für die Masse bzw. die Kopplungskonstante geben. Alle Beiträge zu den chiralen Vertexfunktionen sind von der Form:

$$\int d^2\theta d^2\bar{\theta}\int d^4x_1\cdots d^4x_n\Big[D_1^\alpha A(1)D_\alpha^2 A(2)\cdots A(n)G_a(x_1,\cdots,x_n)$$
$$+ D_1^\alpha D_\alpha^1 A(1)A(2)\cdots A(n)G_b(x_1,\cdots,x_n)\Big]. \tag{25}$$

Die D^α sind die kovarianten Ableitung aus (B.10). Das Ausintegrieren der $\bar{\theta}$-Abhängigkeit liefert:

$$\propto \int d^2\theta \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \Big[\partial^1_\mu A(1) \partial^\mu_2 A(2) \cdots A(n) G_a(x_1, \cdots, x_n) + \partial^\mu_1 \partial^1_\mu A(1) A(2) \cdots A(n) G_b(x_1, \cdots, x_n) \Big]. \qquad (26)$$

Die Beiträge zu den chrialen Vertexfunktionen sind also konvergent und verschwinden bei $p_1^2 = 0$.

Dies ist eine Formulierung des Inhalts der Nichtrenormierungstheoreme für das Wess-Zumino-Modells, während andere äquivalente Formulierungen existieren. Allen gemein ist, daß sie keine unmittelbaren Konsequenzen aus der Supersymmetrie sind, sondern auf den Feynmanregeln der Supergraphen im Superraum beruhen und somit eben nicht für Modelle verallgemeinerbar sind, die keine Formulierung im Superraum erlauben. Auch sind die Konsequenzen der Nichtrenormierungstheoreme für die Vertizes in Komponentenfeldern nicht transparent. Diese "Schwächen" beseitigt die Formulierung der Nichtrenormierungstheoreme aus [14], die im Kapitel 4 für das Wess-Zumino-Modell ohne Hilfsfelder nachvollzogen wird. Doch zunächst soll das Modell ohne Hilfsfelder vorgestellt und diskutiert werden.

3. Wess-Zumino-Modell ohne Hilfsfelder

In diesem Kapitel wird die Renormierung des Wess-Zumino-Modells in Komponentenfeldern ohne die Hilfsfelder F, $\bar{F}$ rekapituliert. Nach der Elimination der Hilfsfelder werden die infinitesimalen Feldtransformationen nicht-linear und die Supersymmetrie-Algebra schließt sich nur noch "on-shell", d.h. nur auf physikalisch propagierenden Feldern, die die Bewegungsgleichungen erfüllen. Da für die Anwendung der Methode der algebraischen Renormierung eine geschlossene Algebra unabdingbar ist, stellt diese Tatsache zunächst ein Problem dar. Gewöhnlich wird die Renormierung von Modellen mit nichtlinearen Feldtransformationen, also z.B. den supersymmetrischen Eichtheorien in der Wess-Zumino-Eichung, mit Hilfe des BRS-Formalismus durchgeführt. Dies ist hier nicht notwendig, da durch die Kopplung an ein einzelnes äußeres Feld erreicht wird, daß die Supersymmetrie-Ward-Identität geschlossen geschrieben und eine "off-shell" geschlossene Algebra dieser Operatoren angegeben werden kann. Das Kapitel 3 basiert zu einem großen Teil auf [18, 19], wobei nur die Notation an diese Arbeit angepaßt wurde.

3.1. Supersymmetrie-Algebra

Die klassische Wirkung des Wess-Zumino-Modells lautete:

$$\begin{aligned}\Gamma_{WZ} = \int dx \Big[& \partial^\mu \varphi \partial_\mu \bar{\varphi} + \frac{i}{2} \psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} + F\bar{F} \\ & - \frac{m}{2}\left(2\varphi F - \frac{1}{2}\psi^2 + c.c.\right) \\ & - \frac{1}{12}\left(3\lambda\varphi^2 F - \frac{3}{2}\lambda\varphi\psi^2 + c.c.\right)\Big] .\end{aligned} \tag{27}$$

Die Hilfsfelder F, $\bar{F}$ werden über die Bewegungsgleichungen eliminiert:

$$\frac{\delta\Gamma_{WZ}}{\delta F} = \bar{F} - m\varphi - \frac{\lambda}{4}\varphi^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{F} = m\varphi + \frac{\lambda}{4}\varphi^2 \tag{28}$$

und entsprechend für F.
Für die klassische Wirkung mit lokaler Kopplung ohne Hilfsfelder erhält man also:

$$\begin{aligned}\Gamma'_{WZ} = \int dx \, & \left(\partial^\mu \varphi \partial_\mu \bar{\varphi} + \frac{i}{2}\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} - m^2\varphi\bar{\varphi} - \frac{\lambda^2}{16}\varphi^2\bar{\varphi}^2\right) \\ & + \left(-\frac{\lambda m}{4}\varphi^2\bar{\varphi} + \frac{m}{4}\psi^2 + \frac{\lambda}{8}\varphi\psi^2 + c.c.\right),\end{aligned} \tag{29}$$

was oft geschrieben wird als:

$$\Gamma'_{WZ} = \int dx \Big[\Big(\partial^\mu \varphi \partial_\mu \bar{\varphi} + \frac{i}{2} \psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} \Big) + \Big(\frac{m}{4} \psi^2 + \frac{\lambda}{8} \varphi \psi^2 + c.c. \Big) - V(\varphi, \bar{\varphi}) \Big], \tag{30}$$

wobei $V(\varphi, \bar{\varphi})$ das Potential ist mit:

$$V(\varphi, \bar{\varphi}) = (F\bar{F})\Big|_{\frac{\delta\Gamma'_{WZ}}{\delta F} = \frac{\delta\Gamma'_{WZ}}{\delta \bar{F}} = 0} = \Big| m\varphi + \frac{\lambda}{4}\varphi^2 \Big|^2 . \tag{31}$$

Die Wirkung ist invariant unter folgenden Supersymmetrie-Transformationen:

$$\begin{aligned}
\delta_\alpha \varphi &= \psi_\alpha & \bar{\delta}_{\dot{\alpha}} \varphi &= 0 \\
\delta_\alpha \psi^\beta &= 2\delta_\alpha^\beta (m\bar{\varphi} + \frac{\lambda}{4}\bar{\varphi}^2) & \bar{\delta}_{\dot{\alpha}} \psi_\beta &= 2i\, \partial\!\!\!/_{\beta\dot{\alpha}} \varphi \\
\delta_\alpha \bar{\varphi} &= 0 & \bar{\delta}_{\dot{\alpha}} \bar{\varphi} &= \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \\
\delta_\alpha \bar{\psi}_{\dot{\beta}} &= 2i\, \partial\!\!\!/_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\varphi} & \bar{\delta}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}} &= -2\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} (m\varphi + \frac{\lambda}{4}\varphi^2).
\end{aligned} \tag{32}$$

Allerdings sind die Feldtransformationen nun nicht-linear und die Supersymmetrie-Algebra schließt sich für die Spinoren ψ_α, $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$ nur noch auf den Bewegungsgleichungen, d.h.

$$\begin{aligned}
\{\delta_\alpha, \delta_\beta\}\, \phi &= \left\{\bar{\delta}_{\dot{\alpha}}, \bar{\delta}_{\dot{\beta}}\right\} \phi = 0 \qquad \phi = \varphi, \bar{\varphi}, \psi, \bar{\psi} \\
\left\{\delta_\alpha, \bar{\delta}_{\dot{\alpha}}\right\} \varphi &= 2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu \varphi \\
\left\{\delta_\alpha, \bar{\delta}_{\dot{\alpha}}\right\} \psi^\beta &= 2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu \psi^\beta - 4\delta_\alpha^\beta \left(\frac{i}{2} \partial_\mu \psi^\gamma \sigma^\mu_{\gamma\dot{\alpha}} - \frac{m}{2} \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} - \frac{1}{4} \lambda \bar{\varphi} \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \right) \\
&= 2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu \psi^\beta - 4\delta_\alpha^\beta \frac{\delta\Gamma'_{WZ}}{\delta \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Dieser Aspekt verhindert die direkte Renormierung von (29, 32), also die Implementierung der Supersymmetrie in allen Loop-Ordnungen. Um dem zu begegnen, wird ein äußeres, komplexes Feld u der Dimension 2 eingeführt und an die nicht-lineare Supersymmetrie-Variation gekoppelt. Als neue Wirkung erhält man:

$$\Gamma = \Gamma'_{WZ} + \int dx \left[2u \left(m\varphi + \frac{\lambda}{4}\varphi^2 \right) + 2\bar{u} \left(m\bar{\varphi} + \frac{\lambda}{4}\bar{\varphi}^2 \right) \right], \tag{34}$$

wobei u unter der Paritätstransformation in $\bar{u}$ transformiert. Die Felder u, $\bar{u}$ können benutzt werden, um die nicht-lineare, infinitesimale Transformation der Spinorfelder zu kontrollieren. Die Variation von Γ unter (32) lautet nun:

$$\begin{aligned} \delta_\alpha \Gamma &= \int dx \left(\psi_\alpha \frac{\delta}{\delta\varphi} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{u}} \frac{\delta}{\delta\psi^\alpha} - 2i \; \partial\!\!\!/_{\alpha\dot\beta} \bar\varphi \frac{\delta}{\bar\psi_{\dot\beta}} \right) \Gamma \\ &= \int dx 2u \left(m\psi_\alpha + \frac{\lambda}{2}\varphi\psi_\alpha \right) \end{aligned} \tag{35}$$

und analog für $\bar\delta_{\dot\alpha}\Gamma$.
Naheliegend ist es, ein weiteres äußeres Feld einzuführen, an die rechte Seite von (35) zu koppeln und wiederum die Variation von Γ zu berechnen. Dieser Vorgang würde auf eine potentiell unendliche Anzahl von äußeren Feldern führen. Doch die rechte Seite von (35) kann mit Hilfe der Bewegungsgleichung für das Spinorfeld:

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi} = \frac{i}{2} \; \partial\!\!\!/ \bar\psi + \frac{m}{2}\psi + \frac{\lambda}{4}\varphi\psi \tag{36}$$

geschrieben werden als:

$$\delta_\alpha \Gamma = \int dx \left(4u \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi^\alpha} - 2iu \; \partial\!\!\!/_{\alpha\dot\alpha} \bar\psi^{\dot\alpha} \right). \tag{37}$$

Damit lauten nun die Supersymmetrie-Ward-Identitäten folgendermaßen:

$$\begin{aligned} W_\alpha(\Gamma) &= -i \int dx \Big(\psi_\alpha \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi} + \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{u}} - 4u \right) \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi^\alpha} - 2i \; \partial\!\!\!/_{\alpha\dot\beta} \bar\varphi \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\psi_{\dot\beta}} + 2iu \; \partial\!\!\!/_{\alpha\dot\beta} \bar\psi^{\dot\beta} \Big) \\ &= 0 \\ \overline{W}_{\dot\alpha}(\Gamma) &= -i \int dx \Big(\bar\psi_{\dot\alpha} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\varphi} - \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta u} - 4\bar{u} \right) \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\psi^{\dot\alpha}} - 2i \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi_\beta} \; \partial\!\!\!/_{\beta\dot\alpha}\varphi - 2i\bar{u} \; \partial\!\!\!/_{\beta\dot\alpha}\psi^\beta \Big) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Wie in [18] gezeigt, können die Terme $-4u\frac{\delta}{\delta\psi^\alpha}\Gamma$ und $-4\bar{u}\frac{\delta\bar\psi^{\dot\alpha}}{\delta}\Gamma$ in der Ward-Identität (38) dadurch kompensiert werden, daß ein Term $-4u\bar{u}$ in die Wirkung aufgenommen wird. Zur Definition der Theorie werden also folgende Ward-Identitäten benutzt:

$$\begin{aligned} W_\alpha(\Gamma) &= -i \int dx \Big(\psi_\alpha \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{u}} \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi^\alpha} - 2i \; \partial\!\!\!/_{\alpha\dot\beta} \bar\varphi \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\psi_{\dot\beta}} + 2iu \; \partial\!\!\!/_{\alpha\dot\beta} \bar\psi^{\dot\beta} \Big) \\ &= 0 \\ \overline{W}_{\dot\alpha}(\Gamma) &= -i \int dx \Big(\bar\psi_{\dot\alpha} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\varphi} - \frac{\delta\Gamma}{\delta u} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\psi^{\dot\alpha}} - 2i \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi_\beta} \; \partial\!\!\!/_{\beta\dot\alpha}\varphi - 2i\bar{u} \; \partial\!\!\!/_{\beta\dot\alpha}\psi^\beta \Big) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Die klassische Wirkung des WZ-Modells ohne F-Felder und mit äußeren Feldern u, $\bar{u}$ lautet:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{cl} = \int dx \Bigg[& \left(\partial^\mu \varphi \partial_\mu \bar{\varphi} + \frac{i}{2} \psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} - m^2 \varphi \bar{\varphi} - \frac{\lambda^2}{16} \varphi^2 \bar{\varphi}^2 - 4 u \bar{u} \right) \\
& + \left(-\frac{\lambda m}{4} \varphi^2 \bar{\varphi} + \frac{m}{4} \psi^2 + \frac{\lambda}{8} \varphi \psi^2 + c.c. \right) \\
& + \left(2 m u \varphi + \frac{\lambda}{2} u \varphi^2 + c.c. \right) \Bigg],
\end{aligned} \tag{40}
$$

mit

$$
W_\alpha(\Gamma_{cl}) = 0, \qquad \overline{W}_{\dot{\alpha}}(\Gamma_{cl}) = 0. \tag{41}
$$

Es muß noch bemerkt werden, daß (40) nicht die allgemeinste Lösung von (39) ist. Es könnten noch Terme hinzugefügt werden, die einem linearen F-Term in der Theorie mit Hilfsfeld entsprechen. Allerdings können diese Terme auch wieder durch einen supersymmetrischen *shift* in φ eliminiert werden, so daß sie keine physikalische Bedeutung besitzen und nicht berücksichtigt werden.
Das Transformationsverhalten von Einsetzungen, das im nächsten Abschnitt für die Diskussion der Renormierung des Wess-Zumino-Modells mit nicht-linearen Feldtransformationen benötigt wird, wird durch die linearisierten Versionen der Ward-Identität-Operatoren angegeben. Die Einsetzungen werden als infinitesimale Variationen des Vertex-Funktionals betrachtet:

$$
\Gamma^\Delta = \Gamma + \epsilon \Delta. \tag{42}
$$

Damit folgen aus

$$
W_\alpha \left(\Gamma^\Delta \right) = W_\alpha (\Gamma) + \epsilon W_\alpha^\Gamma (\Delta) + O(\epsilon^2) \tag{43}
$$

die linearisierten Ward-Identität-Operatoren:

$$
\begin{aligned}
W_\alpha^\Gamma &= -i \int dx \left(\psi_\alpha \frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi^\alpha} \frac{\delta}{\delta \bar{u}} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{u}} \frac{\delta}{\delta \psi^\alpha} - 2i \ \partial\!\!\!/_{\alpha \dot{\beta}} \bar{\varphi} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}_{\dot{\beta}}} \right) \\
\overline{W}_{\dot{\alpha}}^\Gamma &= -i \int dx \left(\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\varphi}} - \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}} \frac{\delta}{\delta u} - \frac{\delta \Gamma}{\delta u} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}} - 2i \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi_\beta} \ \partial\!\!\!/_{\beta \dot{\alpha}} \varphi \right).
\end{aligned} \tag{44}
$$

Diese Operatoren sind lineare Funktionale, deren Koeffizienten von dem Vertexfunktional Γ abhängen. Auf den linear transformierenden Feldern wirken die Operatoren wie in (32). Die Transformationen für die Felder u, ψ lauten gerade so, daß sie auf der klassischen Wirkung eine geschlossene Algebra bilden, d.h. mit

$$\begin{aligned}
\delta^{\Gamma}_{\alpha}\psi^{\beta} &= \delta^{\beta}_{\alpha}\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{u}}\right) = 2\delta^{\beta}_{\alpha}\left(m\bar{\varphi} + \frac{\lambda}{4}\bar{\varphi}^2 - 2u\right) \\
\bar{\delta}^{\Gamma}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}} &= -\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta u}\right) = -2\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}\left(m\varphi + \frac{\lambda}{4}\varphi^2 - 2\bar{u}\right) \qquad (45) \\
\bar{\delta}^{\Gamma}_{\dot{\alpha}}u &= -\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}} \\
\delta^{\Gamma}_{\alpha}\bar{u} &= \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi^{\alpha}} \qquad (46)
\end{aligned}$$

und für den Fall, daß Γ die klassische Wirkung Γ_{cl} ist, gilt:

$$\left\{\delta^{\Gamma}_{\alpha}, \bar{\delta}^{\Gamma}_{\dot{\alpha}}\right\}\psi^{\beta} = 2i\sigma^{\mu}{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\psi^{\beta}. \qquad (47)$$

Das Ziel ist es nun, diese Eigenschaft auf die linearisierten Ward-Identität-Operatoren zu übertragen. Durch eine kurze Rechnung kann gezeigt werden, daß die linearisierten Ward-Identität-Operatoren (44) zusammen mit (39) folgende Algebra bilden:

$$\begin{aligned}
&W^{\Gamma}_{\alpha}W_{\beta}(\Gamma) + W^{\Gamma}_{\beta}W_{\alpha}(\Gamma) = 0 \\
&\overline{W}^{\Gamma}_{\dot{\alpha}}\overline{W}_{\dot{\beta}}(\Gamma) + \overline{W}^{\Gamma}_{\dot{\beta}}\overline{W}_{\dot{\alpha}}(\Gamma) = 0 \\
&W^{\Gamma}_{\alpha}\overline{W}_{\dot{\beta}}(\Gamma) + \overline{W}^{\Gamma}_{\dot{\beta}}W_{\alpha}(\Gamma) = 2\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}}W_{\mu}\Gamma. \qquad (48)
\end{aligned}$$

Betrachtet man wiederum eine infinitesimale Variation des Funktionals, so folgt für die letzte Zeile von (48):

$$W^{\Gamma}_{\alpha}\overline{W}_{\dot{\beta}}(\Gamma) + \overline{W}^{\Gamma}_{\dot{\beta}}W_{\alpha}(\Gamma) + \epsilon\left(W^{\Gamma}_{\alpha}\overline{W}^{\Gamma}_{\dot{\beta}} + \overline{W}^{\Gamma}_{\dot{\beta}}W^{\Gamma}_{\alpha}\right)\Delta = 2\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}}W_{\mu}\Gamma + \epsilon 2\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}}W_{\mu}\Delta. \qquad (49)$$

Falls also $W_{\alpha}(\Gamma) = 0$ und $\overline{W}_{\dot{\alpha}}(\Gamma) = 0$ gilt, bilden die linearisierten Ward-Identität-Operatoren auf dem translationsinvarianten Vertexfunktional eine Darstellung der Supersymmetrie-Algebra:

$$\begin{aligned}
\left\{W^{\Gamma}_{\alpha}, \overline{W}^{\Gamma}_{\dot{\alpha}}\right\} &= 2\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}W_{\mu} \\
\left\{W^{\Gamma}_{\alpha}, W^{\Gamma}_{\beta}\right\} &= \left\{\overline{W}^{\Gamma}_{\dot{\alpha}}, \overline{W}^{\Gamma}_{\dot{\beta}}\right\} = 0. \qquad (50)
\end{aligned}$$

Damit ist es gelungen, mit nur einem äußeren Feld eine geschlossene Algebra für die Supersymmetrie-Ward-Identitäten anzugeben.

3.2. Renormierung

In diesem Abschnitt soll nun die algebraische Renormierung des klassischen Modells diskutiert werden. Renormierung soll hier nicht als bloße UV-Subtraktionen verstanden sein, sondern als eine kontrollierte Implementierung von klassischen Symmetrien in allen Ordnungen der Störungstheorie mit Hilfe des Quantenwirkungsprinzips [25].†

Für einige physikalische Theorien ist kein Regularisierungsschema bekannt, welches alle Symmetrien des Modells unverletzt läßt. In der supersymmetrischen QED bricht z.B. die dimensionale Regularisierung die Supersymmetrie, während die Impulssubtraktionen die Eichsymmetrie verletzen [26]. Da die Symmetrie des Modells durch die Regularisierungsschemata gebrochen werden kann, muß also gezeigt werden, daß es in jeder Ordnung nicht-invariante Counterterme gibt, die diese Brechungen ausgleichen, so daß die Ward-Identitäten (39) erfüllt werden können und damit die Supersymmetrie in jeder Ordnung erhalten bleibt. Ist dies nicht möglich, so spricht man von einer Anomalie.

Das Problem, das zu lösen ist, kann nun formuliert werden als:

1. Erweitere die klassische Wirkung $\Gamma_{cl.}$ zu dem erzeugenden Funktional der 1PI-Diagramme, dem Vertex-Funktional Γ.

$$\Gamma = \Gamma_{cl.} + \hbar\Gamma^{(1)} + \hbar^2\Gamma^{(2)} + \cdots \tag{51}$$

2. Zeige, daß die Ward-Identitäten (39) für ganz Γ gelten.

Das Quantenwirkungsprinzip beschreibt ganz allgemein die Auswirkung der Variation des Erzeugenden-Funktionals nach Parametern und Feldern. Es besagt, daß die Wirkung eines Differentialoperators auf Γ zu einer integrierten, lokalen Einsetzung mit definierter Dimension in Γ führt, also insbesondere:

$$W_\alpha\Gamma = \Delta_\alpha\Gamma, \tag{52}$$

wobei Δ_α die Dimension von $W_\alpha(\Gamma)$ hat, nämlich $\frac{9}{2}$.

Die Einsetzung Δ_α ist von der Ordnung $\hbar$, da die klassische Wirkung symmetrisch ist. Als nächstes wird folgende Relation benutzt, die besagt, daß in der Entwicklung in Loop-Ordnungen das Vertex-Funktional Γ mit der Einsetzung Δ_α in niedrigster Ordnung den Vertex Δ_α selber besitzt. Also:

$$\Delta_\alpha\Gamma = \Delta_\alpha + O(\hbar\Delta_\alpha). \tag{53}$$

Auf der rechten Seite sind demnach die Baumdiagramme von den echten Loopdiagrammen getrennt. Die Baumdiagramme sind integrierte, lokale Feldpolynome.

† Für eine zusammenfassende Darstellung der algebraischen Renormierung siehe [22],[23] und [24].

Mit der Relation (53) folgt:

$$W_\alpha \Gamma = \Delta_\alpha + O(\hbar \Delta_\alpha). \tag{54}$$

Bisher war die Einsetzung Δ_α nur durch die Forderung nach Lokalität und eine UV-Dimension von $\frac{9}{2}$ eingeschränkt. Doch die im letzten Abschnitt eingeführte Algebra (48) bringt weitere Einschränkungen, die das Aufstellen und Lösen von Konsistenz-Bedingungen ermöglichen. Die Einsetzungen Δ_α bzw. $\overline{\Delta}_{\dot\alpha}$ müssen in niedrigster Ordnung $\hbar$ folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} &W^\Gamma_\alpha \Delta_\beta + W^\Gamma_\beta \Delta_\alpha = 0 \\ &\overline{W}^\Gamma_{\dot\alpha} \overline{\Delta}_{\dot\beta} + \overline{W}^\Gamma_{\dot\beta} \overline{\Delta}_{\dot\alpha} = 0 \\ &W^\Gamma_\alpha \overline{\Delta}_{\dot\beta} + \overline{W}^\Gamma_{\dot\beta} \Delta_\alpha = 0. \end{aligned} \tag{55}$$

Es kann nun gezeigt werden [18], daß Lösungen von (55) mit folgender Form existieren:

$$\Delta_\alpha = W^\Gamma_\alpha \hat\Delta \qquad \overline{\Delta}_{\dot\alpha} = \overline{W}^\Gamma_{\dot\alpha} \hat\Delta, \tag{56}$$

wobei $\hat\Delta$ UV-Dimension 4 und gerade Parität hat $\left(\overline{\hat\Delta} = \hat\Delta\right)$. Daher kann $\hat\Delta$ in die Wirkung als Counterterm absorbiert werden,

$$\Gamma' = \Gamma - \hat\Delta \tag{57}$$

und mit (43) folgt, daß die Verletzungen der Supersymmetrie nun von einer um eins höheren Loop-Ordnung sind:

$$W_\alpha(\Gamma') = W_\alpha(\Gamma) - W^\Gamma_\alpha \hat\Delta + O(\hbar \Delta_\alpha) = O(\hbar^2), \tag{58}$$

da Δ_α ja bereits von der Ordnung $\hbar$ war. Nun kann per Induktion bewiesen werden, daß die Ward-Identitäten (39) in allen Ordnungen der Störungstheorie durch eine geeignete Wahl von Countertermen gelten, und somit die Supersymmetrie nicht durch die Renormierung gebrochen ist und es keine Anomalie gibt.
Somit definiert die Supersymmetrie, d.h.

$$W_\alpha(\Gamma) = 0, \qquad \overline{W}_{\dot\alpha}(\Gamma) = 0, \tag{59}$$

die Theorie eindeutig, wenn die verbleibenden freien Parameter der symmetrischen Counterterme durch Normierungsbedingungen fixiert wurden. Im Wess-Zumino-Modell ohne Hilfsfelder gibt es, genau wie im Wess-Zumino-Modell mit Hilfsfeldern, drei unabhängige freie Parameter [2, 18], die Wellenfunktionsrenormierung sowie Masse und

Kopplungskonstante. Eine Basis für die symmetrischen Counterterme bildet z.B.:

$$\begin{aligned}
\Delta_z &= \frac{1}{2}\int dx \left(\varphi\frac{\delta}{\delta\varphi} + \psi\frac{\delta}{\delta\psi} - u\frac{\delta}{\delta u} + c.c.\right)\Gamma_{cl} \\
\Delta_m &= m\partial_m\Gamma_{cl} \\
\Delta_\lambda &= \lambda\partial_\lambda\Gamma_{cl},
\end{aligned} \tag{60}$$

so daß die Countertermwirkung in L-ter Loopordnung wie folgt lautet:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ct}^{(L)} = \int dx \Big[\tilde{z}^{(L)} \Big\{ &\left(\partial^\mu\varphi\partial_\mu\bar{\varphi} + \frac{i}{2}\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} - m^2\varphi\bar{\varphi} - \frac{\lambda^2}{8}\varphi^2\bar{\varphi}^2 + 4u\bar{u}\right) \\
&+ \left(-\frac{3\lambda m}{8}\varphi^2\bar{\varphi} + \frac{m}{4}\psi^2 + \frac{3\lambda}{16}\varphi\psi^2 + \frac{\lambda}{4}u\varphi^2 + c.c.\right)\Big\} \\
+ z_m^{(L)} &\left\{\left(\frac{m}{4}\psi^2 - \frac{\lambda m}{4}\varphi^2\bar{\varphi} + 2um\varphi + c.c.\right) - 2m^2\varphi\bar{\varphi}\right\} \\
+ z_\lambda^{(L)} &\left\{\left(\frac{\lambda}{8}\varphi\psi^2 - \frac{\lambda m}{4}\varphi^2\bar{\varphi} + \frac{\lambda}{2}u\varphi^2 + c.c.\right) - \frac{\lambda^2}{8}\varphi^2\bar{\varphi}^2\right\}\Big].
\end{aligned} \tag{61}$$

Folgende Normierungsbedingungen bestimmen die Parameter der Theorie eindeutig:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dp^2}\Gamma_{\varphi\bar{\varphi}}(p^2 = \kappa^2) = 1 \\
&\Gamma_{\psi\psi}(p^2 = 0) = \frac{m}{4} \\
&\Gamma_{\varphi\psi\psi}(p_i = 0) = \frac{\lambda}{8},
\end{aligned} \tag{62}$$

wobei κ ein beliebiger Normierungspunkt ist. Die Fixierung der chiralen Vertizes $\Gamma_{\psi\psi}$ und $\Gamma_{\varphi\psi\psi}$ an dem Normierungspunkt $p_i = 0$ ist zunächst noch recht willkürlich. Die Formulierung der Nichtrenormierungstheoreme im Superraumformalismus beruhte auf der Eigenschaft, daß die chiralen Vertizes bei $p^2 = 0$ verschwinden. Ein Ergebnis dieser Arbeit wird sein, daß dies im Modell ohne die F-Felder nur noch für $\Gamma_{\psi\psi}$ gilt, während $\Gamma_{\varphi\psi\psi}$ und alle höheren chiralen Greensfunktionen diese Eigenschaft nicht haben.

3.3. R-Symmetrie

Aufgrund der formalen Gleichheit der konformen R-Symmetrie mit der für die Ableitung der Nichtrenormierungstheoreme entscheidenden R'-Symmetrie, soll an dieser Stelle die R-Symmetrie des Wess-Zumino-Modells ohne Hilfsfelder kurz vorgestellt werden. Die klassische Wirkung (40) ist bis auf die Terme, die linear in der Masse sind, invariant unter folgender Transformation:

$$\delta_R \phi = i n_R^\phi \phi, \tag{63}$$

mit den R-Gewichten n_R der Felder:

	φ	ψ	u
n_R	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$

Tab.1: R-Gewichte der Felder

Der dazu gehörige Ward-Identität-Operator ist:

$$W_R = -i \sum_\phi \int dx \delta_R \phi \frac{\delta}{\delta \phi}. \tag{64}$$

W_R bildet zusammen mit den SUSY-Ward-Identität-Operatoren (38, 44) die Algebra:

$$\begin{aligned} &W_\alpha^\Gamma W_R \Gamma + W_R W_\alpha(\Gamma) = -W_\alpha(\Gamma) \\ &\overline{W}_{\dot\alpha}^\Gamma W_R \Gamma + W_R \overline{W}_{\dot\alpha}(\Gamma) = +\overline{W}_{\dot\alpha}(\Gamma). \end{aligned} \tag{65}$$

Wie in einer zu (50) analogen Rechnung gezeigt werden kann, bildet der Ward-Identität-Operator der R-Symmetrie für den Fall, daß $W_\alpha(\Gamma) = 0$, $\overline{W}_{\dot\alpha}(\Gamma) = 0$ und $W_R \Gamma = 0$ gilt, zusammen mit den linearisierten SUSY-Ward-Identität-Operatoren eine Subalgebra der superkonformen Algebra [13]:

$$\begin{aligned} &\left[W_\alpha^\Gamma, W_R\right] = -W_\alpha^\Gamma \\ &\left[\overline{W}_{\dot\alpha}^\Gamma, W_R\right] = +W_{\dot\alpha}^\Gamma. \end{aligned} \tag{66}$$

Die R-Symmetrie ist auf der klassischen Wirkung weich gebrochen, d.h. ausschließlich durch Terme mit der UV-Dimension ≤ 3:

$$W_R \Gamma^{cl.} = \frac{2m}{3} \int dx \left(\frac{1}{4} \psi^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi \bar\varphi^2 + 2\varphi u - c.c. \right). \tag{67}$$

In [18] wird nun gezeigt, daß diese Eigenschaft auch in der Renormierung erhalten bleibt, d.h.:

$$W_R \Gamma = \Delta_R^{soft} \Gamma \qquad dim \left(\Delta_R^{soft} \right) \leq 3, \tag{68}$$

wobei Γ das erzeugende Funktional der 1PI-Diagramme ist.

4. Wess-Zumino-Modell mit lokaler Kopplung

Zunächst leiten wir in diesem Kapitel die klassische Wirkung des Wess-Zumino-Modells mit lokaler Kopplung und ohne die Hilfsfelder in Komponentenfeldern aus der Superraumformulierung ab. Anschließend wird die Wirkungsweise der neuen R'-Symmetrie an einigen Beispielen aufgezeigt und die Störungstheorie mit lokalen Kopplungsfeldern diskutiert. Es wird erläutert, wie man aus den Vertizes des erweiterten Modells im Limes der konstanten Kopplung die Vertizes des Wess-Zumino-Modells zurückerhält. Schließlich werden die Nichtrenormierungstheoreme für die chiralen Vertizes aus der Supersymmetrie-Ward-Identität im Limes der konstanten Kopplung abgeleitet.

4.1. Klassische Wirkung

Die in Kapitel 2.2. eingeführte klassische Wirkung, ausgedrückt über das chirale Superfeld A und das antichirale Superfeld $\bar{A}$, lautete:

$$\begin{aligned}\Gamma_{WZ} = \frac{1}{16}\int dV A e^{2i\Theta\sigma\bar{\Theta}\partial}\bar{A} + \frac{1}{4}\int dS\left(\frac{m}{2}A^2 + \frac{\lambda}{12}A^3\right)\\ + \frac{1}{4}\int d\bar{S}\left(\frac{m}{2}\bar{A}^2 + \frac{\lambda}{12}\bar{A}^3\right)\end{aligned} \tag{69}$$

mit:

$$A(x,\Theta) = \varphi(x) + \Theta\psi(x) + \Theta^2 F(x), \qquad \bar{A}(x,\bar{\Theta}) = \bar{\varphi}(x) + \bar{\Theta}\bar{\psi}(x) + \bar{\Theta}^2\bar{F}(x). \tag{70}$$

Das Wess-Zumino-Modell mit lokaler Kopplung erhält man nun, indem der Vertex A^3 ($\bar{A}^3$) an ein chirales (antichirales) Superfeld Λ ($\bar{\Lambda}$) der Massendimension Null gekoppelt wird, also:

$$\begin{aligned}\Gamma_{WZ}^{lok} = \frac{1}{16}\int dV A e^{2i\Theta\sigma\bar{\Theta}\partial}\bar{A} + \frac{1}{4}\int dS\left(\frac{m}{2}A^2 + \frac{1}{12}\Lambda A^3\right)\\ + \frac{1}{4}\int d\bar{S}\left(\frac{m}{2}\bar{A}^2 + \frac{1}{12}\bar{\Lambda}\bar{A}^3\right)\end{aligned} \tag{71}$$

mit Λ, $\bar{\Lambda}$ in Komponentenfeldern:

$$\Lambda(x,\Theta) = \lambda(x) + \Theta\chi(x) + \Theta^2 f(x), \qquad \bar{\Lambda}(x,\bar{\Theta}) = \bar{\lambda}(x) + \bar{\Theta}\bar{\chi}(x) + \bar{\Theta}^2\bar{f}(x). \tag{72}$$

Die Kopplungsfelder Λ, $\bar{\Lambda}$ transformieren sich als chirale bzw. antichirale Superfelder unter der Supersymmetrie genauso wie die Felder A, $\bar{A}$ (B.17), d.h. in Komponentenfeldern gilt:

$$\begin{aligned}
&\delta_\alpha \lambda = \chi_\alpha && \bar{\delta}_{\dot\alpha} \lambda = 0 \\
&\delta_\alpha f = 0 && \bar{\delta}_{\dot\alpha} f = i \not{\partial}_{\beta\dot\alpha} \chi^\beta \\
&\delta_\alpha \chi^\beta = 2\delta_\alpha^\beta f && \bar{\delta}_{\dot\alpha} \chi_\beta = 2i \not{\partial}_{\beta\dot\alpha} \lambda \\
&\delta_\alpha \bar\lambda = 0 && \bar{\delta}_{\dot\alpha} \bar\lambda = \bar\chi_{\dot\alpha} \\
&\delta_\alpha \bar\chi_{\dot\beta} = 2i \not{\partial}_{\alpha\dot\beta} \bar\lambda && \bar{\delta}_{\dot\alpha} \bar\chi^{\dot\beta} = -2\delta_{\dot\alpha}^{\dot\beta} \bar f \\
&\delta_\alpha \bar f = -i \not{\partial}_{\alpha\dot\beta} \bar\chi^{\dot\beta} && \bar{\delta}_{\dot\alpha} \bar f = 0.
\end{aligned} \tag{73}$$

Die klassische Wirkung (69) des Wess-Zumino-Modells mit konstanten Kopplungsfeldern erhält man im Limes:

$$\Lambda(x,\Theta) \to \lambda, \qquad \bar\Lambda(x,\bar\Theta) \to \lambda.$$

Dieser Limes kann als "adiabatisches Abschalten" der äußeren Quellen interpretiert werden. Anschaulich bedeutet es, daß die über die Quellen einlaufenden Impulse p gegen Null gehen.
Um die "unphysikalischen" Freiheitsgrade F, $\bar F$ über die Bewegungsgleichungen zu eliminieren, ist es nötig, die Wirkung (71) in Komponentenfelder umzuschreiben:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{WZ}^{lok} &= \Gamma_{kin} + \Gamma_m + \Gamma_{int} \\
&= \int dx \quad \Big[\Big(\partial^\mu \varphi \partial_\mu \bar\varphi + \frac{i}{2} \psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar\psi + F\bar F \Big) \\
&\qquad - \frac{m}{2} \Big(2\varphi F - \frac{1}{2}\psi^2 + c.c. \Big) \\
&\qquad - \frac{1}{12} \Big(3\lambda\varphi^2 F - \frac{3}{2}\lambda\varphi\psi^2 + f\varphi^3 + \frac{3}{2}\varphi^2\psi\chi + c.c. \Big) \Big].
\end{aligned} \tag{74}$$

Terme der klassischen Wirkung, in denen Komponeten von Λ bzw. $\bar\Lambda$ vorkommen, sollen chirale bzw. antichirale Vertizes heißen. Diese Unterscheidung ist natürlich nur in einer Theorie mit lokalen Kopplungen möglich. Die Bewegungsgleichungen für F, $\bar F$ lauten genau wie im Modell mit konstanter Kopplung:

$$\frac{\delta \Gamma_{WZ}^{lok}}{\delta F} = \bar F - m\varphi - \frac{\lambda}{4}\varphi^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \bar F = m\varphi + \frac{\lambda}{4}\varphi^2 \tag{75}$$

und entsprechend für F.
Bei der Elimination der Hilfsfelder geht also jeder Term, der F mit Massendimension 2

enthält, in zwei Terme über. Einer der Terme (φ^2) hat die gleiche Dimension wie der ursprüngliche, der zweite neue Term (φ) hat jedoch eine um 1 reduzierte Massendimension. Also beinhalten insbesondere Superraum-Invarianten der Dimension 5, die aus Gründen der Renormierbarkeit nicht als Counterterme in die effektive Wirkung aufgenommen werden, nachdem F, $\bar{F}$ entfernt wurden, Terme der Massendimension 4. Diese Tatsache wird sich auch in der Struktur der Nichtrenormierungstheoreme widerspiegeln. Darüber hinaus mischen durch den Term $F\bar{F}$ die chiralen und antichiralen Vertizes miteinander und man erhält einen "gemischten" Term $-\frac{1}{16}\lambda\bar{\lambda}\varphi^2\bar{\varphi}^2$.
Für die klassische Wirkung mit lokaler Kopplung ohne Hilfsfelder erhält man also:

$$\begin{aligned}\Gamma'_{WZ} = \int dx \Big[&\Big(\partial^\mu\varphi\partial_\mu\bar{\varphi} + \frac{i}{2}\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} - m^2\varphi\bar{\varphi} - \frac{1}{16}\lambda\bar{\lambda}\varphi^2\bar{\varphi}^2\Big) \\ &+ \Big(\frac{m}{4}\psi^2 - \frac{m}{4}\lambda\varphi^2\bar{\varphi} + \frac{1}{8}\lambda\varphi\psi^2 - \frac{1}{12}f\varphi^3 + \frac{1}{8}\varphi^2\psi\chi + c.c.\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{76}$$

Die Ableitung der Nichtrenormierungstheoreme beruht, wie in [14] gezeigt wurde, auf der kohomologischen Eigenschaft der Supersymmetrie-Feldtransformationen, daß die Wirkung und insbesondere der Wechselwirkungsanteil des Wess-Zumino-Modells mit konstanter Kopplung (4) als zweifache Supersymmetrievariation von Feldpolynomen mit Massendimension 3 geschrieben werden kann.
Mit den Feldtransformationen aus (2) folgt:

$$\Gamma_{WZ} = \int dx \left[\delta_\alpha\delta^\alpha\left(\frac{1}{8}\bar{F}\varphi - \frac{m}{4}\varphi^2 + \frac{1}{12}\varphi^3\right) + c.c.\right], \tag{77}$$

bzw. symbolisch geschrieben:

$$\begin{aligned}\Gamma_{WZ} &= \int dx \left[\delta_\alpha\delta^\alpha P + \bar{\delta}^{\dot{\alpha}}\bar{\delta}_{\dot{\alpha}}\bar{P}\right] \\ dim(\Gamma) \leq 4 & \qquad\qquad dim(P,\bar{P}) \leq 3\end{aligned} \tag{78}$$

Für die Wirkung des Wess-Zumino-Modells ohne Hilfsfelder kann diese algebraische Eigenschaft zunächst nicht nachgewiesen werden. Zwar lassen sich die aus dem Massen- bzw. Wechselwirkungsanteil der Wirkung (74) hervorgehenden Terme als zweifache Variation schreiben, also:

$$\begin{aligned}\Gamma_m|_{F(\bar{\varphi}),\bar{F}(\varphi)} &= \int dx \left(-\frac{m}{8}\delta_\alpha\delta^\alpha(\varphi^2) + c.c.\right) \\ \Gamma_{int}|_{F(\bar{\varphi}),\bar{F}(\varphi)} &= \int dx \left(-\frac{1}{48}\delta_\alpha\delta^\alpha(\lambda\varphi^3) + c.c.\right),\end{aligned} \tag{79}$$

aber für den kinetischen Anteil ist dies nicht möglich. Jede zweifache rein chirale bzw. antichirale Variation eines Feldpolynoms, enthält keine Ableitungsterme, da die Transformation von ψ nicht mehr in F, sondern in die skalaren Felder $\bar{\varphi}$ zurückgeht. Mischt man jedoch chirale und antichirale Transformationen, so erhält man Terme mit den Bewegungsgleichungen für die Spinorfelder. Auch sind die Terme aus (79) nicht mehr supersymmetrisch invariant, d.h.:

$$\int dx \bar{\delta}^{\dot{\alpha}} \delta_\alpha \delta^\alpha \left(\lambda \varphi^3\right) \neq 0, \tag{80}$$

weil das "Durchkommutieren" von $\bar{\delta}^{\dot{\alpha}}$ neben totalen Ableitungen auch Bewegungsgleichungen erzeugt. Das Scheitern dieses ersten Versuches spiegelt die Tatsache wider, daß nach der Elimination der Hilfsfelder die Massen- und Kopplungsanteile sowie der kinetische Teil der Wirkung nicht mehr separat invariant unter Supersymmetrie-Transformationen sind, bzw. daß die SUSY-Algebra nur noch "on-shell" d.h. auf den Bewegungsgleichungen geschlossen ist.

Mit dem Ziel, eine geschlossene algebraische Struktur mit einer endlichen Anzahl von Feldern für die Ward-Identitäten zu finden, gehen wir analog zum dritten Kapitel vor und koppeln den nicht-linearen Anteil an ein komplexes äußeres Feld u über die Ward-Identitäten:

$$\begin{aligned}
W_\alpha(\Gamma) &= -i \int dx \Big(\psi_\alpha \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{u}} \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi^\alpha} - 2i\, \partial\!\!\!/_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\varphi} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}_{\dot{\beta}}} + 2iu\, \partial\!\!\!/_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}} \\
&\qquad + \chi_\alpha \frac{\delta\Gamma}{\delta\lambda} + 2f \frac{\delta\Gamma}{\delta\chi^\alpha} - 2i\, \partial\!\!\!/_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\lambda} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\chi}_{\dot{\beta}}} - i\, \partial\!\!\!/_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\chi}^{\dot{\beta}} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{f}} \Big) \\
&= 0 \\
\overline{W}_{\dot{\alpha}}(\Gamma) &= -i \int dx \Big(\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\varphi}} - \frac{\delta\Gamma}{\delta u} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}} - 2i \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi_\beta}\, \partial\!\!\!/_{\beta\dot{\alpha}} \varphi - 2i\bar{u}\, \partial\!\!\!/_{\beta\dot{\alpha}} \psi^\beta \\
&\qquad + \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\lambda}} - 2\bar{f} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}} - 2i \frac{\delta\Gamma}{\delta\chi_\beta}\, \partial\!\!\!/_{\beta\dot{\alpha}} \lambda + i \frac{\delta\Gamma}{\delta f}\, \partial\!\!\!/_{\beta\dot{\alpha}} \chi^\beta \Big) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{81}$$

Das Transformationsverhalten der Felder u, ψ und $\bar{u}, \bar{\psi}$ kann man aus den linearisierten Ward-Identität-Operatoren ablesen:

$$\begin{aligned}
W^\Gamma_\alpha &= -i \int dx \Big(\psi_\alpha \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi^\alpha} \frac{\delta}{\delta\bar{u}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{u}} \frac{\delta}{\delta\psi^\alpha} - 2i\, \partial\!\!\!/_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\varphi} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}_{\dot{\beta}}} \\
&\qquad + \chi_\alpha \frac{\delta}{\delta\lambda} + 2f \frac{\delta\Gamma}{\delta\chi^\alpha} - 2i\, \partial\!\!\!/_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\lambda} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\chi}_{\dot{\beta}}} - i\, \partial\!\!\!/_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\chi}^{\dot{\beta}} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{f}} \Big) \\
\overline{W}^\Gamma_{\dot{\alpha}} &= -i \int dx \Big(\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\varphi}} - \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}} \frac{\delta}{\delta u} - \frac{\delta\Gamma}{\delta u} \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}} - 2i \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi_\beta}\, \partial\!\!\!/_{\beta\dot{\alpha}} \varphi
\end{aligned}$$

$$+ \bar{\chi}_{\dot\alpha} \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\lambda} - 2\bar f \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\chi^{\dot\alpha}} - 2i \frac{\delta\Gamma}{\delta\chi_\beta}\, \partial\!\!\!/_{\beta\dot\alpha}\lambda + i\frac{\delta\Gamma}{\delta f}\, \partial\!\!\!/_{\beta\dot\alpha}\chi^\beta \Big). \tag{82}$$

Damit folgt wie in Kapitel 3:

$$\delta^\Gamma_\alpha \psi^\beta = \delta^\beta_\alpha \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar u}\right) = 2\delta^\beta_\alpha \left(m\bar\varphi + \frac{\bar\lambda}{4}\bar\varphi^2 - 2u\right)$$
$$\bar\delta^\Gamma_{\dot\alpha} \bar\psi^{\dot\beta} = -\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha} \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta u}\right) = -2\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha} \left(m\varphi + \frac{\lambda}{4}\varphi^2 - 2\bar u\right) \tag{83}$$
$$\bar\delta^\Gamma_{\dot\alpha} u = -\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\psi^{\dot\alpha}}$$
$$\delta^\Gamma_\alpha \bar u = \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi^\alpha}. \tag{84}$$

Dem zusätzlichen Term $\delta^\beta_\alpha(-4u)$ im Transformationsgesetz von ψ entspricht wiederum ein Term $-4u\bar u$ in der Wirkung, der selber wieder einen möglichen Zusatzterm $-4u\frac{\delta}{\delta\psi^\alpha}\Gamma$ in der Ward-Identität (81) kompensiert.
Auch hier bilden die linearisierten Ward-Identität-Operatoren (82) eine Darstellung der Supersymmetrie-Algebra:

$$\left\{W^\Gamma_\alpha, W^\Gamma_\beta\right\} = \left\{\overline{W}^\Gamma_{\dot\alpha}, \overline{W}^\Gamma_{\dot\beta}\right\} = 0$$
$$\left\{W^\Gamma_\alpha, \overline{W}^\Gamma_{\dot\alpha}\right\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} W_\mu, \tag{85}$$

wodurch die algebraischen Eigenschaften der Theorie auch mit lokalen Kopplungen erhalten bleiben (vgl. (48, 50)). Somit kann auch analog bewiesen werden, daß die Ward-Identitäten durch geeignete nicht-invariante Counterterme erfüllt werden können und so die Supersymmetrie in allen Ordnungen erhalten bleibt.
Also können wir abschließend die klassische Wirkung des Wess-Zumino-Modells mit lokaler Kopplung ohne F-Felder mit Kopplung an äußere Felder u, welche die Grundlage der weiteren Betrachtung sein wird, schreiben als:

$$\begin{aligned}\Gamma_{cl} = \int dx \Big[&\left(\partial^\mu\varphi\partial_\mu\bar\varphi + \frac{i}{2}\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi - m^2\varphi\bar\varphi - \frac{\lambda\bar\lambda}{16}\varphi^2\bar\varphi^2 - 4u\bar u\right) \\ &+ \Big(\frac{m}{4}\psi^2 - \frac{m}{4}\lambda\varphi^2\bar\varphi + \frac{1}{8}\lambda\varphi\psi^2 - \frac{1}{12}f\varphi^3 + \frac{1}{8}\varphi^2\psi\chi \\ &+ 2mu\varphi + \frac{1}{2}\lambda u\varphi^2 + c.c.\Big)\Big].\end{aligned} \tag{86}$$

Diese klassische Wirkung kann mit den neuen Feldtransformationen für ψ und u aus (83) sowie den üblichen Transformationen für die restlichen Felder als Variation von niederdimensionalen Feldpolynomen geschrieben werden. Dabei ist jedoch eine Trennung zwischen dem kinetischen Anteil sowie dem Massen- und Wechselwirkungsanteil nicht mehr möglich.

$$\begin{aligned}
\delta^\Gamma_\alpha \delta^\alpha_\Gamma \left(\lambda\varphi^3\right) &= 3\lambda\bar\lambda\varphi^2\bar\varphi^2 + 4\varphi^3 f - 6\varphi^2\psi\chi - 6\lambda\varphi\psi^2 \\
&\quad + 12\lambda\varphi^2\bar\varphi - 24\lambda u\varphi^2 \qquad (87)\\
\delta^\Gamma_\alpha \delta^\alpha_\Gamma \left(\bar u\varphi\right) &= 2m^2\varphi\bar\varphi - 2\partial^\mu\varphi\partial_\mu\bar\varphi - i\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi \\
&\quad + \frac{\bar\lambda m}{2}\varphi\bar\varphi^2 + \lambda m\bar\varphi\varphi^2 - m\psi^2 + \frac{\lambda\bar\lambda}{4}\varphi^2\bar\varphi^2 - \frac{3}{4}\varphi^2\psi\chi \\
&\quad - \frac{3}{4}\lambda\varphi\psi^2 + 4m\bar u\bar\varphi + \bar\lambda\bar u\bar\varphi^2 - 8u\bar u + 4mu\varphi \\
&\quad - 2\lambda u\varphi + \frac{1}{2}\varphi^3 f. \qquad (88)\\
& \qquad (89)
\end{aligned}$$

Die klassische Wirkung folgt mit:

$$\Gamma_{cl} = \int \left[\left(\delta^\Gamma_\alpha \delta^\alpha_\Gamma + \bar\delta^{\dot\alpha}_\Gamma \bar\delta^\Gamma_{\dot\alpha}\right) \left(\frac{1}{96}\lambda\varphi^3 - \frac{1}{4}\bar u\varphi + cc\right) \right]. \qquad (90)$$

4.2. Störungstheorie mit lokaler Kopplung

Die in dem letzten Kapitel vorgestellte klassische Wirkung Γ_{cl} wird nun als die niedrigste Ordnung in $\hbar$ des Erzeugenden-Funktionals Γ für die 1PI-Greensfunktionen interpretiert (Für die Notation der Erzeugenden-Funktionale und der Greenschen Funktionen siehe Anhang A).

$$\Gamma = \Gamma_{cl} + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \Gamma^n \qquad (91)$$

Die Greensfunktionen des Modells erhält man wie üblich durch Differentiation des Vertex-Funktionals nach den klassischen Feldern.

Das Vertex-Funktional ist eine Entwicklung sowohl in den propagierenden als auch in den Kopplungsfeldern. Die Anzahl der Felder des Kopplungsmultipletts ist jedoch keine unabhängige Größe. Eine Betrachtung der Schleifendiagramme zeigt, daß die Anzahl von Kopplungsfeldern durch die Anzahl äußerer Beine und die Schleifenordnung L festgelegt wird. Explizit findet man folgende topologische Formel:

$$\#\tilde\lambda = \#\phi + \#u + 2(L-1), \qquad (92)$$

wobei $\#\tilde{\lambda}$ die Anzahl der Kopplungsfelder, $\#\phi$ die Anzahl propagierender Felder und L die Loopordnung ist.
Die Auswertung der Greenschen Funktionen in Anwesenheit lokaler Kopplungen geschieht wie üblich mit Hilfe des Wickschen Theorems und einem geeignetem Regularisierungsschema zur Beseitigung der Divergenzen.
Differenziert man Γ nach den niedrigsten Komponenten der Kopplungsmultipletts λ, $\bar{\lambda}$, so erhält man die Greenschen Funktionen des Wess-Zumino-Modells mit einer lokalen Einsetzung eines chiralen bzw. antichiralen Vertex:

$$\begin{aligned} \lim_{\Lambda,\bar{\Lambda}\to\lambda} \frac{\delta}{\delta\lambda(x)}\Gamma &= [\mathcal{L}_{int} + O(\hbar)]_4 \cdot \Gamma \\ \lim_{\Lambda,\bar{\Lambda}\to\lambda} \frac{\delta}{\delta\bar{\lambda}(x)}\Gamma &= \left[\bar{\mathcal{L}}_{int} + O(\hbar)\right]_4 \cdot \Gamma. \end{aligned} \tag{93}$$

Mit $\mathcal{L}_{int}$:

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{16}\bar{\lambda}\varphi^2\bar{\varphi}^2 - \frac{m}{4}\varphi^2\bar{\varphi} + \frac{1}{8}\varphi\psi^2 + \frac{1}{2}u\varphi^2. \tag{94}$$

Somit gilt, daß die integrierte Variation von Γ nach den Kopplungsfeldern im Limes der konstanten Kopplung, gerade die Variation des Erzeugenden-Funktionals nach dem Kopplungsparameter λ ist, also:

$$\lim_{\Lambda,\bar{\Lambda}\to\lambda} \int \left(\frac{\delta}{\delta\lambda(x)} + \frac{\delta}{\delta\bar{\lambda}(x)} \right) \Gamma = \partial_\lambda \Gamma^{WZ}. \tag{95}$$

Γ^{WZ} ist in niedrigster Ordnung die klassische Wirkung des Wess-Zumino-Modells mit konstanter Kopplung ohne Hilfsfelder F und mit Feldern u (40).
Insbesondere folgt für die Greenschen Funktionen propagierender Felder:

$$\lim_{\Lambda,\bar{\Lambda}\to\lambda} \frac{\delta}{\delta\lambda(x)} \frac{\delta}{\delta\phi^{i_1}(x)} \cdots \frac{\delta}{\delta\phi^{i_n}(x_n)}\Gamma\Bigg|_{\phi_i=0} = \langle [\mathcal{L}_{int} + O(\hbar)]_4 \, \phi_{i_1}(x_1) \cdots \phi_{i_1}(x_1) \rangle \,. \tag{96}$$

Es ist nun klar, daß die 1PI Greenschen Funktionen des erweitertern Modells im Limes der konstanten Kopplung gerade die Greenschen Funktionen des Wess-Zumino-Modells liefern.

$$\lim_{\Lambda,\bar{\Lambda}\to\lambda} \Gamma = \Gamma^{WZ}. \tag{97}$$

Differenziert man jedoch das Vertex-Funktional nach der Spinorkomponente des chiralen oder antichiralen Kopplungsmultipletts, so erhält man im Limes der konstanten

Kopplung die Greensfunktionen des Wess-Zumino-Modells mit einer chiralen oder antichiralen Einsetzung eines Feldpolynoms mit UV-Dimension $\frac{7}{2}$, also z.B.:

$$\lim_{\Lambda,\bar{\Lambda}\to\lambda} \frac{\delta}{\delta\bar{\chi}(x)}\Gamma = \left[\frac{1}{8}\bar{\varphi}^2(x)\bar{\psi}(x) + O(\hbar)\right]_{\frac{7}{2}} \Gamma. \tag{98}$$

4.3. R'-Symmetrie

Die Tatsache, daß die Kopplungskonstante durch ein Feldmultiplett ersetzt wurde, ermöglicht es, den Komponentenfeldern nicht nur ein Transformationsverhalten unter Supersymmetrie, sondern auch unter einer modifizierten R-Transformation zu geben. Diese Transformation heißt R'-Transformation und ist eine neue Symmetrie der klassischen Wirkung (86), die trivial erhalten bleibt in der Renormierung [14].

$$W_{R'}\Gamma^{cl.} = 0 \tag{99}$$

mit $W_{R'}$ als zugehöriger Ward-Identität-Operator, d.h.:

$$W_{R'} = -i\sum_{\phi}\int dx\delta_{R'}\phi\frac{\delta}{\delta\phi}$$

$$\delta_{R'}\phi = in^{\phi}_{R'}\phi. \tag{100}$$

Die Quantenzahlen unter den Transformationen R' und R, sowie die Massendimensionen d der Felder im Modell sind in Tabelle 2 zusammengefaßt.

	φ	ψ	λ	χ	f	u
d	1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$n_{R'}$	-1	0	1	2	3	1
n_R	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	2	$\frac{4}{3}$

Tab.2: Massendimensionen d, R- und R'-Gewichte der Felder

Die R'-Transformation bildet zusammen mit (48) folgende Algebra:

$$\left[W^{\Gamma}_{\alpha}, W_{R'}\right] = -W^{\Gamma}_{\alpha}$$

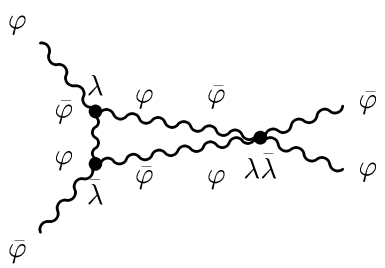
$$\left[\overline{W}^{\Gamma}_{\dot{\alpha}}, W_{R'}\right] = +W^{\Gamma}_{\dot{\alpha}}. \tag{101}$$

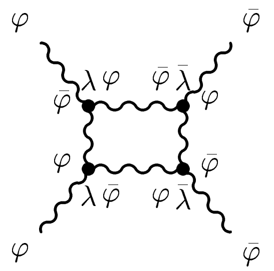
Doch die R'-Symmetrie ist mehr als bloß eine formale Eigenschaft des Wess-Zumino-Modells mit lokaler Kopplung. Sie gibt darüber hinaus Aufschluß über die innere Struktur der Diagramme des Modells und etabliert die für die Ableitung der Nichtrenormierungstheoreme fundamentale Eigenschaft, daß jedes rein chirale 1PI-Diagramm mindestens eine feste Anzahl antichiraler Vertizes besitzen muß. Genauer bestimmt die

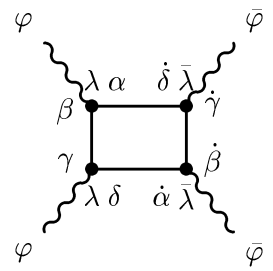
R'-Symmetrie bei gegebener Loop-Ordnung und Anzahl von äußeren Beinen die Zahl der chiralen und antichiralen Wechselwirkungspunkte im Inneren des Diagramms.

Da das Diagramm R'-symmetrisch sein muß, kann zunächst mit Hilfe der topologischen Formel (92) über die Summe der R'-Gewichte der äußeren Beine das gesamte R'-Gewicht der Kopplungsfelder bestimmt werden. Daraus folgt dann im Limes der konstanten Kopplung die Anzahl der chiralen bzw. antichiralen Wechselwirkungspunkte.

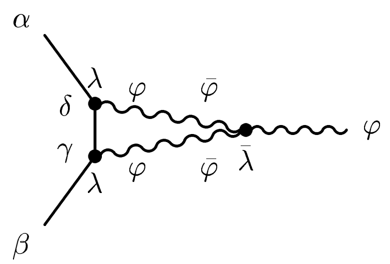
Aus der topologischen Formel (92) folgt, daß z.B. der Vertex $\Gamma^{(1)}_{\varphi\varphi\bar{\varphi}\bar{\varphi}}$ in 1-Loop genau vier Kopplungsfelder enthält. Da die äußeren Beine $\varphi\varphi\bar{\varphi}\bar{\varphi}$ ein R'-Gewicht von Null haben, folgt, daß das Diagramm im Wess-Zumino-Modell mit konstanter Kopplung genau zwei antichirale Vertizes enthält. Also besitzt es die Struktur $(\lambda\bar{\lambda})^2$ hat. Dies sei im folgenden an einigen Beispielen illustriert:



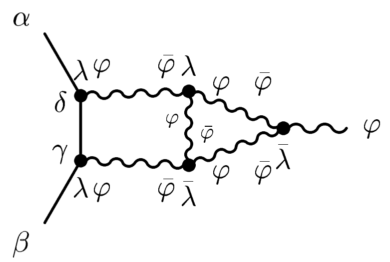




Entsprechend folgt z.B. für den später noch zu diskutierenden Vertex $\Gamma_{\psi\psi\varphi}$ in 1-Loop, daß er die Struktur $\Gamma^{(1)}_{\psi\psi\varphi} \rightsquigarrow \lambda^2\bar{\lambda}$ hat:



Zur Illustration noch ein Beispiel, daß zu $\Gamma_{\psi\psi\varphi}$ in 2-Loop beiträgt und nach R'-Symmetrie die Struktur $\Gamma^{(2)}_{\psi\psi\varphi} \rightsquigarrow \lambda^3\bar{\lambda}^2$ besitzt:



Oder ganz allgemein für den Vertex $\Gamma_{\psi\psi\varphi_1\cdots\varphi_n}$:

$$\Gamma^{(L)}_{\psi\psi\varphi_1\cdots\varphi_n} \rightsquigarrow \lambda^{L+n}\bar{\lambda}^{L}. \tag{102}$$

Die Beispiele zeigen, wie die R'-Symmetrie auch in höheren Ordnungen die Struktur der Diagramme bestimmt.
Wie im lezten Abschnitt gezeigt, sind die Greenschen Funktionen mit chiralen *und* antichiralen Einsetzungen mit den Vertexfunktionen des gewöhnlichen Wess-Zumino Modells verknüpft (95). Da die Anzahl chiraler und antichiraler Vertizes durch die R'-Symmetrie in jeder Ordnung festgelegt wird, ist es jetzt möglich, die Vertexfunktionen mit chiralen *oder* antichiralen Einseztungen (93) mit den Vertexfunktionen des gewöhnlichen Wess-Zumino-Modells zu verbinden. Man findet für die chiralen Vertexfunktionen:

$$\begin{aligned}\lim_{\Lambda,\bar{\Lambda}\to\lambda} \int \frac{\delta}{\delta\bar{\lambda}(x)}\Gamma^{(L)}_{\psi\psi\varphi\cdots\varphi} &= \int \left[\bar{\mathcal{L}}_{int} + O(\hbar)\right]_4 \cdot \Gamma^{(L)}_{\psi\psi\varphi\cdots\varphi} \\ &= \frac{L}{\lambda}\Gamma^{(L)}_{\psi\psi\varphi\cdots\varphi}. \end{aligned} \tag{103}$$

An dieser Stelle bietet es sich an, die Formel für den Grad der Divergenz eines Diagramms nach *power counting* anzugeben. Dieses Abzählen des Divergenzgrades kann selbst bei Berücksichtigung der inneren Struktur von Diagrammen nur eine obere Grenze für den Divergenzgrad eines Diagramms sein, da aus Gründen der algebraischen Struktur der Theorie der Divergenzgrad sich weiter verringern kann. Mit der Anzahl n_ϕ und der Massendimension d_ϕ der äußeren Felder sowie mit d_i als der Dimension des Vertex i lautet sie:

$$d_\Omega = 4 - \sum_\phi n_\phi d_\phi + \sum_i (d_i - 4) \qquad \phi = \psi, \varphi, u, \lambda, \chi, f \text{ und } c.c. \tag{104}$$

Haben alle Vertizes des Modells eine Dimension $d_i \leq 4$, so heißt das Modell nach *power counting* renormierbar, da es nur endlich viele unabhängige divergente Diagramme in jeder Loop-Ordnung geben kann. Wenn die innere Struktur der Diagramme nicht berücksichtigt wird, folgt für den maximalen Grad der Divergenz:

$$d_\Omega \leq 4 - \sum_\phi n_\phi d_\phi. \tag{105}$$

4.4. Allgemeine klassische Lösung

Für die Renormierung des Wess-Zumino-Modells mit lokaler Kopplung müssen alle symmetrischen Counterterme, d.h. alle freien Parameter, durch geeignete Normierungsbedingungen in allen Loop-Ordnungen fixiert werden. In der Superraumformulierung des Wess-Zumino-Modells verbietet die R'-Symmetrie automatisch das Auftreten von invarianten Countertermen zu den Massen- und Wechselwirkungstermen [14], da:

$$\begin{aligned}
W_{R'} \int dS \Lambda^n A^3 &= i(n-1) \int dS \Lambda^n A^3 \neq 0, \qquad f\ddot{u}r \quad n \geq 1, \\
W_{R'} \int dS \Lambda^n A^2 &= in \int dS \Lambda^n A^2 \neq 0, \qquad f\ddot{u}r \quad n \geq 0.
\end{aligned} \tag{106}$$

Mögliche weitere invariante Counterterme zu den klassischen, chiralen Vertexfunktionen haben entweder dim ≥ 5, da sie sowohl chirale Λ als auch antichirale $\bar{\Lambda}$ beinhalten und sind daher aus Gründen der Renormierbarkeit nicht in die effektive Wirkung aufzunehmen. Der einzige supersymmetrische und R'-invariante Counterterm, der nach dem Limes noch Beiträge zur effektiven Wirkung liefert, ist der Counterterm zum kinetischen Anteil der Wirkung und lautet im Superraum [14]:

$$\Gamma_{ct} = \sum_{L=1}^{\infty} z^{(L)} \int dV \Lambda^L A e^{2i\Theta\sigma\bar{\Theta}\partial} \bar{\Lambda}^L \bar{A}. \tag{107}$$

Die symmetrischen Counterterme können auch im Komponentenfeldformalismus als Lösungen der Ward-Identitäten (81) auf dem Vertex-Funktional ausgerechnet werden, wobei einschränkende Bedingungen wie Massendimension $d \leq 4$, R'-Symmetrie und Lokalität beachtet werden müssen.
In 0. Loop-Ordnung (L=0) erhält man im Komponentenfeldformalismus zunächst noch:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ct}^{L=0} = \int dx \Big[\Big(& z\partial^\mu \varphi \partial_\mu \bar{\varphi} + z\frac{i}{2}\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} - \frac{\hat{m}^2}{z}\varphi\bar{\varphi} + \frac{\hat{m}}{4}\psi^2 + \frac{\hat{m}}{4}\bar{\psi}^2 \\
& - \frac{z_\lambda}{z}\frac{\lambda\bar{\lambda}}{16}\varphi^2\bar{\varphi}^2 - \frac{4}{z}u\bar{u} \Big) + \Big(z_\lambda \frac{\lambda}{8}\varphi\psi^2 - \frac{z_\lambda}{z}\frac{\lambda\hat{m}}{4}\varphi^2\bar{\varphi} \\
& + \frac{z_\lambda}{8}\varphi^2\psi\chi - z_\lambda \frac{1}{12} f\varphi^3 + 2\frac{\hat{m}}{z}u\varphi + \frac{z_\lambda}{z}\frac{\lambda}{2}u\varphi^2 + c.c. \Big) \Big].
\end{aligned} \tag{108}$$

Mit der Wahl von $\Gamma_{ct}^{L=0}(z=1, \hat{m}=m, z_\lambda=1)$ stimmt (108) mit der klassischen Wirkung (86) überein.
Das Lösen der Ward-Identität (81) für höhere Loop-Ordnungen als 1 wird aufgrund der Nicht-Linearität schnell unübersichtlich. Leichter ist es, die bekannten Invarianten aus dem Superraum in Komponentenfelder umzuschreiben und sich nach der Elimination

von F, $\bar{F}$ und Kopplung an u, $\bar{u}$ davon zu überzeugen, daß es keine weiteren Invarianten gibt. Diese alternative Vorgehensweise soll hier für (107) kurz angedeutet werden.
Λ^L kann nach Potenzen von θ entwickelt werden:

$$\Lambda^L(x,\theta) = \lambda^L + \theta^\alpha(L\lambda^{L-1}\chi_\alpha) + \theta^2(L\lambda^{L-1}f - \frac{1}{4}L(L-1)\lambda^{L-2}\chi^2). \qquad (109)$$

Aus (107) folgt Γ^L_{ct} in analoger Vorgehensweise zur klassischen Wirkung:

$$\Gamma^L_{ct} = z^{(L)} \int dV \Lambda^L A e^{2i\Theta\sigma\bar{\Theta}\partial} \bar{\Lambda}^L \bar{A}. \qquad (110)$$

In Komponentenfeldern:

$$\begin{aligned} = z^{(L)} \int dx \Big[& \partial^\mu(\lambda^L\varphi)\partial_\mu(\bar{\lambda}^L\bar{\varphi}) \\ & + \frac{i}{2}\left(\lambda^L\psi^\alpha + L\lambda^{L-1}\varphi\chi^\alpha\right)\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\left(\bar{\lambda}^L\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} + L\bar{\lambda}^{L-1}\bar{\varphi}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\right) \\ & + \left(\lambda^L F + L\lambda^{L-1}\varphi f - \frac{1}{2}L\lambda^{L-1}\chi\psi - \frac{1}{4}L(L-1)\lambda^{L-2}\varphi\chi^2\right) \\ & \times \left(\bar{\lambda}^L\bar{F} + L\bar{\lambda}^{L-1}\bar{\varphi}\bar{f} - \frac{1}{2}L\bar{\lambda}^{L-1}\bar{\chi}\bar{\psi} - \frac{1}{4}L(L-1)\bar{\lambda}^{L-2}\bar{\varphi}\bar{\chi}^2\right)\Big]. \qquad (111) \end{aligned}$$

Ohne F, $\bar{F}$ und mit u, $\bar{u}$:

$$\begin{aligned} = z^{(L)} \int dx \Big[& \partial^\mu(\lambda^L\varphi)\partial_\mu(\bar{\lambda}^L\bar{\varphi}) \\ & + \frac{i}{2}\left(\lambda^L\psi^\alpha + L\lambda^{L-1}\varphi\chi^\alpha\right)\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\left(\bar{\lambda}^L\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} + L\bar{\lambda}^{L-1}\bar{\varphi}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\right) \\ & + \Big((\lambda\bar{\lambda})^L m^2\varphi\bar{\varphi} + \frac{(\lambda\bar{\lambda})^{L+1}}{16}\varphi^2\bar{\varphi}^2 + 4(\lambda\bar{\lambda})^L u\bar{u} \\ & + L^2(\lambda\bar{\lambda})^{L-1}\varphi\bar{\varphi}f\bar{f} + \frac{1}{4}L^2(\lambda\bar{\lambda})^{L-1}\chi\psi\bar{\chi}\bar{\psi} \\ & + \frac{L^2(L-1)^2}{16}(\lambda\bar{\lambda})^{L-2}\varphi\bar{\varphi}\chi^2\bar{\chi}^2\Big) + \Big(\frac{\lambda^{L+1}\bar{\lambda}^L m}{4}\bar{\varphi}\varphi^2 \\ & - 2m(\lambda\bar{\lambda})^L\varphi u - \frac{\lambda^{L+1}\bar{\lambda}^L}{2}\varphi^2 u + Lm\lambda^L\bar{\lambda}^{L-1}\bar{\varphi}^2\bar{f} \\ & + L(\lambda\bar{\lambda})^L\bar{\varphi}^3\bar{f} - 2L\lambda^L\bar{\lambda}^{L-1}\bar{\varphi}\bar{f}u - \frac{Lm}{2}\lambda^L\bar{\lambda}^{L-1}\bar{\varphi}\bar{\chi}\bar{\psi} \\ & - \frac{L}{8}(\lambda\bar{\lambda})^L\bar{\varphi}^2\bar{\chi}\bar{\psi} + L\lambda^L\bar{\lambda}^{L-1}\bar{\chi}\bar{\psi}u - \frac{L(L-1)m}{4}\lambda^L\bar{\lambda}^{L-2}\bar{\varphi}^2\bar{\chi}^2 \\ & - \frac{L(L-1)}{16}\lambda^L\bar{\lambda}^{L-1}\bar{\varphi}^3\bar{\chi}^2 + \frac{L(L-1)}{2}\lambda^L\bar{\lambda}^{L-2}\bar{\varphi}\bar{\chi}^2 u + c.c.\Big)\Big]. \qquad (112) \end{aligned}$$

Der Parameter $z^{(L)}$ wird in jeder Loop-Ordnung durch eine Normierungsbedingung an einem beliebigen Punkt $p^2 = \kappa^2$ fixiert. Zum Beispiel:

$$\lim_{\Lambda,\bar{\Lambda}\to\lambda} \frac{d}{dp^2}\Gamma_{\varphi\bar{\varphi}}(p^2 = \kappa^2) = 1. \tag{113}$$

Um das Ergebnis (112) mit den Countertermen im Wess-Zumino-Modell mit konstanter Kopplung vergleichen zu können, bilden wir:

$$\begin{aligned}\lim_{\Lambda,\bar{\Lambda}\to\lambda} \Gamma_{ct}^{(L)} = z^{(L)}(\lambda)^{2L} \int dx \Big[& \partial^\mu\varphi\partial_\mu\bar{\varphi} + \frac{i}{2}\psi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \\ & + \left(m^2\varphi\bar{\varphi} + \frac{\lambda^2}{16}\varphi^2\bar{\varphi}^2 + 4u\bar{u}\right) \\ & + \left(\frac{\lambda m}{4}\bar{\varphi}\varphi^2 - 2m\varphi u - \frac{\lambda}{2}\varphi^2 u + c.c.\right)\Big].\end{aligned} \tag{114}$$

Ein Vergleich mit (61) läßt erkennen, daß nur ein freier Parameter im Modell mit lokaler Kopplung bleibt, während im Wess-Zumino-Modell mit konstanter Kopplung drei unabhängige Counterterme addiert werden können. Mit:

$$\begin{aligned}\tilde{z}^{(L)} &= z^{(L)} \\ z_m^{(L)} &= -2z^{(L)} \\ z_\lambda^{(L)} &= -3z^{(L)}\end{aligned} \tag{115}$$

folgt aus (61) der Counterterm (114). Auch sieht man im Vergleich mit (61), daß die chiralen Vertizes des Modells nicht in den Countertermen mit $dim \leq 4$ vorkommen. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, wie die chiralen Greensfunktionen $\Gamma_{\psi\psi}$ und $\Gamma_{\varphi\psi\psi}$ durch konvergente Greensche Funktionen und nicht durch Normierungsbedingungen festgelegt werden. Die Abwesenheit symmetrischer Counterterme für die chiralen Veritzes bedeutet, daß es keine Vertexfunktionen mit ausschließlich chiralen Wechselwirkungspunkten gibt und entspricht dem Nichtauftreten rein chiraler Integrale im Vertexfunktional der Superraumformulierung (24). Im nächsten Abschnitt soll dieser Sachverhalt für die chiralen Vertizes explizit gezeigt werden.

Zu bemerken bleibt noch, daß der Counterterm im Modell mit lokalen Kopplungen nicht als Feld- und Kopplungsredefinition der klassischen Wirkung geschrieben werden kann. Damit ist das Wess-Zumino-Modell mit lokaler Kopplung nicht multiplikativ renormierbar. Dieser Sachverhalt soll hier nicht weiter diskutiert werden, da er keine Konsequenzen für die Ableitung der Nichtrenormierungstheoreme hat.

4.5. Die Nichtrenormierungstheoreme

Nach der Vorarbeit der letzten Abschnitte können die Nichtrenormierungstheoreme für die chiralen Vertizes nun direkt abgeleitet werden. Dazu wird zunächst die Ward-Identität nach den chiralen Feldern sowie nach $\bar{\chi}$ differenziert. Der Limes der konstanten Kopplung wird gebildet, indem man die Impulse, die über die Kopplungsfelder einlaufen, nach Null gehen läßt. Dadurch verschwinden alle Terme, die explizit von diesen Impulsen abhängen. Die verbleibenden Beiträge der Kopplungsfelder werden als äußere Quellen interpretiert und mit dem Quantenwirkungsprinzip als Einsetzungen in das Vertex-Funktional geschrieben (s. A.14, A.15).
Benutzt wird die Ward-Identität (81):

$$\begin{aligned}\overline{W}_{\dot\alpha}(\Gamma) = -i\int dx\Big(&\bar\psi_{\dot\alpha}\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\varphi} - \frac{\delta\Gamma}{\delta u}\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\psi^{\dot\alpha}} - 2i\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi_\beta}\ \partial\!\!\!/_{\beta\dot\alpha}\varphi - 2i\bar{u}\ \partial\!\!\!/_{\beta\dot\alpha}\psi^\beta \\ &+\bar\chi_{\dot\alpha}\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\lambda} - 2\bar{f}\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar\chi^{\dot\alpha}} - 2i\frac{\delta\Gamma}{\delta\chi_\beta}\ \partial\!\!\!/_{\beta\dot\alpha}\lambda + i\frac{\delta\Gamma}{\delta f}\ \partial\!\!\!/_{\beta\dot\alpha}\chi^\beta\Big)\\ =0.&\end{aligned} \tag{116}$$

4.5.1. $\Gamma_{\psi\psi}$

Bei der Ableitung des Nichtrenormierungstheorems für $\Gamma_{\psi\psi}$ wird benutzt, daß der Tadpole $\left(\left[\int dx\frac{1}{8}\bar\varphi^2\bar\psi_{\dot\beta}\right]\Gamma\right)_{\bar\psi^{\dot\alpha}}(p)$ bei $p^2 = 0$ im Limes der konstanten Kopplung verschwindet. Die Behauptung wird in Anhang C bewiesen.
Das Nichtrenormierungstheorem für $\Gamma_{\psi\psi}$ folgt aus:

$$\frac{\delta^3}{\delta\psi^\alpha(x_1)\delta\psi^\gamma(x_2)\delta\bar\chi^{\dot\beta}(x_3)}\overline{W}_{\dot\alpha}(\Gamma) = 0 \qquad \Rightarrow \tag{117}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\frac{\delta}{\delta\bar\lambda(x_3)}\Gamma_{\psi^\alpha\psi^\gamma}(x_1,x_2) = \int dz\Big[&\left(\frac{\delta}{\delta\bar\chi^{\dot\beta}(x_3)}\Gamma_{\psi^\alpha u}(x_1,z)\right)\Gamma_{\psi^\gamma\bar\psi^{\dot\alpha}}(x_2,z)\\ &-\left(\frac{\delta}{\delta\bar\chi^{\dot\beta}(x_3)}\Gamma_{\psi^\gamma u}(x_2,z)\right)\Gamma_{\psi^\alpha\bar\psi^{\dot\alpha}}(x_1,z)\Big].\end{aligned} \tag{118}$$

Aus der R'-Symmetrie folgt, daß der Vertex $\Gamma_{\psi\psi}$ in L-ter Schleifen-Ordnung genau L antichirale Vertizes enthält. Daher folgt für die integrierte linke Seite der Gl.(118) im Limes der konstanten Kopplung in Analogie zur Gl.(103):

$$lim_{\Lambda,\bar\Lambda\to\lambda}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\int dx_3\frac{\delta}{\delta\bar\lambda(x_3)}\Gamma^{(L)}_{\psi^\alpha\psi^\gamma}(x_1,x_2) = \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\frac{L}{\lambda}\Gamma^{(L)}_{\psi^\alpha\psi^\gamma}(x_1,x_2). \tag{119}$$

Auf der rechten Seite erzeugt die Ableitung nach $\bar\chi^{\dot\beta}$ im $\lim_{\Lambda,\bar\Lambda\to\lambda}$ die Einsetzung eines Vertex $\bar\varphi^2\bar\psi_{\dot\beta}$. Die Fouriertransformation für das Vertex-Funktional ist definiert in (A.4).

Die Gesamtimpulserhaltung über den Vertex wird nicht ausgeschrieben. Damit lautet das Ergebnis:

$$\Gamma^{(L)}_{\psi^\alpha\psi^\gamma}(-p,p) = \frac{\lambda}{L}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\Bigg[\left(\left[\int dx\frac{1}{8}\bar\varphi^2\bar\psi_{\dot\beta} + O(\hbar)\right]_{\frac{7}{2}}\Gamma\right)_{\psi^\gamma u}(p,-p)\Gamma_{\psi^\alpha\bar\psi^{\dot\alpha}}(-p,p) \\ - \left(\left[\int dx\frac{1}{8}\bar\varphi^2\bar\psi_{\dot\beta} + O(\hbar)\right]_{\frac{7}{2}}\Gamma\right)_{\psi^\alpha u}(-p,p)\Gamma_{\psi^\gamma\bar\psi^{\dot\alpha}}(p,-p)\Bigg]^{(L)}. \tag{120}$$

In 1. Schleifenordnung liefert die obige Gleichung für die linke und rechte Seite identisch Null, da keine beitragenden Diagramme existieren. In 2. Schleifenordnung lautet Gl.(120):

$$\Gamma^{(2)}_{\psi^\alpha\psi^\gamma}(-p,p) = \frac{\lambda}{2}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\Bigg[\left(\left[\int dx\frac{1}{8}\bar\varphi^2\bar\psi_{\dot\beta} + O(\hbar)\right]_{\frac{7}{2}}\Gamma^{(2)}\right)_{\psi^\gamma u}(p,-p)\Gamma^{(0)}_{\psi^\alpha\bar\psi^{\dot\alpha}}(-p,p) \\ - (\gamma\leftrightarrow\alpha)\Bigg]. \tag{121}$$

$\Gamma^{(2)}_{\psi^\alpha\psi^\gamma}$ kann nach *power-counting* linear, aber aufgrund der Lorentzstruktur maximal logarithmisch divergent sein. Die nichtlokale Funktion auf der rechten Seite von (120) hat Dimension Null, ist jedoch wegen der Lorenzstruktur oberflächlich konvergent. Die lorentzkovariante Zerlegung von $\left(\left[\int dx\frac{1}{8}\bar\varphi^2\bar\psi_{\dot\beta}\right]_{\frac{7}{2}}\Gamma^{(2)}\right)_{\psi^\alpha u}$ lautet:

$$\left(\left[\int dx\frac{1}{8}\bar\varphi^2\bar\psi_{\dot\beta}\right]_{\frac{7}{2}}\Gamma^{(2)}\right)_{\psi^\alpha u} = mp_\mu\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\tilde\Sigma^{(2)}_{-2}(p^2,m^2), \tag{122}$$

wobei $\tilde\Sigma$ eine skalare, nichtlokale Funktion von p^2 und m^2 mit $dim\left(\tilde\Sigma\right) = -2$ ist. Mit

$$\Gamma^{(0)}_{\psi^\alpha\bar\psi^{\dot\alpha}}(-p,p) = -\frac{1}{2}\sigma^\nu_{\alpha\dot\alpha}p_\nu \tag{123}$$

folgt für Gl.(121):

$$\Gamma^{(2)}_{\psi^\alpha\psi^\gamma}(-p,p) = -mp^2\epsilon_{\alpha\gamma}\tilde\Sigma^{(2)}_{-2}(p^2,m^2), \tag{124}$$

so daß $\Gamma^{(2)}_{\psi\psi}$ bei $p^2=0$ verschwindet. In höherer Loop-Ordnung erhält man aus (120):

$$\Gamma^{(L)}_{\psi^\alpha\psi^\gamma}(-p,p) = \frac{\lambda}{L}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\left(\left[\int dx\frac{1}{8}\bar\varphi^2\bar\psi_{\dot\beta} + O(\hbar)\right]_{\frac{7}{2}}\Gamma^{(L)}\right)_{\psi^\gamma u}(p,-p)\Gamma^{(0)}_{\psi^\alpha\bar\psi^{\dot\alpha}}(-p,p) \\ + \sum_{n=1}^{L-2}\frac{\lambda}{L}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\left(\left[\int dx\frac{1}{8}\bar\varphi^2\bar\psi_{\dot\beta} + O(\hbar)\right]_{\frac{7}{2}}\Gamma^{(L-n)}\right)_{\psi^\gamma u}(p,-p)\Gamma^{(n)}_{\psi^\alpha\bar\psi^{\dot\alpha}}(-p,p) \tag{125}$$

Die Greenschen Funktionen mit einer Einseztung auf der rechten Seite sind jeweils nach *power-counting* oberflächlich konvergent. Die in der Summe auftretenden Funktionen $\Gamma^{(n)}_{\psi\bar{\psi}}$ sind immer von niedrigerer Loop-Ordnung als $\Gamma_{\psi\psi}$ und können damit als Unterdivergenzen interpretiert werden. Das Auftreten der Unterdivergenzen bzw. die Produktstruktur der Nichtrenormierungstheoreme ist eine Eigenheit des Wess-Zumino-Modells ohne die Hilfsfelder F, $\bar{F}$. Denn sie haben ihren Ursprung letztlich in der Nicht-Linearität der Spinor-Feldtransformationen und folglich auch in der Ward-Identität des Modells. Nach Beseitigung der Unterdivergenzen ist $\Gamma_{\psi\psi}$ jedoch konvergent.

4.5.2. $\Gamma_{\varphi\psi\psi}$

Die Ableitung von $\Gamma_{\varphi\psi\psi}$ geht ganz analog zum letzten Abschnitt:

$$\frac{\delta^4}{\delta\varphi(x_1)\delta\psi^\alpha(x_2)\delta\psi^\gamma(x_3)\delta\bar{\chi}^{\dot{\beta}}(x_4)}\overline{W}_{\dot{\alpha}}(\Gamma) = 0 \qquad \Rightarrow \tag{126}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^{(L)}_{\varphi\psi^\alpha\psi^\gamma}(p_1,p_2,p_3) = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\frac{\lambda}{L}\Big[& 2\ \not{p}^1_{\beta\dot{\alpha}}\left(\left[\int dx\frac{1}{8}\bar{\varphi}^2\bar{\psi}_{\dot{\beta}} + O(\hbar)\right]_{\frac{7}{2}}\Gamma\right)_{\psi^\alpha\psi^\gamma\psi_\beta}(p_2,p_3,p_1) \qquad (127)\\ & - \left(\left[\int dx\frac{1}{8}\bar{\varphi}^2\bar{\psi}_{\dot{\beta}} + O(\hbar)\right]_{\frac{7}{2}}\Gamma\right)_{\psi^\alpha\psi^\gamma\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}}(p_2,p_3,p_1)\Gamma_{\varphi u}(p_1,-p_1)\\ & + \left(\left[\int dx\frac{1}{8}\bar{\varphi}^2\bar{\psi}_{\dot{\beta}} + O(\hbar)\right]_{\frac{7}{2}}\Gamma\right)_{\varphi\psi^\alpha u}(p_1,p_2,p_3)\Gamma_{\psi^\gamma\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}}(p_3,-p_3)\\ & + 2\left(\left[\int dx\frac{1}{8}\bar{\varphi}^2\bar{\psi}_{\dot{\beta}} + O(\hbar)\right]_{\frac{7}{2}}\Gamma\right)_{\psi^\alpha u}(p_2,-p_2)\times\\ & \Gamma_{\varphi\psi^\gamma\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}}(p_1,p_3,p_2) - (\gamma\leftrightarrow\alpha)\Big]^{(L)} \qquad (128)\end{aligned}$$

Der Faktor $\frac{\lambda}{L}$ resultiert daraus, daß durch die R'-Symmetrie auch $\Gamma_{\varphi\psi\psi}$ in L-ter Schleifenordnung L antichirale Vertizes enthält. Die Terme auf der rechten Seite müssen einzeln diskutiert werden.

- $2\ \not{p}^1_{\beta\dot{\alpha}}\left(\left[\int dx\frac{1}{8}\bar{\varphi}^2\bar{\psi}_{\dot{\beta}} + O(\hbar)\right]_{\frac{7}{2}}\Gamma\right)_{\psi^\alpha\psi^\gamma\psi_\beta}(p_2,p_3,p_1)$:
  Der Term ist konvergent und verschwindet bei $p^2 = 0$. Der Term tritt ab der 2. Schleifenordnung auf.
- $\left(\left[\int dx\frac{1}{8}\bar{\varphi}^2\bar{\psi}_{\dot{\beta}} + O(\hbar)\right]_{\frac{7}{2}}\Gamma\right)_{\psi^\alpha\psi^\gamma\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}}(p_2,p_3,p_1)$:
  Die Funktion ist konvergent, allerdings verchwindet sie nicht bei $p^2 = 0$. $\Gamma_{\varphi u}$ tritt lediglich als Unterdivergenz auf. Der Term erscheint ab 1-Loop.

- $\left(\left[\int dx \frac{1}{8}\bar{\varphi}^2\bar{\psi}_{\dot\beta} + O(\hbar)\right]_{\frac{7}{2}} \Gamma\right)_{\varphi\psi^\alpha u}(p_1,p_2,p_3)$:
  Der Term ist konvergent und verschwindet aufgrund der Lorentzstruktur bei $p^2 = 0$. $\Gamma_{\psi\bar\psi}$ ist eine Unterdivergenz. Die Funktion tritt ab 2-Loop auf.
- $2\left(\left[\int dx \frac{1}{8}\bar{\varphi}^2\bar{\psi}_{\dot\beta} + O(\hbar)\right]_{\frac{7}{2}} \Gamma\right)_{\psi^\alpha u}(p_2,-p_2)\Gamma_{\varphi\psi^\gamma\bar\psi^{\dot\alpha}}(p_1,p_3,p_2)$: Beide Terme sind aufgrund der Lorentzstruktur kovergent und verschwinden bei $p^2 = 0$. Der Term tritt ab der 2. Ordung auf.

Somit wird der chirale Vertex $\Gamma_{\varphi\psi\psi}$ vollständig durch konvergente Greensche Funktionen festgelegt. Allerdings verschwindet $\Gamma_{\varphi\psi\psi}$ nicht bei $p^2 = 0$, wie auch aus der Illustration in 1-Loop im nächsten Abschnitt deutlich wird. Die Formulierung der Nichtrenormierungstheoreme im Superraum legte nahe, daß die Aussagen "Die chiralen Vertexfunktionen sind konvergent" und "Sie verschwinden bei $p^2 = 0$" äquivalent sind. Die Analyse der Nichtrenormierungstheoreme unabhängig von der Superraum-Formulierung zeigt, daß die beiden Aussagen nicht äquivalent sind und nur die erste Aussage wesentlich ist.
Der Term $\left(\left[\int dx \frac{1}{8}\bar{\varphi}^2\bar{\psi} + O(\hbar)\right]_{\frac{7}{2}} \Gamma\right)_{\psi\psi\bar\psi}$ tritt im Wess-Zumino-Modell mit Feldern F, $\bar{F}$ zumindest in 1-Loop nicht auf. Im einzelnen kann das Erscheinen dieses Terms im Modell ohne Hilfsfelder verstanden werden, wenn man zur Ward-Identität des Wess-Zumino-Modells mit lokaler Kopplung, allerdings mit den Hilfsfeldern F und $\bar{F}$, zurückgeht.

$$\begin{aligned}
\overline{W}_{\dot\alpha}(\Gamma) = -i\int dx\Big(&\bar\psi_{\dot\alpha}(x)\frac{\delta}{\delta\bar\varphi(x)} - 2\bar F(x)\frac{\delta}{\delta\bar\psi^{\dot\alpha}(x)} - 2i\ \partial\!\!\!/_{\beta\dot\alpha}\varphi(x)\frac{\delta}{\delta\psi_\beta(x)}\\
&+ i\ \partial\!\!\!/_{\beta\dot\alpha}\psi^\beta(x)\frac{\delta}{\delta F(x)} + \bar\chi_{\dot\alpha}(x)\frac{\delta}{\delta\lambda(x)} - 2\bar f(x)\frac{\delta}{\delta\bar\chi^{\dot\alpha}(x)}\\
&- 2i\ \partial\!\!\!/_{\beta\dot\alpha}\lambda(x)\frac{\delta}{\delta\chi_\beta(x)} + i\ \partial\!\!\!/_{\beta\dot\alpha}\chi^\beta(x)\frac{\delta}{\delta f(x)}\Big)\Gamma\\
= 0.&
\end{aligned} \tag{129}$$

Dann folgt mit:

$$\frac{\delta}{\delta\bar F\delta\psi^\alpha\delta\psi^\gamma\delta\bar\chi^{\dot\beta}}\overline{W}_{\dot\alpha}(\Gamma) = 0 \qquad \Rightarrow \tag{130}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(L)}_{\bar F\psi^\alpha\psi^\gamma}(p_1,p_2,p_3) = &-\frac{\lambda}{L}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\Big[2\left(\left[\int dx\frac{1}{8}\bar\varphi^2\bar\psi_{\dot\beta}\right]_{\frac{7}{2}}\Gamma^{(L)}\right)_{\psi^\alpha\psi^\gamma\bar\psi^{\dot\alpha}}(p_2,p_3,p_1)\\
&+ p\!\!\!/_{\gamma\dot\alpha}\left(\left[\int dx\frac{1}{8}\bar\varphi^2\bar\psi_{\dot\beta}\right]_{\frac{7}{2}}\Gamma^{(L)}\right)_{\bar F\psi^\alpha F}(p_1,p_2,p_3)\Big].
\end{aligned} \tag{131}$$

An (131) kann man erkennen, wie nach der Elimination von $\bar{F}$ über die Bewegungsgleichung (75) der Beitrag zum chiralen Vertex $\Gamma_{\varphi\psi\psi}$ entsteht, und daß dies eine Besonderheit des Wess-Zumino-Modells ohne Hilfsfelder ist.
Wie schon bei (75) bemerkt, mischen bei der Elimination von F, $\bar{F}$ die Massendimensionen. So gibt es eine einzige R'-symmetrische Invariante der Dimension 5, die für unser Modell Beiträge mit Dimension 4 zu den chiralen Vertizes liefert. Diese Invariante lautet:

$$\Delta^{d=5} = \sum_{L=1}^{\infty} z^{(L)} \int dV \Lambda^{(L+1)} A^2 e^{2i\Theta\sigma\bar{\Theta}\partial} \bar{\Lambda}^{(L)} \bar{A} \quad + c.c. \tag{132}$$

Die Terme aus $\Delta^{d=5}$ mit Massendimension $d = 4$ in $L = 0$ sind folgende:

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}^{(L=0)} = m\Big(&\varphi^3 f - \lambda\psi^2\varphi + 2m\lambda\varphi^2\bar{\varphi} + \frac{\lambda^2}{2}\varphi^3\bar{\varphi} + \frac{\lambda\bar{\lambda}}{2}\varphi^2\bar{\varphi}^2 \\ &- 4\lambda\varphi\bar{\varphi}\bar{u} - 4\lambda\varphi^2 u + c.c.\Big).\end{aligned} \tag{133}$$

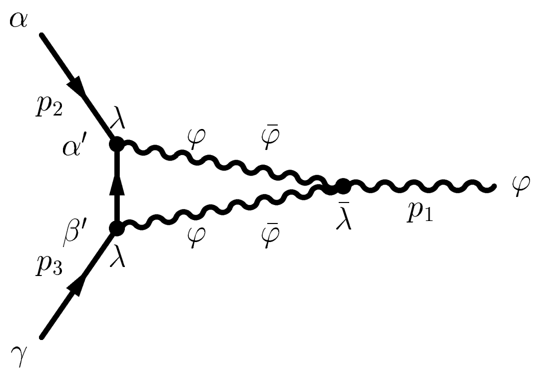
Es gibt also genau einen Beitrag zu den chiralen Vertizes, der im Limes der konstanten Kopplung nicht verschwindet. Diese Eigenschaft des Vertex $\Gamma_{\varphi\psi\psi}$ gilt allgemein auch für die höheren Greensfunktionen $\Gamma_{\psi\psi\varphi_1\cdots\varphi_n}$ im Modell ohne die Hilfsfelder F, $\bar{F}$, da immer Beiträge aus Funktionen $\Gamma_{\psi\psi\bar{F}\varphi_1\cdots\varphi_{n-1}}$ zu höherdimensionalen Invarianten im Modell mit Hilfsfeldern korrespondieren.

4.5.3. $\Gamma_{\varphi\psi\psi}$ in 1-Loop

$$\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\Gamma^{(1)}_{\varphi\psi^\alpha\psi^\gamma}(p_1,p_2,p_3) = -\lambda\left(\left[\int dx \frac{1}{8}\bar{\varphi}^2\bar{\psi}_{\dot{\beta}}\right]_{\frac{7}{2}}\Gamma^{(1)}\right)_{\psi^\alpha\psi^\gamma\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}}(p_2,p_3,p_1)\Gamma^{(0)}_{\varphi u}(p_1,-p_1) \tag{134}$$

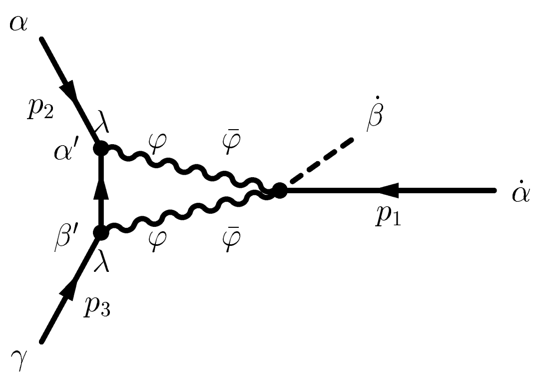
In diesem Abschnitt soll die Struktur der Nichtrenormierungstheoreme an dem Beispiel $\Gamma^{(1)}_{\varphi\psi\psi}$ in 1-Loop illustriert werden. Es gibt genau einen Term, der auf der rechten Seite von (127) zu $\Gamma^{(1)}_{\varphi\psi\psi}$ in 1-Loop beiträgt, da eine Einsetzung eines antichiralen Vertex in ein chirales Diagramm in 1-Loop nicht vorkommen kann. Betrachtet man das Diagramm $\Gamma_{\varphi\psi\psi}$, so kann man leicht erkennen, wie die Nichtrenormierungstheoreme in der Praxis funktionieren: Obwohl es aufgrund seiner äußeren Struktur logarithmisch divergent sein könnte, wird durch den inneren Aufbau, insbesondere dem Vertex $\lambda\phi\bar{\phi}^2$ mit $dim\left(\lambda\phi\bar{\phi}^2\right) = 3$, der Divergenzgrad um eins erniedrigt. Die Nichtrenormierungstheoreme erlauben nun dies ohne Betrachtung der inneren Struktur zu erkennen, indem der Divergenzgrad der rechten Seite von (127) abgezählt wird.

$\Gamma^{(1)}_{\varphi\psi^\alpha\psi^\gamma}(p_1, p_2, p_3)$:



Die rechte Seite von (134) sieht wie folgt aus:

$$\left(\left[\int dx \frac{1}{8}\bar{\varphi}^2\bar{\psi}_{\dot{\beta}}\right]_{\frac{7}{2}} \Gamma^{(1)}\right)_{\psi^\alpha\psi^\gamma\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}} (p_2, p_3, p_1) :$$



Der Vergleich beider Diagramme zeigt, daß sie von der inneren Struktur her nahezu identisch sind und sich lediglich durch den jeweils rechten Vertex unterscheiden. Während $\Gamma^{(1)}_{\varphi\psi\psi}$ dort den Vertexfaktor $-\frac{\lambda m}{4}$ trägt, hat $\left(\left[\int dx \frac{1}{8}\bar{\varphi}^2\bar{\psi}_{\dot{\beta}}\right]_{\frac{7}{2}} \Gamma^{(1)}\right)_{\psi^\alpha\psi^\gamma\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}}$ den Faktor $\frac{1}{8}$. Ausgeglichen wird dies durch den Term $-\lambda\Gamma^{(0)}_{\varphi u}$, der auf der klassischen Wirkung gerade $-2\lambda m$ ergibt. Durch eine kurze Rechnung bestätigt sich die Identität (134) explizit, wobei die inneren Impulse mit k_1, k_2, k_3 im Uhrzeigersinn benannt werden und der Symmetriefaktor für beide Diagramme $SF = 8$ beträgt.

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\Gamma^{(1)}_{\varphi\psi^\alpha\psi^\gamma}(p_1,p_2,p_3) &= \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\left(\frac{\hbar}{i}\right)\cdot 8\cdot\left(\frac{i\lambda}{8\hbar}\right)^2\left(-\frac{im\lambda}{4\hbar}\right)\epsilon^{\gamma\beta'}\epsilon^{\alpha\alpha'}\times\\
&\quad\int dk_1dk_2dk_3\Big[\delta(p_1-k_3+k_2)\delta(p_3-k_1+k_3)\delta(p_2-k_2+k_1)\times\\
&\qquad\Delta_{c\beta'\alpha'}(k_1)\Delta_c(k_2)\Delta_c(k_3)\Big]\\
&= \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\epsilon_{\gamma\alpha}(i\hbar)\frac{m^2\lambda^3}{16}\int dk_1dk_2dk_3\Big[\delta(p_1-k_3+k_2)\delta(p_3-k_1+k_3)\\
&\quad\times\delta(p_2-k_2+k_1)\frac{1}{(k_1^2-m^2)}\frac{1}{(k_2^2-m^2)}\frac{1}{(k_3^2-m^2)}\Big]\\
&= \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\epsilon_{\gamma\alpha}(i\hbar)\frac{m^2\lambda^3}{16}\delta(p_1+p_2+p_3)\times\\
&\quad\int dk_2\Big[\frac{1}{(k_2^2-m^2)}\frac{1}{((k_2-p_2)^2-m^2)}\frac{1}{((k_2+p_1)^2-m^2)}\Big].
\end{aligned}
\tag{135}
$$

Die rechte Seite von (134) ergibt:

$$
\begin{aligned}
&= -\lambda\left(\left[\int dx\frac{1}{8}\bar\varphi^2\bar\psi_{\dot\beta}\right]_{\frac{7}{2}}\Gamma^{(1)}\right)_{\psi^\alpha\psi^\gamma\bar\psi^{\dot\alpha}}(p_2,p_3,p_1)\Gamma^{(0)}_{\varphi u}(p_1,-p_1)\\
&= (-2\lambda m)\,8\cdot\left(\frac{\hbar}{i}\right)\left(\frac{i\lambda}{8\hbar}\right)^2\left(\frac{i}{8\hbar}\right)\epsilon^{\gamma\beta'}\epsilon^{\alpha\alpha'}\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\times\\
&\quad\int dk_1dk_2dk_3\Big[\delta(p_1-k_3+k_2)\delta(p_3-k_1+k_3)\delta(p_2-k_2+k_1)\times\\
&\quad\Delta_{c\beta'\alpha'}(k_1)\Delta_c(k_2)\Delta_c(k_3)\Big]\\
&= \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\epsilon_{\gamma\alpha}(i\hbar)\frac{m^2\lambda^3}{16}\delta(p_1+p_2+p_3)\times\\
&\quad\int dk_2\Big[\frac{1}{(k_2^2-m^2)}\frac{1}{((k_2-p_2)^2-m^2)}\frac{1}{((k_2+p_1)^2-m^2)}\Big].
\end{aligned}
\tag{136}
$$

Damit ist die Identität (134) gezeigt. Darüber hinaus sieht man zum einen, daß die Integrale für große Impulse k_2 tatsächlich konvergent sind und zum anderen, daß $\Gamma_{\varphi\psi\psi}$ für verschwindende einlaufende Impulse nicht Null ist.

4.5.4. $\Gamma_{\varphi\bar\varphi}$

Neben den chiralen Vertizes des Modells soll in diesem Abschnitt nun noch das Beispiel $\Gamma_{\varphi\bar\varphi}$ vorgerechnet werden. Durch Betrachtung des Counterterms (112, 114) kann man erkennen, daß auch $\Gamma_{\varphi\bar\varphi}$ keine unabhängige Divergenz trägt, sondern zu den anderen

divergenten Diagrammen in Relation stehen sollte.
Wir leiten also ab:

$$\frac{\delta^2}{\delta\bar{\varphi}(x)\delta\psi^\beta(y)} W_\alpha(\Gamma) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\epsilon_{\alpha\beta}\Gamma_{\bar{\varphi}\varphi}(p,-p) = 2 \not{p}_{\alpha\dot{\beta}}\Gamma_{\psi^\beta\bar{\psi}_{\dot{\beta}}}(-p,p) - \Gamma_{\bar{\varphi}\bar{u}}(p,-p)\Gamma_{\psi^\beta\psi^\alpha}(-p,p). \tag{137}$$

Die Terme auf der rechten Seite können über einen einzigen Vertex ausgedrückt werden, so daß klar wird, daß die Renormierung des Modells in jeder Ordnung letztlich immer in der Renormierung eines einzigen Diagramms besteht. Dazu werden noch folgende Relationen

$$\Gamma_{\bar{\varphi}\bar{u}}(p,-p)\Gamma_{\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\psi^\alpha}(-p,p) = 2 \not{p}_{\alpha\dot{\beta}}\Gamma_{\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\bar{\psi}_{\dot{\beta}}}(p,-p) \tag{138}$$

und die Lorentz-kovarianten Zerlegungen von:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\psi^\alpha}(-p,p) &=: -\frac{1}{2} \not{p}_{\alpha\dot{\alpha}} \left(1+\Sigma_{\bar{\psi}\psi}(p^2)\right), \\
\Gamma_{\psi^\beta\psi^\alpha}(-p,p) &=: \frac{m}{2}\epsilon_{\alpha\beta} \left(1+\Sigma_{\psi\psi}(p^2)\right), \\
\Gamma_{\bar{\psi}^{\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}}(-p,p) &=: -\frac{m}{2}\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \left(1+\Sigma_{\bar{\psi}\bar{\psi}}(p^2)\right)
\end{aligned} \tag{139}$$

benötigt, wobei Σ die Selbstenergie ist. Damit folgt für $\Gamma_{\varphi\bar{\varphi}}$:

$$\Gamma_{\bar{\varphi}\varphi}(p,-p) = p^2\left(1+\Sigma_{\psi\bar{\psi}}(p^2)\right) - m^2\frac{\left(1+\Sigma_{\bar{\psi}\bar{\psi}}(p^2)\right)\left(1+\Sigma_{\psi\psi}(p^2)\right)}{\left(1+\Sigma_{\bar{\psi}\psi}(p^2)\right)}. \tag{140}$$

Berücksichtigt man noch die Struktur $\Gamma_{\psi\psi}$ in (120), so kann $\Gamma_{\varphi\bar{\varphi}}$ auf $\Gamma_{\bar{\psi}\psi}$ zurückgeführt werden. Insbesondere kann man sich direkt von der Richtigkeit der Formel durch Anwendung auf die klassische Wirkung überzeugen:

$$\Gamma^{cl}_{\bar{\varphi}\varphi}(p,-p) = p^2 - m^2. \tag{141}$$

Aus dem Nichtrenormierungstheorem für $\Gamma_{\psi\psi}$ folgt unmittelbar $\Sigma^{(1)}_{\psi\psi} = \Sigma^{(1)}_{\bar{\psi}\bar{\psi}} = 0$. Damit läßt sich (140) in 1-Loop schreiben:

$$\Gamma^{(1)}_{\bar{\varphi}\varphi}(p,-p) = p^2\left(1+\Sigma^{(1)}_{\psi\bar{\psi}}(p^2)\right) - m^2\left(1-\Sigma^{(1)}_{\bar{\psi}\psi}(p^2)\right). \tag{142}$$

5. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden die Nichtrenormierungstheoreme für die chiralen Vertizes des Wess-Zumino-Modells im Komponentenfeldformalismus ohne die Hilfsfelder F, $\bar{F}$ abgeleitet. Dies war zum ersten Mal in einem Modell möglich, das keine Superraumformulierung besitzt, da es gelungen ist [14], die Nichtrenormierungstheoreme unabhängig von der Formulierung im Superraum und allein auf den algebraischen Eigenschaften der Theorie basierend abzuleiten. Dabei wurde das Modell dadurch erweitert, daß die Kopplungskonstante in ein chirales Superfeld mit Massendimension 0 übergeht, das unter Supersymmetrie und einer modifizierten R-Symmetrie transformiert. Das ursprüngliche Wess-Zumino-Modell erhält man dann im Limes der konstanten Kopplung. Durch die neue R'-Symmetrie wird letztlich das Auftreten von unabhängigen Renormierungen der Massen- bzw. Kopplungskonstanten verhindert, so daß nur die Wellenfunktionsrenormierung und damit nur ein freier Parameter übrig bleibt. Die Nichtrenormierungstheoreme für die chiralen Vertices des Modells folgen dann unmittelbar aus den Supersymmetrie-Ward-Identitäten. Das Ergebnis zeigt, daß die chiralen Vertizes weiterhin konvergent bis auf Wellenfunktionsrenormierung sind. Allerdings verschwinden die Greenschen Funktionen $\Gamma_{\psi\psi\varphi\cdots\varphi}$ entgegen der bisherigen Annahme nicht mehr bei $p^2 = 0$.
Weitere Rechnungen haben gezeigt [15, 16], daß die Methode der lokalen Kopplungen auch benutzt werden kann, um die Klasse der weichen Brechungen der Supersymmetrie nach Giradello und Grisaru [28] auf relativ natürliche Weise zu charakterisieren. Diese weichen Brechungen sind ursprünglich dadurch bestimmt, daß bei der Einführung der Terme keine quadratischen Divergenzen entstehen und konnten bisher nur durch "gutes Raten" gefunden werden. Als nächster Schritt kann daher versucht werden, die Klasse der weichen Brechungen für das Wess-Zumino-Modell aus den lokalen Kopplungen zurückzugewinnen. Dazu ist es wiederum notwendig, das Modell zu erweitern. Und zwar wird der erhaltene Strom aus der Differenz von R- und R'-Symmetrie an ein Vektormultiplett gekoppelt. Die weichen Brechungen der Supersymmetrie ergeben sich dann, zumindest zum Teil, als Verschiebungen der jeweils höchsten Komponenten des Kopplungsmultipletts $(f, \bar{f})$ und des Vektormultipletts (D) um einen konstanten Massenterm. Dieses erweiterte Modell hat im Gegensatz zu dem im 4. Kapitel diskutierten Modell darüber hinaus die Eigenschaft, multiplikativ renormierbar zu sein, d.h. der in Kapitel 4.4 angegebene Counterterm zum kinetischen Anteil des Wess-Zumino-Modells läßt sich als Feldredefinition der klassischen Wirkung des um das Vektormultiplett erweiterten Modells schreiben. Damit können die Nichtrenormierungstheoreme auch in Anwesenheit von weichen Brechungen abgeleitet werden.

Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich mich zunächst bei Frau Priv.-Doz. Dr. E. Kraus für eine interessante Aufgabenstellung sowie die intensive Betreuung und die nahezu unendliche Geduld bedanken. Herrn Prof. Dr. R. Flume danke ich für die Übernahme des Koreferats. Den Bewohnern des Raumes 131 bin ich für eine nette Arbeitsatmosphäre und die teils sagenhaften Diskussionen zutiefst dankbar. Außerdem möchte ich mich bei Katja Stappmanns, Mark Hillenbach, Jonas Gibiec, Kurusch Ebrahimi-Fard und Gabi Honecker für die Durchsicht von Teilen des Manuskripts bedanken. Nicht zuletzt danke ich meinen Eltern für die primär materielle und meiner Freundin für die vorrangig spirituelle Unterstützung.

Appendix A. Erzeugende Funktionale

Bemerkung: Bei der Erstellung der Anhänge A und B habe ich mich im Aufbau und einem großen Teil der Konventionen nach [20, 24] gerichtet.

Natürliche Einheiten: $\hbar = c = 1$

Metrischer Tensor: $(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = diag(1, -1, -1, -1) \qquad (\mu, \nu = 0 \cdots 3)$

Fouriertransformation für Felder: $\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} \Phi(p) \quad \Phi(p) = \int d^4x e^{ipx} \Phi(x)$

Greensche Funktionen und Vertex-Funktional

Die n-Punkt Greenschen Funktionen im Ortsraum sind definiert als die Vakuumerwartungswerte der zeitgeordneten Produkte von Feldoperatoren:

$$G_{i_1 \cdots i_N}(x_1 \cdots x_N) = \langle T\Phi_{i_1}(x_1) \cdots \Phi_{i_N}(x_N) \rangle \,. \tag{A.1}$$

Diese können mit Hilfe der Gell-Mann-Low-Formel, dem Wickschen Theorem und einem geeigneten Regularisierungsschema zur Beseitigung der Divergenzen aus den Propagatoren der freien Felder und den Vertexfaktoren berechnet werden. Dazu trennt man den klassischen Lagrangian in einen quadratischen und einen Wechselwirkungsanteil.

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\Phi_i(x) K^{ij} \Phi_j(x) + \mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}. \tag{A.2}$$

Die Greensfunktionen erhält man mit:

$$G_{i_1 \cdots i_N}(x_1 \cdots x_N) = \frac{\left\langle T\Phi_{i_1}^{frei}(x_1) \cdots \Phi_{i_N}^{frei}(x_N) e^{i\int d^4x \mathcal{L}_{int}(\Phi^{frei})} \right\rangle}{\left\langle T\Phi_{i_1}^{frei}(x_1) \cdots \Phi_{i_N}^{frei}(x_N) \right\rangle}. \tag{A.3}$$

Die Fouriertransformation für die Greenschen Funktionen ist so definiert, daß die Impulse p_j von außen in die Diagramme einlaufen, also:

$$\begin{aligned} \int d^4x_1 \cdots d^4x_N exp(-i\sum_{j=1}^{N} p_j x_j) G_{i_1 \cdots i_N}(x_1 \cdots x_N) &= (2\pi)^4 \tilde{G}_{i_1 \cdots i_N}(p_1 \cdots p_N) \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \cdots + p_N) G_{i_1 \cdots i_N}(p_1 \cdots p_N). \end{aligned} \tag{A.4}$$

Alle Greenschen Funktionen einer Theorie können kompakt angegeben werden durch ein erzeugendes Funktional $Z(J)$, wobei J die klassischen Quellen der Felder Φ sind:

$$Z(J) = \left\langle T exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int d^4x J(x)\Phi(x)\right\}\right\rangle \tag{A.5}$$
$$= \sum_{N=0}^{\infty}\frac{(i/\hbar)^N}{N!}\int d^4x_1\cdots d^4x_N J^{i_1}(x_1)\cdots J^{i_N}(x_N)G_{i_1\cdots i_N}(x_1\cdots x_N).$$

Für die Renormierung des erzeugenden Funktionals reicht es aus, die Greenschen Funktionen zu betrachten, die zu den Einteilchen-irreduziblen-Diagrammen (1PI) gehören, da diese alle Loops und damit alle divergenten Anteile beinhalten. Diese werden erzeugt durch das Vertex-Funktional. Zunächst definiert man das erzeugende Funktional für die zusammenhängenden Greenschen Funktionen Z^c:

$$Z(J) = exp\left\{\frac{i}{\hbar}Z^c(J)\right\} \tag{A.6}$$
$$Z^c(J) = \sum_{N=1}^{\infty}\frac{(i/\hbar)^{N-1}}{N!}\int d^4x_1\cdots d^4x_N J^{i_1}(x_1)\cdots J^{i_N}(x_N)\left\langle T\Phi_{i_1}(x_1)\cdots\Phi_{i_N}(x_N)\right\rangle_{conn}.$$

Das Vertex-Funktional ist nun die Legendre-Transformierte von $Z^c(J)$. Dazu definiert man die klassischen Felder $\Phi_{cl.}$

$$\Phi_{cl.}(x) = \frac{\delta}{\delta J(x)}Z^c(J) \tag{A.7}$$

und damit

$$\Gamma(\Phi_{cl.}) = Z^c(J) - \int d^4x J(x)\Phi_{cl.} \qquad J(x) = J(\Phi_{cl.})(x) \tag{A.8}$$
$$= \sum_{N=2}^{\infty}\frac{i/\hbar}{N!}\int d^4x_1\cdots d^4x_N\Phi^{i_1}_{cl.}(x_1)\cdots\Phi^{i_N}_{cl.}(x_N)\left\langle T\Phi_{i_1}(x_1)\cdots\Phi_{i_N}(x_N)\right\rangle_{1PI} \tag{A.9}$$

bzw.

$$\Gamma_{i_1\cdots i_m} := \frac{\delta^m\Gamma}{\delta\Phi^{i_1}_{cl.}(x_1)\cdots\delta\Phi^{i_m}_{cl.}(x_m)} = \frac{i}{\hbar}\left\langle T\Phi_{i_1}(x_1)\cdots\Phi_{i_m}(x_m)\right\rangle_{1PI}. \tag{A.10}$$

Für die Zweipunktfunktionen folgt:

$$\int d^4x_1\Gamma^{ij}(x_2,x_1)\left\langle T\Phi_i(x_1)\Phi_j(x_3)\right\rangle_{conn} = i\hbar\delta(x_2-x_3). \tag{A.11}$$

Zusammengesetzte Felder

Um erzeugende Funktionale für zusammengesetzte Feldoperatoren zu definieren, die insbesondere in Theorien mit nicht-linearen Feldtransformationen auftreten, ist es sinnvoll die Feldoperatoren $Q_i(x)$ an äußere Felder $\rho_i(x)$ zu koppeln. Der Wechselwirkungslagrangian in A.2 geht also über in:

$$\mathcal{L}^{\rho}_{int}(\Phi, \rho) = \mathcal{L}_{int}(\Phi) + \sum \rho_i(x) Q_i(x). \tag{A.12}$$

Die Verallgemeinerung von A.5 lautet dann:

$$\begin{aligned} Z(J, \rho) = \sum_{N,M=0}^{\infty} \frac{(i/\hbar)^{N+M}}{N!M!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_N d^4y_1 \cdots d^4y_M J^{i_1}(x_1) \cdots J^{i_N}(x_N) \\ \times \rho_{j_1}(y_1) \cdots \rho_{j_M}(y_M) \left\langle T\Phi_{i_1}(x_1) \cdots \Phi_{i_N}(x_N) Q^{j_1}(y_1) \cdots Q^{j_M}(y_M) \right\rangle . \end{aligned} \tag{A.13}$$

Insbesondere gilt dann, daß

$$\frac{\delta \Gamma(\Phi)}{\delta \rho_j(y)} = Q^j(y) \cdot \Gamma(\Phi) \tag{A.14}$$

die Beiträge der 1PI-Diagramme zu den Greensfunktionen

$$\left\langle T Q^j(y) \Phi_{i_1}(x_1) \cdots \Phi_{i_N}(x_N) \right\rangle_{1PI} \tag{A.15}$$

erzeugt, deren Feynman-Diagramme eine Einsetzung eines klassischen Feldpolynoms $Q^j_{cl}(y)$ an einem Vertex enthalten. Gl.(A.14,A.15) bilden einen Teil des sogenannten Quantenwirkungsprinzips [25, 23]. Darin sind für die Quantenfeldtheorie gültige Aussagen über das Verhalten des Vertexfunktionals bei Variation eines äußeren Parameters, eines äußeren Feldes sowie eines Quantenfeldes zusammengefaßt.

Appendix B. Supersymmetrie

Superraum und Superfelder

Die N=1 Supersymmetriealgebra ist eine Erweiterung der Poincarealgebra um zwei antikommutierende Generatoren Q_α, $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$, die mit den Translationen vertauschen, mit den Lorentz-Boosts aber nicht. Zusammen bilden sie eine Z_2-gestufte Lie-Algebra. Die nichtverschwindenden (Anti-)Kommutatoren lauten:

$$\left\{ Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \right\} = 2\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}} P_\mu \tag{B.1}$$

$$[Q_\alpha, M^{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu} Q)_\alpha, \tag{B.2}$$

wobei $M^{\mu\nu}$ die Erzeugenden der Lorentz-Boosts sind.
Das volle Gruppenelement der Superpoincaregruppe hängt nun von 4 kommutierenden a_μ und 4 antikommutierenden Parametern η_α, $\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}$ ab.

$$G(a,\eta,\bar{\eta}) = e^{i(aP+\eta Q+\bar{\eta}\bar{Q})} \tag{B.3}$$

Der Superraum ist nun als Nebenklassenmannigfaltigkeit der Superpoincaregruppe bezüglich der Raumzeittranslationen definiert. Anschaulich ist er aus Punkten aufgebaut, deren Koordinaten Zahlen (x^μ) und Grassmannzahlen (θ_α, $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$) sind.
Ein klassisches Superfeld $\phi(x,\theta,\bar{\theta})$ ist nun eine Funktion auf dem Superraum. Sie kann in eine Taylorreihe für θ, $\bar{\theta}$ entwickelt werden, die aufgrund der Antikommutativität von θ, $\bar{\theta}$ nach ein paar Termen abbricht. Für ein reelles Superfeld ($\bar{\phi} = \phi$) erhält man in Komponentenfeldern:

$$\begin{aligned}\phi(x,\theta,\bar{\theta}) = C(x) + \theta\chi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \frac{1}{2}\theta^2 M(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}^2\bar{M}(x)\\ + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) + \frac{1}{2}\bar{\theta}^2\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \frac{1}{4}\bar{\theta}^2\theta^2 D(x).\end{aligned} \tag{B.4}$$

Unter infinitesemalen Translationen transformiert sich ein Superfeld wie folgt:

$$\begin{aligned}\delta^P_\mu\phi &= \partial_\mu\phi\\ \delta^Q_\alpha\phi &= (\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu)\phi\\ \delta^{\bar{Q}}_{\dot{\alpha}}\phi &= (-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu)\phi.\end{aligned} \tag{B.5}$$

Die Transformationen bilden eine Darstellung der SUSY-Algebra (B.1), d.h.

$$\left\{\delta^Q_\alpha, \delta^{\bar{Q}}_{\dot{\alpha}}\right\} = -2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\delta^P_\mu. \tag{B.6}$$

Die kovarianten Ableitungen sind so definiert, daß sie mit den SUSY-Transformationen antikommutieren und untereinander eine Darstellung der SUSY-Algebra bilden, also:

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu, \qquad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu \tag{B.7}$$

$$\left\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\right\} = 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\delta^P_\mu. \tag{B.8}$$

Die kovarianten Ableitungen werden zur Ausreduktion der Superpoincaregruppe verwendet. Die Lösungen von $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\phi = 0$ und $D_\alpha\phi = 0$ heißen chirale bzw. antichirale Superfelder und sind kovariant unter den SUSY-Transformationen B.17. Zusätzlich kann noch eine geeignete Basis im Superraum gewählt werden, so daß die kovarianten Ableitungen eine besonders einfache Form annehmen. Man benutzt die chirale Darstellung mit

$$\phi_{chir.rep.}(x', \theta, \bar{\theta}) = \phi(x + i\theta\sigma\bar{\theta}, \theta, \bar{\theta}) \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned} \delta_\alpha^Q &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} & \delta_{\dot\alpha}^{\bar{Q}} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot\alpha}} - 2i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu \\ D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar{\theta}^{\dot\alpha}\partial_\mu & \bar{D}_{\dot\alpha} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot\alpha}}. \end{aligned} \tag{B.10}$$

und die antichirale Darstellung mit

$$\phi_{antichir.rep.}(x', \theta, \bar{\theta}) = \phi(x - i\theta\sigma\bar{\theta}, \theta, \bar{\theta}) \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned} \delta_\alpha^Q &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar{\theta}^{\dot\alpha}\partial_\mu & \delta_{\dot\alpha}^{\bar{Q}} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot\alpha}} \\ D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} & \bar{D}_{\dot\alpha} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot\alpha}} + 2i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu. \end{aligned} \tag{B.12}$$

In Komponentenfeldern lauten die chiralen bzw. antichiralen Superfelder in chiraler bzw. antichiraler Darstellung wie folgt:

$$\phi_{chiral}(x, \theta) = \varphi(x) + \theta\psi + \theta^2 F \tag{B.13}$$

$$\phi_{antichiral}(x, \bar{\theta}) = \bar{\varphi}(x) + \bar{\theta}\bar{\psi}(x) + \bar{\theta}^2\bar{F}(x), \tag{B.14}$$

wobei ϕ, F komplexe, skalare Felder und ψ ein Weyl-Spinor sind. Die in Kapitel 4 eingeführten Kopplungsfelder lauten in Komponentenfeldern:

$$\Lambda(x, \theta) = \lambda(x) + \theta\chi(x) + \theta^2 f(x) \tag{B.15}$$

$$\bar{\Lambda}(x, \bar{\theta}) = \bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \bar{\theta}^2\bar{f}(x). \tag{B.16}$$

Die SUSY-Transformationen für die Komponentenfelder lauten:

$$\begin{aligned} \delta_\alpha\varphi &= \psi_\alpha & \bar{\delta}_{\dot\alpha}\varphi &= 0 \\ \delta_\alpha F &= 0 & \bar{\delta}_{\dot\alpha}F &= i\ \not{\partial}_{\beta\dot\alpha}\psi^\beta \\ \delta_\alpha\psi^\beta &= 2\delta_\alpha^\beta F & \bar{\delta}_{\dot\alpha}\psi_\beta &= 2i\ \not{\partial}_{\beta\dot\alpha}\varphi \\ \delta_\alpha\bar{\varphi} &= 0 & \bar{\delta}_{\dot\alpha}\bar{\varphi} &= \bar{\psi}_{\dot\alpha} \\ \delta_\alpha\bar{\psi}_{\dot\beta} &= 2i\ \not{\partial}_{\alpha\dot\beta}\bar{\varphi} & \bar{\delta}_{\dot\alpha}\bar{\psi}^{\dot\beta} &= -2\delta_{\dot\alpha}^{\dot\beta}\bar{F} \\ \delta_\alpha\bar{F} &= -i\ \not{\partial}_{\alpha\dot\beta}\bar{\psi}^{\dot\beta} & \bar{\delta}_{\dot\alpha}\bar{F} &= 0. \end{aligned} \tag{B.17}$$

Um aus den Superfeldern Wirkungen aufzubauen, muß man noch eine Integration über die Grassmannvariablen θ,$\bar{\theta}$ finden. Eine solche Integration ist die *Berenzin Integration* [29], die definiert ist durch:

$$0 \equiv \int d\theta, \qquad 1 \equiv \int d\theta\theta. \tag{B.18}$$

Somit ist die Integration formal äquivalent zur Differentiation und man erhält für die Integration über den Superraum:

$$\begin{aligned} \int dV\phi &= \int d^4x d^2\theta d^2\bar{\theta}\phi = \int d^4x D^2\bar{D}^2\phi \\ \int dS\phi &= \int d^4x d^2\theta\phi = \int d^4x D^2\phi \\ \int d\bar{S}\phi &= \int d^4x d^2\bar{\theta}\phi = \int d^4x \bar{D}^2\phi. \end{aligned} \tag{B.19}$$

Die Massendimensionen d der Felder A, $\bar{A}$, Λ und $\bar{\Lambda}$, sowie die R'-Gewichte der Integrationsmaße und der Felder lauten:

	A	Λ	dS	dV
d	1	0	1	2
$n_{R'}$	-1	1	2	0

Tab.3: Massendimensionen d und R'-Gewichte

Weyl-Spinoren

Die Weyl-Spinoren ψ, $\bar{\psi}$ gehören zur $(\frac{1}{2},0)$ bzw. $(0,\frac{1}{2})$ Darstellung der $SL(2,C)$. Ihre Komponenten $(\psi_\alpha, \alpha = 1,2)$ und $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = (\psi_\alpha)^*$ sind Grassmannzahlen, d.h.

$$\psi_\alpha\psi'_\beta = -\psi'_\beta\psi_\alpha. \tag{B.20}$$

Das Heben und Senken der Spinorindizes geschieht mit dem total antisymmetrischen, invarianten Tensor zweiter Stufe.

$$\epsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta = \psi_\alpha \qquad \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta = \psi^\alpha \tag{B.21}$$

mit $\quad \epsilon^{12} = 1, \quad \epsilon^{\alpha\beta} = -\epsilon_{\alpha\beta}, \quad \epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$ und genauso für gepunktete Indizes. Das "richtige" Vorzeichen bei der Ableitung nach den Spinorkomponenten erhält man mit:

$$\frac{\partial}{\partial\psi^\alpha}\psi^\beta = \delta_\alpha^\beta, \qquad \frac{\partial}{\partial\psi_\alpha}\psi^\beta = \epsilon^{\alpha\gamma}\frac{\partial}{\partial\psi^\gamma}\psi^\beta = \epsilon^{\alpha\beta}. \tag{B.22}$$

Einige nützliche Formeln für Weyl-Spinoren und komplexe Konjugation lauten:

$$\begin{aligned}
&\psi\chi = \psi^\alpha\chi_\alpha = -\chi_\alpha\psi^\alpha = \chi^\alpha\psi_\alpha = \chi\psi \\
&\bar\psi\bar\chi = \bar\psi_{\dot\alpha}\bar\chi^{\dot\alpha} = -\bar\chi^{\dot\alpha}\bar\psi_{\dot\alpha} = \bar\chi_{\dot\alpha}\bar\psi^{\dot\alpha} = \bar\chi\bar\psi \\
&\psi\sigma^\mu\bar\chi = \psi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\chi^{\dot\alpha}, \qquad \bar\psi\bar\sigma_\mu\chi = \bar\psi_{\dot\alpha}\bar\sigma_\mu^{\dot\alpha\alpha}\chi_\alpha \\
&(\psi\chi)^* = \bar\chi\bar\psi = \bar\psi\bar\chi \\
&(\psi\sigma^\mu\bar\chi)^* = \chi\sigma^\mu\bar\psi = -\bar\psi\bar\sigma^\mu\chi.
\end{aligned} \tag{B.23}$$

Pauli-Matrizen:

Die Spinordarstellung der Lorentzgruppe auf den Räumen der ψ_α und $\bar\psi^{\dot\alpha}$ sind durch die Generatoren $\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}$ und $\frac{1}{2}\bar\sigma^{\mu\nu}$ gegeben, wobei:

$$\begin{aligned}
&(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta := \frac{i}{2}(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu - \sigma^\nu\bar\sigma^\mu)_\alpha{}^\beta \\
&(\bar\sigma^{\mu\nu})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} := \frac{i}{2}(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu - \bar\sigma^\nu\sigma^\mu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}.
\end{aligned} \tag{B.24}$$

Die σ^μ sind die Pauli-Matrizen, mit

$$\left(\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\right) = \left(\sigma^0_{\alpha\dot\beta}, \sigma^1_{\alpha\dot\beta}, \sigma^2_{\alpha\dot\beta}, \sigma^3_{\alpha\dot\beta}\right) \tag{B.25}$$

und

$$\sigma^0 = 1, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{B.26}$$

$$\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} = (1, \sigma^k)_{\alpha\dot\alpha}, \qquad \bar\sigma^{\mu\dot\alpha\alpha} = (1, -\sigma^k)^{\dot\alpha\alpha}. \tag{B.27}$$

Einige nützliche Formeln für die Pauli-Matrizen lauten:

$$\epsilon_{\alpha\beta}\sigma^\mu_{\gamma\dot\gamma} + \epsilon_{\beta\gamma}\sigma^\mu_{\alpha\dot\gamma} + \epsilon_{\gamma\alpha}\sigma^\mu_{\beta\dot\gamma} = 0 \tag{B.28}$$

$$\epsilon\alpha\beta\epsilon_{\gamma\delta} + \epsilon\beta\gamma\epsilon_{\alpha\delta} + \epsilon\gamma\alpha\epsilon_{\beta\delta} = 0 \tag{B.29}$$

$$\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\sigma_\mu^{\beta\dot\beta} = 2\delta_\alpha^\beta\delta_{\dot\alpha}^{\dot\beta}, \quad \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\sigma_{\mu\beta\dot\beta} = 2\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} \tag{B.30}$$

$$\sigma_\mu\bar\sigma_\nu = g_{\mu\nu} - i\sigma_{\mu\nu}, \quad \bar\sigma_\mu\sigma_\nu = g_{\mu\nu} - i\bar\sigma_{\mu\nu} \tag{B.31}$$

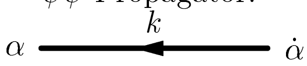
Appendix C. Feynmanregeln

Für die Bestimmung der Propagatoren und der Feynmanregeln trennen wir die Wirkung (86) auf in einen freien Anteil Γ_0, d.h. die Terme, die bilinear in den propagierenden Feldern sind, und einen Wechselwirkungsanteil Γ_{int}.

$$\begin{aligned}
\Gamma^{cl} &= \Gamma_0 + \Gamma_{int} \\
&= \int dx \Big[\Big\{ \partial^\mu \varphi \partial_\mu \bar{\varphi} + \frac{i}{2} \psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} - m^2 \varphi \bar{\varphi} + \frac{m}{4} \psi^2 + \frac{m}{4} \bar{\psi}^2 - 4u\bar{u} \Big\}_0 + \Big\{ -\frac{\lambda \bar{\lambda}}{16} \varphi^2 \bar{\varphi}^2 \\
&\quad + \Big(\frac{\lambda}{8} \varphi \psi^2 - \frac{\lambda m}{4} \varphi^2 \bar{\varphi} - \frac{1}{12} f \varphi^3 + \frac{1}{8} \varphi^2 \psi \chi + 2mu\varphi + \frac{\lambda}{2} u \varphi^2 + c.c. \Big) \Big\}_{int} \Big].
\end{aligned} \tag{C.1}$$

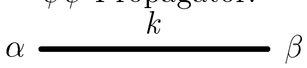
$$\begin{aligned}
\frac{\delta \Gamma^{cl}}{\delta \psi^\beta} &= \frac{i}{2} \sigma^\mu{}_{\beta\dot{\alpha}} \partial_\mu \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} + \frac{m}{2} \psi_\beta = -J_\beta \\
\frac{\delta \Gamma_{cl}}{\delta \bar{\psi}^{\dot{\beta}}} &= \frac{i}{2} \partial_\mu \psi^\alpha \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}} - \frac{m}{2} \bar{\psi}_{\dot{\beta}} = \bar{J}_{\dot{\beta}} \\
(\Box + m^2) \psi_\beta &= -2mJ_\beta + 2i\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\alpha}} \partial_\mu \bar{J}^{\dot{\alpha}}
\end{aligned} \tag{C.2}$$

$\psi\bar{\psi}$-Propagator:



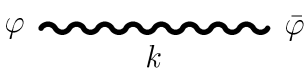
$$\begin{aligned}
(\Box^x + m^2) \frac{\delta \psi_\beta(x)}{\delta \bar{J}^{\dot{\beta}}(y)} &= 2i\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\beta}} \partial_\mu \delta(x-y) \\
(\Box^x + m^2) \frac{\delta Z_c}{\delta J^\beta(x) \delta \bar{J}^{\dot{\beta}}(y)} &= 2i\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\beta}} \partial_\mu \delta(x-y) \\
(\Box^x + m^2) < T\psi_\beta(x) \bar{\psi}_{\dot{\beta}}(y) > &= -2\hbar \sigma^\mu{}_{\beta\dot{\beta}} \partial_\mu \delta(x-y) \\
< T\psi_\beta(k) \bar{\psi}_{\dot{\beta}}(-k) > &= -(i\hbar) \frac{2 \not{k}_{\beta\dot{\beta}}}{k^2 - m^2} = \Delta_{c\beta\dot{\beta}}(k)
\end{aligned} \tag{C.3}$$

$\psi\psi$-Propagator:



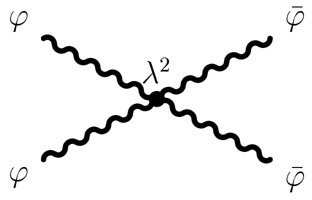
$$\begin{aligned}
< T\psi_\beta(k) \psi_\gamma(-k) > &= -(i\hbar) \frac{2m\epsilon_{\beta\gamma}}{k^2 - m^2} = \Delta_{c\beta\gamma}(k) \\
bzw. < T\psi_{\dot{\alpha}}(k) \psi_{\dot{\beta}}(-k) > &= (i\hbar) \frac{2m\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}}{k^2 - m^2} = \Delta_{c\dot{\alpha}\dot{\beta}}(k)
\end{aligned} \tag{C.4}$$

$\varphi\bar{\varphi}$-Propagator:

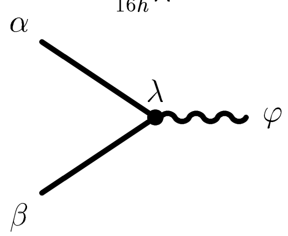


$$< T\varphi(k) \bar{\varphi}(-k) > = (i\hbar) \frac{1}{k^2 - m^2} = \Delta_c(k) \tag{C.5}$$

Vertizes:



$\rightsquigarrow \frac{-i}{16\hbar}\lambda^2$



$\rightsquigarrow \frac{i}{8\hbar}\lambda\epsilon^{\alpha\beta}$

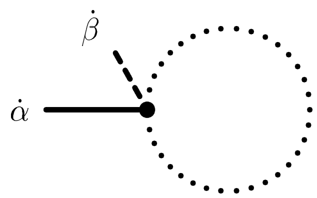
Und entsprechend für die anderen Vertizes.

Extras:
1. Reihenfolge der Spinorindizes an ϵ, gibt Reihenfolge der Spinoren vor, amputierte Beine immer zuerst.
2. Symmetriefaktor für topologisch gleiche Diagramme.
3. alle äußeren Impulse einlaufend.
4. Integration über alle inneren Impulse (Impulserhaltung am Vertex).
5. Faktor $(-i\hbar)$

Eine alternative Variante der Feynmanregeln mit Majorana-Spinoren findet man in [21].

Appendix D. Tadpole

In Kapitel 4.5.2 wurde behauptet, daß der Tadpole $\left(\left[\int dx \frac{1}{8}\bar{\varphi}^2\bar{\psi}_{\dot{\beta}}\right]\Gamma\right)_{\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}}(p)$:



im Limes zur konstanten Kopplung bei $p^2 = 0$ verschwindet. Diese Behauptung soll hier bewiesen werden. Die Vorgehensweise ist analog zur Ableitung der Nichtrenormierungstheoreme. Also:

$$\frac{\delta^2}{\delta\varphi\delta\bar{\chi}^{\dot{\beta}}}\overline{W}_{\dot{\alpha}}(\Gamma) = 0 \qquad \Rightarrow \tag{D.1}$$

$$\int dz \Gamma_{\varphi u}\Gamma_{\bar{\chi}^{\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}} = +2i\ \partial\!\!\!/_{\beta\dot{\alpha}}\Gamma_{\bar{\chi}^{\dot{\beta}}\psi_\beta} \tag{D.2}$$

Aus der Ward-Identität des Wess-Zumino-Modells mit konstanter Kopplung folgt außerdem mit der üblichen kovarianten Zerlegung für $\Gamma_{\bar{\psi}\psi}$ und $\Gamma_{\psi\psi}$:

$$\Gamma_{\varphi u} = -2m\left(1+\Sigma_{\bar{\psi}\psi}(p^2)\right)^{-1}\left(1+\Sigma_{\psi\psi}(p^2)\right). \tag{D.3}$$

Damit folgt die Behauptung:

$$\begin{aligned}\left(\left[\int dx \frac{1}{8}\bar{\varphi}^2\bar{\psi}_{\dot{\beta}}\right]\Gamma\right)_{\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}}(p) &= \frac{p\!\!\!/_{\beta\dot{\alpha}}}{m}\left(1+\Sigma_{\bar{\psi}\psi}(p^2)\right)\left(1+\Sigma_{\psi\psi}(p^2)\right)^{-1}\left(\left[\int dx\frac{1}{8}\bar{\varphi}^2\bar{\psi}_{\dot{\beta}}\right]\Gamma\right)_{\psi^\beta}(p)\\ &= 0 \qquad\qquad f\ddot{u}r\ \ p^2 = 0.\end{aligned} \tag{D.4}$$

Literatur

[1] J. Wess, B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B70** (1974) 39.

[2] J. Iliopoulos, B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B76** (1974) 310.

[3] B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B89** (1975) 535.

[4] S. Ferrara, J. Iliopoulos, B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B77** (1974) 413.

[5] J. Wess, B. Zumino, *Phys. Lett.* **B 49** (1974) 52.

[6] S. Ferrara, B. Zumino, J. Wess, *Phys. Lett.* **B51** (1974) 239.

[7] K. Fujikawa, W. Lang, *Nucl. Phys.* **B88** (1975) 61.

[8] M.T. Grisaru, W. Siegel, M. Rocek, *Nucl. Phys.* **B159** (1979) 429.

[9] M.T. Grisaru, W. Siegel, *Nucl. Phys.* **B201** (1982) 292.

[10] H.P. Nilles, *Phys. Rep.* **110** (1984) 1.

[11] M.F. Sohnius, *Phys. Rep.* **128** (1985) 39.

[12] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, 2.nd Edition, Princeton Series in Physics, 1992.

[13] O. Piguet, K. Sibold, *Renormalized Supersymmetry*, series "Progress in Physics", vol.12, Birkhäuser Boston Inc.,1986.

[14] R. Flume, E. Kraus, *Nucl. Phys.* **B569** (2000) 625.

[15] W. Hollik, E. Kraus, D. Stöckinger, *Renormalization of supersymmetric Yang-Mills theories with soft supersymmetry breaking*, **hep-ph**/0007134.

[16] E. Kraus, D. Stöckinger, *SQED with local coupling*, in Vorbereitung.

[17] M. Drees, *An Introduction to Supersymmetry* **hep-th**/9611409.

[18] O. Piguet, K. Sibold, *Nucl. Phys.* **B253** (1985) 269.

[19] K. Sibold, *Non-linear Field Transformations: Simple Examples, General Remarks* in: P. Breitenlohner, D. Maison, K. Sibold (Hrsg.), *Renormalization of Quantum Field Theories with Non-linear Field Transformations*, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, 1987.

[20] O.Piguet, *Supersymmetry, Supercurrent, and Scale Invariance*, **hep-th**/9611003.

[21] O. Piguet, M. Schweda, *Nucl. Phys.* **B92** (1975) 334.

[22] C. Becchi, A. Rouet und R. Stora, *Renormalizable theories with symmetry breaking* in: *Field Theory, Quantization and Statistical Physics* (ed. E. Tirapegui) D. Reidel, Dordrecht,1981.

[23] O. Piguet, S. Sorella, *Algebraic Renormalization*, Springer Verlag, 1995.

[24] O. Piguet, *Renormalisation en Theorie Quantique des Champs*, Troisieme Cycle de la Physique,1982/1983.

[25] Y.M.P. Lam *Phys. Rev.* **D6** (1972) 2145; T.E.Clark, J.H. Lowenstein, *Nucl. Phys.* **B113** (1976) 109.

[26] W. Hollik, E. Kraus, D. Stöckinger, *Eur. Phys. J.* **C11** (1999) 365

[27] N.N. Bogoliubov, O. Parasuik, *Acta Math.* **B97** (1957) 227; K. Hepp, *Commun. Math. Phys.* **B2** (1966) 301; W. Zimmermann, *Commun. Math. Phys.* **B15** (1969) 208.

[28] L. Giradello, M.T. Grisaru, *Nucl. Phys.* **B194** (1982) 65.

[29] F. Berenzin, *The Method of Second Quantization* Academic Press, New York, 1966.