Universität Bonn
Physikalisches Institut

W-Algebren in Gepner-Modellen

Diplomarbeit
von
Michael Terhoeven

Datum: 30.4.1992
Referent: Prof. W. Nahm
Koreferent: Prof. R. Flume

Inhaltsverzeichnis

Einleitung und Überblick

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurden viele Konzepte der konformen Feldtheorie und der String-Theorie benutzt; so viele, daß wir nicht einmal den Versuch machen werden, alle zu benennen. Wir verweisen stattdessen den interessierten Leser auf die einschlägigen Einführungen (Ginsparg (1988), GSW (1987) und Schellekens (1989)) und begnügen uns mit einem kurzen Überblick.

Es gibt viele mehr oder weniger überzeugende Gründe, heute noch (oder schon (wieder)) String-Theorie zu betreiben, wie wir das hier versuchen werden. So ist es nicht mit Sicherheit auszuschließen, daß irgendwann in ferner Zukunft eine Theorie gefunden wird, die die elektro-schwache und die starke Wechselwirkung mit der Gravitation vereinigt, die noch etwas mit String-Theorien zu tun hat und um die 42 masselose Fermionen (Adams (1979)) enthält.

Daneben mag ein wesentlicher Grund für die jüngste Generation von Physikern in Umkehrung der historischen Entwicklung die Anwendung von konformer Feldtheorie in String-Theorien sein. In der Tat wird in dieser Arbeit ausgehend von konformen Feldtheorien mit einigen Zutaten 'phänomenologischer' Relevanz ein bunter Cocktail gemischt, der dann perturbative String-Theorie (wir betreiben nur konforme Feldtheorie auf dem Torus, d.h. String-Theorie in 1-Loop-Ordnung) genannt wird; man sagt auch, die konforme Feldtheorie beschreibe das Vakuum einer noch weitgehend unbekannten String-Feldtheorie.

Die Basis liefern das erste und vierte Kapitel, in denen einige Modelle und Konstruktionen der konformen Feldtheorie, wie das freie Boson, $U(1)_k$, das freie Fermion, affine Lie-Algebren und schließlich die N=2 super-konformen minimalen Modelle, sowie Tensorprodukte, Quotiententheorien, die Orbifold-Konstruktion, Automorphismen der Operator-Algebra und der chirale Ring kurz vorgestellt werden.

Im zweiten Kapitel beginnt dann mit der Gepnerschen Konstruktion (vgl. Gepner (1987)) der Ernst des Lebens. Dazu wird die als Super-Raum-Zeit-Koordinaten interpretierbare Theorie freier Felder durch Tensorierung mit N=2 super-konformen minimalen Modellen auf die kritische Dimension oder besser kritische zentrale Ladung des fermionischen Strings aufgefüllt und eine erste modulare (im wesentlichen diagonale) Invariante aufgeschrieben. Damit ist der ersten Anforderung an eine String-Theorie, der aus der lokalen Reparametrisierungsinvarianz auch in der Quantentheorie folgenden *Anomaliekürzung*, Genüge getan. Die Erhaltung der Invarianz unter globalen Diffeomorphismen, *modulare Invarianz* genannt, bei der Umsetzung der folgenden phänomenologischen Forderungen erfordert ein wenig mehr Anstrengung. Da wäre einerseits *N=1 Raum-Zeit-Supersymmetrie*, von der sich mancher die Lösung des Hierarchie-

Problems (warum sind die beobachteten Massen so klein gegenüber der Planck-Masse?), sowie Renormierbarkeit (warum nicht auch das?) verspricht (vgl. auch Amaldi et al (1991) für Supersymmetrie in GUTs). Zum zweiten wünscht sich der Phänomenologe *Raum für die Eichgruppe des Standardmodells*, der sich in der heterotischen Konstruktion findet. Tatsächlich werden alle diese Forderungen (und einige mehr) von der Gepnerschen Konstruktion konsistent erfüllt, und man erhält mit der Zustandssumme das Spektrum der Theorie. Wir stellen abschließend einige kurze Betrachtungen zum masselosen und damit phänomenologisch relevanten Teil (beachte, daß die Massenskala die Planck-Masse ist) des Spektrums vor; die Wichtigkeit macht uns auch hier schon trotz der Kürze ihres Auftretens in dieser Arbeit die geometrische Interpretation der masselosen Felder erwähnen.

Der Trunk geht schließlich zur Neige mit dem dritten Kapitel und der Frage nach W-Algebren in den Gepnerschen Modellen oder genauer zwei Fragen: Welche W-Algebren stecken in Gepner-Modellen, wie groß sind 'realistische' W-Algebren ? Und: Was muß eine W-Algebra erfüllen, um sie an Stelle der N=2 super-minimalen Modelle einzubauen, welche Information der W-Algebra braucht man, um das Spektrum ausrechnen zu können ? — Während die zweite Frage beantwortet werden kann: Es bedarf kaum einer Veränderung, um eine geeignete W-Algebra in die Gepnersche Konstruktion einzubauen (auch wenn die Anforderungen an die Kenntnis der Darstellungstheorie der W-Algebra nach bisheriger Erfahrung erheblich sind); müssen wir uns bei der Beantwortung der ersten Frage den Beschränkungen der CPU-Zeit folgend auf die Berechnung der Charakterfunktionen der Symmetriealgebra einiger prominenter Beispiele beschränken. Ein einfaches Argument liefert eine grobe Abschätzung des Operatorinhalts der Symmetriealgebra, die jede Hoffnung auf die explizite Konstruierbarkeit der auftretenden Algebren mit den bisher in der Arbeitsgruppe um Prof. W. Nahm verwendeten Methoden nimmt.

Trotzdem mag diese Diplomarbeit zum ersten Schritt in (m)ein tieferes Verständnis der Gepner-Modelle werden; so kann man nicht ausschließen, daß weitere Forschung zu einer geometrischen Interpretation der Symmetriealgebra führt, auch wenn die ersten Ergebnisse in dieser Richtung (3.2) wenig ermutigend scheinen.

1 Modelle der konformen Feldtheorie

Die in dieser Arbeit verwendeten Modelle, namentlich: freies Boson und Fermion, $U(1)_k$, A-D-E affine Algebren (zum Level 1), $SU(2)_k$ und N=2 minimale Modelle werden kurz vorgestellt. Insbesondere werden die Algebra, zentrale Ladung und Gewichte konformer Darstellungen, die Charakterfunktionen, deren modulares Transformationsverhalten, modulare Invarianten und die Fusion-Algebra (soweit relevant) angegeben.

1.1 Das freie Boson und U(1)

Das freie Boson kann durch folgende Korrelationsfunktion definiert werden (vgl. Ginsparg (1988) und dortige Literaturangaben)

$$\langle\phi(z)\phi(w)\rangle = -\ln(z-w), \tag{1.1.0}$$

die der *Operatorprodukt-Entwicklung* (OPE) (alle OPEs nur bis auf Terme höherer Ordnung)

$$\partial_z\phi(z)\ \phi(w) = -\frac{1}{z-w} \tag{1.1.1}$$

entspricht. Der Energie-Impuls-Tensor ist durch $T^b(z) = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2(z)$ gegeben und erfüllt (ein für alle Male) die OPE

$$T(z)\ T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{z-w}\partial T(w) \tag{1.1.2}$$

hier mit *zentraler Ladung* $c^b = 1$. Dabei ist das Produkt der $\partial\phi$ in T^b als *normalgeordnetes Produkt* $\ddagger(\partial\phi)^2\ddagger$ aufzufassen (wir werden uns im folgenden oft der impliziten Schreibweise, also $AB(z)$ statt $\ddagger AB\ddagger(z)$, bedienen), das für zwei beliebige Operatoren A und B durch

$$\ddagger\ A\ B\ \ddagger(z) := \frac{1}{2\pi i}\oint_z dw\ \frac{A(w)B(z)}{w-z}$$

definiert werden kann.

$\partial\phi$ ist ein (Virasoro-)*primäres* Feld der *konformen Dimension* $h=1$, das heißt

$$T(z)\ \partial\phi(w) = \frac{h}{(z-w)^2}\partial\phi(w) + \frac{1}{z-w}\partial^2\phi(w), \tag{1.1.3}$$

und kann auch als abelscher (oder $\mathbb{R}$-) Strom aufgefaßt werden. Die *Moden-Entwicklung* von ϕ hat die Form

$$\phi(z) = q - ip\ln(z) + i\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n z^{-n}}{n} \tag{1.1.4}$$

wobei die Moden α_m $(m\neq 0)$ die Oszillator- oder $U(1)$-Algebra, die Null-Moden die Heisenberg-Algebra erfüllen

$$\begin{aligned}[\alpha_n,\alpha_m] &= n\delta_{m+n,0},\\ [q,p] &= i.\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

Für den Energie-Impuls-Tensor ist $T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$. Der geneigte Leser erinnere sich des Cauchyschen Integralsatzes (kleiner Tip: $2\pi i f^{(n)}(z) = n!\ \oint_z dw \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}$) und der Konturargumente mit Hilfe derer man aus (1.1.2) die Virasoro-Algebra erhält.

Weitere primäre Felder der Theorie sind durch $e^{i\alpha\phi(z)}$, sogenannte *Vertex-Operatoren*, gegeben. Sie haben (in unseren Konventionen) die konforme Dimension $\alpha^2/2$ und gehorchen folgenden recht nützlichen Relationen (die erste Gleichung gilt exakt, d.h. ohne Terme höherer Ordnung)

$$\begin{aligned} e^{i\alpha\phi(z)}e^{i\beta\phi(w)} &= (z-w)^{\alpha\beta} e^{i\alpha\phi(z)+i\beta\phi(w)} \\ &= (z-w)^{\alpha\beta} e^{i(\alpha+\beta)\phi(w)} + i\alpha(z-w)^{\alpha\beta+1}\ \partial\phi(w) e^{i(\alpha+\beta)\phi(w)} + \dots \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

sowie

$$\partial\phi(z)\ e^{i\alpha\phi(w)} = -\frac{i\alpha}{z-w} e^{i\alpha\phi(w)}. \tag{1.1.7}$$

Wir sollten an dieser Stelle bemerken, daß man jedem Virasoro-primären Feld ψ der Dimension h eindeutig einen Virasoro-*Höchstgewichts-Zustand* (HWS) zuordnen kann, den wir mit $|h\rangle$ bezeichnen werden. Es gilt (darum der Name)

$$L_0|h\rangle = h|h\rangle, \qquad L_n|h\rangle = 0 \qquad \mathit{für}\ n > 0.$$

Durch Operieren der Virasoro-Algebra auf dem HWS erhält man nach Elimination der sogenannten Null-Zustände aus dem Verma-Modul (das ist der Spann aller Kombinationen von Moden angewendet auf den HWS) eine irreduzible Darstellung $L(c,h)$. Der Zusammenhang (genauer: Isomorphismus) von HWSn zu Feldern und damit zur OPE ist durch $|h\rangle = \psi(0)|0\rangle$ gegeben, wobei $|0\rangle$ der (so wird es vorausgesetzt) eindeutige HWS zur konformen Dimension $h = 0$, das Vakuum, ist. (Nimmt man für ψ die Vertex-Operatoren, so erhält man alle unitären Darstellungen der $c = 1$ Theorie.)

Der *Charakter* (vgl. Gepner, Witten (1986)) einer Darstellung der Virasoro-Algebra zum konformen Gewicht h (und gegebener zentraler Ladung) wird nun definiert als Summe über alle Zustände der Darstellung mit dem Summationsgewicht $q^{(L_0-c/24)}$. (Allgemeiner kann man in die Summe noch weitere Elemente der Cartan-Unteralgebra einfügen, z.B. $e^{2\pi i z J_0}$ im Fall des freien Bosons ($J = i\partial\phi$), vgl. (1.1.11).) Man schreibt

$$\chi_{(c,h)}(q) = \mathrm{tr}_{L(c,h)}\ q^{(L_0-c/24)}.$$

Der Charakter ist nichts anderes als die Erzeugenden Funktion der Anzahl der (linear unabhängigen) Zustände einer Darstellung zu gegebenem Grad (dieser Satz ist sicherlich schwieriger als die Tatsache selbst).

Für das freie Boson ($c^b = 1$) ist (dabei gilt (1.1.8a) auch für beliebiges $h \neq 0$, wenn $c > 1$ ist)

$$\chi_{h \neq n^2/4}(q) = \eta^{-1}(q)\ q^h, \tag{1.1.8a}$$

$$\chi_{n^2/4}(q) = \eta^{-1}(q)\ q^{n^2/4}\ (1 - q^{n+1}), \tag{1.1.8b}$$

wobei $n \in \mathbb{N}_0$, $q = \exp(2\pi i\tau)$ (τ aus der Poincaré-Halbebene $\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C}\,|Im\tau > 0\}$) und $\eta(q) = \eta(\tau)$ die *Dedekindsche Eta-Funktion* bezeichnet

$$\begin{aligned} \eta(q) &= q^{1/24} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n), \\ \eta^{-1}(q) &= q^{-1/24} \prod_{n \geq 1} \sum_{m \geq 0} q^{nm}. \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

$\eta(\tau)$ ist Erzeugenden Funktion der Partitionen bzw. der Anzahl der Zustände im Verma-Modul zu gegebenem Grad. Von ihren Eigenschaften unter modularen Transformationen her ist η eine holomorphe Spitzenform vom Gewicht 1/2 mit Multiplikatoren-System der Ordnung 24 (vgl. Kac (1983), §13.6); insbesondere

$$\begin{aligned} \eta(-1/\tau) &= (-i\tau)^{1/2}\eta(\tau), \\ \eta(\tau + 1) &= e^{\pi i/12}\eta(\tau). \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

Der entsprechende ($\mathbb{R}$-)Virasoro-Charakter (mit der Ladung als weitere Quantenzahl) lautet über dem vom Vertex-Operator $e^{i\alpha\Phi}$ erzeugten HWS

$$\chi_{\alpha^2 \neq n^2/2}(z, \tau) = e^{2\pi i\alpha z}\ \eta^{-1}(q)\ q^{\alpha^2/2}. \tag{1.1.11}$$

Modular invariante Zustandssummen des freien Bosons setzen sich notwendigerweise aus unendlich vielen der Charakterfunktionen (1.1.8) zusammen (in Übereinstimmung mit Cardys (1986) Resultat, daß modulare Invarianz im Falle $c \geq 1$ eine unendliche Zahl von Virasoro primären Feldern benötigt). Dies Problem läßt sich dadurch umgehen, daß man die Algebra entsprechend erweitert.

In der Tat werden wir (auf Definitionen aus folgenden Kapiteln vorgreifend) mit $U(1)_k$ die *W-Algebra* ($\mathcal{W}(1,k,k)_{(c=1)}$) bestehend aus dem $U(1)$-Strom $J := i\sqrt{k}\partial\phi$ zum 'Level' $k \in \mathbb{N}$ und den Vertex-Operatoren $e^{\pm i\sqrt{2k}\phi}$ bezeichnen

$$U(1)_k := < i\sqrt{k}\partial\phi,\ e^{\pm i\sqrt{2k}\phi} > \tag{1.1.12}$$

(insbesondere $U(1)_1 = SU(2)_1$, allgemein $U(1)_k \subset SU(2)_k$ wie man am Charakter von $SU(2)$ abliest). Der Sugawara Energie-Impuls-Tensor (1.3.2) ($Q_\psi = 0$) stimmt mit dem bosonischen Energie-Impuls-Tensor T^b überein.

Die primäre Felder von $U(1)_k$ sind (bis auf Kozykelfaktoren, die die Assoziativität der OPE sicherstellen) durch die Vertex-Operatoren $V_l^k := e^{il\phi/\sqrt{2k}}$ mit $l \in \{-k+1, -k+2, \dots k\}$ mit der konformen Dimension ${}^{l^2}/_{4k}$ gegeben. Die entsprechenden Charakterfunktionen zu gegebener *Ladung* ${}^l/_2$ (definiert als Eigenwert von ${}^{J_0}/_{\sqrt{2}}$ modulo k) sind die klassischen Theta-Funktion (1.4.7) dividiert durch eine Eta-Funktion (1.1.9)

$$\eta^{-1}(\tau)\Theta_{l,k}(z,\tau) = \mathrm{tr}_{V_l^k}\ q^{L_0 - c/24} e^{-2\pi i z J_0^{U(1)_k}/\sqrt{2}}. \tag{1.1.13}$$

Aus den modularen Transformationen der Theta-Funktionen (1.4.8) ergibt sich folgende Fusions-Algebra (die V_l^k mit $l \in 2\mathbb{Z}$ schließen als Unteralgebra)

$$[V_l^k]\ [V_{l'}^k] = [V_{l+l' \bmod 2k}^k]. \tag{1.1.14}$$

Alle V_l^k sind demnach simple Ströme und werden erzeugt von V_1^k mit der Ordnung $2k$; die entsprechende $\mathbb{Z}_k$-Symmetrie der Fusions-Algebra ist

$$V_l^k \to e^{2\pi i l/2k} V_l^k. \tag{1.1.15}$$

Eine Basis aller modular invarianten Zustandssummen aus Theta-Funktionen zum Level k von 'physikalischer' Relevanz (d.h. $M_{0,0} = 1$ und $M_{i,k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) ist nach Gepner und Qiu (1987) durch

$$\mathcal{Z}_k^{(\alpha,\beta)}(\tau,\bar{\tau}) = |\eta(\tau)|^{-2} \sum_{l,l'} M_{l,l'}^{(\alpha,\beta)}\ \Theta_{l,k}(\tau) \cdot \Theta_{l',k}^*(\bar{\tau})$$

mit den Matrizen

$$M_{l,l'}^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}_{2\alpha}\\ b\in\mathbb{Z}_{2\beta}}} \delta_{l,\alpha b+\beta a}\ \delta_{l',\alpha b-\beta a} = M_{l,-l'}^{(\beta,\alpha)} = (M^{(\beta,\alpha)}(\mathbb{1}\otimes C))_{l,l'} \tag{1.1.16}$$

gegeben, wobei α ein Teiler von k ist und $\beta := {}^{k}/_{\alpha}$, sowie $C = S^2 : \eta^{-1}\Theta_{l,k} \to \eta^{-1}\Theta_{-l,k}$ die Matrix der Ladungskonjugation bezeichnet. (Man erhält alle M's durch Orbifold-Konstruktionen, ihre Vollständigkeit folgt mit Hilfe der linearen Unabhängigkeit der Theta-Funktionen; zu jedem Teiler von k gibt es eine modulare Invariante.)

1.2 Das freie Fermion

(wir meinen damit ein freies, masseloses, zunächst reelles Fermion in zwei Dimensionen) ist durch folgende OPE definiert

$$\psi(z)\psi(w) = \frac{1}{z-w}. \tag{1.2.1}$$

Der fermionische Energie-Impuls-Tensor (Normalordnung vorausgesetzt)

$$T^f(z) = \frac{1}{2}\,\psi\,\partial\psi\ (z) \tag{1.2.2}$$

erfüllt die OPE (1.1.2) mit zentraler Ladung $c^f = \frac{1}{2}$, und ψ ist Virasoro-primäres Feld der konformen Dimension $h = \frac{1}{2}$. Die Automorphismengruppe von (1.2.1) ist isomorph zu $\mathbb{Z}_2$ und wird erzeugt von $\psi \to -\psi$. Daher sind die Randbedingungen $\psi(C_0 z) = \pm\psi(z)$ mit (1.2.1) konsistent ($C_0 z$ bezeichnet den Endpunkt des Weges $[0,1] \ni t \mapsto e^{2\pi i t} z$) und die Darstellungen zerfallen in *Ramond* (R) und *Neveu-Schwarz-Sektor* (NS) mit antiperiodischen bzw. periodischen Randbedingungen auf $\mathbb{C}$.

Die Moden-Entwicklung von ψ hat dementsprechend die Form

$$\psi(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}+a} \psi_n z^{-n-1/2}, \tag{1.2.3}$$

wobei a die Werte 0 im R und 1/2 im NS-Sektor annimmt. Die Moden erfüllen die Algebra

$$\{\psi_n, \psi_m\} = \delta_{n+m,0}. \tag{1.2.4}$$

Weitere Virasoro-primäre Felder der Theorie können wegen (1.2.2) in der OPE mit ψ keine Singularität stärker als $(z-w)^{-\frac{1}{2}}$ haben. Dies führt (neben der trivialen Lösung $\mathbb{I}$ mit $h=0$) auf die OPE

$$\psi(z)\ \sigma(w) = (z-w)^{-1/2}\mu(w), \tag{1.2.5}$$

wobei σ und μ dieselbe konforme Dimension tragen müssen. Aus (1.2.5) folgt, daß die 'Twist'-Felder σ und μ das Vakuum $h=0$ des NS-Sektors auf die Grundzustände des R-Sektors abbilden, und man findet deren konforme Dimension $h_\sigma = h_\mu = \frac{1}{16}$ (vgl. z.B. Ginsparg (1988)).

In der Tat beschreiben wir nichts anderes als das einfachste unitäre, nicht-triviale, minimale Modell. Insbesondere sind die Charakterfunktionen und die eindeutige modulare Invariante (die diagonale) bekannt (vgl. z.B. Ginsparg (1988), chapter 7.4).

Aus zwei reellen Fermionen im gleichen Sektor ψ^1, ψ^2 erhält man ein *komplexes* (oder Dirac-)*Fermion* $\psi^+ := \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1 + i\psi^2)$ sowie das konjugierte Feld $\psi^-(z) := \bar{\psi}^+(z)$. Mit (1.2.1) rechnet man dann leicht folgende OPE nach

$$\psi^+(z)\psi^-(w) = \psi^-(z)\psi^+(w) = \frac{1}{z-w} \tag{1.2.6}$$

(alle anderen OPE's verschwinden, da ψ^1, ψ^2 orthogonal sind). Die Algebra der entsprechenden Moden $\psi_n^\pm$ lautet

$$\{\psi_n^+, \psi_m^-\} = \delta_{n+m,0} \tag{1.2.7}$$

(die anderen Antikommutatoren verschwinden). Wenn keine Gefahr der Verwechslung besteht, werden wir auch komplexe Fermionen mit ψ und das konjugierte Feld mit $\bar{\psi}$ bezeichnen.

Im Vorgriff auf das folgende Kapitel wollen wir schon hier die *fermionische Realsierung von affinen Algebren* vorstellen: Sei dazu eine Matrix-Darstellung

$$[M^a, M^b]_{\alpha\beta} = i f^{abc} M^c_{\alpha\beta}, \qquad \alpha,\beta = 1,\dots d(\mu), \quad a,b,c = 1,\dots \dim g \tag{1.2.8}$$

(mit höchstem Gewicht) μ der Dimension $d(\mu)$ der Lie-Algebra g gegeben. Bildet man dann mit $d(\mu)$ komplexen Fermionen (einem $d(\mu)$-plett) ψ^α, $\bar\psi^\alpha$ die 'Ströme'

$$J^a(z) := \psi^\alpha M^a_{\alpha\beta}\bar\psi^\beta(z) \tag{1.2.9}$$

so erfüllen diese in der Tat die OPE (1.3.1) der affinen Algebra g_k zum Level k_μ gegeben durch $\delta^{ab}k_\mu = \mathrm{tr}\ M^a M^b$.

Schließlich geben wir noch die grundlegenden Formeln der *Bosonisierung*, so nennt man die Darstellung zweier reeller Fermionen ψ^1, ψ^2 (oder eines komplexen Fermions) durch ein freies Boson ϕ, an

$$\psi^\pm := \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1 \pm i\psi^2) := e^{\pm i\phi}. \tag{1.2.10}$$

Man überprüft leicht, daß die so definierten Operatoren $\psi^{1,2}$ (1.2.1) erfüllen, wenn ϕ ein freies Boson ist (entsprechend umgekehrt). Insbesondere erhalten wir eine fermionische Realisierung von $U(1)_2$, denn nach (1.2.10) und (1.1.6) ist

$$\psi(z)\bar\psi(w) = e^{i\phi(z)}e^{-i\phi(w)} = \frac{1}{z-w} + i\partial\phi(w) + \ldots, \tag{1.2.11}$$

also

$$\ddagger\psi\bar\psi\ddagger(z) = i\partial\phi(z). \tag{1.2.12}$$

(Bemerkung: Das Tensorprodukt zweier freier Fermionen (vgl. Ginsparg (1988)) erlaubt auch die Kombination $\psi := \psi^{NS}\otimes\psi^R$, also das Produkt zweier Fermionen in verschiedenen Sektoren. Dem entsprechend gibt es zwei verschiedene modular invariante Zustandssummen, nämlich $\mathcal{Z}_{Ising^2}$ und $\mathcal{Z}_{Dirac}$, die zwei unabhängigen Majorana- oder einem Dirac-Fermion mit korrelierten Randbedingungen entsprechen (bzw. in der Bosonisierung einem getwisteten oder ungetwisteten freien Boson).)

1.3 Affine Lie-Algebren (zum Level 1)

Affine (ungetwistete) Lie-Algebren g_k (hier nur $g \in \{A, D, E\}$, k der sogenannte *Level*) sind definiert durch eine OPE vom Typ

$$J^a(z)\ J^b(w) = \frac{k\delta^{ab}}{(z-w)^2} + \frac{if^{ab}{}_c}{z-w} J^c(w), \tag{1.3.1}$$

wobei $f^{ab}{}_c$ die total antisymmetrischen Strukturkonstanten einer (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) einfachen Lie Algebra g sind (vgl. Goddard, Olive (1986)). Der *Sugawara Energie-Impuls-Tensor* ist durch

$$T^c(z) = \frac{1}{2k+Q_\psi} \sum_{a=1}^{\dim g} \ddagger J^a(z)\ J^a(z) \ddagger \tag{1.3.2}$$

gegeben (das c steht für 'current'), in Moden

$$L_n^c = \frac{1}{2k+Q_\psi} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{a=1}^{\dim g} \ddagger J^a_{m+n} J^a_{-m} \ddagger . \tag{1.3.3}$$

Er erfüllt die OPE (1.1.2) mit zentraler Ladung

$$c^c = \frac{2k \dim g}{2k+Q_\psi}, \tag{1.3.4}$$

wobei Q_ψ den Eigenwert des quadratischen Casimir-Operators in der adjungierten Darstellung von g bezeichnet. Q_ψ ist mit der dualen Coxeter-Zahl $\tilde{h}(g)$ durch $Q_\psi = \psi^2 \tilde{h}(g)$ verknüpft, wobei wir mit ψ die höchste (highest) Wurzel von g bezeichnen. Die Werte der dualen Coxeter-Zahl für die verschiedenen Lie-Algebren sind $A_n \simeq SU(n+1)$: $n+1, SO(n) : n-2\ (n \geq 5), C_n : n+1, E_6 : 12, E_7 : 18, E_8 : 30, G_2 : 4$ und $F_4 : 9$.

Nun zu den Darstellungen affiner Lie-Algebren. Wir definieren zunächst mit Hilfe der OPE affin-primäre Felder und geben dann die Bedingungen für die Existenz einer unitären Darstellung der affinen Algebra zu gegebenem Höchstgewicht an, sowie die konformen Dimensionen der in einer solchen Darstellung auftretenden affin-primären Felder. Ein Feld G das nicht nur Virasoro-primär ist, sondern zudem 'einfache' OPE mit den Strömen $J^a(z)$ hat, wird auch *affin-primär* genannt. (Man mag sich vorstellen, daß ein ganzes Multiplett von Virasoro primären Feldern zu einem Feld zusammengefaßt wird. Wie man am Charakter ablesen kann, ist dieses Multiplett jedoch im allgemeinen nicht nur ein Lie-Algebra-Multiplett (horizontal, wenn man den L_0-Grad nach oben aufträgt), sondern enthält unendlich viele Virasoro-primäre Felder, deren konforme Dimensionen sich um ganze Zahlen unterscheiden. Der gesamte 'Turm' ist durch die höchste Komponente des Multipletts eindeutig charakterisiert und wir werden diese daher auch als das affin-primäre Feld bezeichnen.) Man verlangt

$$J^a(z)\ G(w) = \frac{t^a}{z-w} G(w), \tag{1.3.5}$$

wobei die 'Matrizen' t^a eine irreduzible Darstellung der Lie-Algebra g bilden und auf dem 'Vektor' G operieren. (Die Ströme $J^a(z)$ selbst sind Virasoro-primäre Felder der konformen Dimension $h = 1$ bezüglich T^c, jedoch wegen der zentralen Erweiterung (vgl. (1.3.1)) nicht affin-primär (ebensowenig ist $T(z)$ selbst Virasoro primär).) Zu gegebenem höchsten Gewicht μ dieser internen Darstellung (der Lie Algebra g) existiert genau dann eine unitäre Darstellung der affinen Algebra, wenn der Level ganzzahlig ist (bei uns ist ψ auf $\sqrt{2}$ normiert)

$$2k/\psi^2 \in \mathbb{Z} \tag{1.3.6a}$$

und

$$k \geq \psi \cdot \mu \geq 0. \tag{1.3.6b}$$

Insbesondere ist zu gegebenem Level die Anzahl der unitären Höchstgewichts-Darstellungen endlich. Die in $G(w)$ zusammengefaßten Felder in der Darstellung mit höchstem Gewicht μ haben die konforme Dimension

$$h(\mu) = \frac{Q_\mu}{Q_\psi + 2k},$$

wobei $Q_\mu = \mu \cdot (\mu + 2\rho)$ und $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0} \alpha$ ist. (Aus ρ läßt sich (vgl. Kostant (1959)) die *Kostant-Haupt-$SU(2)$-Unteralgebra* $\mathcal{K}$ konstruieren: Die Lie Algebra g zerfällt in Rang(g) irreduzible Darstellungen von $\mathcal{K}$ mit den Dimensionen $d_i = 2m_i + 1$, wobei m_i die *Exponenten* von g sind. Die Exponenten sind alternativ dadurch charakterisiert, daß die Eigenwerte des Coxeter-Elements der Weyl-Gruppe von g die Form $e^{2\pi i m_i/\tilde{h}(g)}$ haben; auch sind die Grade der Casimir Operatoren von g gleich $m_i + 1$.)

Um die Charakterfunktionen aufschreiben und besser verstehen zu können, gehen wir nun wieder zur Darstellung in Moden und HWS über. Die Moden-Entwicklung der J^a hat die Form ($h = 1$)

$$J^a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J^a_n z^{-n-h} \tag{1.3.7}$$

und man erhält für die Algebra (1.3.1)

$$[J^a_n, J^b_m] = i f^{ab}{}_c J^c_{n+m} + k n \delta_{n+m,0} \delta^{ab}. \tag{1.3.8}$$

Das Konzept des HWS läßt sich vom Virasoro-Fall übertragen. Jedem affin-primären Feld G, das sich mit der Darstellung zu höchstem Gewicht μ und Level k transformiert, kann man eindeutig einen HWS $|\mu, k\rangle$ zuordnen. Dieser ist charakterisiert durch

$$\begin{aligned} J^a_n |\mu, k\rangle &= 0, \quad n > 0, \\ J^+_0 |\mu, k\rangle &= 0, \\ H_0 |\mu, k\rangle &= \mu(H_0) |\mu, k\rangle, \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

wobei J^+ hier die Aufsteiger und H_0 beliebige Elemente der Cartan-Unteralgebra der Lie-Algebra g bezeichnet.

Nun zu den Charakterfunktionen der affinen Algebren (vgl. Kac (1983) und Gepner, Witten (1986)): Sie sind bekannt und prinzipiell mit Hilfe der sogenannten Kac-Weyl-Formel berechenbar. In dieser Formel tritt jedoch eine nicht-triviale Summation über die Weyl-Gruppe W der affinen Algebra auf. Dies erlaubt konkrete Berechnungen nur für die kleinsten Gruppen (SU(2) etc., denn: $|W(A_n)| = (n+1)!$, $|W(D_n)| = 2^{n-1}\ n!$, $|W(E_6)| = 51840$ etc.). Für einfach geschnürte Lie Algebren zum Level 1 (und die hier uninteressanten 'getwisteten' Fälle) lassen sich allerdings die Formeln wesentlich vereinfachen und auf klassische Theta-Funktionen der endlichen Lie-Algebren zurückführen. Definiert werden diese Theta-Funktionen meist als Summe über das Wurzelgitter, verschoben um einen von der Darstellung abhängigen 'Klebe'-Vektor. Sei M das Wurzelgitter einer Lie-Algebra und unsere Darstellung durch das Höchstgewicht μ und k

charakterisiert, dann ist

$$\Theta_{\mu,k}(z,\tau,u) = e^{-2\pi iku} \sum_{\gamma\in M+k^{-1}\mu} e^{\pi ik\tau|\gamma|^2-2\pi ik(\gamma_1 z_1+\cdots\gamma_l z_l)}. \tag{1.3.10}$$

wobei l den Rang der Lie-Algebra bezeichnet, d.h. die Dimension der Cartan-Unteralgebra mit Basis $H_0^{(i)}$ $(i=1,\dots l)$ von g, deren Eigenwerte gerade die $\gamma_i = \gamma(H_0^{(i)})$ sind. Der Charakter ist auch hier nichts anderes als die Erzeugenden Funktion der Anzahl der (linear unabhängigen) Zustände einer Darstellung zu gegebenem Grad und Eigenwert unter der Cartan-Unteralgebra. (In diesem Sinne kann man den Grad als Eigenwert des zentralen Elements k der Algebra, das natürlich auch Element der Cartan Unteralgebra der affinen Algebra ist, auffassen.) Auch (1.3.10) ist im allgemeinen Fall für explizite Berechnung des Charakters ungeeignet, *aber* sie erlaubt, das modulare Transformationsverhalten der Charakterfunktionen zu bestimmen. Man findet

$$\begin{aligned}\Theta_{\mu,k}\left(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau},u+\frac{z^2}{2\tau}\right) &= (-i\tau)^{\frac{1}{2}l}\left|\frac{M}{kM}^*\right|^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda\in M^*\mathrm{mod}M} e^{-2\pi i\mu\cdot\lambda/k}\,\Theta_{\lambda,k}(z,\tau,u),\\ \Theta_{\mu,k}(z,\tau+1,u) &= e^{\pi i\mu\cdot\mu/k}\,\Theta_{\mu,k}(z,\tau,u).\end{aligned} \tag{1.3.11}$$

Dabei ist M^* das duale Gitter zu M (hier geht die einfache Geschnürtheit der von uns betrachteten Lie Algebren ein), das mit dem Gewichts-Gitter übereinstimmt und $|M|$ das Volumen der Einheitszelle des Gitters.

Nach diesem kurzen Ausflug in die Theorie der klassischen Theta-Funktionen können wir die Charakterfunktion der affinen Lie-Algebra einer einfachen, einfach geschnürten Lie-Algebra g zum Level 1 angeben

$$\chi^{(g)}_{\mu,k=1}(z,\tau,u) = \frac{\Theta^{(g)}_{\mu,1}(z,\tau,u)}{\eta(\tau)^l} = \mathrm{tr}_{G_{(\mu,k)}}\ e^{-2\pi iu\delta}\ q^{L_0-c/24}\ e^{-2\pi ikz_iH_0^{(i)}}, \tag{1.3.12}$$

wobei δ den Level eines HWS angibt.

Für explizite Formeln zur Berechnung der Charakterfunktionen bzw. Theta-Funktionen verweisen wir hier auf Conway, Sloane (1988) (man beachte jedoch die abweichende Normierung und ersetze $q(z)$ durch $q(\tau)^{1/2}$) und im Falle der Charakterfunktionen von $SO(2n)$ auf Lerche, Schellekens und Warner (1989). Die Fusions-Algebren folgen mit (1.3.11) und Verlindes Formel.

Die modular invarianten Zustandssummen zu affinen Algebren sind nur für den Fall $SU(2)$ klassifiziert (vgl. Abschnitt 1.4). Selbst für $SU(3)$, eine der einfachsten Verallgemeinerungen, ist die Situation unbefriedigend.

1.4 Beispiel: SU(2)

Eine Realisierung der klassischen $SU(2)$-Algebra ist durch

$$J^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4.1}$$

gegeben, wobei ($J^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(J^1 \pm iJ^2)$)

$$J^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.4.1}$$

Die Matrizen erfüllen die Algebra von $SU(2)$

$$[J^0, J^\pm] = \pm\sqrt{2}J^\pm, \qquad [J^+, J^-] = \sqrt{2}J^0. \tag{1.4.2}$$

Die Normierung ist gerade so gewählt, daß die höchste Wurzel das Betragsquadrat 2 hat. Daher lauten die Vertauschungsrelationen der affinen $SU(2)_k$-Algebra

$$\begin{aligned} [J^0_m, J^0_n] &= km\delta_{m+n,0}, \\ [J^0_m, J^\pm_n] &= \pm\sqrt{2}J^\pm_{n+m}, \\ [J^+_m, J^-_n] &= \sqrt{2}J^0_{m+n} + km\delta_{m+n,0}. \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

$SU(2)$ hat (vgl. Goddard, Olive (1986)) nur *innere* Automorphismen, die von Elementen der Algebra erzeugt werden, z.B. $J \to \gamma J \gamma^{-1}$ mit $\gamma = e^{\pi i J^0}$. Insbesondere sind die 'getwistete' und die ursprüngliche Algebra isomorph (vgl. 4.4). Affine Algebren größerer Lie-Algebren haben, wie schon $U(1)$ und auch die N=2 super-konforme Algebra, noch äußere Automorphismen, die auf nicht-triviale Symmetrien der entsprechenden Dynkin-Diagramme zurückgehen.

Die zentrale Ladung des nach Sugawara konstruierten Energie-Impuls-Tensors beträgt (die duale Coxeter Zahl ist 2)

$$c^c = \frac{3k}{k+2} \ . \tag{1.4.4}$$

Die Darstellungen der affinen $SU(2)$-Algebra sind durch einen Gewichts-'Vektor' $\lambda = {}^l/\sqrt{2} \in {}^{\mathbb{Z}}/\sqrt{2}$ aus dem dualen Gitter $M^* = {}^M/2$ und den Level k charakterisiert. Unitarität der Darstellungen erfordert $l \in \{0, 1, \dots k\}$. Die Komponenten des in einer solchen Darstellung auftretenden affin-primären Feld-Multipletts wollen wir mit $G^l_m(z)$ ($|m| \leq l,\ m = l \bmod 2$) bezeichnen ($m$ ist hier nicht Moden-Index, sondern indiziert die Virasoro-primäre Komponente des affin-primären Feldes G^l). Sie haben die konforme Dimension

$$h = \frac{l(l+2)}{4(k+2)} \tag{1.4.5}$$

und erfüllen

$$\begin{aligned} J^a_n\ G^l_m(z) &= 0, \quad n > 0 \\ (J^0_0 - m/\sqrt{2})\ G^l_m(z) &= 0, \\ J^+_0\ G^l_l(z) &= 0, \\ (J^\pm_0\ G^l_m &\sim G^l_{m\pm 2}). \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

Die dem Wurzelgitter assoziierten Theta-Funktionen sind identisch mit den klassischen Theta-Funktionen zum Level k (vgl. Kac (1984), Kac, Peterson (1983) und Gepner, Witten (1986))

$$\begin{aligned} \Theta_{l,k}(z,\tau,u) =& \Theta_{-l,k}(-z,\tau,u) = e^{-2\pi iku} \sum_{m\in\mathbb{Z}+l/2k} q^{km^2}\ e^{-2\pi ikmz}, \\ & l \in \{-k, -k+1, \dots k\}. \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

Diese Funktionen bilden eine Basis der (über den Level) graduierten Algebra (siehe (1.4.9)) der Theta-Funktionen, die zudem unter dem der Standardform auf dem Wurzelgitter der affinen Algebra zugeordneten Laplace-Operator $D = \partial_u\partial_\tau + \partial_z^2$ verschwinden. (Diese Aussage kann für beliebige Gitter verallgemeinert werden.)

Das modularen Transformationsverhalten ergibt sich als Spezialfall von (1.3.11)

$$\begin{aligned} \Theta_{l,k}(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}, u + \frac{z^2}{2\tau}) &= (-i\tau)^{\frac{1}{2}}(2k)^{-\frac{1}{2}} \sum_{l'=-k+1}^{k} e^{-\pi ill'/k}\ \Theta_{l',k}(z,\tau,u), \\ \Theta_{l,k}(z,\tau+1,u) &= e^{\pi il^2/2k}\Theta_{l,k}(z,\tau,u). \end{aligned} \tag{1.4.8}$$

Wir sollten auch an dieser Stelle die Produktformel für die klassischen Theta-Funktionen angeben (eine kleine Verallgemeinerung von Proposition 3.13 in Kac, Peterson (1984))

$$\begin{aligned} &\Theta_{l,k}(z,\tau,u)\ \Theta_{l',k'}(z',\tau,u') = \\ &\sum_{j=1}^{k+k'} \Theta_{2k'j+l+l',k+k'}\big(\frac{zk+z'k'}{k+k'},\tau,\frac{uk+u'k'}{k+k'}\big)\ \Theta_{2kk'j-lk'+l'k,kk'(k+k')}\big(\frac{z'-z}{k+k'},\tau,0\big) \end{aligned} \tag{1.4.9}$$

Nun zum affinen Charakter der Darstellung l zum Level k, den wir mit $\sigma_{l,k} = \sigma_l$ bezeichnen wollen; er ist nach der Kac-Weyl-Formel durch

$$\sigma_{l,k}(z,\tau,u) = \frac{\Theta_{l+1,k+2} - \Theta_{-l-1,k+2}}{\Theta_{1,2} - \Theta_{-1,2}}(z,\tau,u) = e^{-2\pi iku}\ \mathrm{tr}_{G^l_l}\ q^{L_0-\frac{c}{24}} e^{-2\pi iz J_0^{SU(2)_k}/\sqrt{2}} \tag{1.4.10}$$

gegeben, wobei

$$l = \{0,1\ldots k\}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \sigma_{l,k}(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau},u+\frac{z^2}{2\tau}) &= \sqrt{\frac{k+2}{2}}\ \sum_{l'=0}^{k} \sin\Big(\pi\frac{(l+1)(l'+1)}{k+2}\Big)\ \sigma_{l',k}(z,\tau,u), \\ \sigma_{l,k}(z,\tau+1,u) &= e^{\pi i(\frac{(l+1)^2}{2(k+2)}-\frac{1}{4})}\ \sigma_{l,k}(z,\tau,u). \end{aligned} \tag{1.4.11}$$

Wir definieren weiterhin durch

$$\sigma_{l,k}(z,\tau,u) = \sum_{\substack{m=-k+1 \\ l=m \bmod 2}}^{k} c^l_m(\tau)\ \Theta_{m,k}(z,\tau,u), \tag{1.4.12}$$

die sogenannten *String-Funktionen* c^l_m von $SU(2)$. (Man erkennt direkt aus (1.4.12), daß sie sich aus der GKO-Konstruktion als Charakterfunktionen von $SU(2)_k/U(1)_k$ ergeben.) Analog können String-Funktionen für alle affinen Algebren definiert werden, explizit angeben kann man sie jedoch nur im Fall von $SU(2)$ (und einigen anderen Spezielfällen) oder zum Level 1 bei einfach geschnürten oder 'getwisteten' affinen Lie Algebren (dann sind es nur Produkte von Dedekindschen Eta-Funktionen).

Die Level k String-Funktionen c^l_m der affinen $SU(2)$-Algebra können nach Kac, Peterson (1984) berechnet werden durch

$$c^l_m(\tau) \quad = \quad \eta(\tau)^{-3} \sum_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ -|x|<|y|\leq|x| \\ (x,y) \ oder \ (1/2-x,1/2+y)\in((l+1)/2(k+2),m/2k)+\mathbb{Z}^2}} \mathrm{sign}(x)\ q^{(k+2)x^2-ky^2}, \tag{1.4.13}$$

wobei

$$l \in \{0, 1 \ldots k\}, \quad m \in \{-k+1, -k+2, \ldots k\}, \quad m = l \bmod 2.$$

Man setzt $c^l_m = 0$, wenn $l \neq m \bmod 2$. Des weiteren erfüllen die String-Funktionen

$$c^l_m = c^l_{-m} = c^{k-l}_{m+k}. \tag{1.4.14}$$

Für die String-Funktionen in der Standardform

$$c^l_m(\tau) = q^{s^l_m}\ (1 + b_1 q + b_2 q^2 + \ldots)$$

kennt man (Kac, Peterson (1984))

$$s^l_m = \frac{l(l+2)}{4(k+2)} - \frac{m^2}{4k} - \frac{c^c}{24} + \max\bigl(0, \frac{1}{2}(|m| - l)\bigr), \tag{1.4.15}$$

auch gibt es eine asymptotische Formel für die b_i. Unter modularen Transformationen faktorisieren l- und m-abhängige Teile (K hängt nur von k ab)

$$\begin{aligned} c^l_m(-\frac{1}{\tau}) &= K\ (-i\tau)^{-\frac{1}{2}} \sum_{l'=0}^{k} \sum_{m'=-k+1}^{k} e^{\pi i m m'/k}\ \sin\Bigl(\pi \frac{(l+1)(l'+1)}{k+2}\Bigr)\ c^{l'}_{m'}(\tau), \\ c^l_m(\tau+1) &= e^{2\pi i s^l_m}\ c^l_m(\tau). \end{aligned} \tag{1.4.16}$$

Durch den Zusammenhang zwischen der affinen $SU(2)$-Algebra und den Parafermionen (Zamolodchikov, Fateev (1985), (1986)) konnten Gepner und Qiu (1987) die Charakterfunktionen und die Fusions-Algebra der letzteren ableiten. Diese stimmen mit den String-Funktionen (1.4.12) überein und ergeben somit eine 'physikalische' Interpretation. Wir wollen hier nicht auf Details eingehen und nur die Charakterfunktionen (hier erzeugt von allen Feldern der parafermionischen Algebra mit 'Ladung' 0) zu den 'para-primären' Feldern ϕ^l_m angeben

$$\kappa^l_m = \eta(\tau)\; c^l_m(\tau). \tag{1.4.17}$$

Insbesondere stimmen die ersten drei parafermionischen Theorien mit (Teilen) von minimalen Modellen überein und erlauben dadurch eine weitere Charakterisierung einiger String-Funktionen.
So stimmt das $k = 3$ parafermionischen Modells oder $\mathbb{Z}_3$-Potts-Modell mit dem geraden Sektor des $p = 5$ minimalen Modells überein; in Charakterfunktionen

$$\kappa^0_0 = \chi_0 + \chi_3, \quad \kappa^0_2 = \chi_{2/3}, \quad \kappa^1_1 = \chi_{1/15}, \quad \kappa^2_0 = \chi_{2/5} + \chi_{7/5}, \tag{1.4.18}$$

wobei die Charakterfunktionen des minimalen Modells (vgl. z.B. Goddard, Kent, Olive (1986)) hier mit χ bezeichnet und durch die konforme Dimension des HWS indiziert sind. Analog gilt für $k = 2$, das Ising oder $p = 3$ minimale Modell

$$\kappa^0_0 = \chi_0, \quad \kappa^1_1 = \chi_{1/16}, \quad \kappa^2_0 = \chi_{1/2}. \tag{1.4.19}$$

Für $k = 1$ ist alles ganz einfach: $c^0_0 = c^1_1 = \eta^{-1}$ oder $\kappa^0_0 = \kappa^1_1 = 1$.

Weiter mit $SU(2)$: Erst modular invariante Zustandssummen sind das Salz im Süppchen der konformen Feldtheorie, und $SU(2)$ bietet in dieser Hinsicht eine Vorrats-Familien-Packung. Nicht genug, daß man einen ganzen Zoo von Lösungen findet (vgl. Cappelli, Itzykson, Zuber (1987) und Gepner, Qiu (1987)). Erstaunlicherweise kann jede Lösung mit einer einfach geschnürten Lie-Algebra in Zusammenhang gebracht werden. Zu gegebenem Level k existiert genau dann eine Lösung vom Typ $X \in \{A, D, E\}$, wenn die duale Coxeter Zahl $\tilde{h}(X)$ die Gleichung $k + 2 = \tilde{h}(X)$ erfüllt. Auch stimmen die Dimensionen der links-rechts-symmetrischen Darstellungen, die in jeder Lösung auftauchen, mit den sogenannten Exponenten der Lie Algebren überein (vgl. Nahm (1988) für eine konzeptionelle Erklärung des Auftretens der klassischen Lie-Algebren). Hier sind die Zustandssummen in *Tabelle 1* zusammengefaßt (man beachte die Symmetrie der modularen Invarianten unter der beidseitigen (d.h. im holomorphen und antiholomorphen

Sektor) Verschiebung $l \to k-l$; bei den D_{2j+2}, E_7 und E_8-Invarianten ist dies auch bei einseitiger Anwendung eine Symmetrie)

$$k \geq 1: \qquad \sum_{l=0}^{k} |\sigma_l|^2 \qquad (A_{k+1})$$

$$k = 4j \ (j \geq 1): \qquad \sum_{l=0}^{j-1} |\sigma_{2l} + \sigma_{k-2l}|^2 \ + 2|\sigma_{k/2}|^2 \qquad (D_{2j+2})$$

$$k = 4j-2: \qquad \sum_{l=0}^{k/2} |\sigma_{2l}|^2 + \sum_{l=0}^{2j-1} \sigma_{2l+1}\sigma^*_{k-2l-1} \qquad (D_{2j+1})$$

$$k = 10: \qquad |\sigma_0 + \sigma_6|^2 + |\sigma_3 + \sigma_7|^2 + |\sigma_4 + \sigma_{10}|^2 \qquad (E_6)$$

$$k = 16: \qquad |\sigma_0 + \sigma_{16}|^2 + |\sigma_4 + \sigma_{12}|^2 + |\sigma_6 + \sigma_{10}|^2 + |\sigma_8|^2 + (\sigma_2 + \sigma_{14})\sigma_8^* + \sigma_8(\sigma_2^* + \sigma_{14}^*) \qquad (E_7)$$

$$k = 28: \qquad |\sigma_0 + \sigma_{10} + \sigma_{18} + \sigma_{28}|^2 + |\sigma_6 + \sigma_{12} + \sigma_{16} + \sigma_{22}|^2. \qquad (E_8)$$

Die Fusions-Algebra der $SU(2)$-primären Felder (vgl. Gepner, Witten (1986)) lautet

$$[G^l_m]\ [G^{l'}_{m'}] = \sum_{\substack{n=|l-l'| \\ n=l+l' \bmod 2}}^{\min(l+l', 2k-l-l')} [G^n_{m+m' \bmod 2k}]. \tag{1.4.20}$$

Für die 3-Punkt-Funktionen verweisen wir auf die Literaturangaben in Klemm (1990).

Schließlich wollen wir noch eine fermionische Realisierung für die Spin $\frac{1}{2}$ oder fundamentale Darstellung von $SU(2)_k$ (vgl. 1.2) angeben: Betrachte dazu *ein* Duplett ψ^α, $\bar{\psi}^\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ freier Fermionen und bilde mit den Darstellungs-Matrizen J^a von $SU(2)$ aus (1.4.1)

$$J^a(z) := \psi^\alpha(z) J^a_{\alpha\beta} \bar{\psi}^\beta(z), \qquad a = 0, \pm. \tag{1.4.21}$$

Nach 1.2 erhält man eine Darstellung von $SU(2)_1$. Für höhere Level k bildet man einfach aus k Dupletts freier Fermionen k Ströme vom Typ (1.4.21); deren Summe $\mathcal{J}^a := \sum J^a$ erfüllt dann die Algebra von $SU(2)_k$. Der Sugawara Energie-Impuls-Tensor

$$T^c(z) = \frac{1}{k+2} \ddagger \mathcal{J}^a \mathcal{J}^a \ddagger (z)$$

gehorcht (1.1.2) mit $c^c = \frac{3k}{k+2}$.

1.5 GKO-Konstruktion der N=2 minimalen Modelle

N=2 (super-)minimale Modelle sind unitäre Darstellungen der durch folgende OPE gegebenen N=2 super-konformen Algebra ($T^s = T^{N=2}$ erfüllt die in (1.1.2) gegebene OPE)

$$\begin{aligned}
T^s(z)\ J(w) &= \frac{1}{(z-w)^2}J(w) + \frac{1}{z-w}\partial J(w), \\
T^s(z)\ G^\pm(w) &= \frac{3/2}{(z-w)^2}G^\pm(w) + \frac{1}{z-w}\partial G^\pm(w), \\
J(z)\ J(w) &= \frac{c/3}{(z-w)^2}, \\
J(z)\ G^\pm(w) &= \pm\frac{1}{z-w}G^\pm, \\
G^+(z)\ G^-(w) &= \frac{2c/3}{(z-w)^3} + \frac{2}{(z-w)^2}J(w) + \frac{1}{z-w}(2T^s(w) + \partial J(w)) \\
&= -G^-(w)G^+(z)
\end{aligned} \tag{1.5.1}$$

also

$$G^-(z)\ G^+(w) = \frac{2c/3}{(z-w)^3} - \frac{2}{(z-w)^2}J(w) + \frac{1}{z-w}(2T^s(w) - \partial J(w)).$$

Hier ist c die zentrale Ladung und $G^\pm$ und J sind die N=2 Superpartner des Energie-Impuls-Tensors. Die ersten beiden Relationen sagen nichts anderes, als daß J und $G^\pm$ Virasoro-primäre Felder der konformen Dimension 1 bzw. 3/2 sind. Nach der dritten Gleichung ist J ein $U(1)$-Strom, der durch ein freies Boson ϕ dargestellt werden kann: $J = i\sqrt{c/3}\partial\phi$. Die Supersymmetrie-Generatoren $G^\pm$ tragen die $U(1)$-Ladung ± 1. (Man beachte, daß hier J anders als in 1.1 normiert ist; dort sind alle J_0-Eigenwerte Vielfache von $1/\sqrt{2}$.)

In (1.5.1) sind zwei N=1 super-konforme Unteralgebren enthalten. Der N=1 Superpartner von T ist dabei entweder $G = G_+ + G_-$ oder $G' = i(G_+ - G_-)$; der von J ist dann G' bzw. G. Dagegen haben wir in (1.5.1) die 'Eigenfelder' bezüglich des simplen Stroms J gewählt, d.h. J ist diagonal.

In Abschnitt 4.4 wird die Gruppe der globalen Automorphismen von (1.5.1), die mögliche Randbedingungen der Algebra angibt und von

$$\begin{aligned} R_\beta &: G^\pm \mapsto e^{\pm 2\pi i\beta} G^\pm, \\ R' &: G^\pm \mapsto G^\mp, \quad J \mapsto -J \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

erzeugt wird, eingehend untersucht. Wir beschränken uns hier auf höchstens halbzahlige Moden und dabei nur auf den ungetwisteten Fall (d.h. $J(z)$ ist lokal zu allen Feldern). Es bleiben dann nur der Neveu-Schwarz (NS) und Ramond (R) Sektor, in denen $G^\pm$ beide halb- bzw. ganzzahlige Moden haben.

Die Moden-Entwicklung der $G^\pm$ (die von J und T sind in (1.2.7) und nahe (1.1.5) gegeben) lautet also

$$G^\pm(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2+a} z^{-r-3/2}\, G^\pm_r, \tag{1.5.3}$$

wobei a die Werte 0 im NS- und 1/2 im R-Sektor annimmt. Die Algebra (1.5.1) schreibt sich in Moden

$$\begin{aligned} [L_n, J_m] &= -mJ_{m+n} \\ [L_m, G^\pm_r] &= (\frac{m}{2} - r)G^\pm_{m+r} \\ [J_n, J_m] &= \frac{c}{3} n\delta_{n+m,0} \\ [J_m, G^\pm_r] &= \pm G^\pm_{m+r} \\ \{G^+_r, G^-_s\} &= 2L_{r+s} + (r-s)J_{r+s} + \frac{c}{3}(r^2 - \frac{1}{4})\delta_{r+s,0} \\ \{G^+_r, G^+_s\} &= \{G^-_r, G^-_s\} = 0. \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

Man beachte allerdings, daß (anders als J und T) die $G^\pm$ nicht hermitesch sind. Durch Wahl der Basis läßt sich das jedoch beheben; es gilt nämlich ${G^\pm_r}^\dagger = G^\mp_{-r}$, d.h. G und G' sind hermitesch.

Die unitären N=2 super-konformen minimalen Modelle sind durch ihre zentrale Ladung

$$c^s = \frac{3k}{k+2} = 3\Big(1 - \frac{2}{k+2}\Big), \qquad k \in \mathbb{N} \tag{1.5.5}$$

charakterisiert (vgl. z.B. Kiritsis (1988) und Referenzen darin).

Dies erinnert stark an die zentrale Ladung von $SU(2)$ und in der Tat werden wir die N=2 superkonformen Algebra und die Charakterfunktionen der minimalen Modelle durch eine GKO- (Goddard, Kent, Olive (1986)) oder Restklassen-Konstruktion (vgl. 4.2) zu

$$\frac{SU(2)_k \otimes U(1)_2}{U(1)_{k+2,\mathrm{diag}}} \tag{1.5.6}$$

herleiten. Wir folgen dabei in diesem konkreten Fall zunächst Di Vecchia, Petersen, Yu und Zheng (1986) (vgl. auch Ravanini, Yang (1987)). (Eine andere Konstruktion über Parafermionen geht auf Arbeiten von Zamolodchikov, Fateev (1986), und Qiu (1987a) zurück, vergleiche auch Gepner (1987a).)

Sei also durch $J^0(z) = J^{SU(2)_k,0}$, $J^{\pm}(z)$ eine Darstellung von $SU(2)_k$ (vgl. 1.4) gegeben und durch $i\sqrt{2}\partial\phi_2 = J^{U(1)_2}$ eine von $U(1)_2$ (1.1.12). Dann wird die diagonale $U(1)_{k+2}$-Unteralgebra erzeugt von (die Bezeichnung wird gleich klar werden)

$$J^{\perp} := J^{U(1)_{k+2}} = J^0 + J^{U(1)_2}. \tag{1.5.7}$$

Die Sugawara Energie-Impuls-Tensoren der verschiedenen affinen Algebren sind

$$\begin{aligned} T^{SU(2)_k} &= \frac{1}{2(k+2)} \sum_a \ddagger J^a J^a \ddagger = \frac{1}{2(k+2)} (\ddagger J^0 J^0 \ddagger + \ddagger J^+ J^- \ddagger), \\ T^{U(1)_2} &= \frac{1}{2 \cdot 2} \ddagger (J^{U(1)_2})^2 \ddagger, \\ T^{U(1)_{k+2}} &= \frac{1}{2(k+2)} \ddagger (J^{\perp})^2 \ddagger . \end{aligned} \tag{1.5.8}$$

Wir definieren nun den Energie-Impuls-Tensor der Quotiententheorie durch

$$T^{N=2} := T^{SU(2)_k} + T^{U(1)_2} - T^{U(1)_{k+2}}, \tag{1.5.9}$$

der, wie man leicht überprüft, (1.1.2) mit der zentralen Ladung (1.5.5) erfüllt und orthogonal (im Sinne, daß in der OPE keine singulären Terme auftreten) zu $J^{\perp}$, also auch zu $T^{U(1)_{k+2}}$ ist. Weiterhin kann man leicht zeigen, daß $T^{N=2}$ zusammen mit

$$\begin{aligned} G^+ &= \sqrt{\frac{2}{k+2}}\, e^{-i\phi_2} J^+, \\ G^- &= \sqrt{\frac{2}{k+2}}\, e^{i\phi_2} J^-, \\ J^{N=2} &= \frac{1}{\sqrt{2}(k+2)} (2J^0 - kJ^{U(1)_2}) \end{aligned} \tag{1.5.10}$$

eine Darstellung der N=2 super-konformen Algebra definiert; alle Operatoren sind im OPE-Sinn orthogonal zu $J^{\perp}$ (eigentlich sollte hier $\psi^{\pm}$ statt $e^{\pm i\phi_2}$ in der fermionischen Realisierung von $U(1)_2$, nämlich $J^{U(1)_2} = \sqrt{2}\ddagger\psi^+\psi^-\ddagger$, stehen; entsprechend ist hier im NS bzw. R-Sektor das Boson auf S^1 zum Radius π bzw. 2π kompaktifiziert). In der Tat hat die Quotiententheorie noch eine weitere wohldefinierte Quantenzahl $(-)^F$, wobei F die *Fermionenzahl* bezeichnet ($G^{\pm}$ tragen beide die Fermionenzahl 1). Dies führt zur Aufspaltung der N=2 Charakterfunktionen in zwei Anteile gerader und ungerader Fermionenzahl, eben die Charakterfunktionen der Quotiententheorie; diese sind dann nicht invariant unter $G^{\pm}$, anders ausgedrückt: Die Symmetriealgebra der Quotiententheorie ist in der N=2 Algebra echt enthalten.

Um nun die Charakterfunktionen der Quotiententheorie herzuleiten, bringen wir in (1.5.9) $T^{U(1)_{k+2}}$ auf die andere Seite und projizieren auf die in den Charakterfunktionen wesentlichen Null-Moden

$$L_0^{SU(2)_k} + L_0^{U(1)_2} = L_0^{N=2} + L_0^{U(1)_{k+2}}. \tag{1.5.11}$$

Analog gilt für die U(1)-Ströme (und damit deren Null-Moden) der verschiedenen Theorien

$$zJ_0^{0,SU(2)_k} + z'J_0^{U(1)_2} = \sqrt{2}(z-z')J_0^{N=2} + \frac{kz+2z'}{k+2}J_0^{\perp}. \tag{1.5.12}$$

Die Summen in (1.5.11-12) entsprechen auf dem Niveau der Modelle Tensorprodukten (auch auf der rechten Seite, da wie gezeigt $J^{\perp}$ orthogonal zur N=2 Algebra ist). Die Charakterfunktionen faktorisieren also, und für die linke Seite haben wir nach (1.4.10) und 1.1 (bis auf eine η-Funktion)

$$\sigma_{l,k}(z,\tau,u)\;\Theta_{s,2}(z',\tau,u'). \tag{1.5.13}$$

Als nächstes setzen wir die Definition der String-Funktionen (1.4.12) ein und wenden die Produktformel für Theta-Funktionen (1.4.9) an. Ein Umsortieren der Summe (zuerst erweitert man periodisch auf $m = -k(k+2)+1, \dots k(k+2)$ und $j = 1, \dots k(k+2)$, dann kann man umdefinieren $m + (4j+s) \to m$ und die Summe durch Ausnutzen der

Symmetrien wieder einschränken) ergibt dann

$$\sum_{\substack{m=-k-1\\ l=m+s \bmod 2}}^{k+2} \Theta_{m,k+2}(\frac{kz+2z'}{k+2},\tau,\frac{ku+2u'}{k+2})\times \\ \sum_{j=1}^{k} c^l_{m-(4j+s)}(\tau)\ \Theta_{2m-(k+2)(4j+s),2k(k+2)}(\frac{z-z'}{k+2},\tau,0). \tag{1.5.14}$$

Das entspricht mit der Theta-Funktion zum Level $k+2$ genau der von der rechten Seite von (1.5.11) erwarteten Form; mehr noch: Wegen der linearen Unabhängigkeit der klassischen Theta-Funktion (vgl. Bemerkung nach (1.4.7)) ist der gesuchte Charakter der Quotiententheorie gegeben durch

$$\begin{aligned}\chi^{l,s}_m(z,\tau,u) &= \sum_{j=1}^{k} c^l_{m-(4j+s)}(\tau)\ \Theta_{2m-(k+2)(4j+s),2k(k+2)}(\frac{z}{(k+2)},\tau,\frac{u}{(k+2)^2}) \\ &= e^{-2\pi i2ku/(k+2)}\ \mathrm{tr}_{\psi^{l,s}_m}\ q^{L_0-\frac{c}{24}} e^{-2\pi i z J_0^{N=2}} \\ &= \chi^{l,-s}_{-m}(-z,\tau,u),\end{aligned} \tag{1.5.15}$$

wobei

$$l\in\{0,1\ldots k\},\ s\in\{-1,0,1,2\},\ m\in\{-k-1,-k\ldots k+2\},\ l=m+s \bmod 2.$$

Wir setzen $\chi^{l,s}_m(z,\tau,u)=0$, wenn $l\neq m+s \bmod 2$. Damit gilt also

$$\sigma_{l,k}(z,\tau,u)\ \Theta_{s,2}(z',\tau,u') = \\ \sum_{\substack{m=-k-1\\ l=m+s \bmod 2}}^{k+2} \Theta_{m,k+2}(\frac{kz+2z'}{k+2},\tau,\frac{ku+2u'}{k+2})\ \chi^{l,s}_m(z-z',\tau,0). \tag{1.5.16}$$

Aus den Symmetrien der c^l_m (1.4.14) und der Theta-Funktionen (1.4.7) folgt, daß $\chi^{l,s}_m$ unter $s\to s+4$ und unabhängig unter $m\to m+2(k+2)$ invariant ist; zudem gilt folgende Feldidentifikation

$$\chi^{l,s}_m = \chi^{k-l,s+2}_{m+k+2}.$$

Das modulare Transformationsverhalten ergibt sich, wie versprochen, aus dem der String-Funktionen (1.4.8) und dem der Theta-Funktionen (1.4.6) zu (K' hängt nur von

k ab)

$$\chi_m^{l,s}(\frac{z}{\tau}, -\frac{1}{\tau}, u + \frac{z^2}{2\tau}) =$$
$$K' \sum_{l',s',m'} \sin\Big(\pi \frac{(l+1)(l'+1)}{k+2}\Big)\ e^{\pi i m m'/(k+2)}\ e^{-\pi i s s'/2}\ \chi_{m'}^{l',s'}(z,\tau,u), \qquad (1.5.17)$$
$$\chi_m^{l,s}(z, \tau+1, u) = e^{2\pi i \gamma_m^{l,s}} \chi_m^{l,s}(z,\tau,u),$$

wobei über $l' = 0, \ldots k$, m' mod $2(k+2)$ und s' mod 4 mit $l' + m' + s' = 0$ mod 2 summiert wird und

$$\gamma_m^{l,s} = \frac{l(l+2)}{4(k+2)} - \frac{m^2}{4(k+2)} + \frac{s^2}{8} - \frac{c^s}{24}. \qquad (1.5.18)$$

Ein Teil (alle wohl kaum) der (vgl. Gepner (1988) 766) modularen Invarianten der Quotiententheorie ergeben sich als Produkte der modularen Invarianten der affinen Theorie (Tabelle 1) und der Theta-Systeme (1.1.4). Mehr davon später, wenn auch eher versteckt. Bei der Wahl der diagonalen Invarianten besteht der (a, c) und (c, a)-Ring (vgl. 4.5) nur aus der $\mathbb{I}$; diese werden also erst durch Projektionen nicht-trivial.

Wir bezeichnen nun die (bezüglich der den Charakter erzeugenden Algebra) primären Felder zum Charakter $\chi_m^{l,s}$ mit $\psi_m^{l,s}$ ($\equiv \psi_{m+k+2}^{k-l,s+2}$ wegen der Feldidenfikation). Deren konforme Dimensionen folgen aus dem Transformationsverhalten der Charakterfunktionen unter $\tau \to \tau + 1$

$$h_m^{l,s} = \frac{l(l+2) - m^2}{4(k+2)} + \frac{s^2}{8} \text{ (mod 1)}, \qquad (1.5.19)$$

aus denen unter $z \to z + \frac{1}{4}$ ergeben sich die Ladungen ($J_0^{N=2}$-Eigenwert)

$$Q_m^{l,s} = \frac{m}{k+2} - \frac{s}{2} \text{ (mod 2)}, \qquad (1.5.20)$$

und aus denen unter $\tau \to -1/\tau$ (in Analogie zum Fall der $SU(2)$- und $U(1)$-Charakterfunktionen) folgt die Fusions-Algebra

$$[\psi_m^{l,s}][\psi_{m'}^{l',s'}] = \sum_{\substack{\tilde{l}=|l-l'| \\ \tilde{l}=l+l' \bmod 2}}^{\min(l+l', 2k-l-l')} [\psi_{m+m' \bmod 2(k+2)}^{\tilde{l},\ s+s' \bmod 4}] \qquad (1.5.21)$$

(wie die S-Matrix, so faktorisiert auch die Fusions-Algebra nach Verlindes Formel).

Man liest ab, daß die simplen Ströme der Quotiententheorie durch die Felder der Form $\psi_m^{0,s} \equiv \psi_{m+k+2}^{k,s+2}$ für beliebiges m und s ($m = s \bmod 2$) gegeben sind. Ist k ungerade, so werden diese alle durch $\psi_1^{0,1}$ erzeugt und bilden die Gruppe $\mathbb{Z}_{4(k+2)}$. Für gerades k hat der Orbit von $\psi_1^{0,1}$ nur die halbe Länge; es existiert jedoch noch ein weitere simpler Strom der Ordnung 2, nämlich $\psi_0^{0,2}$, so daß man in diesem Fall die Symmetriegruppe $\mathbb{Z}_{2(k+2)} \times \mathbb{Z}_2$ erhält.

Alternativ kann man die Symmetrien der Fusions-Algebra auch dadurch beschreiben, daß die Fusion invariant unter den von

$$\psi_m^{l,s} \to e^{2\pi i m/2(k+2)}\ \psi_m^{l,s}, \quad \psi_m^{l,s} \to e^{2\pi i s/4}\ \psi_m^{l,s}$$

erzeugten Transformationen ist. Diese Symmetrie wird jedoch durch die Feldidentifikation zu

$$\psi_m^{l,s} \to e^{2\pi i m/2(k+2)}\ e^{2\pi i s/4}\ \psi_m^{l,s}, \quad \psi_m^{l,s} \to e^{2\pi i s/2}\ \psi_m^{l,s} \tag{1.5.22}$$

gebrochen (dann erst stimmt sie mit der durch die simplen Ströme gegebenen überein). Faßt man dann noch die Charakterfunktionen der Quotiententheorie zu denen der N=2 super-konformen Modelle zusammen (vgl. (1.5.25-26)), so bleibt nur die Symmetrie

$$\psi_m^{l,s} \to e^{2\pi i m/(k+2)}\ e^{2\pi i s/2}\ \psi_m^{l,s},$$

die sich im NS- bzw. R-Sektor auf jeweils $\mathbb{Z}_{k+2}$ reduziert.

Wir wollen nun die primären Felder $\psi_m^{l,s}$ der Quotiententheorie ausdrücken durch die der $SU(2)_k$-, $U(1)_2$-Theorie und $U(1)_{k+2}$-Theorie, nämlich G_{m-s}^l (1.4.5-6), $e^{is\phi_2/2}$ und $e^{-im\phi^\perp/\sqrt{2(k+2)}}$ (1.1.12) (dabei ist $\phi^\perp$ durch $J^\perp = i\sqrt{k+2}\ \partial\phi^\perp$ definiert), um damit den Zusammenhang der N=2 super-minimalen Modelle zu der Quotiententheorie zu klären.

Dazu definieren wir für $|m-s| \leq l$ und $l,\ m,\ s$ wie in (1.5.15) (dann gelten (1.5.19-20) ohne mod)

$$\psi_m^{l,s} \equiv \psi_{m+k+2}^{k-l,s+2} := e^{is\phi_2/2}\ G_{m-s}^l\ e^{-im\phi^\perp/\sqrt{2(k+2)}}. \tag{1.5.23}$$

In der Tat überprüft man leicht, daß die so definierten Felder die in (1.5.19-20) angegebene konforme Dimension (sie sind sicherlich Virasoro primär) und $J^{N=2}$−Ladung tragen und orthogonal zu $J^\perp$ sind.

Mit (1.5.23) ist jedoch $\psi_m^{l,s} = \psi_{m+k+2}^{k-l,s+2}$ trotz Feldidentifikation nur für $l \in \{0, \ldots k\}$ und $m-s \in \{l-2k \ldots l\}$ definiert. Es fehlen noch alle Felder mit $m-s = l+2$ ($m-s = l+1$ kann wegen $l = m+s$ mod 2 nicht auftreten), also $\psi_{l+s+2}^{l,s}$ für $l \in \{0, 1, \ldots k\}$ und $s \in \{-1, 0, 1, 2\}$. Die konforme Dimension dieser Felder weicht von (1.5.19) ohne mod um einen Summanden der Form

$$\max\Big(0, \frac{|m-s|-l}{2}, \frac{|m'-s'|-l'}{2}\Big)$$

im R-Sektor ($s \in \{\pm 1\}$) und

$$\max\Big(0, \frac{||m|-s|-l}{2}, \frac{||m'|-s'|-l'}{2}\Big)$$

im NS-Sektor ($s \in \{0, 2\}$) ab, dabei ist $l' := k-l$, $m' := m+k+2 \bmod 2(k+2)$ und $s' := s+2 \bmod 4$ wie auch l, m und s im Bereich von (1.5.15) zu wählen.

Betrachtet man die Wirkung von $G^\pm$ (1.5.10) auf den Feldern (1.5.23), so ergibt sich $G^\pm\ \psi_m^{l,s} \sim \psi_m^{l,s\mp 2}$, also $G^\pm$, wenn man mit der Fusions-Algebra vergleicht, in der konformen Familie $\psi_0^{0,2} = \psi_0^{0,-2}$ enthalten ist. Übereinstimmend damit ergeben sich nur für $s = \pm 1$ Singularitäten mit halbzahligen Potenzen in der OPE mit $G^\pm$, daher sind diese Zustände dem Ramond, die anderen $s = 0, 2$ dem Neveu-Schwarz-Sektor zuzuordnen. Die Quotiententheorie wird also von J, $T^{N=2}$ und den Feldern $G^\pm$ in geradzahligen Potenzen erzeugt.

Weitere ausgezeichnete Felder der N=2 superkonformen Theorie sind noch der *Operator des spektralen Flusses* $\mathcal{U}_{-1/2}$, der mit (dem Ramond-Grundzustand) $\psi_1^{0,1}$ identifiziert werden kann (vgl. 4.4), sowie die (anti-)chiral (im Sinne von 4.5) primären Felder und die Ramond-Grundzustände. Die *Ramond-Grundzustände*, charakterisiert durch $h_m^{l,s} = \frac{c^s}{24} = \frac{k}{8(k+2)}$, können mit $\psi_{l+1}^{l,1} = \psi_{-((k-l)+1)}^{k-l,-1}$ identifiziert werden. Sie verschwinden unter $\frac{1}{2}G_0G_0 = L_0 - \frac{c}{24}$ ($G = G^+ + G^-$). Ob diese Felder tatsächlich im Spektrum der konformen Feldtheorie auftreten, hängt von der Wahl der modularen Invarianten ab. So erhält man bei der diagonalen Invarianten im Theta- und affinen System (A-Invariante) alle $k+1$ Felder. Wählt man stattdessen im affinen System z.B. die E_6-Invariante (vgl. Tabelle 1), so bleiben nur die Ramond-Grundzustände für $l \in \{0, 3, 4, 6, 7, 10\}$ übrig. Sind in einer String-Theorie alle Ramond-Grundzustände herausprojiziert, dann sagt man, Supersymmetrie sei *spontan gebrochen*, und es folgt, daß das Spektrum frei von masselosen ($h = 1/2 = c/24$) Fermionen ist; alle Zustände treten dann in der für massive Zustände von der Lorentz-Invarianz diktierten Form von Paaren entgegengesetzter Chiralität auf.

Die oben erwähnten *(anti-)chiral primären Felder* sind durch $h_m^{l,s} = (-)Q_m^{l,s}/2$, $s \in \{0,2\}$ charakterisiert und durch $(\psi_{-l}^{l,0} = \psi_{k-l+2}^{k-l,2})$ $\psi_l^{l,0} = \psi_{-(k-l+2)}^{k-l,2}$ gegeben. Der eindeutige (anti-)chirale Zustand (mini-)maximaler Ladung $Q = (-)\frac{c}{3}$ ist $\psi_{(-)k}^{k,0} = \psi_{-(-)2}^{0,2}$. (Der chirale Ring (vgl. 4.5) ist isomorph zur zyklischen Polynom-Algebra $\mathbb{R}[x]/(x^{k+1})$, wobei (x^{k+1}) das von $x^{k+1} = 0$ erzeugte Ideal bezeichnet.) Wie bei den Ramond-Grundzuständen hängt das Auftreten der (anti-)chiral primären Felder von der Wahl der modularen Invarianten ab. Ramond-Grundzustände und (anti-)chirale Felder sind jedoch noch weitaus fester miteinander verknüpft, nämlich durch den Operator $\mathcal{U}_{-1/2} = \psi_1^{0,1}$ des spektralen Flußes. Nach (1.5.21) gilt

$$\underset{chiral}{\psi_l^{l,0}} \xrightarrow{\mathcal{U}_{-1/2}} \underset{Ramond-GZ}{\psi_{l+1}^{l,1}} \xrightarrow{\mathcal{U}_{-1/2}} \underset{anti-chiral}{\psi_{l+2}^{l,2} = \psi_{-(k-l)}^{k-l,0}} \,. \tag{1.5.24}$$

Die Charakterfunktionen der N=2 super-konformen Theorie sind durch $\chi_m^{l,s} \pm \chi_m^{l,s+2}$ gegeben. Im Ramond-Sektor ist

$$\begin{aligned} \chi_m^{l,1} + \chi_m^{l,3} &= \mathrm{tr}_R \; q^{L_0} e^{-2\pi i z J_0}, \\ \chi_m^{l,1} - \chi_m^{l,3} &= \pm \mathrm{tr}_R \; (-)^F q^{L_0} e^{-2\pi i z J_0} \overset{z=0}{=} \delta_{l+1,m} - \delta_{l+1,-m} \end{aligned} \tag{1.5.25}$$

(man sieht, daß die Differenz bis auf ein Vorzeichen gerade der Witten-Index ist, d.h. er ist ± 1, wenn ein Ramond-Grundzustand auftritt und verschwindet sonst). Im Neveu-Schwarz-Sektor ist die Zuordnung ähnlich

$$\begin{aligned} \chi_m^{l,0} + \chi_m^{l,2} &= \mathrm{tr}_{NS} \; q^{L_0} e^{-2\pi i z J_0}, \\ \chi_m^{l,0} - \chi_m^{l,2} &= \pm \mathrm{tr}_{NS} \; (-)^F q^{L_0} e^{-2\pi i z J_0}. \end{aligned} \tag{1.5.26}$$

Das Vorzeichen des $(-)^F$-Anteils kann man dadurch bestimmen, daß im NS-Sektor der Zustand mit geringstem L_0-Eigenwert, der dann gleichzeitig der Grundzustand der N=2 Algebra ist, mit positivem Vorzeichen auftreten muß (das kann man leider nicht mit (1.5.19) sehen). Im übrigen spielt dieses Vorzeichen bei gleicher Wahl im holomorphen und antiholomorphen Anteil der Theorie keine Rolle (und dies ist durch modulare Invarianz sichergestellt).

Schließlich sollten wir noch erwähnen, daß die hier gegebene Konstruktion von Kazama und Suzuki (1989a) für andere Quotiententheorien verallgemeinert wurde; dort kann man jedoch das Analogon von (1.5.16) nicht nach den Charakterfunktionen der N=2 Modelle auflösen, kennt aber z.B. deren modulares Transformationsverhalten. Eine noch allgemeinere Konstruktion (durch wechselwirkende bosonische Theorien) für N=2 Modelle wird in Kazama, Suzuki (1989b) vorgestellt (vgl. auch Cohen, Gepner (1991)).

2 Gepners Konstruktion

In diesem Kapitel wird zuerst (2.1-5) die Gepnersche Zustandssumme angegeben und dann ihre Konstruktion für den Fall der Kompaktifizierung auf $D = 4$ Raum-Zeit-Dimensionen Schritt für Schritt erklärt: Anomaliekürzung, Implementierung von N=1 Raum-Zeit-Supersymmetrie und Heterosis, sowie die konsistente Kopplung des Weltflächen-Gravitinos. In den folgenden Abschnitten (2.6-9) untersuchen wir das Ergebnis unserer Bemühungen und finden: die Erweiterung der Eichgruppe von $(E_8\times)$ $SO(10)$ auf $(E_8\times)E_6$, die Relevanz des chiralen Rings für das masselose Spektrum der Theorie und gehen abschließend kurz auf die geometrische Interpretation der masselosen Felder im feldtheoretischen Niederenergiegrenzwert der Gepner-Modelle ein.

2.1 Die Zustandssumme

Wir stellen in diesem Abschnitt das erste wesentliche Ergebnis dieses Kapitels, die Gepnersche Zustandssumme, vor, auf das sie während der langwierigen Konstruktion nicht verloren gehe.

In (Gepner, 1987a) wurde folgende Zustandssumme (hier nach einer Arbeit von Klemm (1990) in einer der Herleitung naheliegenden Form) angegeben

$$\mathcal{Z}(\tau,\bar{\tau}) = \sum (-)^{b_0} \mathbf{A}_{l,\bar{l}}\ \boldsymbol{\chi}^{l}_{\lambda}(\tau)\ \bar{\boldsymbol{\chi}}^{\bar{l}}_{\lambda+b_0\beta_0+\ldots+b_r\beta_r}(\bar{\tau}), \tag{2.1.1}$$

wobei über alle

$$\begin{gathered} l,\bar{l} \in \times_{i=1}^{r}\{0,\ldots k_i\}, \\ b_0 \in \{0,1,\ldots,\mathrm{kgV}\{k_i+2,2\}-1\}, \\ b_1,\ldots b_r \in \{0,1\} \end{gathered}$$

und

$$\lambda \in \mathbb{Z}_4 \times (\times_{i=1}^{r}\mathbb{Z}_{2(k_i+2)}) \times \mathbb{Z}_4^r$$

summiert wird (r ist die Anzahl der tensorierten Modelle charakterisiert durch $\{k_i\}$), die die folgenden Bedingungen erfüllen (alle Definitionen und Konventionen werden in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels erklärt)

$$\begin{gathered} 2\beta_0 \bullet \lambda \in 2\mathbb{Z}+1, \\ \beta_i \bullet \lambda \in \mathbb{Z}. \end{gathered}$$

Dabei ist $\bullet$ ein auf dem Raum der Quantenzahlen des Modells definiertes 'natürliches' Skalarprodukt (2.2.11) und β_i konstante Vektoren im selben Raum wie λ.

Diese komplizierten Nebenbedingungen gehen auf Orbifold-Konstruktionen (4.3) und eine verallgemeinerte GSO-Projektion zurück und stellen folgendes sicher:

Die Summe über die b_i's ist für eine konsistente Kopplung des masselosen Spin-$^3/_2$-Feldes (also Weltflächen-Supersymmetrie) notwendig, so sagt man. Sie stellt sicher (2.5), daß im Tensorprodukt der verschiedenen Modelle R-Zustände nur mit R-Zuständen und NS- nur mit NS-Zuständen 'koppeln'.

Die Summe über b_0 erzwingt mit dem gekoppelten Vorzeichen $(-)^{b_0}$ eine Projektion auf Zustände mit ungerader $U(1)$-Ladung (2.3). Das entspricht einer verallgemeinerten GSO-Projektion und führt auf ein Raum-Zeit-supersymmetrisches Spektrum.

$\mathbf{A}_{\mathbf{l},\bar{\mathbf{l}}}$ ist einfach ein Produkt von modularen Invarianten (vgl. (2.2.10)). Schließlich handelt es sich bei den Charakterfunktionen $\boldsymbol{\chi}$ und $\bar{\boldsymbol{\chi}}$ um Produkte von Charakterfunktionen der internen N=2 super-minimalen Modelle und eines Charakters der Eichgruppe bzw. von $SO(2)$ (vgl. (2.2.9) und (2.4.5)).

Eine andere (für die Bilanz der Vorzeichen und das Ablesen der Symmetriealgebra) günstige(re) Schreibweise ist

$$\mathcal{Z}(\tau,\bar{\tau}) = \frac{1}{2^r \ \mathrm{kgV}(k_i+2,2)} \sum_{l,\bar{l},\lambda} A_{l,\bar{l}} \ Z^l_\lambda(\tau) \ \bar{Z}^{\bar{l}}_\lambda(\bar{\tau}), \tag{2.1.2}$$

wobei

$$Z^l_\lambda = \sum_{b_0,b_i} (-)^{b_0} \boldsymbol{\chi}^l_{\lambda+b_0\beta_0+b_i\beta_i}$$

und (vgl. (2.4.2))

$$\bar{Z}^l_\lambda = \sum_{b_0,b_i} (-)^{b_0} \bar{\boldsymbol{\chi}}^l_{\lambda+b_0\beta_0+b_i\beta_i} = (-)^{\lambda_0} \sum_{b_0,b_i} \tilde{\boldsymbol{\chi}}^l_{\lambda+b_0\beta_0+b_i\beta_i+\nu} =: (-)^{\lambda_0} \tilde{Z}^l_{\lambda+\nu}$$

(keine internen Vorzeichen auf der bosonischen Seite) ist, wobei $\nu = (2;0^r;0^r)$ ist.

2.2 Bilanz der zentralen Ladungen

In diesem Abschnitt geben wir den grundlegenden Inhalt an konformen Feldtheorien der Gepnerschen Konstruktion an, der dem ersten Kriterium an eine konsistente Stringtheorie, der Anomaliefreiheit, genügt.

Der fermionische String ist *anomaliefrei* in 10 Dimensionen. Im kovarianten Zugang heißt das, daß im physikalischen Spektrum keine Felder negativer Norm auftreten und die Norm-Null-Zustände entkoppeln und daher eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation möglich ist; in der Licht-Kegel-Quantisierung ist es notwendig, damit die Lorentzalgebra auch nach Quantisierung gilt; im modernen kovarianten Zugang, der Pfad-Integral-Quantisierung, entkoppelt nur dann der Freiheitsgrad der Weyl-Skalierung (das Liouville Feld) und die BRST-Ladung ist nilpotent (vgl. GSW (1987) oder Lüst Theisen (1989)). Diese 10 Dimensionen werden bei der Standardkonstruktion (NS-R-String) durch eine konforme Feldtheorie, bestehend aus 10 freien Bosonen und Fermionen mit der zentralen Ladung $c^f = \frac{3}{2}10 = 15$, ausgefüllt.

In der Tat ist nicht die Raum-Zeit-Dimension, sondern die zentrale Ladung die entscheidende Größe. So kann man prinzipiell die zur Anomaliefreiheit erforderliche zentrale Ladung $c^f = 15$ auch mit beliebigen anderen konformen Feldtheorien 'ausfüllen'. Dabei reduziert sich natürlich die Anzahl der freien Bosonen und Fermionen, die dann noch in der Theorie Platz haben und als Raum-Zeit-Koordinaten interpretiert werden können. Man spricht von der *Kompaktifizierung* der weggefallenen Dimensionen durch interne Theorien.

Im Falle der Gepner-Modelle sieht das konkret so aus: Bei einer Kompaktifizierung zu $D = d + 2$, hier ist d die Anzahl der physikalischen oder transversalen Licht-Kegel-Koordinaten, bleiben noch $15 - {}^{3(d+2)}/_2 = 12 - {}^{3d}/_2$ 'Dimensionen' (in Einheiten der zentralen Ladung) für die zentrale Ladung c^{int} einer (zunächst) beliebigen internen Theorie frei. Gepner (1987a) wählte für diese interne Theorie das Tensorprodukt von N=2 super-minimalen Modellen (zur Kompaktifizierung auf $D = 4$ Dimensionen ($c^{int} = 9$) reicht dazu ein einziges Modell nicht aus, da $c^{N=2} < 3$ — daher das Tensorprodukt, die zentralen Ladungen werden aufaddiert). Indiziert man diese durch $(k_1)(k_2)\ldots(k_r)$ (vgl. (1.5.4)), so erhält man als Bedingung für die Anomaliefreiheit der Theorie $c^{int} = \sum {}^{3k_i}/_{(k_i+2)} \stackrel{!}{=} 12 - {}^{3d}/_2$. Beachtet man nun noch, daß die Konstruktion nur Sinn für Kompaktifizierung auf eine gerade Anzahl von Raum-Zeit-Koordinaten macht (sonst hat der Raum-Zeit-Teil selbst nicht die Struktur einer N=2 superkonformen Theorie und man erhält keine N=1 Raum-Zeit-Supersymmetrie), bleibt eine endliche Anzahl von verschiedenen Modell-Familien (mit gleichem Gehalt an N=2 superkonformen Modellen). Nach Klemm (1990) (vgl. auch Lynker, Schimmrigk (1988a,b)) gibt es für ($D = 10 : 1$) $D = 8 : 3$, $D = 6 : 17$ und $D = 4 : 168$ Modelle (nicht eingerechnet mögliche Orbifolds und gewisse Identifizierungen). Wir beschränken uns auf $D = 4$, d.h. insbesondere $^d/_2$ ungerade. Als Standardbeispiel werden wir die Theorie $(3)^5$, d.h. das Tensorprodukt fünf identischer N=2 superkonformer Modelle mit $c = {}^{3k}/_{(k+2)} = {}^9/_5$ in $D = 4$ Dimensionen, betrachten.

Wir wollen nun konkret die (Genus eins) Zustandssumme in Licht-Kegel-Eichung für die bis jetzt beschriebene konforme Feldtheorie, ein Tensorprodukt (plus Summation über verschiedene $SO(d)$-Darstellungen) von freien Bosonen, Fermionen und der internen Theorien aufschreiben.

Als erstes geben wir den modular invarianten Beitrag der Bosonen und bosonischen Geistfelder an (vgl. z.B. Lüst, Theisen (1989), chapter 6) (in Polarkoordinaten sieht man schnell, daß $Im\,\tau = |\tau|^2 Im(^{-1}/_\tau)$)

$$\mathcal{Z}^{bos}(\tau,\bar{\tau}) = |(Im\tau)^{-d/2}\eta(\tau)^{-2d}|. \tag{2.2.1}$$

Es gibt mehrere Wege (2.2.1) zu 'verstehen': Im Pfadintegral-Formalismus wird der Beitrag von zweien der Bosonen durch die Geister aufgehoben, daher taucht in (2.2.1) d und nicht D auf. In Licht-Kegel-Eichung ist das 'Verschwinden' zweier Bosonen auch keine Überraschung — man summiert nur über die transversalen Bosonen. Kommt man von der konformen Feldtheorie, so ist (2.2.1) nichts anderes als die diagonale modulare Invariante der $\mathbb{R}^d$ Algebra.

Als nächstes betrachten wir die transversalen Fermionen. Diese bilden nach Gepner (1989) eine Darstellung der affinen Lie Algebra $SO(d)_l \times SO(d)_r$ zum Level 1. Diese Symmetrie wird von den Strömen $J_{ij} = i \ddagger \psi^i\psi^j \ddagger$ (analog rechts) erzeugt und ist nichts anderes als der Überrest der Lorentz-Symmetrie auf dem Licht-Kegel (nur noch transversale Koordinaten). Lorentz-Invarianz impliziert daher, daß diese Symmetrie ungebrochen ist und das Spektrum in Darstellungen von $SO(d)_l \times SO(d)_r$ zum Level 1 zerfällt. Für jedes gerade d gibt es vier (integrable) Darstellungen: Singlett ($o : 0$), Vektor ($v : 2$), Spinor ($s : 1$) und Antispinor ($c : 3$). Die zugehörigen Charakterfunktionen wurden allgemein schon in (1.3.12) vorgestellt; die Theta-Funktionen sind explizit im Appendix von Lerche, Schellekens und Warner (1989) (mit Ladungen) angegeben, der Rang von $SO(d) = D_{d/2}$ ist $^{d}/_{2}$. Insgesamt

$$\chi_{\lambda}^{SO(d)}(z, \tau, 0) = \Theta_{[\lambda]}^{D_{d/2}}(z, \tau, 0)/\eta(\tau)^{d/2}. \tag{2.2.2}$$

Da wir später davon Gebrauch machen werden, geben wir auch direkt das modulare Transformationsverhalten. Dazu bietet es sich an, die Charakterfunktionen in einem vier-dimensionalen Vektor $\vec{\chi}_d = (\chi_o, \chi_v, \chi_s, \chi_c)^t_{SO(d)}$ zusammenzufassen. Dann gilt (wir setzen $z = 0$) nach (1.3.11)

$$\vec{\chi}_d(-\frac{1}{\tau}) = S_d \ \vec{\chi}_d(\tau), \qquad S_d = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & e^{-\pi i d/4} & -e^{-\pi i d/4} \\ 1 & -1 & -e^{-\pi i d/4} & e^{-\pi i d/4} \end{pmatrix}, \tag{2.2.3}$$

sowie

$$\vec{\chi}_d(\tau + 1) = T_d \ \vec{\chi}_d(\tau), \qquad T_d = e^{-\pi i d/24}\mathrm{diag}(1, -1, e^{\pi i d/8}, e^{\pi i d/8}). \tag{2.2.4}$$

Die zu (o, v, s, c) gehördenden $^{d}/_{2}$-dimensionalen Gewichtsgitter- oder 'Klebe'-vektoren lauten (vgl. Conway, Sloane (1988))

$$[o] = \vec{0}, \quad [v] = (1, 0, \ldots 0), \quad [s] = (\frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{2}), \quad [c] = (\frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \tag{2.2.5}$$

und das Wurzelgitter $M_{SO(d)}$ (d gerade) ist durch den Spann über alle Vektoren $(\pm 1, \pm 1, 0, \ldots 0)$ und Permutationen gegeben oder ausgeschrieben durch $\{(x_1, \ldots x_{d/2}) \in \mathbb{Z}^{d/2} | \sum x_i = 0 \bmod 2\}$. Man überprüft leicht, daß in der Tat das (als duales Gitter zu $M_{SO(d)}$ definierte) Gewichtsgitter gegeben ist durch $M^*_{SO(d)} = \cup(M_{SO(d)} + [\lambda])$, wobei über die verschiedenen Klebevektoren vereinigt wird. (Die Anzahl der Konjugationsklassen oder Klebevektoren ist gleich der Ordnung des Zentrums der Gruppe ist gleich der Wurzel aus dem Verhältnis der Volumina der Einheitszellen des Wurzel- zum Gewichtsgitter.) Die Additionsregeln für die Konjugationsklassen sind für $^{d}/_{2}$ gerade bzw. ungerade

$$\begin{array}{c|cccc} & o & v & s & c \\ \hline o & o & v & s & c \\ v & v & o & c & s \\ s & s & c & o & v \\ c & c & s & v & o \end{array} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{array}{c|cccc} & o & v & s & c \\ \hline o & o & v & s & c \\ v & v & o & c & s \\ s & s & c & v & o \\ c & c & s & o & v \end{array} \tag{2.2.6}$$

und entsprechen den Multiplikationsregeln der Fusions-Algebra von $SO(d)$, $\mathbb{Z}_2^2$ bzw. $\mathbb{Z}_4$. Insbesondere sind diese für gerades bzw. ungerades $d/2$ invariant unter

$$\chi_{\lambda_0}^{SO(d)} \to e^{2\pi i\lambda_0/2}\chi_{\lambda_0}^{SO(d)} \qquad \text{bzw.} \qquad \chi_{\lambda_0}^{SO(d)} \to e^{2\pi i\lambda_0/4}\chi_{\lambda_0}^{SO(d)} \tag{2.2.7}$$

Anders ausgedrückt: Alle simplen Ströme werden durch $\chi_v^{SO(d)}$ und $\chi_s^{SO(d)}$ bzw. $\chi_s^{SO(d)}$ der Ordnung 2 bzw. 4 erzeugt.

Eine modulare Invariante des Systems der freien transversalen Fermionen ist sicherlich durch die Diagonale gegeben. Allerdings koppelt der Darstellungsindex λ der $SO(d)$ Charakterfunktionen mit den Indizes der internen Theorie

$$\mathcal{Z}_0(\tau,\bar\tau) = |(Im\tau)^{-d/2}\eta(\tau)^{-2d}| \sum_{\lambda,\bar\lambda} \chi_\lambda^{SO(d)}(\tau)\ \chi_{\bar\lambda}^{SO(d)^*}(\bar\tau)\ Z_{\lambda,\bar\lambda}^{int}(\tau,\bar\tau), \tag{2.2.8}$$

wobei Z^{int} Beiträge der internen Theorie bezeichnet.

In der Gepnerschen Konstruktion besteht dieser interne Beitrag aus Tensorprodukten von N=2 super-konformen minimalen Modellen (durch $(k_1)(k_2)\dots(k_r)$ charakterisiert). Wie in (4.1) kurz erläutert, sind die Charakterfunktionen der Tensortheorie durch Produkte der Charakterfunktionen $\chi_m^{l(s)}$ der Einzeltheorien gegeben. Wir fassen die auftretenden Indizes zu zweien zusammen; zum einen $l = (l_1,\dots,l_r)$ mit $0 \le l_i \le k_i$ (dabei ist r die Anzahl der tensorierten Theorien), sowie $\lambda = (s_0; m_1,\dots,m_r; s_1,\dots,s_r)$ mit $m_i \in \mathbb{Z}_{2(k_i+2)}$ und $s_\nu \in \mathbb{Z}_4$ (dabei gibt $\lambda_0 = s_0$ den Index des $SO(d)$-Charakters an). Damit definieren wir die in (2.1.1) auftretenden $\boldsymbol{\chi}_\lambda^l$ durch (den Faktor $(Im\tau)^{d/4}$ unterschlagen wir im folgenden)

$$\boldsymbol{\chi}_\lambda^l(z,\tau) = \eta(\tau)^{-d}\ \chi_{\lambda_0}^{SO(d)} \prod_{j=1}^{r} \chi_{\lambda_j}^{l_j,\lambda_{j+r}}(z,\tau) \tag{2.2.9}$$

und können eine erste modular invariante Zustandssumme aufschreiben

$$\mathcal{Z}_1(\tau,\bar\tau) = \sum_{\lambda,\bar\lambda} \mathbf{A}_{l,\bar l}\ \boldsymbol{\chi}_\lambda^l(\tau)\ \boldsymbol{\chi}_\lambda^{\bar l\,*}(\bar\tau), \tag{2.2.10}$$

wobei $*$ komplexe Konjugation bezeichnet und

$$\mathbf{A}_{l,\bar l} = \prod_{j=1}^{r} A_{l_j,\bar l_j}$$

ein Produkt von modularen Invarianten von $SU(2)$ zu den Leveln k_j ist (vgl. Tabelle 1 in 1.4). Zur Erinnerung: Die Darstellung der modularen Transformationen auf den Charakterfunktionen (1.5.17) der N=2 super-konformen Theorie faktorisiert in l-, m- und s-Anteile. Für die anderen Indizes m und s wurde in (2.2.10) die diagonale Invariante gewählt (insbesondere keine (a,c)- oder (c,a)-Zustände).

Wir wollen hier auch das Transformationsverhalten der Charakterfunktionen $\boldsymbol{\chi}^l_\lambda$ unter modularen Transformationen angeben. Dabei treten in natürlicher Weise zwei Skalarprodukte für die Multiindizes l und λ auf (das letztere wird uns noch nützlich sein). Definiert man (beachte die Dimensionsabhängigkeit von $\bullet$)

$$\begin{aligned} l \circ l &= \sum_{j=1}^{r} \frac{l_j(l_j+2)}{2(k_j+2)}, \\ \lambda \bullet \lambda' &= \frac{d}{2}\frac{\lambda_0 \lambda'_0}{4} + \sum_{j=1}^{r} \Big(-\frac{m_j m'_j}{2(k_j+2)} + \frac{s_j s'_j}{4} \Big), \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

so gilt für *ungerades* $d/2$ (K hängt nur von den k_i's ab)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}^l_\lambda(\tau+1) &= -e^{\pi i (l\circ l + \lambda\bullet\lambda)} \boldsymbol{\chi}^l_\lambda(\tau), \\ \boldsymbol{\chi}^l_\lambda(-\frac{1}{\tau}) &= K \sum_{l',\lambda'} \mathbf{S}_{l,l'}\; e^{-2\pi i \lambda\bullet\lambda'} \boldsymbol{\chi}^{l'}_{\lambda'}(\tau), \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

wobei $\mathbf{S}_{l,l'} = \prod_i \sin(\pi \frac{(l_i+1)(l'_i+1)}{k_i+2})$ ist.

Die Wahl der diagonalen Invarianten (für den m und s Index) in (2.2.10) ist noch nicht der Weisheit letzter Schluß. In der Tat sind wir ausgezogen, eine 'phänomenologisch' relevante String-Zustandssumme zu finden; soll heißen: Wir wollen Heterosis und Raum-Zeit-Supersymmetrie. Deren (mit modularer Invarianz, vgl. Nahm (1974)) konsistente Implementierung im Rahmen der Gepnerschen Konstruktion wird uns in den folgenden Abschnitten beschäftigen. (Für einen allgemeinen Überblick in Stringkompaktifizierung durch konforme Feldtheorien verweisen wir auf Schellekens (1989).)

2.3 a Supersymmetrie

Bevor die Bedingungen für N=1 Raum-Zeit-Supersymmetrie an die interne konforme Feldtheorie angeben und aus (2.2.10) eine supersymmetrische Zustandssumme konstruieren, werden wir im ersten Teil dieses Abschnitts einige allgemeine Tatsachen über Supersymmetrie (in String-Theorien) vorstellen.

Zunächst ein Wort der Warnung: Unterscheide immer Raum-Zeit- und Weltflächen-Supersymmetrie. Der Zusammenhang zwischen beiden ist ein Hauptresultat dieses Abschnitts. Man findet: N=1 Raum-Zeit-Supersymmetrie erfordert N=2 Weltflächen-Supersymmetrie (mit globalem $U(1)$-Strom) und 'Ladungsquantisierung' (genauer: Man verlangt von allen physikalischen Operatoren ungeradzahlige U(1)-Ladung im Sinne von (2.3.13)).

Zweite Warnung: Unterscheide N=2 Weltflächen-Supersymmetrie mit globalem und lokalem U(1)-Strom.

Bevor wir uns der letzten Warnung annehmen, definieren wir zunächst *Supersymmetrie* (vgl. z.B. Sohnius (1985)): Nach einem Theorem von Coleman-Mandula gibt es (bis auf konforme Symmetrie) keine bosonischen (nicht-internen) Erweiterungen der Poincaré Algebra für $D \geq 3$. Ein Ausweg (bisher der einzige) aus dieser Sackgasse ist (N-fach erweiterte) Supersymmetrie. Die wesentlichen Kommutatoren sind ($i, j = 1, \ldots$N) (hier ohne zentrale Ladungen)

$$\{Q^i_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta j}\} = 2\sigma^\mu_{\ \alpha\dot\beta}\ \delta^i_{\ j}\ P_\mu \tag{2.3.1}$$

und

$$\{Q^i_\alpha, Q^j_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot\alpha i}, \bar{Q}_{\dot\beta j}\} = 0,$$

wobei in vier Dimensionen $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec\sigma)$ und $\vec\sigma = (\sigma^i)$ die Pauli-Matrizen sind. (Dann transformieren sich Q und $\bar{Q}$ in der $(\frac{1}{2}, 0)$ bzw. $(0, \frac{1}{2})$ Darstellung der Lorentz-Algebra und $\bar{Q}^i_{\dot\alpha} = (Q_{\alpha i})^\dagger$.)

In zwei Dimensionen ist die Supersymmetrie-Algebra gleich der Algebra der Null-Moden der super-konformen Algebra im Ramond-Sektor ($^-$bezeichne hier antiholomorphe Felder)

$$\begin{aligned}\{G_0^i, G_0^j\} &= 2L_0\delta^{ij} \\ \{\bar{G}_0^i, \bar{G}_0^j\} &= 2\bar{L}_0\delta^{ij} \\ \{G_0^i, \bar{G}_0^j\} &= 0.\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Für G_0^i, $i = 1, \dots p$ und $\bar{G}_0^j$, $j = 1, \dots q$ spricht man (vgl. Hull, Witten (1985)) von (p, q)-Supersymmetrie.

Nun wenden wir uns den unterschiedlichen *N=2 Weltflächen-Supersymmetrien* und damit der zweiten Warnung zu. Wir betrachten als erstes N=2 Weltflächen-Supersymmetrie mit einem lokalen $U(1)$-Strom:

Im diesem Fall (vgl. GSW, chapter 4.5.1) ist mit der $U(1)$-Symmetrie ein Eichfeld verknüpft und physikalische Zustände haben verschwindende $U(1)$-Ladung (man spricht von '$U(1)$ confinement'). Beide Supersymmetrien sind im modernen kovarianten Ansatz mit je zwei super-konformen Geist-Feldern β, γ verknüpft. Insbesondere ist die kritische Dimension des N=2 (lokalen) Superstrings $D = 2$ ($c^{crit} = 0 = -26 + 2 \cdot 11 + D \cdot (1 + {}^1\!/_2 + 1)$).

Anders ist dies bei N=2 Supersymmetrie mit globalem $U(1)$-Strom. Banks, Dixon, Friedan und Martinec (1988) sagen: Nur eine der beiden Superladungen geht auf eine lokale Symmetrie der Stringtheorie zurück und ist mit zwei Geist-Feldern β, γ verknüpft. Die andere ist nur eine *'zufällige'* globale Symmetrie eines speziellen String-Vakuums. Der $U(1)$-Strom, der beide ineinander überführt ($G \to G'$), ist kein physikalischer Operator, d.h. er vertauscht nicht mit der BRST-Ladung, d.h. er bildet physikalische nicht wieder in physikalische Zustände ab. Wir sollten bemerken, daß obiger 'Zufall' der Existenz einer zweiten Superladung schon der halbe Weg zur N=1 Raum-Zeit-Supersymmetrie ist; er beinhaltet im wesentlichen Bedingungen an die Geometrie des Raumes auf dem das zur String-Theorie gehörige σ-Model 'lebt'.

Wir betrachten als Beispiel für das Auftreten weiterer Supersymmetrien ein System von zwei freien (reellen) Bosonen und Fermionen (NS-R-String für Dimension 2, vgl. GSW (1987), chapter 4.1-3)

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \{\partial_\alpha X^a \partial^\alpha X_a - i\bar{\psi}^a \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_a\} \tag{2.3.3}$$

mit $a = 1, 2$. Die Wirkung ist invariant unter der infinitesimalen Transformation

$$\begin{aligned} \delta X^a &= \bar{\epsilon}\psi^a, \\ \delta\psi^a &= -i\rho^\alpha \partial_\alpha X^a \ \epsilon, \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

wobei ϵ ein konstanter antivertauschender Spinor ist. (Diese globale Supersymmetrie kann durch Verallgemeinerung von (2.3.3) lokal gemacht werden (vgl. GSW, chapter 4.3.5).) Wir beschränken uns ohne Einschränkung auf den holomorphen Anteil: Dann erfüllen die Moden des Energie-Impuls-Tensors und des zu (2.3.4) gehörenden Noether-Stroms die N=1 super-konforme Algebra.

Faßt man nun beide X und ψ jeweils zu komplexen Feldern zusammen (vgl. Lüst, Theisen (1989), chapter 12)

$$\begin{aligned} X^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X^1 \pm iX^2), \\ \psi^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^1 \pm i\psi^2), \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

so erfüllen (alle Produkte implizit normalgeordnet)

$$\begin{aligned} J(z) &= \psi^-\psi^+(z), \\ G^\pm(z) &= i\sqrt{2}\psi^\mp \partial X^\pm(z), \\ T(z) &= -\partial X^+ \partial X^-(z) - \frac{1}{2}(\partial\psi^+\psi^- + \partial\psi^-\psi^+)(z) \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

die N=2 super-konforme Algebra mit zentraler Ladung $c = 3$. Auch hier (wie in 1.5) geben wir 'nur' die Charakterfunktionen der Unter-Algebra $\mathbb{R}^2 \times U(1)_2$ bestehend aus J, T und $G^\pm$ in geradzahligen Potenzen (was man daran abliest, daß der $G^\pm$ entsprechende Zustand nicht im Vakuumcharakter ist). Sie sind durch $\eta^{-2}\chi_{\lambda_0}^{SO(2)} = \eta^{-3}\Theta_{\lambda_0,2}$ gegeben. Die Vertex-Operatoren $V^2_{\pm 2}$ (vgl. 1.1) entsprechen den freien Fermionen $e^{\pm i\phi} = \psi^\pm$, die multipliziert mit dem abelschen $\mathbb{R}$-Strom $i\partial X^\mp$ die Supergeneratoren $G^\pm$ ergeben; die Vertex-Operatoren $V^2_{\pm 1}$ tragen die konforme Dimension ${}^1\!/_8$ und Ladung $\pm{}^1\!/_2$ und sind mit den Spin- (oder Twist-)Feldern des Systems der beiden freien Fermionen ($\sigma \otimes \sigma$, vgl. (1.2.5)) identisch; auch stimmen sie gerade mit dem Operator des spektralen Flusses ($c = 3$) $\mathcal{U}_{-1/2} = V^2_{-1}$ (bzw. dessen Inversem) überein. Man hat weiterhin die Fusions-Algebra

(2.2.6), die Twists (2.2.7), den chiralen Ring $\mathcal{R} = \{\mathbb{1}, \psi^-_{NS}\}$ mit charakteristischem Polynom $P(t) = 1 + t$ und die Ramond-Grundzustände $\psi^{\pm}_0|0\rangle$. Insbesondere erkennen wir, daß (2.2.7) als Tensorprodukt von ausschließlich N=2 super-konformen Modellen aufgefaßt werden kann.

Dieses Beispiel läßt sich verallgemeinern: $2k$ freie Super-Felder werden zu k komplexen zusammengefaßt und ergeben eine N=2 super-konforme Algebra mit $c = 3k$.

Der 'Zufall' in diesem Beispiel, der die zweite Supersymmetrie ermöglicht, ist, daß die Dimension (d.h. Anzahl der freien Felder) gerade und der Raum flach ist; allgemeiner (vgl. Hull, Witten (1985)) muß man verlangen, daß die Hintergrundmannigfaltigkeit eine Kähler-Mannigfaltigkeit ist.

Jetzt wenden wir uns dem oben genannten Zusammenhang zwischen N=1 Raum-Zeit-Supersymmetrie und N=2 Weltflächen-Supersymmetrie mit globalem $U(1)$-Strom und Ladungsquantisierung zu. Wir skizzieren die Darstellung in Banks et al. (1988) bzw. Dixon (1987) (vgl. auch Lüst, Theisen (1989), chapter 14.3) und beschränken uns der Einfachheit halber auf $D = 4$ Raum-Zeit Dimensionen. Auch gehen wir von der Licht-Kegel Eichung zum kovarianten Formalismus über: Betrachte dazu eine heterotische String-Theorie im (vier-dimensionalen) Minkowski-Raum mit holomorphen Super-Feldern (X^a, ψ^a), $a = 1, 2, 3, 4$ (die restliche zentrale Ladungen sei durch eine interne Theorie mit N=1 super-konformer Invarianz ausgefüllt, vgl. 2.2). Dann sind (nach Friedan, Martinec und Shenker (1986)) die N=1 Raum-Zeit-Superladungen im $(q = -\frac{1}{2})$-Bild durch

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \oint dz V^\alpha_{-1/2}(z), \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}} &= \oint dz V^{\dot{\alpha}}_{-1/2}(z) \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

gegeben. V^α und $V^{\dot{\alpha}}$ sind im wesentlichen die Spinor-Komponenten des *Gravitino-Vertex-Operators* bei Impuls Null

$$V^\alpha_{-1/2}(z) = e^{-\phi_g/2} S_\alpha \Sigma(z), \qquad V^{\dot{\alpha}}_{-1/2}(z) = e^{-\phi_g/2} S_{\dot{\alpha}} \Sigma^\dagger(z), \tag{2.3.8}$$

wobei $e^{-\phi_g/2}$ das Spin-Feld des super-konformen Geist-Systems, S_α und $S_{\dot{\alpha}}$ die Spin-Felder des freien Weltflächen-Fermions ψ^a und Σ bzw. $\Sigma^\dagger$ Felder im Ramond-Sektor der internen N=1 super-konformen Theorie bezeichnen. Die Spin-Felder S werden üblicherweise bosonisiert, d.h. man stellt sie dar als Exponentiale zweier freier Bosonen H^j ($j=1,2$): $S_\alpha = c_\alpha e^{i\alpha\cdot H}$, $S_{\dot\alpha} = c_{\dot\alpha} e^{i\dot\alpha\cdot H}$, wobei $\alpha \in M^{SO(4)}+[s]$ und $\dot\alpha \in M^{SO(4)}+[c]$ mit $\alpha^2 = \dot\alpha^2 = {}^1/_2$ (Frenkel-Kac-Segal Konstruktion für $SO(4)$). Die Kozykel-Faktoren c_α und $c_{\dot\alpha}$ (vgl. z.B. Lüst, Theisen (1989), chapter 11) werden wir im folgenden weglassen. Die konforme Dimension von $e^{q\phi_g}$ ist ${}^{-q(q+2)}/_2$ (hier also ${}^3/_8$) und die der S_α, $S_{\dot\alpha}$ ist ${}^1/_4$ (allgemein ${}^{(d+2)}/_{16}$). Da nun die Vertexoperatoren von konformer Dimension 1 sind, müssen Σ und $\Sigma^\dagger$ die konforme Dimension ${}^3/_8$ (${}^{(8-d)}/_{16}$) tragen.

Setzt man nun (2.3.7) und die bosonische Realisierung der Spin-Felder in die Relationen (2.3.1) der Supersymmetrie-Algebra ein, so erhält man die OPE von Σ und $\Sigma^\dagger$. Diese ermöglichen, die Vier-Punkt-Funktion $<\Sigma(z_1)\Sigma^\dagger(z_2)\Sigma(z_3)\Sigma^\dagger(z_2)>$ zu entwickeln und auf die Existenz eines Feldes der konformen Dimension 1 in der OPE von $\Sigma\ \Sigma^\dagger$ zu schließen. Dieses Feld kann (geeignet normalisiert) mit dem $U(1)$-Strom J_{int} einer N=2 super-konformen Algebra identifiziert werden. Man findet dann, daß Σ nichts anderes ist als $e^{i\sqrt{3}\phi_{int}/2}$ ($\Sigma^\dagger = e^{-i\sqrt{3}\phi_{int}/2} = e^{-i\sqrt{(8-d)/2}\ \phi_{int}/2}$), wobei ϕ_{int} ein freies Boson mit $J_{int}(z) = i\sqrt{c_{int}/3}\ \partial\phi_{int}(z)$ ist ($c_{int} = 9 = 12 - {}^{3d}/_2$). Aus der BRST-Invarianz des Gravitino-Vertex-Operators kann man schließlich auf die OPE von G^{int}, des internen Teils des Superstroms, mit Σ und $\Sigma^\dagger$ schließen und folgern, daß sich $G = G^{int} + i\psi^a\partial X^a$, der (Gesamt-)Superstrom der N=1 super-konformen Algebra, als Summe zweier Operatoren $G^\pm$ der Ladung ± 1 schreiben läßt, die in der Tat die N=2 super-konforme Algebra (1.5.1) erfüllen.

Wir betrachten nun einen Vertex-Operator der $U(1)$-Ladung Q, bei dem wir den ladungtragenden Anteil explizit ausgeschrieben haben

$$V(z) = e^{i\vec{\mu}\cdot\vec{H}}\ e^{q\phi_g}\ e^{iQ\phi_{int}\sqrt{3/c_{int}}}\tilde{V}_{int}(z) \tag{2.3.9}$$

($\tilde{V}_{int}$ ist unabhängig von ϕ_{int}, vertauscht also mit J_{int}). Damit dieser *lokal* zu den Gravitino-Vertex-Operatoren (2.3.8) ist (und damit die Streuamplituden lokal unter N=1 Raum-Zeit-Supersymmetrie sind), muß gelten

$$({}^1/_2, \pm{}^1/_2)\cdot\vec{\mu} + \frac{q}{2} \pm \frac{Q}{2} \in \mathbb{Z} \tag{2.3.10}$$

(man überprüft leicht, daß diese Lokalitätsbedingung von der Wahl in α und $\dot{\alpha}$ nicht abhängt). Im *kanonischen* (nur dann sind die Vertex-Operatoren super-primäre Felder) *Geist-Bild*, d.h. $q = -1$ $(-{}^1\!/_2)$ im NS(R)-Sektor, folgt für die durch o, v, s, c (Skalar, Vektor, Spinor, Antispinor) bezeichneten Konjugationsklassen von $D_{2,1}$ $((0,0;-1)$, $(1,0;-1)$, $({}^1\!/_2, {}^1\!/_2; -{}^1\!/_2)$, $(-{}^1\!/_2, {}^1\!/_2; -{}^1\!/_2)$ mod $M)$, daß nur folgende Ladungen Q erlaubt sind

$$(NS) \quad o:\ 2\mathbb{Z}+1, \qquad v:\ 2\mathbb{Z}, \qquad (R) \quad s:\ 2\mathbb{Z}-{}^1\!/_2, \qquad c:\ 2\mathbb{Z}+{}^1\!/_2. \quad (2.3.11)$$

Dabei bezeichnet $D_{2,1}$ das Lorentzsche 'Lie-Algebra'-Gitter $D_2 \times D_1$ in $\mathbb{R}^{2,1}$ (dies taucht in natürlicher Weise im Operatorprodukt zweier allgemeiner Vertex-Operatoren (2.3.9) als Exponent des Abstandes in höchster Ordnung auf).

Damit haben wir folgendes Ergebnis (wir wiederholen es nochmals, es doch soo wichtig ist): Um N=1 Raum-Zeit-Supersymmetrie sicherzustellen, genügt es, bei gegebener N=2 Weltflächen-Superalgebra für das Gesamtsystem (im Fall der Gepner Modelle, ein Tensorprodukt verschiedener Theorien) Ladungsquantisierung im Sinne von (2.3.11) zu prüfen oder durch Projektion zu erzwingen. (Wir sollten bemerken, daß wir dabei die Existenz des Operators Σ und damit (da nach (2.3.11) nur halbzahlige Ladungen auftreten) die Erweiterung der $U(1)$-Algebra auf $U(1)_{2c/3}$ (also $U(1)_6$ für $c = 9$) voraussetzen, vgl. 1.1 wegen der Definition und 1.5 wegen der Normierung (da sich die Diskussion nur für gerades d anwenden läßt, ist insbesondere c ein Vielfaches von 3 und damit der Level ganzzahlig). Dies ist keine Einschränkung für den Fall der Tensorprodukte von N=2 super-minimalen Modellen, da wir Σ explizit konstruieren können (vgl. Ende von 2.3b).)

2.3 b Raum-Zeit-Supersymmetrie in Gepner-Modellen

Wie oben bemerkt, ist in der durch (2.2.10) beschriebenen Theorie N=2 Weltflächen-Supersymmetrie realisiert. Ladungsquantisierung muß jedoch erst noch durch eine Orbifold-ähnliche Konstruktion sichergestellt werden.

Dazu ist es zunächst zweckmäßig, die Lokalitätsbedingung (2.3.11) in Licht-Kegel-Eichung umzuschreiben: Bezeichne $\lambda_0 \in \{o, v, s, c\} \simeq \{0, 2, 1, 3\}$ eine Konjugationsklasse von D_1 eines physikalischen Zustands (dazu zerlegt man $D_{2,1} = D_1 \times D_{1,1}$ und fixiert für physikalische Zustände den $D_{1,1}$-Anteil der longitudinalen und Geist Freiheitsgrade auf $(0; -1)$ im NS und $({}^1\!/_2; {}^{-1}\!/_2)$ im R-Sektor, vgl. Lüst, Theisen (1989), chapter 13.3; damit wird die Freiheit, die man durch Bild-Wechsel hat, aufgehoben und ein Vertreter aus der Klasse der physikalischen Zustände ausgewählt), dann sind nach (2.3.11) für den internen Anteil des Vertex-Operators nur Ladungen

$$Q \;\in\; 2\mathbb{Z} + \frac{\lambda_0 - 2}{2} \tag{2.3.12}$$

erlaubt. Nun beträgt nach (1.5.24) die Ladung des N=2 super-primären Feldes $\psi_m^{l,s}$ gerade

$$Q_m^{l,s} = \frac{m}{k+2} - \frac{s}{2} \bmod 2.$$

Weiterhin ist die (interne) Gesamtladung Q einfach durch die Summe der $Q_m^{l,s}$ gegeben, da sich das freie Boson ϕ_{int} aus der bosonischen Realisierung der Summe der $U(1)$-Ströme der Einzeltheorien ($J_{int}(z) = \sum_{i=1}^r J_i(z)$) ergibt. Mit Hilfe des in (2.2.11) eingeführten Skalarprodukts läßt sich dann die Bedingung der Ladungsquantisierung (2.3.12) für den Zustand zum Charakter $\boldsymbol{\chi}_\lambda^l$ schreiben als

$$2\beta_0 \bullet \lambda \;\in\; 2\mathbb{Z} + 1, \tag{2.3.13}$$

wobei

$$\beta_0 = (1; \overbrace{1, \ldots 1}^{r}; \overbrace{1, \ldots 1}^{r})$$

ist. In der Tat ist $2\beta_0 \bullet \lambda$ Eigenwert von Φ_λ^l, dem primären Feld der Tensortheorie zum Charakter $\boldsymbol{\chi}_\lambda^l$, unter $J = J_{int} + J_{RZ}$ (zurück in Licht-Kegel-Eichung ist (2.3.6) $J_{RZ} = \psi^- \psi^+$) und wird daher als *Ladung* bezeichnet. Insbesondere gilt

$$\beta_0 \bullet \beta_0 = \frac{1}{4} \cdot \frac{d}{2} + \sum_{j=1}^{r} \left(-\frac{1}{2(k_j+2)} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{12} \left(\frac{3}{2} d + c^{int} \right) = 1 \tag{2.3.14}$$

(daher kann man (2.3.13) auch als $\beta_0 \bullet (2\lambda + \beta_0) \in 2\mathbb{Z}$ schreiben).

Wir werden nun gleich eine *Orbifold-Konstruktion* beschreiben, die auf Zustände mit ganzzahliger Ladung $Q(\lambda) := 2\beta_0 \bullet \lambda$ projiziert (vgl. Gepner, Qui (1987), Gepner (1988), Klemm (1990)). Weiter (d.h. zu der für Raum-Zeit-Supersymmetrie nötigen Ladungsquantisierung (Projektion auf ungeradzahlige Ladungen)) kommt man jedoch mit einer *'echten'* Orbifold-Konstruktion nicht (und damit auch nicht durch die Methode der simplen Ströme). Jedoch kann die von Gepner (1988) konstruierte supersymmetrische Zustandssumme (oder fermionische Invariante) als Orbifold-*ähnliche* Konstruktion verstanden werden; dabei wird eine Gruppe 'ausgemottet', die größer als die Symmetriegruppe der Theorie ist. Diese verallgemeinerte GSO-Projektion 'zerstört' die Fusions-Algebra im Sinne, daß die Operator-Algebra der im Spektrum enthaltenen 'Teilchen' nicht mehr schließt (klar: wir projizieren auf ungerade Ladungen, aber ungerade 'mal' ungerade ergibt (Ladungen in der Fusion additiv) gerade und ist damit nicht mehr in der Theorie). Nur: Diese Konstruktion ergibt eine modular invariante Zustandssumme, die die in 2.3a aufgestellten Kriterien für Raum-Zeit-Supersymmetrie erfüllt.

Zunächst die Orbifold-Konstruktion (vgl. 4.3), die in ähnlicher Form auch noch in 2.5 angewendet werden wird: Mit (1.5.22) und (2.2.7) sieht man leicht ein, daß die Fusions-Algebra der in (2.2.10) beschriebenen Theorie invariant unter

$$\Phi^l_\lambda \to e^{-2\pi i n \beta_0 \bullet \lambda} \Phi^l_\lambda \;, \qquad n \in \mathbb{Z} \bmod |G| \tag{2.3.15}$$

ist, wobei

$$|G| := \mathrm{kgV}(k_j + 2, 4)$$

und Φ^l_λ das primäre Feld der Tensortheorie zum Charakter $\boldsymbol{\chi}^l_\lambda$ bezeichnet. Wir wollen nun zunächst die diskrete Symmetriegruppe (2.3.15) mit $n =: 2a \in 2\mathbb{Z}$ ausmotten. Dazu betrachten wir die Partitions-Funktionen (4.3.12) des a-fach verdrehten Sektors

$$Z(a,0) = \sum_{l,\bar{l},\lambda} \mathbf{A}_{l,\bar{l}} e^{-2\pi i 2a\beta_0 \bullet \lambda} \boldsymbol{\chi}^l_\lambda \boldsymbol{\chi}^{\bar{l}\,*}_\lambda . \tag{2.3.16}$$

Da die Summe über a verschiedene $a$te Einheitswurzeln verschwindet, ergibt die Summe über alle möglichen Randbedingungen a in Zeit-Richtung das $|G|$-fache des invarianten

Sektors, genau dann wenn $2\beta_0 \bullet \lambda \in \mathbb{Z}$ ist und verschwindet sonst (es wird also auf ganzzahlige Ladungen projiziert). Wir werden nun nachrechnen, daß

$$Z(a,b) = \sum_{l,\bar{l},\lambda} \mathbf{A}_{l,\bar{l}}\; e^{-2\pi i 2a\beta_0 \bullet (\lambda + b\beta_0)}\; \boldsymbol{\chi}^l_\lambda\; \boldsymbol{\chi}^{\bar{l}}_{\lambda+2b\beta_0}{}^*. \tag{2.3.17}$$

das richtige modulare Transformationsverhalten (4.3.8) hat (außerdem sieht man leicht, daß Z von a und b nur mod $|G|$ abhängt) und daher (da auch (2.3.16) erfüllt ist) die eindeutige Partitions-Funktion ist (beachte, daß es bei einer einzelnen abelschen Gruppe keine nicht-triviale diskrete Torsion gibt): Für Invarianz unter $T : \tau \to \tau + 1$ nutzt man einfach, nach Einsetzen von (2.2.12), $\beta_0 \bullet \beta_0 = 1$ ($\in \mathbb{Z}$ ist hinreichend) aus. Unter $S : \tau \to -\frac{1}{\tau}$ erhält man mit (2.2.12)

$$Z(a,b)\Big|_S = K^2 \sum_{l,\bar{l},\lambda,\lambda',\bar{\lambda}'} \mathbf{A}_{l,\bar{l}}\; e^{2\pi i \lambda \bullet (\bar{\lambda}' - \lambda' - 2a\beta_0)}\; e^{2\pi i b\beta_0 \bullet 2\bar{\lambda}'}\; \boldsymbol{\chi}^l_{\lambda'}\; \boldsymbol{\chi}^{\bar{l}}_{\bar{\lambda}'}{}^*. \tag{2.3.18}$$

Dann ergibt die Summation über die λ's, daß sich λ' und $\bar{\lambda}'$ nur um $2a\beta_0$ unterscheiden können und damit das gewünschte Ergebnis $Z(-b,a)$.

Man erhält als modular invariante Zustandssumme die sogenannte *bosonische Invariante* mit ausschließlich (wegen der Summe über a) ganzzahligen Ladungen

$$\mathcal{Z}^{2\beta_0} = \frac{1}{|G|} \sum_{a,b \in \{1,\ldots|G|\}} Z(a,b) \tag{2.3.19}$$

oder ausgeschrieben

$$\mathcal{Z}^{2\beta_0} = \sum_{\substack{l,\bar{l},\lambda \\ b \in \{1,2\ldots|G|\} \\ 2\beta_0 \bullet \lambda \in \mathbb{Z}}} \mathbf{A}_{l,\bar{l}}\; \boldsymbol{\chi}^l_\lambda\; \boldsymbol{\chi}^{\bar{l}}_{\lambda+2b\beta_0}{}^*. \tag{2.3.20}$$

Wir wollen nun die von Gepner (1988) durch verallgemeinerte GSO-Projektion konstruierte fermionische Invariante in einer Orbifold-ähnlichen Form vorstellen. Ersetzt man dazu die im Formalismus der *β-Methode* auftretenden δ-Funktionen durch Summen, so erhält man

$$Z^f(a,b) = \sum_{l,\bar{l},\lambda} \mathbf{A}_{l,\bar{l}}\; (-)^{\beta_0^2 b}\; e^{-2\pi i a\beta_0 \bullet (\lambda + \frac{1}{2}\beta_0)}\; \boldsymbol{\chi}^l_\lambda\; \boldsymbol{\chi}^{\bar{l}}_{\lambda+b\beta_0}{}^*. \tag{2.3.21}$$

Wiederum kann man direkt überprüfen, daß diese Partitions-Funktionen das richtige Transformationsverhalten (4.3.8) unter modularen Transformationen haben. Insbesondere folgt sofort aus der Summation über a, daß nur ungerade Ladungen auftreten (wie es sein soll).

Nun ist es auch recht interessant, die Spezialisierung $Z^f(a,0)$ zu betrachten

$$Z^f(a,0) = \sum_{l,\bar{l},\lambda} \mathbf{A}_{l,\bar{l}}\, e^{-2\pi i a\beta_0 \bullet (\lambda+\frac{1}{2}\beta_0)} \boldsymbol{\chi}^l_\lambda \boldsymbol{\chi}^{\bar{l}\,*}_\lambda . \tag{2.3.22}$$

Man liest (vgl. (2.3.16)) ab, daß die 'ausgemottete Symmetrie'

$$\Phi^l_\lambda \to (-)^a\ e^{-2\pi i a\beta_0\bullet\lambda} \Phi^l_\lambda \tag{2.3.23}$$

für ungerades a, d.h. genau dann, wenn das Vorzeichen greift, gar keine Symmetrie der Fusions-Algebra ist (das Vorzeichen ist unabhängig vom Feld und läßt daher nur OPEs vom Typ $\psi\varphi = 0$ invariant) – daher ist dies keine Orbifold-Konstruktion im üblichen Sinn. Es ist überraschend und irgendwie unerwartet, jedoch daher umso bemerkenswerter, daß die aus den Partitions-Funktionen (2.3.21) konstruierte Zustandssumme, die sogenannte *fermionische Invariante*

$$\mathcal{Z}^{susy} := \mathcal{Z}^{-\beta_0} = \frac{1}{2|G|}\sum_{a,b} Z^f(a,b) = \sum_{\substack{l,\bar{l},\lambda \\ b\in\{1,\ldots|G|\} \\ 2\beta_0\bullet\lambda\in 2\mathbb{Z}+1}} (-)^b\ \mathbf{A}_{l,\bar{l}}\ \boldsymbol{\chi}^l_\lambda \boldsymbol{\chi}^{\bar{l}}_{\lambda+b\beta_0}{}^*, \tag{2.3.24}$$

tatsächlich modular invariant ist.

Ganz so überraschend ist es dann doch nicht: Wendet man die Orbifold-Methode auf die volle Symmetrie (2.3.15) (also (2.3.23) ohne Vorzeichen) an, so erhält man mit

$$Z'(a,b) = \sum_{l,\bar{l},\lambda}\ \mathbf{A}_{l,\bar{l}}\ e^{-2\pi i a\beta_0\bullet(\lambda+\frac{b}{2}\beta_0)}\ \boldsymbol{\chi}^l_\lambda\ \boldsymbol{\chi}^{\bar{l}}_{\lambda+b\beta_0}{}^*$$

die modular invariante Zustandssumme

$$\mathcal{Z}^{\beta_0} = \sum_{\substack{l,\bar{l},\lambda \\ b\in\{1,\ldots|G|\} \\ 2\beta_0\bullet\lambda\in 2\mathbb{Z}}} \mathbf{A}_{l,\bar{l}}\ \boldsymbol{\chi}^l_\lambda \boldsymbol{\chi}^{\bar{l}}_{\lambda+2b\beta_0}{}^* + \sum_{\substack{l,\bar{l},\lambda \\ b\in\{1,\ldots|G|\} \\ 2\beta_0\bullet\lambda\in 2\mathbb{Z}+1}} \mathbf{A}_{l,\bar{l}}\ \boldsymbol{\chi}^l_\lambda \boldsymbol{\chi}^{\bar{l}}_{\lambda+(2b+1)\beta_0}{}^*$$

einer tadellosen konformen Feldtheorie. Man überprüft nun leicht, daß die fermionische Invariante nichts anderes als die Differenz der bosonischen und der eben konstruierten Invarianten ist $\mathcal{Z}^{-\beta_0} = \mathcal{Z}^{susy} = \mathcal{Z}^{2\beta_0} - \mathcal{Z}^{\beta_0}$. Die Gepnersche Zustandssumme (ohne Heterosis) kann also als Differenz zweier Zustandssummen konformer Feldtheorien aufgefaßt werden (eine von Standpunkt der konformen Feldtheorie ungewohnte Konstruktion). Überraschend bleibt, daß die Symmetriealgebra der fermionischen Invarianten genau um den Strom $\Phi^0_{\beta_0}$ größer ist als die der beiden bosonischen 'Teile' ist. In der Tat führt dies mit Heterosis auf die Erweiterung der Eichgruppe (2.7).

In 2.6 werden wir einen weiteren (neben der für N=1 Raum-Zeit-Supersymmtrie notwendigen Projektion auf ungerade Ladungen) Grund für das vom Standpunkt der konformen Feldtheorie ungewohnte Vorzeichen in (2.3.23) angeben können.

Schließlich wollen wir noch die Gravitino Vertex-Operatoren $V^{\alpha}_{-1/2}$ und $V^{\dot\alpha}_{-1/2}$ in unserer konformen Feldtheorie identifizieren. Der interne Teil $\Sigma^\dagger = e^{-i\sqrt{3}\phi_{int}/2}$ ist, wie man leicht sieht, nichts anderes als das Produkt der Operatoren des spektralen Flußes, $\otimes_{i=1,\dots r}\, \mathcal{U}^{(i)}_{-1/2}$.

Im Raum-Zeit Anteil müssen wir vom kovarianten Operator (2.3.8) ('schöne' OPE) zu einem in Licht-Kegel-Eichung (der nur physikalischen Zustände, die in der Zustandssumme erfaßt werden, enthält) übergehen. Dazu zerlegen wir (vgl. die Argumentation vor (2.3.12)) $D_{2,1}$ in $D_1 \times D_{1,1}$ und fixieren den $D_{1,1}$-Anteil auf $(^1/_2; {}^{-1}/_2)$. Vom $SO(4)$-Spin-Feld bleibt dann nichts anderes als das bosonisierte Spin-Feld des Systems zweier freier Fermionen $S_\alpha \to e^{iH^1/2}$ (H^1 freies Boson, vgl. (2.3.6)) und entsprechend $S_{\dot\alpha} \to e^{-iH^1/2}$. Das Letztere ist jedoch gerade der Operator des spektralen Flusses der $c = 3$ transversalen Raum-Zeit-Theorie (S_α sein Inverses).

Insgesamt erhalten wir also $V^{\dot\alpha}_{-1/2} \to \Phi^0_{\beta_0} = \otimes_{\nu=0,\dots r}\, \mathcal{U}^{(\nu)}_{-1/2}$ und $V^{\alpha}_{-1/2} \to \Phi^0_{-\beta_0} = \otimes_{\nu=0,\dots r}\, \mathcal{U}^{(\nu)}_{1/2}$.

2.4 Heterosis

Der heterotische String besteht aus der modular invarianten Kombination einer fermionischen, d.h. mindestens N=1 super-konformen Feldtheorie auf der holomorphen und einer bosonischen konformen Feldtheorie auf der antiholomorphen Seite. Der fermionische String erlaubt Raum-Zeit-Supersymmetrie, während der bosonische String wegen seiner größeren kritischen zentralen Ladung ausreichend Platz für interessante ('realistische') Eichgruppen bietet. Heterosis wird durch einen Trick (vgl. Gepner (1988), sowie Literaturangaben in Lerche, Schellekens und Warner (1989)), manchmal 'bosonic string map' genannt, erreicht, der darauf beruht, daß die Charakterfunktionen von $SO(d)$ und eine Permutation der von $E_8 \times SO(d+8)$ bzw. $SO(d+24)$ in ihrem Verhalten unter modularen Transformationen übereinstimmen.

Wir werden uns auf den ersten Fall konzentrieren und geben zunächst das modulare Transformationsverhalten des Charakters von $E_{8,1}$ (es gibt nur eine Darstellung)

$$\begin{aligned} \chi^{E_8}_{k=1}(\tau+1) &= e^{-2\pi i/3}\chi^{E_8}_{k=1}(\tau), \\ \chi^{E_8}_{k=1}(-\frac{1}{\tau}) &= \chi^{E_8}_{k=1}(\tau). \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Definieren wir nun analog zu (2.2.9) die Charakterfunktionen

$$\tilde{\boldsymbol{\chi}}^{l}_{\lambda}(z,\tau) = \eta(\tau)^{-d}\ \chi^{E_8\times SO(d+8)}_{\lambda_0}\ \prod_{j=1}^{r}\ \chi^{l_j,\lambda_{j+r}}_{\lambda_j}(z,\tau), \tag{2.4.2}$$

so haben diese (für $z=0$) dasselbe Transformationsverhalten wie ihre nahen Verwandten (2.2.9), wenn man nur die Vektor- und Singlett-Darstellung von $SO(d+8)$ vertauscht und (nach Gepner (1988)) das Vorzeichen vor den Spinor-Darstellungen wechselt. Zieht man jedoch noch die Ladung (im Charakter zu z konjugiert) in Betracht, so scheint ein Vertauschen auch der beiden Spinordarstellungen geboten (dann werden alle Darstellungen um eine Ladungseinheit verändert). Mit Hilfe der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4.3}$$

erhält man dann folgende modular invariante Zustandssumme

$$
\begin{aligned}
Z^{RZ} &= \chi_a^{SO(d)}\ M_{a,b}\ \chi_b^{E_8\times SO(d+8)^*} \\
&= \chi_o^{SO(d)}\chi_v^{E_8\times SO(d+8)^*} + \chi_v^{SO(d)}\chi_o^{E_8\times SO(d+8)^*} \\
&\quad - \chi_s^{SO(d)}\chi_c^{E_8\times SO(d+8)^*} - \chi_c^{SO(d)}\chi_s^{E_8\times SO(d+8)^*}.
\end{aligned}
\tag{2.4.4}
$$

Definieren wir schließlich ($\lambda := (\lambda_0, \lambda_i)$)

$$
\bar{\boldsymbol{\chi}}_\lambda^l(z,\tau) := M_{\lambda_0,\lambda_0'}\tilde{\boldsymbol{\chi}}_{\lambda'}^l, \tag{2.4.5}
$$

so erhalten wir aus (2.3.24) eine supersymmetrische heterotische Zustandssumme, wenn wir im anitholomorphen Anteil $\boldsymbol{\chi}$ durch $\bar{\boldsymbol{\chi}}$ ersetzen

$$
\mathcal{Z}^{het} = \sum (-)^b \mathbf{A}_{l,\bar{l}}\boldsymbol{\chi}_\lambda^l \bar{\boldsymbol{\chi}}_{\lambda+b\beta_0}^{\bar{l}}{}^*. \tag{2.4.6}
$$

Man beachte, daß (2.4.4) und damit (2.4.6) keinen Vakuum$\otimes$Vakuum-Zustand mehr enthält, wie man es von der Zustandssumme einer konformen Feldtheorie verlangen würde.

2.5 Vermeidung der R-NS Kopplung

Um von der in (2.4.6) angegebenen Zustandssumme auf (2.1.1) zu kommen, müssen wir noch eine weitere Zwangsbedingung durchsetzen: Beim Tensorieren der superkonformen Theorien darf man nur R- mit R- und nur NS- mit NS-Zuständen tensorieren (dies bezieht sich natürlich nicht auf das 'Tensorprodukt' des holomorphen mit dem antiholomorphen Sektor, da die verschiedenen Spin-Strukturen durch modulare Transformationen verknüpft sind und daher notwendig alle auftreten).

Man folgert dies im Fall des NS-R-Strings aus der 'konsistenten Kopplung des Weltflächen-Gravitinos' (vgl. Mueller, Witten (1986)).

Allgemeiner wird in Lerche, Nilsson, Schellekens (1987) (im Rahmen des 'covariant lattice approach') argumentiert: Der Operator P_{+1}, der zwischen den verschiedenen Vakua des super-konformen Geist-Systems (auch 'Bilder' genannt und eigentlich Sektoren verschiedener Geist-Ladung) wechselt, hat im wesentlichen die Form

$$P_{+1} \sim e^{\phi_g}\ G,$$

wobei ϕ_g das bosonisierte super-konforme Geistfeld und $G = G^{RZ} + G^{int}$ der Superstrom ist. Ist V_q ein Vertex-Operator mit Geist-Ladung q, dann erhält man den gleichwertigen Operator im $(q+1)$-Bild durch

$$V_{q+1} = \ddagger\ P_{+1} V_q\ \ddagger\ .$$

Will man nun Streuamplituden berechnen, so muß man durch Einschieben von $P_{\pm 1}$ die Gesamtladung (Summe der Geist-Ladungen der Vertex-Operatoren) -2 erreichen, um die Hintergrund-Ladung des Geist-Vakuums aufzuheben. Insbesondere schlägt es sofort auf die Streuamplituden durch, wenn $P_{\pm 1}$ (also G) nicht-triviale oder nicht wohldefinierte Monodromie mit anderen Vertizes hat, wie z.B. auf Feldern der Form $\Phi^{1,R} \otimes \Phi^{2,NS}$.

Deswegen werden auch wir durch eine Orbifold-Prozedur auf die Zustände projizieren, die nur aus Tensorprodukten von R (bzw. nur NS) Zuständen bestehen. (Wir sollten bemerken, daß sich dadurch gerade das für superkonformer Theorien 'natürliche' Tensorprodukt ergibt, vgl. 4.1.) Zunächst brauchen wir wieder eine Symmetriegruppe, die dann ausgemottet werden kann. Wie schon in (2.3.15) sieht man mit (2.2.7) und (1.5.22) leicht, daß für $d/2$ ungerade (und wir beschränken uns auf diesen Fall)

$$\Phi^l_\lambda \to e^{-2\pi i a \beta_i \bullet \lambda} \Phi^l_\lambda, \qquad a \in \mathbb{Z}_2 \tag{2.5.1}$$

mit

$$\beta_i := (2; \overbrace{0, \ldots, 0}^{r}; \overbrace{0, \ldots 0, 2, 0 \ldots, 0}^{r}) \qquad \text{und} \quad \beta_i \bullet \beta_j = d/2 + \delta_{i,j} \tag{2.5.2}$$

$(i = 1, \ldots r)$ eine $\mathbb{Z}_2$ Symmetrie der Fusions-Algebra ist. Diese Symmetrie ist genau das, was wir suchen, da $\beta_i \bullet \lambda \in \mathbb{Z}(+\frac{1}{2})$ ist, wenn der Zustand ϕ^l_λ in der Theorie i

und im Raum-Zeit-Anteil im gleichen (anderen) Sektor ist. Ähnlich zur Konstruktion (2.3.16-20) ist es nicht allzu schwer zu zeigen, daß

$$Z^i(a,b) = \sum_{l,\bar{l},\lambda} \mathbf{A}_{l,\bar{l}}\; e^{-2\pi i a \beta_i \bullet (\lambda + b\beta_i)}\; \boldsymbol{\chi}^l_\lambda \boldsymbol{\chi}^{\bar{l}}_{\lambda+b\beta_i}{}^{*}. \tag{2.5.3}$$

eine Partitionsfunktion mit geeignetem Verhalten (4.3.8) unter modularen Transformationen ist. (Die Unterschiede zwischen (2.5.3) und (2.3.17) gehen darauf zurück, daß β_0^2 ungerade, β_i^2 aber gerade ist.) Man erhält als modular invariante Zustandssumme

$$\mathcal{Z}^{\beta_i} = \sum_{\substack{l,\bar{l},\lambda \\ b\in\{0,1\} \\ \beta_i\bullet\lambda\in\mathbb{Z}}} \mathbf{A}_{l,\bar{l}}\; \boldsymbol{\chi}^l_\lambda \boldsymbol{\chi}^{\bar{l}}_{\lambda+b\beta_i}{}^{*} \tag{2.5.4}$$

mit der gewünschten Auswahlregel für die Kopplung des Raum-Zeit- und i-ten Anteils. Für den Fall von r verschiedenen Vektoren β_i läßt sich (2.5.3) verallgemeinern zu

$$Z(\vec{a},\vec{b}) = \sum_{l,\bar{l},\lambda} \mathbf{A}_{l,\bar{l}} e^{-2\pi i (a_1\beta_1+\ldots a_r\beta_r)\bullet(\lambda+b_1\beta_1+\ldots b_r\beta_r)} \boldsymbol{\chi}^l_\lambda \boldsymbol{\chi}^{\bar{l}}_{\lambda+b_1\beta_1+\ldots+b_r\beta_r}{}^{*}. \tag{2.5.5}$$

Dies ist konsistent, d.h. auch alle getwisteten Sektoren erfüllen die Projektionsbedingungen, wenn, wie bei uns, $\beta_i \bullet \beta_j$ ganzzahlig ist. Man überprüft analog, daß sich

$$Z(\vec{a},\vec{b}) = \sum_{l,\bar{l},\lambda} \mathbf{A}_{l,\bar{l}} (-)^{b_0} e^{-2\pi i (a_0\beta_0+\ldots a_r\beta_r)\bullet(\lambda+b_0\beta_0+\ldots b_r\beta_r)} \boldsymbol{\chi}^l_\lambda \boldsymbol{\chi}^{\bar{l}}_{\lambda+b_0\beta_0+\ldots+b_r\beta_r}{}^{*} \tag{2.5.6}$$

nach (4.3.8) transformiert, wobei man wiederum $\beta_0 \bullet \beta_i \in \mathbb{Z}$ ausnützt.

Ersetzt man nun noch im antiholomorphen Sektor $\boldsymbol{\chi}$ durch $\bar{\boldsymbol{\chi}}$ (vgl. 2.4), so erhält man überglücklich (oder ?) (2.1.1) in voller Schönheit. (Insbesondere muß b_0 wegen der β_i-Projektion nur noch über $0,\ldots \mathrm{kgV}(2, k_i+2)-1$ summiert werden.)

Schließlich würden wir noch gerne den Operator $\Phi^0_{\beta_i}$ ein wenig besser verstehen. Sein interner Anteil ist ${\psi^{(i)}}^{0,2}_0$, den wir mit den Supergeneratoren ${G^{(i)}}^{\pm}$ der i-ten Theorie identifizieren können. Auch im Raum-Zeit-Anteil enthält die konforme Familie $[V^2_{\pm 2}]$ die Supergeneratoren ${G^{RZ}}^{\pm}$ der transversalen N=2 Raum-Zeit-Theorie. Also ist (wir legen hier nur Wert auf die richtige Monodromie, d.h. $\psi \sim G^{RZ}$) ${\psi^{(i)}}^{0,2}_0 = {G^{RZ}}^{\pm} \otimes {G^{(i)}}^{\pm}$.

2.6 Spin-Statistik

Definiert man die Spur im Pfad-Integral-Formalismus (vgl. L. Alvarez-Gaumé (1984)), so findet man, daß die Standard-Spur für antikommutierende Felder gerade über Felder mit (zeitlich) antiperiodischen Randbedingungen summiert. Um den Beitrag der periodischen Felder zu erhalten, muß man in die Spur ein $(-)^F$ (F die Fermionzahl) einfügen und erhält die Superspur. Daher erscheinen Raum-Zeit-Fermionen in der (Super-)Zustandssumme mit einem negativen Vorzeichen, Bosonen mit einem positiven, wenn man für beide gleiche Randbedingungen verlangt. Insbesondere erkennt man, daß der Übergang von Raum-Zeit-Fermionen zu Bosonen durch Addition von β_0 auf der fermionischen Seite, bzw. Anwendung des Gravitino-Vertex-Operators, konsistent mit dem Vorzeichenwechsel in der Zustandssumme (2.3.24) und damit dem Vorzeichen in (2.3.23) ist. Man sagt (vgl. Gepner (1987a)), (2.3.24) sei in Übereinstimmung mit dem Zusammenhang von Spin und Statistik.

2.7 Erweiterung der Eichgruppe von $SO(10)$ auf E_6

Die Ladungsquantisierung (2.3.11-12) führt beim heterotischen String zur Erweiterung der Eichgruppe von $SO(10)_1$ auf $E_{6,1}$ (eingebettet in $SO(10)_1 \times U(1)_6$, insbesondere kann man alle Darstellungen von E_6 als direkte Summe von $SO(10)\times U(1)$-Darstellugen auffassen). Für eine Diskussion des Zusammenhangs von Raum-Zeit-Supersymmetrie und dem Auftreten der exzeptionellen Lie-Algebren E_6, E_7 und E_8 verweisen wir auf Lerche, Schellekens, Warner (1989).

Um dies zu zeigen, geben wir zunächst eine (zur Betrachtung der Einbettung) geeignete Basis für das Wurzelgitter und einige andere Fakten der Darstellungstheorie von E_6 an: Eine mögliche Wahl der einfachen Wurzeln von $SO(10)$ ist

$$(1,-1,0^3),(0,1,-1,0^2),\ldots(0^3,1,-1) \text{ und } (0^3,1,1). \tag{2.7.1a}$$

(Sie sind auf $\sqrt{2}$ normiert und die geeigneten Skalarkprodukte haben den Wert -1.) Fügt man zu dieser Basis den Vektor

$$((-{}^1\!/_2)^5;\ {}^{\sqrt{3}}\!/_2) \tag{2.7.1b}$$

hinzu, so erhält man die einfachen Wurzeln von E_6. (Man überprüft leicht die vom Dynkin-Diagramm vorgeschriebenen Skalarprodukte der Wurzeln).

E_6 hat drei Konjugationsklassen und die entsprechenden Klebevektoren (vgl. 2.2.5) lauten

$$\begin{aligned}
[0] &= \vec{0}, \\
[1] &= (1, 0^4; -{}^{\sqrt{3}}\!/_3), \\
[\bar{1}] &= (1, 0^4; {}^{\sqrt{3}}\!/_3) \simeq -[1].
\end{aligned} \tag{2.7.2}$$

(Man sieht leicht, daß $[1] \in M^*_{E_6} \setminus M_{E_6}$ ist.) Die Additionsregeln für die Konjugationsklassen (die wir im folgenden mit den Klebevektoren identifizieren) sind

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 0 & 1 & \bar{1} \\
\hline
0 & 0 & 1 & \bar{1} \\
1 & 1 & \bar{1} & 0 \\
\bar{1} & \bar{1} & 0 & 1
\end{array} \tag{2.7.3}$$

(übrigens gelten dieselben für $A_2 = SU(3)$) und stimmen mit $\mathbb{Z}_3$ überein. Die (beiden) fundamentalen Darstellungen liegen in $1 := M_{E_6} + [1] \subset M^*_{E_6}$ und $\bar{1}$ (analog) und haben die Dimension 27, die adjungierte Darstellung liegt in $0 := M_{E_6}$ und hat die Dimension der Lie Algebra, also 78.

Die Theta-Funktionen von E_6 sind in Conway, Sloane (1988) angegeben und man erhält damit nach (1.2.12) die Charakterfunktionen von E_6 zum Level 1, die wir mit $\chi^{E_6}_{\lambda,k=1}$ bezeichnen werden.

Nun zur Ladungsquantisierung: Nach 2.3a ist die interne $U(1)$-Ladung Q (vgl. (2.3.9)) eines mit Raum-Zeit-Supersymmetrie konsistenten physikalischen Vertex-Operators durch (2.3.12) $Q - {}^{(\lambda_0 - 2)}\!/_2 \in 2\mathbb{Z}$ mit λ_0, der Konjugationsklasse von $SO(2)$, verknüpft. Ersetzt man nun nach 2.4 $SO(2)$ durch $SO(10)$ (der E_8-Anteil ist hier irrelevant und wird unterschlagen) und zieht die Verschiebung der Konjugationsklassen

$\lambda_0^{SO(2)} \to \lambda_0^{SO(10)} + 2(\bmod 4)$ nach (2.4.3) in Betracht, so erhält man als Bedingung der Ladungsquantisierung

$$Q - \frac{\lambda_0^{SO(10)}}{2} \in 2\mathbb{Z}. \tag{2.7.4}$$

Wir behaupten, daß man dies wie in 2.3a als Lokalitätsbedingung auffassen kann und zwar eine bezüglich der Analoga der Gravitino-Vertex-Operatoren (2.3.8) auf der bosonischen Seite des heterotischen Strings. Diese ergeben sich aus den fermionischen einfach durch komplexe Konjugation und das Ersetzen der $SO(2)$-Spin-Felder und des Geist-Anteils durch $SO(10)$-Spin-Felder

$$U^\alpha(\bar{z}) = S_\alpha^{SO(10)}\ e^{-i\sqrt{3}\phi_{int}/2}(\bar{z}), \qquad U^{\dot\alpha}(\bar{z}) = S_{\dot\alpha}^{SO(10)}\ e^{i\sqrt{3}\phi_{int}/2}(\bar{z}), \tag{2.7.5}$$

($h = {}^3\!/_8 + {}^5\!/_8 = 1,\ Q_{int} = \mp{}^3\!/_2$) wobei $\alpha \in\ M_{SO(10)} + [1]$, $\dot\alpha \in\ M_{SO(10)} + [\bar{1}]$ mit $\alpha^2 = \dot\alpha^2 = {}^5\!/_4$ und $S_\alpha^{SO(10)} = c_\alpha \cdot e^{i\alpha\cdot H}$ (analog $S_{\dot\alpha}^{SO(10)}$) die Spin-Felder von $SO(10)$ sind. In der Tat sind dies die simplen Ströme der Ladungsprojektion aus 2.3, genauer: $U^{\dot\alpha} = \bar\Phi^0_{\beta_0}$ und $U^\alpha = \bar\Phi^0_{-\beta_0}$ und wie man aus (2.7.1b) abliest, entsprechen sie den Vertex-Operatoren der $U(1)_6$ der Erweiterung von $SO(10)_1$ auf $E_{6,1}$. Wie behauptet, ergibt sich damit (2.7.4) als Bedingung für die Lokalität bezüglich (2.7.5) an Ladung Q und $\vec\lambda$, Gewichtsvektor in der $\lambda_0^{SO(10)}$ Konjugationsklasse, eines bosonischen Vertex-Operators

$$e^{i\vec\lambda\cdot\vec H}\ e^{iQ\phi_{int}/\sqrt{3}}\ \tilde V_{int}(\bar z). \tag{2.7.6}$$

Man beachte die relative Normierung von Q gegen $\vec\lambda$, die sich aus der Definition $J_{int} = i\sqrt{{}^c\!/_3}\ \partial\phi_{int} = i\sqrt{3}\ \partial\phi_{int}$ ergibt. In der Tat ist J_{int} der Cartan-Generator der Erweiterung von $SO(10)$ nach E_6 und es folgt aus (2.7.1b), daß die Ladung Q eines Zustandes zum Gewicht $(\vec\mu, \mu_0)$ gerade $\sqrt{3}\cdot\mu_0$ ist. Da $(0^5, 2\sqrt{3})$ der kleinste nicht-verschwindende Vektor im Wurzelgitter von E_6 ist, der einen trivialen $SO(10)$-Anteil hat, ist damit die Ladung in den Äquivalenzklassen $(M^*_{E_6}/M_{E_6})$ nur modulo 6 definiert (wie wir es für $U(1)_6$ erwarten).

Man kann nun zeigen, daß durch die Bedingung (2.7.4) die Menge der 'physikalischen' (hier im Sinne von erlaubt, da lokal zu den Operatoren (2.7.5)) Vertex-Operatoren (2.7.6) gerade die Frenkel-Kac-Segal-Konstruktion von E_6 zum Level 1 ergibt. Anders ausgedrückt: Man findet, daß das Produkt der Gewichtsgitter von $U(1)$ und $SO(10)$ unter der Bedingung (2.7.4) und der Normierung aus (2.7.6) mit dem Gewichtsgitter von E_6 übereinstimmt (alle Einträge für Q modulo 6)

$$\begin{aligned}
0 &:= M_{E_6} + [0] = (M_{SO(10)} + [o], Q = 0) \cup (M_{SO(10)} + [v], Q = 3) \cup \\
&\qquad (M_{SO(10)} + [s], Q = {}^{-3}/2) \cup (M_{SO(10)} + [c], Q = {}^{3}/2), \\
1 &:= M_{E_6} + [1] = (M_{SO(10)} + [o], Q = 2) \cup (M_{SO(10)} + [v], Q = -1) \cup \\
&\qquad (M_{SO(10)} + [s], Q = {}^{1}/2) \cup (M_{SO(10)} + [c], Q = {}^{-5}/2), \\
\bar{1} &:= M_{E_6} + [\bar{1}] = (M_{SO(10)} + [o], Q = -2) \cup (M_{SO(10)} + [v], Q = 1) \cup \\
&\qquad (M_{SO(10)} + [s], Q = {}^{5}/2) \cup (M_{SO(10)} + [c], Q = {}^{-1}/2).
\end{aligned} \tag{2.7.7}$$

Man liest ab, daß die Gewichte in der skalaren Darstellung von E_6 durch $Q = 0 \bmod {}^{3}/2$ und die in den Spinordarstellungen durch $Q = \mp 1 \bmod {}^{3}/2$ charakterisiert sind.

Insbesondere ergibt sich für die fundamentalen und adjungierte Darstellung von E_6 folgende Zerlegung in Darstellungen von $SO(10) \times U(1)$

$$\begin{aligned}
\underline{27} &= (\underline{16}, {}^{1}/2) + (\underline{10}, -1) + (\underline{1}, 2), \\
\overline{\underline{27}} &= (\overline{\underline{16}}, {}^{-1}/2) + (\underline{10}, 1) + (\underline{1}, -2), \\
\underline{78} &= (\underline{45}, 0) + (\underline{16}, {}^{-3}/2) + (\overline{\underline{16}}, {}^{3}/2) + (\underline{1}, 0).
\end{aligned} \tag{2.7.8}$$

Die Vollständigkeit dieser E_6-Darstellungen wird durch die Operatoren U^α, $U^{\dot\alpha}$ sichergestellt; es gilt

$$\begin{aligned}
(\underline{1}, \;\; 2) &\xrightarrow{U^\alpha} (\underline{16}, {}^{1}/2) \xrightarrow{U^\alpha} (\underline{10}, -1), \\
(\underline{1}, -2) &\xrightarrow{U^{\dot\alpha}} (\overline{\underline{16}}, {}^{-1}/2) \xrightarrow{U^{\dot\alpha}} (\underline{10}, 1),
\end{aligned} \tag{2.7.9}$$

sowie

$$\begin{tikzcd}
 & (\underline{16}, -\frac{3}{2}) & \\
(\underline{45}, 0) \arrow[ur, "U^\alpha"] \arrow[dr, "U^{\dot\alpha}"'] \arrow[rr, "\{U^\alpha, U^{\dot\alpha}\}"] & & (\underline{1}, 0). \\
 & (\overline{\underline{16}}, \frac{3}{2}) &
\end{tikzcd}$$

Umgekehrt ist es leicht einzusehen, daß ohne (2.7.4) Gewichte $(\vec{\lambda}, Q)$ auftreten, die nicht im Gewichtsgitter von E_6 liegen. Schwächt man z.B. (2.7.4) auf $Q - \lambda_0^{SO(10)}/2 \in \mathbb{Z}$ ab, so ist $(\vec{0}, Q = 1)$ erlaubt, aber offensichtlich nicht in $M^*_{E_6}$.

Wir sollten vielleicht erwähnen, daß es in $D = 4$ Dimensionen einerseits Gepner-Modelle mit Eichgruppe E_7 gibt (vgl. Bemerkung nach (2.8.3)); andererseits kann durch eine 'asymmetrische' Orbifold-Konstruktion E_6 gebrochen werden (vielleicht ist sogar $SU(3) \times SU(2) \times U(1)^n$ möglich) ohne die N=1 Raum-Zeit-Symmetrie auf der fermionischen Seite zu zerstören (vgl. Schellekens, Yankielowicz (1990a) und Referenzen dort).

2.8 Das masselose Spektrum des Gepnerschen Strings

Wir wollen nun den masselosen Teil des heterotischen Spektrums in kovarianter Eichung im kanonischen Geistbild (vgl. Lüst, Theisen (1989)) diskutieren. (Im nächsten Kapitel betrachten wir mit der W-Algebra auch Teile des massiven Spektrums bisher ohne physikalische Interpretation.) Wir folgen der Darstellung in Gepner (1989) und Klemm (1990).

Zunächst die Notation: ψ^μ und X^μ sind die (Super-)Raum-Zeit-Koordinaten, $V^{\alpha}_{-1/2}$ und $V^{\dot\alpha}_{-1/2}$ die Vertexoperatoren (2.3.8) der Raum-Zeit Superladungen (oder auch Gravitino Vertex-Operatoren), U^α und $U^{\dot\alpha}$ (2.7.5) deren Analoga auf der bosonischen Seite, φ^l_λ ($\varphi^{\bar l}_{\bar\lambda}$) bezeichnen die (anti-)holomorphe Felder der internen ($c = 9$) Theorie (sie stimmen fast mit Φ^l_λ (2.3.15) überein, enthalten nur nicht den Raum-Zeit-Anteil, also im Multiindex λ auch nicht den Raum-Zeit-Index λ_0), J^a die Ströme von $SO(10) \times E_8$ zum Level 1, ϕ_g das bosonisierte Geistfeld (dann hat $e^{-\phi_g}$ die konforme Dimension $1/2$) und schließlich V^i Darstellungen der affinen Algebra $SO(10) \times E_8$. Weiterhin schreiben wir die konforme Dimension (bzw. den Grad) und Ladung des Raum-Zeit-Anteils als (h_{RZ}, Q_{RZ}) (bzw. $(\bar h_{RZ}, \bar Q_{RZ})$ im antiholomorphen oder auf der rechten oder bosonischen Seite), die des holomorphen (oder linken oder fermionischen) internen Anteils als (h_{int}, Q_{int}), die des internen und Eich-Anteils als $(\bar h_{eint}, \bar Q_{eint})$ und schließlich die konforme Dimension des Geist-Feldes als h_g (das Geist-Feld trägt keine Ladung).

Wir gehen nun nacheinander die masselosen Operatoren auf der fermionischen und bosonischen Seite, dann die auftretenden Kombinationen durch: Dabei nutzen wir die Tatsache, daß im kovarianten Formalismus auch auf der fermionischen Seite die masselosen Zustände durch $h_{ges} = 1$ charakterisiert sind, da der Beitrag des fermionischen Geistsystems mitgezählt wird. Man findet damit zunächst (ohne Betrachtung der durch die Gravitino Vertex-Operatoren erzeugten Superpartner) auf der fermionischen Seite folgende Operatoren (Q ungerade, vgl. die Diskussion nach (2.3.8) für h_g)

$$\begin{aligned} Raum - Zeit: &\quad \psi^\mu(z)\; e^{-\phi_g(z)} &\quad (h_{RZ} = {}^1\!/_2,\; h_g = {}^1\!/_2,\; Q_{RZ} = \pm 1), &\quad (2.8.1a)\\ intern: &\quad \varphi^l_\lambda(z)\; e^{-\phi_g(z)} &\quad (h_{int} = {}^1\!/_2,\; h_g = {}^1\!/_2,\; Q_{int} = \pm 1). &\quad (2.8.1b) \end{aligned}$$

Da die interne Theorie (auch nach der Orbifold-Konstruktion) N=2 super-konforme Invarianz trägt, gilt für die internen Operatoren (vgl. 4.5) $h \geq |Q|/2$, also $|Q| \leq 1$. Andererseits wird in der Gepner-Zustandssumme (2.1.1) auf ungerade Ladungen projiziert, also ist $|Q| = 1 = 2h$, so daß $\varphi^l_\lambda(z)$ ein (anti-)chiral primäres Feld sein muß. Auf der bosonischen Seite hat man entsprechend (Q gerade)

$$\left.\begin{aligned} Raum - Zeit: &\quad \bar\partial X^\mu(\bar z) &\quad (\bar h_{RZ} = 1),\\ Eichstr\ddot{o}me: &\quad J^a(\bar z) &\quad (\bar h_{eint} = 1) \end{aligned}\right. \qquad (2.8.2a)$$

und für (nicht-triviale) interne Operatoren verknüpft mit einer Darstellung der Eichgruppe

$$'eint.':\quad V^i(\bar z)\varphi^{\bar l}_{\bar\lambda}(\bar z), \qquad (\bar h_{eint} = 1,\; \bar Q_{eint} = 0, \pm 2). \qquad (2.8.2b)$$

Den letzten Anteil kann man noch weiter Aufspalten: Da E_8 nur die skalare Darstellung hat, also außer $\mathbb{1}$ keine Operatoren mit konformer Dimension kleiner als 1, müssen alle $V^i(\bar z)$ Singletts von E_8 sein (d.h. $h_{E_8} = 0$). Es bleiben nur die $SO(10)$-Darstellungen (wir nehmen für die E_6-Sichtweise auch die $SO(10)$-Ströme vom Typ (2.8.2a) mit $\varphi = \mathbb{1}$ hinzu)

$SO(10) - Darstellung$		$\bar h^{SO(10)}$	$\bar h_{int}$	$\bar Q_{int}$
$\underline{10}$	(v)	$^1/_2$	$^1/_2$	± 1
$\underline{16}$	(s)	$^5/_8$	$^3/_8$	$-^1/_2$
$\overline{\underline{16}}$	(c)	$^5/_8$	$^3/_8$	$^1/_2$
$\underline{1}$	(o)	0	1	$0, \pm 2$
$(\underline{45}$	(o)	1	0	$0).$

(2.8.3)

In Bezug auf die interne N=2 super-konforme Theorie stellen wir fest, daß die $\underline{10}$ von $SO(10)$ nur mit (anti-)chiral primären Feldern koppelt. Da diese nach (2.7.9) mit der $\underline{27}$ und $\overline{\underline{27}}$ von E_6 in eineindeutiger Verbindung stehen, kann man durch Abzählen der (anti-)chiral primären Felder in der Zustandssumme (2.1.1) die Anzahl dieser *(Anti-)-Generationen* (der entsprechenden E_6-vereinheitlichten Theorie) bestimmen; hierin liegt eine wesentliche Bedeutung des chiralen Rings. Phänomenologisch relevant (d.h. geometrisch interpretierbar) sind weiterhin die Singletts $\underline{1}$ von E_6, die sich aus Singletts von $SO(10)$ und einem internen Feld der Ladung 0 zusammensetzen.

Welche (Anti-)Generationen und Singletts auftreten, d.h. welche holomorphen Operatoren (2.8.1) mit welchen antiholomorphen (2.8.2) koppeln, wird durch die modulare Invariante vorgeschrieben. Besondere Beachtung (vgl. die Diskussion in Klemm (1990) oder Fuchs, Klemm, Scheich, Schmidt (1990)) verdienen Modelle, bei denen der Operator (2.8.1a) mit (2.8.2b) koppelt und wegen der Rechts-Links-Symmetrie der Konstruktion entsprechend ein Operator vom Typ (2.8.1b) mit (2.8.2a). Dann nämlich findet man N=2 Raum-Zeit-Supersymmetrie und die Eichgruppe wird von E_6 sogar auf E_7 erweitert. Einfache Modelle dieses Typs sind z.B. $(1)^6(2)^2$, $(1)^3(2)^4$ und $(1_A)^4(2_A)^2(4_D)$; doch werden wir auf diese spezielle Klasse nicht weiter eingehen (geometrisch entsprechen sie alle demselben Modell).

Wir erhalten insgesamt

physikalisches Feld	*Operator*
Graviton, Dilaton *antisymmetrisches Feld*	$\epsilon_{\mu\nu}\ \psi^\mu(z)\ e^{-\phi_g(z)}\ \bar\partial X^\nu(\bar z)$
Gravitino	$V^{\alpha(\dot\alpha)}_{-1/2}(z)\ \bar\partial X^\mu(\bar z)$
Eichbosonen	$\psi^\mu(z)\ e^{-\phi_g(z)}\ J^a(\bar z)$
Gauginos	$V^{\alpha(\dot\alpha)}_{-1/2}(z)\ J^a(\bar z)$
Skalare	$e^{-\phi_g(z)}\ \varphi^{l,\bar l}_{\lambda,\bar\lambda}(z,\bar z)\ V^i(\bar z)$
Chirale Fermionen	$V^{\alpha(\dot\alpha)}_{-1/2}(z)\ \varphi^{l,\bar l}_{\lambda,\bar\lambda}(z,\bar z)\ V^i(\bar z)$, (2.8.4)

wobei $\epsilon_{\mu\nu}$ der Polarisationstensor ist und $k^\mu\epsilon_{\mu\nu}=0$ erfüllt. Die hier aufgeführten Superpartner der bosonischen Felder ergeben sich dabei durch die Ersetzung der Operatoren in (2.8.1) durch die Vertexoperatoren der Raum-Zeit-Superladung $V^\alpha_{-1/2}$ und $V^{\dot\alpha}_{-1/2}$.

2.9 Geometrische Interpretation der masselosen Felder

Durch die Gepnerschen Modelle (und deren Orbifolds) konnte eine große Klasse neuer N=1 Raum-Zeit-supersymmetrischer heterotischer vier-dimensionaler String-Theorien im *algebraischen* Formalismus der konformen Feldtheorie erzeugt werden. Darunter ist sogar ein Modell mit drei Generationen $(1_A)(16_E)^3$, wobei der Subindex die Wahl der $SU(2)$-Invarianten angibt (es gibt noch weitere (vgl. Schellekens, Yankielowicz (1990a), wenn man die N=2 super-minimalen Modelle durch allgemeinere Kazama-Suzuki-Modelle ersetzt). Darüberhinaus verdanken die Gepnerschen Modelle einen grossen Teil ihrer Bedeutung der Tatsache, daß es möglich war, sie (oder zumindest einen gewissen Teil von ihnen) auch *geometrisch* zu interpretieren. Nach der allgemeinen Theorie (vgl. GSW) hat man bei der geometrischen Konstruktion die Wahl einer sechs-dimensionalen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit K^6 (d.h. einer Kählermannigfaltigkeit mit verschwindender erster Chern-Klasse), die die Kompaktifizierung der kritischen zehn-dimensionalen String-Theorie $M \times K^6$ auf eine vier-dimensionale Mannigfaltigkeit M beschreibt. Die masselosen Felder der String-Theorie können mit Deformationen gewisser Strukturen (wie die komplexe Struktur oder den Kähler Formen) von K^6 identifiziert werden. Die geometrische Interpretation der Gepner-Modelle besteht nun darin, daß man für einen guten Teil der Theorien und deren Orbifolds effektive auf vier Dimensionen kompaktifizierte Feldtheorien im Grenzwert niedriger Energie angeben kann (GSW), die auch ungebrochene N=1 Raum-Zeit-Supersymmetrie und die Eichgruppe $E_8 \otimes E_6 \otimes G$ tragen, die die gleiche diskrete Symmtriegruppe besitzen, sowie die gleiche Anzahl an (Anti-)Generationen und Singletts mit gleichem Verhalten unter diskreten Transformationen (Gepner (1987c) und (1989)); schließlich konnten sogar die quasi-topologischen Ergebnisse für die Yukawa-Kopplungen durch die algebraische Konstruktion bestätigt werden (Gepner (1988)). Wir wollen in diesem Abschnitt den Zusammenhang am Beispiel des $(3)^5$-Modells ein wenig konkretisieren, werden jedoch dabei nicht allzu tief in den geometrischen Teil der Theorie eindringen. Abschließend werden wir kurz einige weitergehende Entwicklungen kommentieren.

Zuerst die algebraische Theorie: Für das Gepner-Modell $(3)^5$ findet man mit den oben vorgestellten Methoden 101 Generationen, d.h. $\underline{27}_{E_6}$-Darstellungen, d.h. chiral-chiral primäre Zustände der internen Theorie mit $(h_{int}, Q_{int}; \bar{h}_{int}, \bar{Q}_{int}) = (1/2, 1; 1/2, 1)$ (jeweils mit den CPT-konjugierten Feldern); weiterhin eine Anti-Generation, $\overline{\underline{27}}$, die einem chiral-antichiral primären Feld der internen Theorie mit $(h_{int}, Q_{int}; \bar{h}_{int}, \bar{Q}_{int})$ $= (1/2, 1, 1/2, -1)$ entspricht, sowie 330 Singletts von E_6, d.h. Zustände der internen Theorie mit $(h_{int}, Q_{int}; \bar{h}_{int}, \bar{Q}_{int}) = (1, 0; 1/2, 1)$.

Geometrische Theorie: Die zu diesem Modell gehörige Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit ist die sogenannte quintische Fermatsche Hyperfläche F_5, die als Schnitt des Polynoms $P(Z^1, \ldots Z^5) = {Z^1}^5 + \ldots + {Z^5}^5$ in $\mathbb{C}\mathrm{P}^4$ definiert werden kann. (Dabei ist $\mathbb{C}\mathrm{P}^N = \{(Z^1, \ldots Z^{N+1}) \in \mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\} | (Z^i) \sim (\lambda Z^i),\ \lambda \in \mathbb{C}^*\} / \sim$ der N-dimensionale komplex-projektive Raum, der als Kompaktifizierung von $\mathbb{C}^N$ aufgefaßt werden kann (z.B. $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 = S_2$).) Sie trägt dieselbe diskrete Symmetriegruppe wie die konforme Feldtheorie. Nach GSW ist die Eichgruppe der effektiven Feldtheorie $E_8 \times E_6$, wobei die (Anti-)Generationen durch 27- ($\overline{27}$-) Darstellungen gegeben sind. Die Zahl der (Anti-)Generationen gleicht der der harmonischen $(2,0)$-($(1,1)$-)Formen, $h^{2,1}$ ($h^{1,1}$), und diese haben für F_5 die Werte $h^{2,1} = 101$ und $h^{1,1} = 1$. Insbesondere hat man für die Eulerzahl $\chi = 2(h^{1,1} - h^{2,1}) = -200$. Weiterhin gibt es 102 Singletts von E_6, die den Deformationen der komplexen Struktur und der Radien entsprechen; sowie 224 weitere Singletts, die mit $H^1(\mathrm{End}T)$ verknüpft sind. Man würde also für eine Kompaktifizierung auf F_5 insgesamt $326 = 224 + 101$ Singletts erwarten, vier weniger als wir in der String-Theorie finden. Allerdings hat die String-Theorie eine um $U(1)^4$ erweiterte Eichsymmetrie. Man interpretiert daher vier der Singletts der Gepner-Konstruktion als Higgsbosonen, die die zusätzliche Eichsymmetrie $U(1)^4$ brechen.

In der Tat kann man jedem Gepner-Modelle über die Darstellung der N=2 superminimalen Modelle als Fixpunkte des Renormierungsgruppenflusses eines *N=2 Landau-Ginzburg-Modells* (vgl. Greene, Vafa, Warner (1989), Warner (1988) und Vafa (1989), sowie Literaturangaben dort) ein Polynom, das Landau-Ginzburg-Super-Potential der Produkttheorie, zuordnen. Unter Vernachlässigung des kinetischen Terms erhält man daraus durch einen Variablenwechsel im Pfadintegral die definierende(n) Gleichung(en) einer Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit in einem (durch die Forderung nach der Eindeutigkeit des Variablenwechsels definierten) gewichteten komplex-projektiven Raum. Man findet, daß die Bedingung der Anomaliekürzung in den Gepner-Modellen (d.h. $c_{int} = 9$) auf wunderbare Weise mit der naiven (tatsächlich ist die Resolution der auftretenden Singularitäten möglich, vgl. Greene, Roan, Yau (1991)) Bedingung für das Verschwinden der ersten Chern-Klasse des Polynomschnitts übereinstimmt. In der Tat ist bisher kein Beispiel bekannt, bei dem die von der algebraischen Theorie vorhergesagte Anzahl der Generation (Deformationen der komplexen Struktur etc.) und damit die Eulerzahl vom geometrischen Resultat abweicht (bei den Singletts ist die Datenlage nicht ganz eindeutig).

Eine weitere wichtige Entdeckung war die der *Spiegelpaare* (vgl. Greene, Plesser (1990) und Candelas, de la Ossa, Green, Parks (1991)). So ist es in der algebraischen Konstruktion reine Konvention, was als Generationen 27 und was als Antigenerationen $\overline{27}$ bezeichnet wird. Auch kann man durch eine weitere Orbifold-Konstruktion im Gepner-Modell leicht die Zahl der beiden vertauschen, die analoge geometrische Orbifold-Bildung sollte dann das 'Spiegelbild' der ursprünglichen Mannigfaltigkeit, mit umgekehrter Eulerzahl ergeben. Here comes the crunch: Während die Yukawa-Kopplungen der Generationen weder durch höhere Ordnungen der Genus-Entwicklung der String-Störungstheorie noch durch Instantonen renormiert werden, unterliegen die Yukawa-Kopplungen der Antigenerationen der 'Renormierung' durch Instantonen. Mit Hilfe der Spiegelpaare können nun in der Tat beide Kopplungen durch geometrische Berechnung niedrigster Ordnung, wohlgemerkt in verschiedenen Mannigfaltigkeiten, exakt berechnet werden. Mehr noch: Es scheint, daß es möglich ist (indem man das exakte Ergebnis der Störungsentwicklung in den Instantonbeiträgen gleichsetzt), aus den Rechnungen die Anzahl der rationalen Kurven (Instantonen) zu höheren (höher als bisher den Mathematikern zugänglich) Graden abzulesen. Das Objekt, daß die exakte Berechnung aller Kopplungen erlaubt, wurde auf den Namen *Quanten-Mannigfaltigkeit* bestehend aus einer 'nackten' Mannigfaltigkeit samt ihren rationalen Kurven getauft.

3 W-Algebren in Gepner Modellen

In diesem Kapitel werden zwei Fragen diskutiert: In den ersten beiden Abschnitten untersuchen wir die in Gepner-Modellen auftretenden W-Algebren, daß heißt, deren maximale chirale (hier im Sinne von holomorph) Algebren oder einfach Symmetriealgebren. Dann wenden wir uns in 3.3 der Frage zu, welchen Forderungen eine W-Algebra genügen muß, die an Stelle der N=2 super-minimalen Modelle in die Gepnersche Konstruktion eingebaut werden sollte.

3.1 Identifizierung der Symmetrie-W-Algebra

In diesem Abschnitt werden wir die Symmetriealgebra der Gepnerschen String-Theorien betrachten. Diese kann man aufspalten in das Tensorprodukt aus einem affinen Teil (vgl. 2.8), der insbesondere alle masselosen Felder enthält, und einen Anteil der von Feldern höherer konformer Dimension erzeugt wird. (Ist diese Unterscheidung künstlich, im Sinne, daß man den 'Rest'-Charakter zusammen mit den $U(1)$-Strömen besser verstehen kann – die $U(1)$en werden ja genau wie die Felder höherer konformer Dimension in 3.2 ausdividiert ??) Daher macht es Sinn von der Symmetrie-W-Algebra zu sprechen.

Um die Symmetriealgebra der Gepnerschen String-Modelle zu identifizieren, bedienen wir uns des Resultats von Moore, Seiberg (1989), daß nicht-diagonale modulare Invariante konformer Feldtheorien entweder auf Automorphismen der Fusions-Algebra oder Erweiterungen der holomorphen Algebra (oder auf eine Kombination von beidem) zurückgehen. Im ersten Fall spricht man (Schellekens, Yankielowicz (1990b)) von *Automorphismus-Invarianten* der allgemeinen Form

$$\mathcal{Z}(\tau) = \sum_{i,j} \chi_i(\tau)\Pi_{ij}\chi_j(\bar{\tau}), \tag{3.1.1}$$

wobei Π_{ij} nichts als eine Permutation der Charakterfunktionen χ_i ist. Im uns interessierenden zweiten Fall, den sogenannten *Integer spin invariants* hat die Zustandssumme die Form

$$\mathcal{Z}(\tau) = \sum_i N_i |\sum_j m_{ij}\chi_{i,j}(\tau)|^2, \tag{3.1.2}$$

wobei die $\chi_{i,j}$ nur ein Teilmenge der Charakterfunktionen der Theorie durchlaufen und N_i, m_{ij} positive ganze Zahlen sind. Mehr noch: Die Erweiterung der Algebra kann von dem Term der Summe über i abgelesen werden, der den Charakter der $\mathbb{1}$ (also den Vakuumcharakter) enthält. Die anderen Charakterfunktionen, die in diesem Term auftreten, müssen (wegen der Invarianz der Zustandssumme unter T) ganzzahlige konforme Dimension tragen und entsprechen genau den zusätzlichen Strömen der erweiterten holomorphen Algebra. (Man beachte, daß in der Zustandssumme einer konformen Feldtheorie der Charakter der $\mathbb{1}$ genau einmal auftritt; sei er mit $i = j = 0$ indiziert, so muß weiterhin $N_0 = m_{00} = 1$ gelten. Wegen des Isomorphismus zwischen Zuständen und Feldern in der konformen Feldtheorie, mag man sich vorstellen, daß der dem Charakter $\sum_j m_{0,j}\chi_{0,j}$ entsprechende Hilbertraum $\mathcal{H}_0$ vermittels der Fusion auf allen anderen $\mathcal{H}_i$'s operiert.)

Diesem Verfahren folgend betrachten wir die Zustandssumme in der Form (2.1.2)

$$\mathcal{Z}(\tau,\bar{\tau}) = \frac{1}{2^r}\ \frac{1}{\mathrm{kgV}(k_i+2,2)} \sum_{\lambda,l,\bar{l}} \mathbf{A}_{l,\bar{l}}\ Z^l_\lambda(\tau)\bar{Z}^l_\lambda(\bar{\tau}), \tag{3.1.3}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{Z}_4(\times_{i=1}^r \mathbb{Z}_{2(k_i+2)}) \times \mathbb{Z}_4^r$ wieder die Nebenbedingungen $2\beta_0 \bullet \lambda \in 2\mathbb{Z}+1$ und $\beta_i \bullet \lambda \in \mathbb{Z}$ zu erfüllen hat.

Auf den ersten Blick hat (3.1.3) in der Tat genau die nach (3.1.2) erwünschte Form. Ein zweiter Blick enthüllt jedoch, daß der Vakuumcharakter der Theorie, Z^0_0, die Projektion auf ungerade Ladungen nicht überlebt (die Ladung des Vakuums muß verschwinden). Der String-Theoretiker freut sich sogar, da damit das unschöne Tachyon aus dem Spektrum eliminiert ist. (Merke: String-Theorie $\neq$ konforme Feldtheorie !) Kein Vakuum – keine Symmetriealgebra ?? Nein, denn ein dritter Blick zeigt, daß dank der nicht-diagonalen Verknüpfung der Charakterfunktionen von $SO(2)$ und $SO(10) \times E_8$ (2.4.4) durch die Bosonic string map (die kam uns schon immer seltsam vor, oder ?) auf der bosonischen Seite der heterotischen Konstruktion das (bosonische) Vakuum noch in der Theorie ist; in unserer Schreibweise (vgl. 2.4) verbirgt es sich in $\boldsymbol{\chi}^0_{(2,0^r,0^r)}$, also in $\bar{Z}^0_{(2,0^r,0^r)} = \sum \tilde{\boldsymbol{\chi}}_{(2;0^r;0^r)+b_0\beta_0+b_i\beta_i}$ (beachte, daß wegen der Bosonic string map (2.4) hier keine Vorzeichen auftreten) mit der $2\beta_0$-Ladung 1. — Ein vierter Blick zeigt dann schließlich, daß man den den Vakuumcharakter enthaltenden erweiterten Charakter Z^0_0 auf der fermionischen Seite, obwohl er herausprojiziert wird, sehr gut als Charakter der erweiterten Symmetriealgebra auffassen kann; da es genau die in ihm 'charakterisierten' Felder sind, die die anderen erweiterten Darstellungen mit Charakterfunktionen Z^l_λ erzeugen. Trotzdem werden wir uns im folgenden auf die bosonische Seite konzentrieren, da wir hier den affinen Anteil der Symmetrie kennen und uns die Erweiterung der Eichgruppe auf interessante Strukturen hoffen läßt.

Damit steht dann dem Ablesen der Symmetriealgebra nichts mehr im Wege. Sie wird erzeugt vom Orbit der $\mathbb{1}$ unter $\bar{\Phi}^0_{\beta_i}$ und $\bar{\Phi}^0_{\beta_0}$, die wir in (2.5) und (2.3) auf der fermionischen Seite mit den Superströmen $G^{RZ^\pm} \otimes G^{(i)^\pm}$ $(h = 3,\ Q$ ungerade) und dem Operator des spektralen Flusses der gesamten $c = 12$ Theorie (auch Gravitino Vertex-Operator) $\otimes_{\nu=0,\ldots r} \mathcal{U}^{(\nu)}_{-1/2} = \mathcal{U}^{ges}_{-1/2}$ identifizieren konnten. Auf der bosonischen Seite entsprechen diesen Operatoren $\bar{\Phi}_{\beta_0} = S^{SO(10)}_{\dot{\alpha}} \otimes_{i=1,\ldots r} \mathcal{U}^{(i)}_{-1/2} = U^{\dot{\alpha}}(\bar{z})$ (vgl. 2.7.5) und $\bar{\Phi}_{\beta_i} = e^{i\alpha\cdot H} \otimes G^{(i)^\pm}$, wobei $\alpha \in M^{SO(10)} + [v],\ \dot{\alpha} \in M^{SO(10)} + [c]$ ist.

Dazu kommt dann noch durch Tensorierung der transversalen Raum-Zeit-Bosonen ein Faktor von $\mathbb{R}^2$, sowie der kaum erwähnte E_8-Anteil. Im Rest findet man dann noch mindestens $U(1)^{r-1}$ von der $U(1)$-Algebren der r N=2 super-minimalen Modelle dividiert durch den diagonalen $U(1)_6$-Strom (verknüpft mit $\Phi^0_{\beta_0}$) der gesamten N=2 Theorie. Insgesamt

$$\mathbb{R}^2 \otimes (E_8)_1 \otimes (E_6)_1 \otimes U(1)^{r-1} \otimes \overbrace{(\text{parafermionischer Rest der N} = 2 \text{ Modelle})}^{\text{nicht}-\text{affin}}. \quad (3.1.4)$$

Übrig bleibt (in den hier betrachteten Fällen, vgl. Fuchs, Klemm, Scheich, Schmidt (1990) für den allgemeinen Fall) ein Rest der keine affinen Symmetrien mehr enthält und der hier als parafermionischer Rest bezeichnet wird, da

$$\frac{\text{N} = 2 \text{ minimal}}{U(1)} = \left(\frac{SU(2) \times U(1)}{U(1)_{diag}}\right)/U(1) \simeq \frac{SU(2)}{U(1)} = \text{parafermionische Modelle.}$$

3.2 Abschätzung des Operatorinhalts der W-Algebra

Im letzten Abschnitt haben wir die Form des Charakters $\bar{Z}^0_{(2;0^r;0^r)}$ der Symmetrie-W-Algebren von Gepner-Modellen bestimmt. Üblicherweise (vgl. z.B. Blumenhagen etal (1990)) werden W-Algebren jedoch durch die Anzahl und die konforme Dimension aller primären Felder definiert. Wir werden nun unter Vernachlässigung von Null-Feldern für einige Beispiele (darunter der prominente Fall $(3)^5$) die im Charakter kodierte W-Algebra abschätzen.

Das Verfahren geht auf Bouwknegt (1988) zurück und beruht auf einem Charakterargument: Der Charakter des von einem primären Feld ϕ mit ganzzahliger konformer Dimension h über dem Vakuum erzeugten Verma-Moduls hat die folgende einfache Form

$$\Phi_h(\tau) = \prod_{k\geq h} \frac{1}{1-q^k} \qquad \Big(\stackrel{h=1}{\equiv} \frac{q^{1/24}}{\eta(\tau)} \Big). \tag{3.2.1}$$

Dieser stimmt mit dem Charakter von ϕ (bzw. des von ϕ in anderen Charakterfunktionen erzeugten Anteils) dann überein, wenn es keine Null-Felder gibt. Im allgemeinen Fall jedoch (d.h. beim Auftreten von Null-Feldern) gibt Φ_h nur eine grobe aber einfache (da universelle) obere Schranke (Grad für Grad) der von ϕ erzeugten Zustände. Ausgerüstet mit diesen Charakterfunktionen mag man nun den Charakter χ einer durch n Felder der konformen Dimensionen h_i $(i = 1, \ldots n)$ erweiterten Algebra schreiben als

$$\chi(\tau) = q^{-c/24} \Big(\prod_{i=1}^{n} \Phi_{h_i}(\tau) \Big)(1 - a_m q^m - \ldots), \tag{3.2.2}$$

wobei die a_m in einer ersten Näherung die Zahl der Null-Felder beim Grad m angeben. In dieser Näherung kann man umgekehrt versuchen, von einem gegebenen Charakter auf den Feldinhalt zu schließen, indem man solange Φ_{h_i}'s (mit geeignetem h_i) ausdividiert, bis kein a_m mehr positiv ist. Die Zahl der Φ_{h_i} gibt dann die Zahl der Felder der konformen Dimension h_i, die den Charakter erzeugen. Leider ist jedoch die obige Interpretation der a_m nicht ganz korrekt, da sich die Verma-Moduln schon zweier Null-Felder, sagen wir bei Grad m und m', ab dem Grad $m + m'$ überschneiden (d.h. aus $a_m = a_{m'} = 1$ folgt $a_{m+m'} = -1$ in zweiter Näherung) und daher nicht notwendig alle $a_m \geq 0$ sind.

Mit anderen Worten: Für die exakte Zerlegung eines Charakters χ nach (3.2.2) müßte man die Einbettungsstruktur der Verma-Moduln kennen. Da wir in dem uns interessierenden Fall aber wirklich nur den Charakter haben, erhalten wir durch das Auffüllen von χ mit Φ_{h_i}'s nur eine Abschätzung der Anzahl und konformen Dimension h_i der den Charakter erzeugenden Felder; eine Abschätzung ohne Schrankenaussage (in der ersten Näherung (ohne Berücksichtigung der Überschneidung von Null-Feld-Verma-Moduln) erwarten wir bei niedrigen Graden eine zu niedrige, bei höheren zu hohe Schätzung des Feldinhalts.) In der Tat beobachtet man nach dem Ausdividieren der ersten Φ_h's eine Art Oszillation: Auf einen ganzen Block positiver a_m's folgen einige negative, dann wieder positive. Wegen der ungewissen Herkunft der negativen a_m's zu höheren Graden, werden wir das 'Auffüllen' beenden, sobald wir auf die ersten positiven a_m's stoßen.

Diesen Algorithmus haben wir mit Hilfe von REDUCE, einem Programmpaket für algebraische Formelmanipulation, auf einige Modelle angewendet. Dazu mußte zuerst der Charakter $\bar{Z}^0_{(2;0;0)}$ nach (2.1.2), (2.4.5), (2.2.9), (2.2.2), (1.5.15), (1.4.13) und (1.4.7) explizit berechnet werden; dann wurden (nach Aufspaltung in E_6-Darstellungen charakterisiert durch Q mod $^3/_2$) die Charakterfunktionen der affinen Symmetrien $\mathbb{R}^2 \times (E_8)_1 \times (E_6)_1$ herausdividiert. Der *Rest* enthält hier, anders als in (3.1.4), aus 'ästhetischen' Gründen nicht nur den in (3.1.4) definierten 'parafermionischen Rest', sondern dazu den $U(1)^{r-1}$-Faktor (in der Bezeichnungsweise dieses Kapitels $(q^{-1/24}\Phi_1)^{r-1}$). Für das Modell $(1)^9$ findet man (auf einer IBM 3084 bei einer Rechenzeit von ca. 20 Minuten)

$$
\begin{aligned}
\mathit{Rest} := {} & q^{-1/3}\ \Phi_1^8(q) \\
& (1 + 240\,q^3 + 2160\,q^6 + 6720\,q^9 + 17520\,q^{12} + 30240\,q^{15} + 60480\,q^{18} + \dots) \\
= {} & q^{-1/3}\ \Phi_1^8\ \Phi_3^{240}(q) \\
& (1 - 240\,q^4 - 240\,q^5 - 27000\,q^6 - 240\,q^7 \\
& + 28440\,q^8 + 4153600\,q^9 + 6508440\,q^{10} + 6537360\,q^{11} \\
& - 346612580\,q^{12} - 983385840\,q^{13} - 1757717160\,q^{14} \\
& + 18724580272\,q^{15} + 81031869180\,q^{16} + 198135594960\,q^{17} \\
& - 623992076800\,q^{18} - 4484796473520\,q^{19} - 14251134521748\,q^{20} + \dots),
\end{aligned}
\tag{3.2.3}
$$

für das Modell $(2)^6$

$$
\begin{aligned}
Rest := q^{-1/3}\ \Phi_1^5(q)& \\
&(1 + 6\,q^2 + 77\,q^3 + 303\,q^4 + 903\,q^5 + 2599\,q^6 \\
&\ + 7050\,q^7 + 17265\,q^8 + 39276\,q^9 + 85902\,q^{10} + 180966\,q^{11} \\
&\ + 366701\,q^{12} + 719280\,q^{13} + 1374006\,q^{14} + 2563137\,q^{15} + 4675752\,q^{16} \\
&\ + 8360700\,q^{17} + 14686650\,q^{18} + 25381551\,q^{19} + 43205514\,q^{20} + \ldots\,) \\
= q^{-1/3}\ \Phi_1^5\ \Phi_2^6\ \Phi_3^{71}\ \Phi_4^{205}\ \Phi_5^{159}(q)& \\
&(1 - 2593\,q^6 - 19368\,q^7 - 68190\,q^8 - 29197\,q^9 \\
&\ + 1134816\,q^{10} + 7139979\,q^{11} + 22302160\,q^{12} + 16320609\,q^{13} \\
&\ - 226463712\,q^{14} - 1409610534\,q^{15} - 4378052850\,q^{16} - 4907376246\,q^{17} \\
&\ + 27278131804\,q^{18} + 190561423863\,q^{19} + 624943856694\,q^{20} + \ldots\,).
\end{aligned}
\tag{3.2.4}
$$

Schließlich betrachten wir noch den Fall $(3)^5$, der, wohl wegen seiner vergleichsweise einfachen geometrischen Struktur (projektiver statt gewichteter projektiver Raum), vielfach studiert wurde (vgl. z.B. GSW und Candelas etal. (1991))

$$
\begin{aligned}
Rest := q^{-1/3}\ \Phi_1^4(q)& \\
&(1 + 5\,q^2 + 50\,q^3 + 175\,q^4 + 630\,q^5 + 1995\,q^6 + 5930\,q^7 + 15695\,q^8 \\
&\ + 39760\,q^9 + 93951\,q^{10} + 215070\,q^{11} + 470460\,q^{12} + 999480\,q^{13} \\
&\ + 2055180\,q^{14} + 4125012\,q^{15} + 8072365\,q^{16} + 15481570\,q^{17} \\
&\ + 29091350\,q^{18} + 53728770\,q^{19} + 97569828\,q^{20} + \ldots\,) \\
= q^{-1/3}\ \Phi_1^4\ \Phi_2^5\ \Phi_3^{45}\ \Phi_4^{110}\ \Phi_5^{220}(q)& \\
&(1 - 495\,q^6 - 5100\,q^7 - 24835\,q^8 - 61620\,q^9 \\
&\ + 11330\,q^{10} + 962290\,q^{11} + 5140585\,q^{12} + 15640750\,q^{13} + 21309495\,q^{14} \\
&\ - 65088268\,q^{15} - 555400525\,q^{16} - 2072240000\,q^{17} \\
&\qquad\qquad - 4561985770\,q^{18} - 1940132170\,q^{19} \\
&\ + 33431810470\,q^{20} + \ldots\,).
\end{aligned}
\tag{3.2.5}
$$

Man erkennt aus diesen Beispielen, daß die Symmetrie-W-Algebren der Gepner-Modelle so groß sind, daß sie mit Sicherheit nicht mit jetzigen Methoden explizit konstruiert werden können (außer man bedient sich vielleicht, wie Gepner, der Bildung von Tensorprodukten). Ganz so selbstverständlich ist dieses Ergebnis nicht, da man z.B. bei der Kompaktifizierung auf $D = 8$ Dimensionen W-Algebren findet, die nur affine Symmetrien tragen (für das Modell $(1)^3$ z.B. $E_8 \times E_8 \times SU(3)$).

In der Tat kann man die Theorie $(1)^9$ ein wenig besser verstehen, wenn man erkennt, daß der Rest-Charakter (3.2.3) (bis auf einen Faktor und die Eta-Funktionen) nichts anderes als der Charakter des Wurzelgitters von E_8, allerdings mit dem Argument 3τ statt τ, ist. Schreibt man diesen in der Form

$$\frac{1}{2}(\vartheta_2^8 + \vartheta_3^8 + \vartheta_4^8)(3\tau),$$

ersetzt die Jacobi-Theta-Funktionen ϑ durch die 'klassischen' $\Theta_{l,2}$ und nutzt schließlich, daß $\Theta_{l,k}(n\tau) = \Theta_{nl,nk}(\tau)$ ist, so findet man

$$\frac{1}{2}\big((\Theta_{3,6} + \Theta_{-3,6})^8 + (\Theta_{0,6} + \Theta_{6,6})^8 + (\Theta_{0,6} - \Theta_{6,6})^8\big)(\tau)$$

und kann auf die Operatoren der Symmetrie-W-Algebra in Form der verschiedenen Vertexoperatoren von $U(1)_6$ schließen. (Insbesondere ist eine guter Teil der 240 Felder der konformen Dimension 3 durch Tensorprodukte von zwei Feldern der konformen Dimension $^3/_2$ gegeben.) Eine mögliche Verbindung zur geometrischen Interpretation, nämlich Propagation auf drei Kopien des Torus samt Orbifoldidentifizierung (Greene, Plesser (1988)), bleibt jedoch schleierhaft: Die W-Algebra ist als Abbildung der masselosen Felder in die masselosen Felder trivial.

3.3 Gepner-artige Modelle aus W-Algebren

In diesem Abschnitt wollen wir die in den letzten beiden Abschnitten behandelte Frage nach W-Algebren in Gepner-Modellen in gewissem Sinne umkehren: Was muß eine

W-Algebra erfüllen, die an Stelle der N=2 super-minimalen Modelle in die Zustandssumme der ($D = 4$)-dimensionalen heterotischen String-Theorie mit N=1 Raum-Zeit-Supersymmetrie eingebaut werden soll ? – und welche Information über die W-Algebra brauche ich, um z.B. das masselose Spektrum der String-Theorie zu berechnen ? Wir folgen dabei im wesentlichen der Diskussion in Schellekens, Yankielowicz (1990a).

Aus der Anomaliekürzung (2.2) und der Forderung nach N=1 Raum-Zeit-Supersymmetrie (2.3) folgt, daß die W-Algebra eine *N=2 super-konforme Symmetrie* und die *zentrale Ladung* $c = 9$ tragen muß. (Das sollte aus der vorangegangenen Diskussion mehr als klar sein; die Frage ist: Was noch ?) Um die Projektion auf ungeradzahlige Ladung durchführen zu können (der Leser erinnere sich, daß neben der N=2 Weltflächen-Supersymmetrie auch noch Ladungsquantisierung verlangt wurde), müssen wir im Ramond-Sektor der W-Algebra einen *simplen* Strom der konformen Dimension $h = {}^3/_8$, also einen *Ramond-Grundzustand*, z.B. den Operator des spektralen Flußes (dieser erfüllt (vgl. 4.4) automatisch die obigen Bedingungen) identifizieren. Dieser kann dann mit dem Spin-Operator von $SO(10)$ (bzw. dem von $SO(2)$ und einem Geist-Anteil) zum Gravitino-Vertex-Operator zusammengesetzt werden; damit ist dann N=1 Raum-Zeit-Supersymmetrie (und entsprechend auf der bosonischen Seite die Erweiterung von $SO(10)$ auf E_6) garantiert. Insbesondere sollte die W-Algebra nicht ausgerechnet als Erweiterung der N=2 super-konformen Algebra mit dem Operator des spektralen Flußes (der jedoch gebrochene rationale konforme Dimension hat) definiert werden, da dann unter Umständen gar kein Operator der gewünschten Form mehr vorhanden ist.

Wir sollten an dieser Stelle erwähnen, daß W-Algebren mit N=1 super-konformer Symmetrie schon konstruiert sind (vgl. z.B. Blumenhagen (1991)); auch in der Darstellungstheorie dieser konformen Feldtheorien gibt es Fortschritte (Blumenhagen, Eholzer, Honecker, Hübel (1991)). Mit ähnlichen Methoden wird zur Zeit der Fall von N=2 super-konformer Symmetrie untersucht (Blumenhagen (1992)).

Die zweite Projektion (2.5), nämlich auf Zustände wohldefinierter Monodromie bezüglich des N=1 Superstroms der Theorie $G = (G^+ + G^-) = i\psi^a \partial X_a + G^{int}$, ist dagegen einfach dadurch zu erreichen, daß man die Darstellungen der N=2 super-konformen Algebra aufspaltet, in Darstellungen, die nur geradzahlige Potenzen der Superströme tragen. Das kann man bei der expliziten Berechnung der Charakterfunktionen ohne Schwierigkeiten implementieren. Der Superstrom selbst wird dann zum primären Feld; auch ist er simpler Strom (die Orbits sind gerade die Superdubletts). Schließlich projiziert man einfach auf die Zustände, die unter $G^{RZ}G^{int}$ invariant sind. (Betrachtet man das Tensorprodukt mehrerer (W-Algebra-)Theorien, so muß man natürlich wie bei den Gepner-Modellen eine entsprechende Projektion zwischen allen Einzeltheorien durchführen.)

Wir waren oben von der N=2 super-konformen W-Algebra mit zentraler Ladung $c = 9$ direkt zu den für die String-Theorie notwendigen Projektionen übergegangen und erhalten auf diesem Weg eine modular invariante Zustandssumme, wenn ... ja, wenn wir als Ausgangspunkt schon eine modulare Invariante haben. Dies ist im W-Algebra-Zugang ein kritischer Punkt, da die Berechnung der ersten Terme der Charakterfunktionen (wenn man die Darstellungen erst einmal kennt, hierzu vgl. Varnhagen (1992) und Eholzer et al (1991)) nach der expliziten Konstruktion (vgl. Blumenhagen etal (1990)) der W-Algebra einfach, die Berechnung der vollständige Charakterfunktionen oder gar deren modulares Transformationsverhalten jedoch ein ungelöstes Problem ist. Bisherige Erfahrung zeigt jedoch, daß die Diagonale immer eine modulare Invariante ist. Mit dieser als Ausgangspunkt sollte die Konstruktion auch für N=2 Super-W-Algebren zum Ziel führen.

Weitere denkbare Verallgemeinerungen der hier vorgestellten allgemeinen Konstruktion sind: 1. Starte mit einer nicht-quadratischen Theorie vom Typ $\mathcal{C}_{9;22} \neq \mathcal{C}_{9;9} \times (SO(10) \times E_8)_R$, wobei $\mathcal{C}_{a;b}$ eine N=2 super-konforme Feldtheorie mit zentraler Ladung a auf der holomorphen und b auf der antiholomorphen Seite und einer zugehörigen modularen Invarianten bezeichnet. 2. Füge auf der bosonischen Seite weitere Projektionen ein, die dort zur Brechung der Welt-Flächen-Supersymmetrie und/oder der E_6-Eichsymmetrie führen mögen (vgl. Schellekens, Yankielowicz (1990a) und Literaturangaben darin).

4 Anhang: Verwendete Konzepte

Hier werden die in den vorangegangenen Kapiteln verwendeten Konzepte, sowie Konstruktionen, die für (m)ein Verständnis wesentlich sind, erklärt oder zumindest ein wenig ausführlicher vorgestellt.

4.1 Tensorprodukte konformer Feldtheorien

bieten die einfachste Möglichkeit, aus gegebenen (unitären) Theorien weitere mit höheren zentralen Ladungen zu bilden.

Seien $\mathcal{A}^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ die Symmetriealgebren zweier konformer Feldtheorien, die über den, den primären Feldern entsprechenden, HWS (Höchstgewichts-Zuständen) $|q^{(i)}\rangle$ (mit Quantenzahlen $q^{(i)}$) die Hilberträume $\mathcal{H}_{q^{(i)}}$ mit Charakterfunktionen $\chi_{q^{(i)}}$ aufspannen. Dann definiert man das *Tensorprodukt* beider Theorien als die konforme Feldtheorie, deren Symmetriealgebra über den HWS $|q^{(1)}\rangle \otimes |q^{(2)}\rangle$ die Hilberträume $\mathcal{H}_{q^{(1)}} \otimes \mathcal{H}_{q^{(2)}}$ mit den Charakterfunktionen $\chi_{q^{(1)}} \cdot \chi_{q^{(2)}}$ aufspannt. Die Symmetriealgebra der Tensortheorie läßt sich am einfachsten mit Hilfe der Moden der Operatoren der Einzeltheorien beschreiben; Generatoren sind alle Moden der Einzeltheorien und zu den Relationen der Einzeltheorien fügt man einzig und allein hinzu, daß zwei Operatoren aus verschiedenen Theorien antikommutieren, wenn sie beide fermionisch sind, und sonst kommutieren. Die Zustandssumme der Tensortheorie ist dann einfach das Produkt der Zustandssummen der Einzeltheorien.

In dem so definierten Raum der Felder gibt es dann drei Operatoren, die die OPE des Energie-Impuls-Tensors erfüllen, nämlich T^1, T^2 und $\hat{T} = T^1 + T^2$ mit zentraler Ladung c_1, c_2 und $\hat{c} = c_1 + c_2$. Die kanonische Wahl (wenn man verlangt, daß der Vakuumcharakter der Theorie die Form $q^{c/24}(1 + a_1 q + \ldots)$ hat, wobei c die zentrale Ladung des Energie-Impuls-Tensors ist) ist $\hat{T}$. Eine weitere ausgezeichnete Rolle im Spann von T^1 und T^2 spielt dann der zu $\hat{T}$ in der Zwei-Punkt-Funktion orthogonale Operator $\check{T} = c_2 T^1 - c_1 T^2$; er erfüllt (wir setzen $c_1,\ c_2 \neq 0$ voraus) zwar nicht die OPE eines Energie-Impuls-Tensors, ist jedoch Virasoro-primär bezüglich $\hat{T}$ mit der konformen Dimension 2. Die Symmetriealgebra der Tensortheorie enthält folglich zumindest die Algebra $W(2, 2)$.

Das bis jetzt beschriebene Tensorprodukt (Bildung aller möglichen Produkte von Charakterfunktionen der Einzeltheorien) erhält die konforme Symmetrie, jedoch nicht notwendig weitere Symmetrien. So muß man sich im Falle des Tensorprodukts zweier super-konformer Feldtheorien ein wenig mehr anstrengen und ein ($\mathbb{Z}_2$-graduiertes oder)

Super-Tensorprodukt definieren, wenn man die *super*-konforme Struktur erhalten möchte. Betrachte dazu das Tensorprodukt zweier N=1 super-konformer Feldtheorien: Der Superpartner des Energie-Impuls-Tensors $\hat{T}$ der Tensortheorie ist durch $\hat{G} = G^1 \pm G^2$ gegeben. Den Superpartner des (Virasoro-)primären Felders $\check{T}$ erhält man durch (OPE) Anwendung von $\hat{G}$ und findet $\check{G} = c_2 G^1 \mp c_1 G^2$. Die Symmetriealgebra der Super-Tensortheorie enthält also zumindest die Super-W-Algebra $\mathcal{SW}(3/2, 3/2)$. Der wesentliche Unterschied zum normalen Tensorprodukt besteht nun darin, daß im Super-Tensorprodukt nur solche Produkte von Charakterfunktionen der Einzeltheorien auftreten dürfen, die lokal zu $\hat{G}$ (und $\check{G}$) sind. (Die entsprechende Orbifold-Konstruktion wird für den Fall der Gepner-Modelle in 2.5 vorgestellt.) Insbesondere sind Produkte von Charakterfunktionen aus dem R- und NS-Sektor nicht zulässig (sie entsprechen primären Feldern, die nicht lokal zu $\hat{G}$ sind). Diese treten jedoch dann auf, wenn man die Super-Struktur aufgibt. Die entsprechende W-Algebra der Tensortheorie ist dann $\mathcal{W}(3/2, 3/2, 2, 2)$. Die beiden möglichen W-Algebren entsprechen verschiedenen Zustandssummen. (Dieselbe Struktur (der Superstrom G wird ersetzt durch das Fermion ψ) findet man bei den Zustandssummen des Tensorprodukts zweier freier reeller Fermionen (vgl. 1.2): $\mathcal{Z}_{Ising^2} = \mathcal{Z}^2_{Ising}$, die Zustandssumme des 'einfachen' Tensorprodukts, und $\mathcal{Z}_{Dirac}$, die der Erweiterung der Symmetriealgebra um den $U(1)_2$-Strom $\psi^1 \otimes \psi^2$ entspricht.)

Analog erhält man im Tensorprodukt zweier N=2 super-konformer Algebren neben der N=2 Algebra mit zentraler Ladung $\hat{c} = c_1 + c_2$ ein N=2 super-primäres Feld(multiplett) der konformen Dimension $(2, {}^3/_2, 1)$ und Ladung $(0, \pm 1, 0)$.

Jedes Produkt von modularen Invarianten der Einzeltheorien ist wieder modulare Invariante der Tensortheorie; nur dies ist sicherlich nicht die allgemeinste Lösung. Es gibt keinen Grund dafür, daß schon die einzelnen Theorien modular invariant kombiniert werden (vgl. Fuchs, Klemm, Schmidt, Versteegen (1990)). Insbesondere hat man im Tensorprodukt gleicher Theorien eine Permutationsinvarianz.

4.2 Die GKO-Konstruktion

ist in gewisser Weise eine zu 4.1 inverse Prozedur, bei der eine Unteralgebra der Operatoralgebra 'herausdividiert' oder 'abgezogen' wird. Sie ermöglicht die explizite Konstruktion vieler (vielleicht aller) rationaler Theorien.

Wir betrachten dazu nach Goddard, Kent, Olive (1986) (vgl. auch Ginsparg (1988)) zwei affine Algebren g und h mit $h \subset g$ (beachte, daß im allgemeinen Fall der Level von h nicht mit dem von g übereinstimmt). Wir bezeichnen die Ströme in g mit J_g^a und die in h mit J_h^j, wobei j Werte von 1 bis $\dim h$ (a von 1 bis $\dim g$) annimmt. Die Sugawara-Konstruktion (1.3.2) ergibt dann zwei Energie-Impuls-Tensoren T^g, T^h mit zentralen Ladungen (1.3.4) c^g, c^h. Dann sind die Ströme J_h^j der Unteralgebra Virasoro-primär mit konformer Dimension 1 zu beiden Energie-Impuls-Tensoren, folglich verschwindet die OPE der J_h^j mit $T^{g/h} := T^g - T^h$. Daher kommutieren aber auch $T^{g/h}$ und T^h, also haben wir T^g orthogonal zerlegt in

$$T^g = T^{g/h} + T^h, \qquad T^{g/h} \cdot T^h = 0. \tag{4.2.1}$$

Setzt man diese Zerlegung in die OPE von $T^g T^g$ ein, so folgt, daß auch $T^{g/h}$ die OPE eines Energie-Impuls-Tensors mit der zentralen Ladung

$$c^{g/h} = c^g - c^h \tag{4.2.2}$$

erfüllt.

Zwei Standardbeispiele für die GKO- oder (zu Deutsch) Quotienten-Konstruktion sind

$$\frac{SU(2)_k \times SU(2)_1}{SU(2)_{k+1,diag}}$$

und

$$\frac{SU(2)_k \times SU(2)_2}{SU(2)_{k+2,diag}},$$

die auf eine explizite Konstruktion aller unitären minimalen bzw. N=1 super-minimalen Modelle führen.

Neben den zentralen Ladungen kann man aus der Konstruktion weitere Informationen über die Quotienten-Theorie erhalten. Wir bezeichnen dazu den Darstellungsraum von g_k zum höchsten Gewicht μ^g mit $\mathcal{H}^g(\Lambda)$, wobei $\Lambda = (c^g, \mu^g)$ und c^g eindeutig durch den Level k charakterisiert ist (analog für h mit $\mathcal{H}^h(\lambda)$ und $\lambda = (c^h, \mu^h)$). Dann muß sich dieser Raum unter der orthogonalen Zerlegung (4.2.1) der Virasoro-Algebra in eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen

$$\mathcal{H}^g(\Lambda) = \bigoplus_{\lambda} \mathcal{H}^{g/h}(\Lambda, \lambda) \otimes \mathcal{H}^h(\lambda) \tag{4.2.3}$$

aufspalten, wobei $\mathcal{H}^{g/h}(\Lambda, \lambda)$ eine irreduzible Darstellung von $T^{g/h}$ mit zentraler Ladung $c^{g/h}$ zu einen primärem Feld der konformen Dimension $h^{g/h}_{(\Lambda,\lambda)}$ bildet. Die explizite Aufspaltung kann man oft (wie oben im Fall der N=2 super-minimalen Modelle) aus Betrachtungen der Charakterfunktionen ableiten. Dazu schreibt man (4.2.3) in der Form

$$\chi^g_\Lambda(z_i, \tau) \;=\; \sum_{\lambda} b^\Lambda_\lambda(\tau)\; \chi^h_\lambda(z_i, \tau), \tag{4.2.4}$$

(wobei die z_i (vgl. (1.3.10)) auf Parameter zur Cartan-Unteralgebra von h beschränkt sind). Die *Verzweigungs-Funktionen* b^Λ_λ können dann ('in erster Näherung') mit den Charakterfunktionen der Quotiententheorie identifiziert werden; deren Verhalten unter modularen Transformationen folgt mit (4.2.4) aus dem der affinen Theorien (und damit nach Verlindes Formel auch die Fusions-Algebra). Die modularen Invarianten der Quotiententheorie sind dann einfach durch das Tensorprodukt derjenigen der Einzeltheorien gegeben.

Soll die Quotiententheorie eine erweiterte Symmetrie tragen, so muß man einfach Generatoren dieser Symmetrie in g konstruieren, die mit den Strömen J^j_h von h vertauschen. (Vertauschen diese mit L_0, so kann man ihre Null-Moden als zusätzliche Gewichte in den Charakter der Quotiententheorie einfügen.)

Wir waren oben bei der Identifikation der Verzweigungs-Funktionen mit den Charakterfunktionen der Quotiententheorie vorsichtig. In der Tat ist diese Identifikation im allgemeinen nicht so einfach. Das Problem hat zwei Seiten, die unter modularen Transformationen ineinander übergehen (vgl. Gepner (1989b) und Schellekens, Yankielowicz (1990)). Zum einen tauchen in (4.2.4) nicht alle möglichen Darstellungen von

g und h auch tatsächlich auf; es gibt Auswahlregeln (wie $l = m \bmod 2$ in (1.4.12)). Zum anderen sind nicht alle auftretenden Charakterfunktionen und damit Felder der Quotiententheorie verschieden; sie müssen identifiziert werden (wie in der zweiten Gleichung von (1.4.14)). Man spricht dann von *Feldidentifikation*. In dem bei uns auftretenden Fall (1.5) ist dieses Problem harmlos, da keine Fixpunkte der Feldidentifikation auftreten, d.h. alle Orbits des simplen Stroms haben dieselbe Länge (und man kann die Multiplizität des Vakuums in der Zustandssumme auf Eins normieren, ohne daß nicht-ganzzahlige Multiplizitäten auftreten.) Wir konnten daher die Identifizierung naiv durchführen und Charakterfunktionen sowie deren modulares Transformationsverhalten aus der zu (4.2.4) analogen Gleichung ablesen.

4.3 Die Orbifold-Konstruktion

In diesem Abschnitt wollen wir die Orbifold-Konstruktion modular invarianter Zustandssummen (zu gegebener konformer Feldtheorie) vorstellen und uns dabei auf Orbifolds mit abelscher Symmetriegruppe konzentrieren. Wir verweisen als allgemeine Referenz auf Dijkgraaf, Vafa, Verlinde und Verlinde (1989).

In der konformen Feldtheorie hat sich der Begriff der Orbifold, ausgehend von der geometrischen Interpretation des 'Quotienten' einer Mannigfaltigkeit durch eine diskrete Gruppe, zu einer allgemeinen Konstruktion modular invarianter Zustandssummen (oft ohne geometrische Interpretation) verselbständigt. Die Konstruktion ist anwendbar, wenn auf der Operatoralgebra einer Theorie (wir meinen damit die Algebra bestehend aus der Symmetriealgebra, aber auch allen primären Feldern) eine diskrete Symmetriegruppe G (linear und) konsistent mit (mindestens) der konformen Symmetrie der Theorie operiert. Ausführlicher: G sei eine Untergruppe der Endomorphismen der Operatoralgebra, respektiere die Zerlegung des Raums der Felder (bzw. des Hilbertraums) in holomorphen und antiholomorphen Anteil und vertausche mit der Anwendung des Energie-Impuls-Tensors (insbesondere bleibt der Wert der zentralen Ladung unangetastet). Die Symmetriealgebra $\mathcal{A}$ zerfällt unter der Wirkung von G in Unterräume, die in verschiedenen irreduziblen Darstellungen r_α von G transformieren

$$\mathcal{A} = \bigoplus_\alpha \mathcal{A}_\alpha. \tag{4.3.1}$$

Die Idee oder das Ziel ist nun, eine konforme Feldtheorie zu konstruieren, die als Symmetriealgebra die unter G invariante Unteralgebra $\mathcal{A}_0$ von $\mathcal{A}$ (oder eine, die diese enthält) trägt!

Im Hilbertraum würde man also gerne auf die Zustände, die unter G invariant sind, projizieren (man sagt auch, die diskrete Symmetrie 'ausmotten'). Nichts leichter als das: Gegeben ein Feld ϕ, dann ist das Feld ($h.\phi$ bezeichne das Bild von ϕ unter dem Endomorphismus zu h)

$$\sum_{h \in G} h.\phi(z) \tag{4.3.2}$$

(und damit der von (4.3.2) erzeugte Zustand) sicherlich G-invariant. Der Operator, der das erreicht, ist der Projektor

$$P = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h, \qquad P^2 = P \tag{4.3.3}$$

(die Projektoreigenschaft in Darstellungen folgt aus der Orthogonalität der Darstellungen von G). Man erhält als ausgemotteten 'Charakter' zu ϕ

$$\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \operatorname{tr}_{\phi}\, hq^{L_0 - c/24}. \tag{4.3.4}$$

Die Frage ist nun: Wie kann man mit 'Charakterfunktionen' der Art (4.3.4) eine modular invariante Zustandssumme 'bauen'?

Zu diesem Zweck ist es wegen des Auftretens gewisser lästiger (aber wesentlicher) Phasenfaktoren von Vorteil, statt der Charakterfunktionen (diese unterscheiden sich nach Dijkgraaf et al von den sogenannten holomorphen Blöcken, den einzelnen Summanden in (4.3.4)) die Partitions-Funktionen $Z(h,g)$ zu betrachten. Um diese in der notwendigen Allgemeinheit zu definieren, müssen wir in der Argumentation ein wenig ausholen. Also: Die Wirkung der diskreten Gruppe G auf unserer Operatoralgebra erlaubt (wie in 4.4 ausgeführt) und erfordert (durch modulare Invarianz) die Einführung von *verdrehten (twisted) Feldern* mit nicht-trivialer Monodromie in 'Raum'-Richtung $\phi(C_0 z) = g.\phi(z)$ (dabei bezeichent $C_0 z$ der Endpunkt der Kurve $t \mapsto e^{2\pi i t} z$ für $t \in [0,1]$). Den von den Feldern mit Monodromie g erzeugten verdrehten Sektor des Hilbertraums bezeichnen wir mit $\mathcal{H}_g$. (Wie in 4.4 gezeigt, ist $\mathcal{H}_g$ und damit auch der Raum $\mathcal{A}^g$ der getwisteten Felder unter Konjugation mit Elementen aus G invariant, d.h. der Index g sollte dann als Index einer Konjugationsklasse aufgefaßt werden. Es folgt weiterhin, daß die zu (4.3.1) analoge Zerlegung $\mathcal{A}^g = \oplus_\alpha\, \mathcal{A}^g_\alpha$ im allgemeinen nicht-abelschen Fall nicht auf Darstellungen von G, sondern auf solche des Stabilisators $N_g = \{h \in G | ghg^{-1}h^{-1} = e\}$ führen.) Wir definieren die *Partitions-Funktionen* durch

$$Z(h,g) := \left| \; h \underset{g}{\square} \; \right|^2 = \operatorname{tr}_{\mathcal{H}_g \otimes \bar{\mathcal{H}}_g}\, h^{\otimes}\; q^{L_0 - c/24}\; \bar{q}^{\bar{L}_0 - c/24} \tag{4.3.5}$$

($h^{\otimes} = h \otimes h^*$), wobei die holomorphen Blöcke durch

$$h \underset{g}{\square} \; = \; \operatorname{tr}_{\mathcal{H}_g}\, hq^{L_0 - c/24} = \sum_{\alpha} \operatorname{tr}_{\mathcal{H}_g^\alpha}\; r^g_\alpha(h) q^{L_0 - c/24} \tag{4.3.6}$$

gegeben sind ($\mathcal{H}_g^\alpha$ bezeichnet dabei den Unterraum von $\mathcal{H}_g$, der sich in der irreduziblen Darstellung r^g_α von G (allgemein N_g) transformiert).

Mit Hilfe dieser Partitions-Funktionen ist es nun denkbar einfach, die Zustandssumme aufzuschreiben, die sich durch naives Einfügen des Projektors P aus (4.3.3) in die diagonale Invariante $\mathcal{Z}_0 = Z(0,0)$ der Theorie ergibt

$$\mathcal{Z}^G = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} Z(h,1). \tag{4.3.7}$$

Jetzt werfen wir die Theorie auf den Zylinder (vgl. Gepner, Witten (1986)) und verlangen Invarianz unter der modularen Gruppe, die von $S : (a,b) \to (-b,a)$ und $T : (a,b) \to (a+b,b)$ (a, b eine Basis der Homologie, $\tau = {}^{a}\!/_{b}$) erzeugt wird. Sofort macht sich die Definition der Partitions-Funktionen $Z(g,h)$ bezahlt, denn g und h geben nichts anderes als die Monodromie der Felder in Raum- (b) und 'Zeit'-Richtung (a) an. Für g sollte das klar sein, doch auch für h folgt das leicht, da das Gewicht $q^{L_0}\bar{q}^{\bar{L}_0} = e^{-2\pi Im(\tau)(L_0+\bar{L}_0)} e^{2\pi i Re(\tau)(L_0-\bar{L}_0)}$ in den Partitions-Funktionen gerade der Operator der 'Zeit'-Evolution (bzw. dessen Inverses) ist, also einen Zustand zur 'Zeit' t in einen zur 'Zeit' $t - 2\pi\tau$ überführt. Es folgt, daß sich die Partitions-Funktionen wie folgt transformieren

$$\begin{aligned} T &: Z(h,g) \to Z(hg,g), \\ S &: Z(h,g) \to Z(g^{-1},h) \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

und allgemein

$$\tau \to \frac{a\tau + b}{c\tau + d} : Z(h,g) \to Z(h^a g^b, h^c g^d).$$

(Dies gilt für die holomorphen Blöcke nur bis auf Phasen.) Nun ist es mit Hilfe von (4.3.8) leicht einzusehen, daß die Zustandssumme

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{|G|} \sum_{g,h \in G} Z(h,g) \tag{4.3.9}$$

modular invariant ist. Modulare Invarianz erzwingt also, wenn man auf invariante Felder projiziert, die Hinzunahme aller verdrehten Sektoren. (4.3.9) läßt sich jedoch weiter verallgemeinern. So ist

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{|G|} \sum_{g,h \in G} \epsilon(h|g) Z(h,g) \tag{4.3.10}$$

modular invariant, wenn die Phasenfaktoren ϵ, auch *diskrete Torsion* (vgl. C. Vafa (1986)) genannt, folgenden Gleichungen genügen

$$\begin{aligned} \epsilon(g|g) &= 1, \\ \epsilon(h|g) &= \epsilon(g|h^{-1}) \ (= \epsilon(h|g)^{-1}), \\ \epsilon(h|g)\epsilon(h'|g) &= \epsilon(hh'|g), \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

(die erste Gleichung legt die Gesamtphase von $\mathcal{Z}$ fest; aus den beiden anderen folgt insbesondere, daß $g \to \epsilon(g,h) \leftarrow h$ Darstellungen von G sind, auch $\epsilon(e|g) = 1$.) Für Gruppen vom Typ $\mathbb{Z}_n$ folgt, daß $\epsilon \equiv 1$ ist. Für den allgemeinen abelschen Fall $\mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ (vgl. Vafa (1986)), wobei ohne Einschränkung n_i jeweils n_{i+1} teilt, mit Generatoren $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ kann man für alle Phasen $\epsilon(\alpha_i, \alpha_j)$ $(i < j)$ eine n_i-te Einheitswurzel wählen.

Erlaubt man nicht-abelsche Orbifolds, so ist die hier vorgestellte Konstruktionen sehr allgemein. Die Allgemeinheit hat jedoch ihren Preis ('conservation of misery'): Orbifold-Modelle sind schwierig. Insbesondere sind keine allgemeine Formeln für die Fusions-Algebra, Feldinhalt, OPE etc. der ausgemotteten (oder gefalteten) Theorie bekannt; weiter ist man jedoch im Fall der abelschen Orbifolds und der Theorie der simplen Ströme (vgl. Schellekens, Yankielowicz (1990b)).

Abschließend wollen wir noch Gleichung (4.3.5) für den abelschen Fall auf eine einfachere Form bringen. Habe also die Fusions-Algebra eine $\mathbb{Z}_N$-Symmetrie. Dann sind die irreduziblen Darstellungen durch $r_\alpha : \mathbb{Z}_N \to U(1),\ a \mapsto e^{2\pi i \alpha a/N}$, mit $\alpha \in \mathbb{Z}_N$ gegeben. Da alle Darstellungen die gleiche Dimension tragen, sind die Hilberträume $\mathcal{H}_g^\alpha \otimes \bar{\mathcal{H}}_g^{\alpha'}$ und $\mathcal{H}_g^{\alpha-\alpha'} \otimes \bar{\mathcal{H}}_g^0$ isomorph. Es folgt, daß

$$\begin{aligned} Z(h,g) &= \sum_{\alpha,\alpha'} \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_g^\alpha \otimes \bar{\mathcal{H}}_g^{\alpha'}} \ r_\alpha^g(h) r_{\alpha'}^g(h)^* \ q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - c/24} \\ &= |G| \sum_{\beta = \alpha - \alpha'} \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_g^\beta \otimes \bar{\mathcal{H}}_g^0} \ r_\beta^g(h) \ q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - c/24} \\ &= \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_g \otimes \bar{\mathcal{H}}_g} \ (h \otimes \mathbb{1}) \ q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - c/24} \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

ist, man also die 'Zeit'-Monodromie nur im holomorphen Anteil einfügen muß.

4.4 Automorphismen konformer Algebren

sind von großer Bedeutung in der Darstellungstheorie, da sie mögliche Randbedingungen (aufgefaßt als zusätzliche Struktur der Operator-Algebra) der Felder bestimmen. Wir folgen im wesentlichen Schwimmer und Seiberg (1987) und diskutieren insbesondere den spektralen Fluß in N=2 super-konformen Modellen.

Ausgangspunkt der Betrachtung ist eine Operatoralgebra definiert durch Generatoren A_i und OPE (als Relationen). (Diese Operatoralgebra kann nur aus der Symmetriealgebra einer Theorie bestehen, aber auch primäre Felder einer oder mehrerer Darstellungen umfassen.) Wir bezeichnen mit G die *globale* Automorphismengruppe (global, weil diese Automorphismen keine z-Abhängigkeit tragen) der Algebra und die Darstellungsmatrizen der $g \in G$ auf $\mathcal{A}$ mit $R_{ij}(g)$, d.h. die OPE vertauscht mit der (invertierbaren) Ersetzung

$$A_i \to R_{ij}(g)\ A_j. \tag{4.4.1}$$

(Dabei verlangt man entweder, daß die OPEs der Symmetriealgebra unter (4.4.1) invariant sind, oder definiert die 'neue' Symmetriealgebra als die, die unter (4.4.1) invariant ist.) Mögliche Randbedingungen der Generatoren (konsistent mit den Relationen) sind dann durch

$$A_i(C_0 z) = R_{ij}(g)\ A_j(z) \tag{4.4.2}$$

gegeben. (Als erstes Beispiel seien periodische und antiperiodische Randbedingungen für freie Fermionen erwähnt.)

Nicht alle $g \in G$ führen jedoch zu Algebren mit verschiedenen Randbedingungen. So ergibt die Anwendung eines globalen Automorphismus $R(h)$ auf (4.4.2)

$$A_i(C_0 z) = R_{ij}(h^{-1} g h)\ A_j(z). \tag{4.4.3}$$

(Der Leser mache sich den Unterschied des Auftretens eines Automorphismus als Abbildung von der Algebra in die Algebra (4.4.1) und als mögliche Randbedingung (4.4.2) klar, das eine ist ein Basiswechsel, das andere eine zusätzliche Struktur.) Sind also die verschiedenen Algebren (verschieden in ihren Randbedingungen) durch Konjugationsklassen der Automorphismengruppe G gegeben?

Nicht ganz: Eine Algebra kann nicht-triviale *innere* Automorphismen der Form $A_i \to \gamma A_i \gamma^{-1}$ zulassen, wobei γ durch Elemente der Algebra selbst erzeugt wird, also $\gamma = e^{\alpha A}$. Im Fall der von uns betrachteten Algebren lassen sich die von diesen Automorphismen erzeugten Randbedingungen durch sogenannte *lokale* Automorphismen (die lokalen Symmetrien, wie einer affinen Unteralgebra (bei uns $U(1)$), entsprechen) 'wegeichen' (vgl. die folgenden Beispiele), d.h. die Operatoren mit den durch den inneren Automorphismus gegebenen Randbedingungen lassen sich durch die mit trivialen Randbedingungen ausdrücken und wir werden daher diese Algebren identifizieren. (Man beachte in diesem Zusammenhang, daß die Erweiterung einer Algebra dazu führen kann, daß äußere Automorphismen zu inneren werden (z.B. $U(1) \subset SU(2)$). Ensprechend sollten bei der GKO-Konstruktion neue äußere Automorphismen auftreten.) Wir erhalten: *Unabhängige* Algebren entsprechen den Konjugationsklassen der äußeren Automorphismengruppe (wobei ein Automorphismus als *äußerer* definiert wird, wenn er nicht innerer ist). Wir werden nun einige Beispiele mit nicht-trivialen inneren und äußeren Automorphismengruppen vorstellen, uns dann aber auf die inneren Automorphismen von $SU(2)_k$ und der N=2 super-konformen Algebra konzentrieren, sowie deren Relevanz in der Darstellungstheorie der entsprechenden Algebra.

Beispiele:

i) Ein freies Fermion ψ hat als äußeren Automorphismus $g : \psi \to -\psi$, also die Automorphismengruppe $\mathbb{Z}_2$.

ii) Zwei freie Fermionen haben die globale Automorphismengruppe $O(2)$, jedoch keine inneren Automorphismen. Die Konjugationsklassen der globalen Automorphismen sind zum einen die Rotationen ($SO(2)$), parametrisiert durch einen Winkel $\varphi \in [0, 2\pi]$; zum anderen bleibt für Drehspiegelungen ($\det = -1$) als einzige Konjugationsklasse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ übrig.

iii) Für das freie Boson gilt dasselbe wie für das erste Beispiel. Getwisteter Fall (vgl. Yang (1987)): Moden-Entwicklung des freien Feldes $\phi(z) = i \sum_{n \in \mathbb{Z}+1/2} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}$, Algebra der Moden $[\alpha_n, \alpha_m] = n\delta_{n+m,0}$, *keine* Null-Moden. Es gilt $L_0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}+1/2} \alpha_{-n}\alpha_n + {}^1/16$.

Es gibt nur ein einziges primäres Feld, $\partial\phi$ mit zugehörigem Charakter

$$\chi^T(\tau) = q^{\frac{1}{48}} \prod_{n\geq 1} (1 - q^{n-1/2})^{-1}. \tag{4.4.4}$$

iii') Für $U(1)$ sieht die Sache schon wieder anders aus, da der Strom $J = i\partial\phi$ als globale Automorphismen $\phi \to \phi + 2\pi R$ hat, wobei R ein beliebiger Kompaktifizierungsradius ist. In $U(1)_k$ hat man wiederum Quantisierungsbedingungen an den Radius.
iv) $SU(2)_k$ hat nur innere Automorphismen, so z.B. $J \mapsto \gamma J \gamma^{-1}$ mit $\gamma := e^{\pi i \sqrt{2} J_0^0}$. Wie man leicht in einer HWS-Darstellung überprüft, ergibt dies $J^\pm \mapsto -J^\pm$, J^0 ist invariant. Eine mögliche Randbedingung ist daher durch $J^\pm(C_0 z) = -J^\pm(z)$, $J^0(C_0 z) = J^0(z)$ gegeben. Diese werden wir nun durch einen lokalen Autormorphismus erzeugen:

Betrachte dazu eine durch $\alpha(z)$ parametrisierte $U(1)$-Eichtransformation, erzeugt durch

$$Q_\alpha = \oint \frac{dw}{2\pi i}\ \alpha(w) J^0(w). \tag{4.4.5}$$

Man rechnet leicht nach, daß

$$\begin{aligned} \exp(ad\, Q_\alpha) J^0(z) &= J^0(z) + k\alpha'(z), \\ \exp(ad\, Q_\alpha) J^\pm(z) &= \exp(\pm\sqrt{2}\alpha(z)) J^\pm(z), \\ \exp(ad\, Q_\alpha) T(z) &= T(z) + \alpha'(z) J^0(z) + \frac{k}{2}(\alpha'(z))^2 \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

ist. Die Wahl $\alpha(z) = {}^{\ln z}/_{2\sqrt{2}}$ führt dann auf

$$\begin{aligned} J^0(z) &\to J^0(z) + z^{-1}\frac{k}{2\sqrt{2}}, \\ J^\pm(z) &\to z^{\pm 1/2}\ J^\pm(z), \\ T(z) &\to T(z) + z^{-1}\frac{J^0(z)}{2\sqrt{2}} + z^{-2}\frac{k}{16} \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

oder in Moden

$$\begin{aligned} J_0^0 \to J_0^0 + \frac{k}{2\sqrt{2}}, &\qquad J_n^\pm \to J_{n\pm 1/2}^\pm, \\ L_0 \to L_0 + \frac{J_0^0}{2\sqrt{2}} + \frac{k}{16}, &\qquad L_{n\neq 0} \to L_n + \frac{J_n^0}{2\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

Man erkennt, daß die Anwendung des lokalen Automorphismus die oben angegebenen Randbedingungen erzeugt.

Insbesondere kann man die Charakterfunktionen $\sigma^T_{l,k}$ der getwisteten Algebra einfach durch die der ungetwisteten ausdrücken

$$\begin{aligned}\sigma^T_{l,k}(z,\tau,u) &= e^{-2\pi iku}\ \mathrm{tr}_{G^l_l}\ q^{L^0+J^0_0/2\sqrt{2}+k/16-c/24}e^{-2\pi iz(J^0_0+k/2\sqrt{2})/\sqrt{2}}\\ &= \sigma_{l,k}(z-\frac{\tau}{2},\tau,u-\frac{\tau}{16}+\frac{z}{4}).\end{aligned}$$

Höhere affine Algebren haben als äußere Automorphismen die Automorphismen des Dynkin-Diagramms (vgl. Goddard, Olive (1986)).

Schließlich:

v) $\mathcal{W}(2,3)$ hat den äußeren Automorphismus $W\rightarrow -W$ und keine inneren (vgl. A. Honecker (1992)).

Im restlichen Teil dieses Abschnitts betrachten wir die N=2 super-konforme Algebra (1.5.1) und werden den sogenannten spektralen Fluß einführen (vgl. auch Vafa (1989)):

Die Gruppe der globalen Automophismen, die isomorph zu $O(2)$ ist, wurde schon in (1.5.2) angegeben. Genauer: (1.5.2) zeigt die Konjugationsklassen der Automorphismengruppe analog zum Beispiel (ii) zweier freier Fermionen. Die Algebra mit der durch R' gegebenen Randbedingungen wird die *verdrehte* oder 'getwistete' genannt. Wir werden nun zeigen, daß man alle anderen Randbedingungen durch lokalen Automorphismus auf periodische Randbedingungen für alle Felder zurückführen kann (insbesondere sind die R und NS N=2 super-konforme Algebra isomorph).

Betrachte dazu eine zu (4.4.5) analoge Transformation. Man findet

$$\begin{aligned}\exp(ad\,Q_\alpha)J(z) &= J(z)+\frac{c}{3}\alpha'(z),\\ \exp(ad\,Q_\alpha)G^\pm(z) &= \exp(\pm\alpha(z))G^\pm(z),\\ \exp(ad\,Q_\alpha)T(z) &= T(z)+\alpha'(z)J^0(z)+\frac{c}{6}(\alpha'(z))^2,\end{aligned}\tag{4.4.9}$$

und damit unter der Wahl $\alpha(z)=\beta\ln z$

$$\begin{aligned}J(z) &\rightarrow J(z)+z^{-1}\frac{c\beta}{3},\\ G^\pm(z) &\rightarrow z^{\pm\beta}\ G^\pm(z),\\ T(z) &\rightarrow T(z)+z^{-1}\beta J(z)+z^{-2}\frac{c\beta^2}{6}\end{aligned}\tag{4.4.10}$$

oder in Moden

$$
\begin{aligned}
J_0 &\to J_0 + \frac{c}{3}\beta = J_0^\beta, \\
G_n^\pm &\to G_{n\pm\beta}^\pm = G_n^{\beta\pm}, \\
L_n &\to L_n + \beta J_n + \frac{c}{6}\beta^2 \delta_{n,0} = L_n^\beta.
\end{aligned}
\tag{4.4.11}
$$

Man kann auch einfach direkt überprüfen, daß die durch (4.4.11) gegebene verschobene 'β'-Algebra wiederum die Relationen (1.5.1) erfüllt, insbesondere sind alle Algebren mit durch beliebige R_β (1.5.2) gegebene Randbedingungen isomorph.

Es folgt, daß die Ladung q und die konforme Dimension h von Zuständen einer Darstellungen mit denen der um β verschobenen Darstellung durch

$$
\begin{aligned}
q &\to q + \frac{c}{3}\beta = q^\beta, \\
h &\to h + \beta q + \frac{c}{6}\beta^2 = h + \frac{3}{2c}\Delta(q^2)
\end{aligned}
\tag{4.4.12}
$$

verknüpft sind, wobei $\Delta(q^2)$ die Differenz von $(q^\beta)^2$ und q^2 ist. Wir wollen die Abbildung vom ursprüngliche Hilbertraum $\mathcal{H}_0$ in den um β verschobenen Hilbertraum $\mathcal{H}_\beta$ mit $\mathcal{U}_\beta$ bezeichnen; sie wird (im engeren Sinn nur für $\beta = -1/2$) *spektraler Fluß* genannt. Man beachte, daß der spektrale Fluß im allgemeinen Grundzustände eines Sektors nicht wieder auf Grundzustände abbildet. So liest man sofort an (4.4.11) ab, daß man z.B. für $\beta = 1$ die Definition der Primarität eines Feldes verändert.

Weitere Aufschlüsse erhält man aus dem Verhalten der Charakterfunktionen unter spektralem Fluß. Dazu definieren wir zunächst

$$
B^\beta(z,\tau,u) := (z + \beta\tau, \tau, u - \frac{\beta}{2}(z+\beta\tau) + \frac{\beta^2}{4}\tau) = (B^{-\beta})^{-1}(z,\tau,u). \tag{4.4.13}
$$

Dann lassen sich die um β verschobenen Charakterfunktionen $\chi_{\{q\}}^{N=2,\beta} := \mathcal{U}_\beta(\chi_{\{q\}}^{N=2})$ durch die ursprünglichen ausdrücken

$$
\begin{aligned}
\chi_{\{q\}}^{N=2,\beta}(z,\tau,u) &= e^{-2\pi i 2cu/3}\ \mathrm{tr}_{\psi_{\{q\}}}\ q^{L_0+\beta J_0 + c\beta^2/6 - c/24} e^{-2\pi i z(J_0 + c\beta/3)} \\
&= \chi_{\{q\}}^{N=2(\beta=0)} \circ B^{-\beta}(z,\tau,u)
\end{aligned}
\tag{4.4.14}
$$

und man erhält unter modulare Transformationen

$$
\chi_{\{q\}}^{N=2,\beta} \circ B^\beta \circ M \circ B^{-\beta}(z,\tau,u) = D_{\{q\}\{p\}}(M)\ \chi_{\{p\}}^{N=2,\beta}(z,\tau,u) \tag{4.4.15}
$$

wobei $D_{\{q\}\{p\}}(M)$ die Darstellungsmatrix der modularen Transformation

$$M : (z, \tau, u) \to \left(\frac{z}{c\tau + d}, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, u + \frac{cz^2}{2(c\tau + d)}\right)$$

auf den ursprünglichen Charakterfunktionen ist. Die verschobenen Charakterfunktionen transformieren sich also (wenn man sich auf die τ-Abhängigkeit konzentriert) wie die ursprünglichen; es folgt mit Verlindes Formel, daß auch die Fusions-Algebra unter spektralem Fluß invariant ist. Insbesondere ist der Ramond-Grundzustand ($h = {}^{c}/_{24}$), der sich durch spektralen Fluß mit $\beta = -{}^{1}/_{2}$ aus der $\mathbb{1}$ der Theorie ergibt, ein simpler Strom. (In der Tat ist er identisch mit dem Operator des spektralen Flusses (4.4.18).)

Im Spezialfall der Charakterfunktionen der N=2 super-minimalen Modelle (1.5.15) kann man dank der Identität

$$\Theta_{l,k} \circ B^{\beta}(z, \tau, u) = \Theta_{l-k\beta,k}(z, \tau, u) \tag{4.4.16}$$

den spektralen Fluß genau verfolgen (beachte, daß $\mathcal{U}_\beta$ auf den Faktor von $J_0^{N=2}$ durch $z \to z + \beta\tau$ wirkt)

$$\chi_m^{l,s} \circ B^{-\beta}(z, \tau, u) = \chi_{m-2\beta}^{l,s-2\beta}(z, \tau, u). \tag{4.4.17}$$

Weiter mit der allgemeinen Theorie: Bosonisiert man den $U(1)$-Strom der N=2 Algebra $J(z) = i\sqrt{c/3}\partial\phi(z)$, so kann man explizit einen Operator angeben, der den spektralen Fluß induziert. Diesen nennt man den *Operator des spektralen Flusses* und bezeichnet ihn (auch) mit $\mathcal{U}_\beta$

$$\mathcal{U}_\beta = e^{i\beta\sqrt{c/3}\phi}. \tag{4.4.18}$$

In der Tat sieht man leicht ein, daß die Anwendung von (4.4.18) auf beliebige Zustände der Theorie den Fluß (4.4.12) bewirkt, da sich jedes Feld ψ der Ladung q als

$$\psi(z) = \hat{\psi}(z)\ e^{iq\sqrt{3/c}\phi} \tag{4.4.19}$$

schreiben läßt, wobei $\hat{\psi}$ keine Ladung trägt. Auf den Feldern der Theorie wirkt $\mathcal{U}_\beta$ durch Multiplikation (OPE und Projektion auf singulärsten Anteil) $\psi \to \mathcal{U}_\beta\psi$ auf deren Moden durch $\psi_n \to \mathcal{U}_\beta\psi_n\mathcal{U}_\beta^{-1}$.

Besondere Bedeutung erlangt der Operator des spektralen Flusses dadurch, daß er chiral primäre Felder (vgl. 4.5) in Ramond-Grundzustände und diese in antichiral primäre Felder abbildet, wie man mit (4.4.12) leicht überprüft. Für den Fall der N=2 super-minimalen Modelle sieht man aus (4.4.17), daß der spektrale Fluß $\mathcal{U}_{-1/2}$ tatsächlich wohldefiniert ist und mit $\psi_1^{0,1}$ identifiziert werden kann.

Als Bedingung an die Lokalität (bis auf einfache Verzweigung $(z-w)^{\frac{1}{2}}$) des Operators des spektralen Flusses $\mathcal{U}_{-1/2}$ findet man, daß alle Ladungen der Theorie ganzzahlig sein müssen (nur mit diesem Anteil wechselwirkt $\mathcal{U}_{-1/2}$). Gilt dies, so kann man den Operator $(-)^F$ durch $e^{\pi i J_0}$ definieren; er vertauscht mit T und J, antivertauscht aber mit $G^{\pm}$.

Für eine Diskussion der N=2 Charakterfunktionen zum getwisteten $U(1)$-Strom verweisen wir auf Ravanini, Yang (1987) und die Referenzen darin.

4.5 Der chirale Ring

ist eine weitere spezielle Struktur unitärer N=2 super-konformer Theorien. Dabei handelt es sich um eine endliche (!) Unteralgebra der Operatoralgebra, die die Feldtheorie recht weitgehend charakterisiert. Als Referenz verweisen wir auf Greene, Vafa, Warner (1989), sowie Gepner (1990).

Wir betrachten dazu für ein beliebiges Feld ϕ im NS-Sektor zum Grad (L_0-Eigenwert) h und Ladung Q den Erwartungswert

$$\langle\phi|\{G^+_{-1/2}, G^-_{1/2}\}|\phi\rangle. \tag{4.5.1}$$

Durch Ausnutzen der entsprechenden Relation der N=2 Algebra (1.5.4) erhält man dann einerseits den Wert $2h-Q$, andererseits kann man (4.5.1) zu $\| G^-_{1/2}|\phi\rangle\|^2 + \| G^+_{-1/2}|\phi\rangle\|^2$ umschreiben und erhält für unitäre N=2 super-konforme Theorien die Beziehung (im NS-Sektor)

$$h \geq \frac{Q}{2}. \tag{4.5.2}$$

(Allgemeiner erhält man aus $\langle\phi|\{G^+_{-n/2}, G^-_{n/2}\}|\phi\rangle \geq 0$ die entsprechende Aussage $h - {}^{nQ}/_2 + {}^{c(n^2-1)}/_{24} \geq 0$.) Es ist nun recht naheliegend die Zustände zu untersuchen, die die Gleichung (4.5.2) $h = Q/2$ erfüllen: Man liest sofort aus obiger Ableitung ab, daß dann $|\phi\rangle$ nicht nur von $G^-_{1/2}|\phi\rangle$ (wie jeder primäre Zustand), sondern auch von $G^+_{-1/2}|\phi\rangle$ annihiliert wird. Zustände mit der letzteren Eigenschaft nennt man *chiral* (Warnung: Diese Chiralität hat nichts mit der (Anti-)Holomorphie von Feldern zu tun, sondern kommt aus dem Sprachgebrauch der Supersymmetrie.) Damit haben wir $h = Q/2$ aber noch nicht voll ausgenutzt; es folgt weiterhin, daß ϕ auch primär ist (!) und man nennt diese Zustände *chiral primär*. Dazu genügt es (wegen der N=2 Algebra) zu zeigen, daß der HWS $|\phi\rangle := \phi(0)|0\rangle$ auch von $G^-_{n+1/2}$ und $G^+_{n+1/2}$ für $n > 0$ annihiliert wird. Es folgt zunächst aus (4.5.2), daß $|\phi\rangle$ auch von J_n $(n > 0)$ annihiliert wird, da Anwendung von J_n den Grad verringert, die Ladung aber gleich läßt (und damit (4.5.2) verletzen würde). Damit sind wir dann aber wegen der Relation $[J_n, G^\pm_{1/2}] = \pm G^\pm_{n+1/2}$ durch.

Eine analoge Diskussion kann man für die sogenannten *anti-chiral primären* Zustände führen, die durch $h = -Q/2$ charakterisiert sind. Ersetze dazu im vorangegangenen Abschnitt $G^\pm$ durch $G^\mp$.

Als nächstes zeigen Greene, Vafa und Warner (1989), daß es für jeden Zustand des NS-Sektors eine Zerlegung ähnlich der Hodge-Zerlegung für Differentialformen gibt; genauer: Jeder Zustand der $|\phi\rangle$ kann in der Form

$$|\phi\rangle = |\phi_0\rangle + G^+_{-1/2}|\phi_1\rangle + G^-_{1/2}|\phi_2\rangle \tag{4.5.3}$$

geschrieben werden, wobei $|\phi_0\rangle$ ein chiral primärer Zustand ist. Für chirale Zustände kann $\phi_2 = 0$ gewählt werden.

Recht interessant ist weiterhin, daß die konforme Dimension chiral primärer Zustände auch nach oben beschränkt ist. Dazu betrachtet man den Erwartungswert von $\{G^+_{-3/2}, G^-_{+3/2}\} = 2L_0 - 3J_0 + {}^{2c}/_3$, setzt $Q/2 = h$ ein und erhält mit Unitarität $h \leq c/6$. Existiert in einer konformen Feldtheorie ein Feld C_{max} der maximalen konformen Dimension, so kann es eindeutig mit $e^{i\sqrt{c/3}\phi} = \mathcal{U}_1$ (für $\mathcal{U}$ vgl. 4.4) identifiziert werden, wobei ϕ durch $J = i\sqrt{c/3}\partial\phi$ definiert ist.

Wir wenden uns nun dem sogenannten *chiralen Ring* $\mathcal{R}_c$ zu. Diesen erhält man dadurch, daß man mit Hilfe der OPE auf den chiral primären Feldern ein Produkt und damit die Struktur eines Rings (oder einer Algebra) definiert. Dies Produkt ist nichts anderes als das normalgeordnete Produkt aus 1.1. Betrachte dazu die OPE zweier chiraler Felder C_i, C_j mit Ladungen Q_i und Q_j. Die Ladung der Felder in der OPE von C_i und C_j ist dann $Q = Q_i + Q_j$ und nach (4.5.2) deren konformen Dimensionen $h \geq h_i + h_j$. Daher ist der 'singulärste' Term der Entwicklung, wenn er existiert (sonst verschwindet das Produkt der Felder im Ring), proportional zu $(z-w)^0$ und dann auch selbst chiral und primär. Der Anfang der OPE bzw. das Produkt des chiralen Rings lauten also

$$C_i \times C_j = f_{ij}^k \; C_k, \tag{4.5.4}$$

wobei f_{ij}^k die Strukturkonstanten des Rings sind. Aus der Assoziativität der OPE in N-Punkt-Funktionen folgt, daß alle Produkte, die einen Zustand verschwindender Ladung ergeben, assoziativ sind; alle anderen Produkte verschwinden (als Erwartungswert von Operatoren mit von Null verschiedener Ladung). Auch ist der chirale Ring wegen der Beschränktheit der konformen Dimension $h \leq {}^{c}\!/_{6}$ nilpotent und in rationalen Theorien sicherlich endlich. Schließlich ist er kommutativ (zumindest bis auf Phasen).

Wir führen nun eine Involutionen auf dem chiralen und antichiralen Ring ein, mit Hilfe derer wir eine Dualitätsrelation der noch zu definierenden Charakterfunktionen des Rings erhalten werden. Für den Fall der N=2 super-minimalen Modelle ist diese Involution wohldefiniert und die Dualität gilt.

Der erste Teil der Involution ist die Ladungskonjugation und bildet jeden Zustand C (des Rings) auf den Zustand $C^\dagger$ umgekehrter Ladung ab, führt also vom chiralen in den antichiralen Ring und umgekehrt. Sind wir im (anti-)chiralen Ring gestartet, so erhalten wir wieder einen (anti-)chiralen Zustand, wenn wir $C^\dagger$ anschließend mit C_{max} (C_{min}) multiplizieren. Die so definierte Involution $C \mapsto C_{max} \times C^\dagger$ ($C \mapsto C_{min} \times C^\dagger$) wollen wir mit $(\ )^t$ bezeichnen.

Man kann nun durch die $U(1)$-Ladung auf dem chiralen Ring eine Graduierung (Grad gleich Ladung) einführen und eine Art Charakter des Rings definieren

$$P(t) = \mathrm{tr}_{\mathcal{R}} \; t^{J_0}. \tag{4.5.5}$$

Dieses Polynom (wir wissen, daß J_0 auf dem chiralen Ring nach oben beschränkt ist und gehen davon aus, daß es nur endlich viele Felder gibt) erfüllt, wie mit Hilfe obiger Involution folgt, die *Dualitätsrelation*

$$P(t) = t^{c/3} P(\frac{1}{t}). \tag{4.5.6}$$

Für die minimalen N=2 super-konformen Modelle zur zentralen Ladung $c = 3k/(k+2)$ (vgl. 1.5) findet man

$$P(t) = \sum_{m=0}^{k} t^{m/(k+2)} = \frac{1 - t^{1-1/(k+2)}}{1 - t^{1/(k+2)}}. \tag{4.5.7}$$

Man kann hier die Dualität direkt überprüfen; andererseits ist es auch klar, daß Ladungskonjugation (definiert durch S^2) und Multiplikation mit dem (anti-)chiralen Feld maximaler (minimaler) Ladung $\psi_k^{k,0} = \psi_{-2}^{2,0}$ ($\psi_{-k}^{k,0} = \psi_2^{2,0}$) wohldefiniert sind.

Der chirale Ring verhält sich 'schön' unter Tensorprodukt: Chiral primär sind genau die Felder, deren Komponenten in den Einzeltheorien chiral primär sind. Es folgt, daß das charakteristische Polynom des chiralen Rings der Produkttheorie einfach durch das Produkt derjenigen der Einzeltheorien gegeben ist. (Analoge Aussagen gelten für Ramond-Grundzustände und den Witten-Index. In der Tat kann man, wenn der Operator des spektralen Flusses Teil wohldefiniert und eineindeutig ist, das Polynom als Verallgemeinerung des Witten-Index betrachten.) Komplizierter ist die Angelegenheit naturgemäß unter Projektionen; hier muß man Fall für Fall studieren.

Das oben Gesagte läßt sich insbesondere auf den Fall des 'Tensorprodukts' von holomorphem Teil und antiholomorphem Teil einer konformen Feldtheorie anwenden. Dann bestimmt die Wahl der modularen Invariante welche chiral primären Felder auftreten (vgl. 1.5). Das charakteristische Polynom über den (c, c)-Ring von Tensorprodukten chiral primärer mit chiral primären Feldern wird dann auch *Poincaré-Polynom* genannt

$$P(t, \bar{t}) = \mathrm{tr}_{\mathcal{R}_{(c,c)}} \, t^{J_0} \bar{t}^{\bar{J}_0}. \tag{4.5.8}$$

Die zu (4.5.6) analoge Dualitätsrelation lautet für das Poincaré-Polynom

$$P(t, \bar{t}) = (t\bar{t})^{c/3} P(\frac{1}{t}, \frac{1}{\bar{t}}). \tag{4.5.9}$$

Ist die Theorie invariant unter Ladungskonjugation, so folgt, daß dann die charakteristischen Polynome des (c, c)- und (a, a)-Ringes, sowie die des (c, a)- und (a, c)-Ringes übereinstimmen. Für die diagonale Invariante der N=2 super-minimalen Modelle sind die beiden letzteren immer trivial.

Schließlich sollten wir noch bemerken, daß die Namensgebung für das charakteristische Polynom des chiral-chiralen Rings nicht klassisch oder zufällig ist, sondern tatsächlich die Hoffnung (oder Überzeugung – je nach Geschmack) ausdrückt, daß der chirale Ring eine geometrische Interpretation hat. In der Tat gibt gibt es starke Evidenz (und eine Unmenge von Beispielen) dafür, daß die in supersymmetrischen String-Theorien auftretenden chiral-chiralen Ringe mit Deformationen des Rings der Dolbeault-Kohomologiegruppen derjenigen Mannigfaltigkeit identifizieren kann, auf der das der String-Theorie entsprechende nicht-lineare σ-Modell 'lebt'. In diesem Bild entsprechen die charakteristischen Polynome (4.5.8) des chiralen Rings den Poincaré-Polynomen der komplexen Mannigfaltigkeiten, die Dualität (4.5.9) der Poincaré-Dualität und die Moden $G^{+}_{-1/2}$ und $\bar{G}^{+}_{-1/2}$ der Supergeneratoren den Dolbeault-Operatoren ∂ und $\bar{\partial}$ (etc.).

Zusammenfassung und Ausblick

In einem großen Teil dieser Diplomarbeit wurden Modelle (Kapitel 1) und Konzepte (Kapitel 4) der konformen Feldtheorie vorgestellt, die für die Konstruktion (Kapitel 2) der Gepnerschen Zustandssumme (in erster Ordnung der Störungsentwicklung im Genus) einer phänomenologisch relevanten String-Theorie wesentlich sind. Für die mit den benutzten Methoden (Berechnung eines Teils der Zustandssumme ausgehend von den Charakterfunktionen der N=2 super-minimalen Modelle) zugänglichen Modelle konnte das Spektrum in Übereinstimmung mit der Literatur (Fuchs, Klemm, Scheich, Schmidt (1990)) berechnet werden. Im dritten Kapitel wurde schließlich der Charakter der Symmetrie-W-Algebra der Gepnerschen Modelle betrachtet und für einige prominente Beispiele explizit berechnet. Eine grobe Abschätzung (3.2) des Operatorinhalts der Symmetrie-W-Algebren wurde angegeben und damit eine erste Antwort auf die Frage, wie groß 'realistische' W-Algebren sind. Für das Modell $(1)^9$ konnte die dem Charakter zugrunde liegende nicht-affine Symmetriealgebra identifiziert werden. Abschließend (3.3) wurde die Möglichkeit diskutiert, die Tensorprodukte N=2 superminimaler Modelle in der Gepnerschen Konstruktion durch (das Tensorprodukt) von N=2 W-Algebren zu ersetzen.

Ausblick: Die hier vorgestellte Analyse des Spektrums und der Symmetrie-W-Algebra läßt sich sicherlich auf Orbifolds von Gepner-Modellen übertragen. Darüberhinaus ist auch das Einsetzen anderer N=2 Modelle wie der von Kazama, Suzuki (1989a) (insofern die Charakterfunktionen zugänglich sind) oder auch von W-Algebren interessant (so mag man auf eine hochgradig ausgezeichnete N=2 W-Algebra mit $c = 9$ und drei Generationen hoffen).

Sehr viel aufregender wäre natürlich eine Erweiterung der Korrespondenz von (verallgemeinerten) Gepner-Modellen und Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten, die auf eine geometrische Interpretation von W-Algebren führen könnte (wenn auch die ersten Versuche in dieser Richtung wenig ermutigend scheinen). Unabhängig vom Auftreten von W-Algebren mögen sich aus dem algebraischen Zugang weitere Anregungen zum Studium von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten und deren Moduli ergeben (so seien nur Spiegelpaare und Quantenmannigfaltigkeiten erwähnt).

Danksagung

Ich bedanke mich bei

Werner Nahm für Anleitung und Motivation,

Ralph Blumenhagen,
Andreas Recknagel,
Jose Figueroa-O'Farrill,
Michael Flohr,
Nils Obers,
Andreas Honecker,
Johannes Kellendonk,
Wolfgang Eholzer,
Meik Hellmund,
Ralf Hübel,
Michael Roesgen,
Raimund Varnhagen,
Steffen Mallwitz und wie sie alle heißen, für Beistand in schweren Stunden, Interesse und wissenschaftliche Diskussion,

der Studienstiftung des Deutschen Volkes und namentlich meinem Vertrauensdozenten Prof. K. Luig für ideelle und finanzielle Förderung,

meinen Eltern und allen Freunden.

Literaturverzeichnis

D. Adams (1979), *The Hitchhikers Guide to the Galaxy*, Pan Books Ltd., London (Chapter 27).

L. Alvarez-Gaumé (1984), *Supersymmetry and Index Theory*, NATO ASI Series **B125**.

U. Amaldi, W. de Boer, H. Fürstenau (1991) *Phys. Lett.* **260B**, 447.

T. Banks, L. J. Dixon, D. Friedan, E. Martinec (1988) *Nucl. Phys.***B299**, 613-626.

R. Blumenhagen, M. Flohr, A. Kliem, W. Nahm, Andi Recknagel, R. Varnhagen (1991) *Nucl. Phys.* **B361**, 255-289.

R. Blumenhagen (1991), *Covariant Construction of N=1 Super W-Algebras*, preprint BONN-HE-91-20.

R. Blumenhagen, W. Eholzer, A. Honecker, R. Hübel (1991), *New N=1 Extended Superconformal Algebras with two and three Generators*, preprint BONN-HE-91-22.

R. Blumenhagen (1992), in Vorbereitung.

P. Bouwknegt (1988), *Extended Conformal Algebras from Lac-Moody algebras*, 'Infinite dimensional Lie Algebras and Lie Groups' ed. V. Kac, Proc. CIRM-Luminy conference, World Scientific.

P. Candelas, X. de la Ossa, P. S. Green, L. Parks (1991) *Phys. Lett.* **258B**, 118.

A. Cappelli, C. Itzykson, J.-B. Zuber (1987), *Nucl. Phys.* **B280**, 445.

J. Cardy (1986), *Nucl. Phys.* **B270**, 186.

R. Cohen, D. Gepner (1991), *Interacting Bosonic Models and Their Solution*, preprint WIS-91/21.

J. H. Conway, N. J. A. Sloane (1988), *Sphere Packings, Lattices and Groups*, (Springer Verlag, Grundlagen der mathematischen Wissenschaften 290), insbesondere Kapitel 4.

P. Di Vecchia, J. L. Petersen, M. Yu, H. B. Zheng (1986) *Phys. Lett.* **174B**, 280.

R. Dijkgraaf, C. Vafa, E. Verlinde, H. Verlinde (1989), *Comm. Math. Phys.* **123**, 485-526.

L. J. Dixon (1987), *Some World-Sheet Properties of Superstring Compactifications on Orbifolds and otherwise*, Superstrings, Unified Theories and Cosmology, Trieste, ICTP, Vol. 4.

T. Eguchi, S.-K. Yang (1990), *Mod. Phys. Lett. A* **Vol. 5, No. 21**, 1693-1701.

W. Eholzer, M. Flohr, A. Honecker, R. Hübel, W. Nahm, R. Varnhagen (1991), *Representations of W-Algebras with two Generators and New Rational Models*, preprint BONN-HE-91-22.

D. Friedan, E. Martinec, S. Shenker (1986) *Nucl. Phys.* **B271**, 93-165.

J. Fuchs, A. Klemm, Ch. Scheich, M.G. Schmidt (1990), *Ann. Phys.* **204**, 1.

J. Fuchs, A. Klemm, M.G. Schmidt, D. Versteegen (1990), preprint HD-THEP-90-35.

D. Gepner (1987a) *Nucl. Phys.* **B296**, 757-778.

D. Gepner (1987b) *Phys. Lett.* **199B**, 380.

D. Gepner (1987c) *Nucl. Phys.* **B290**, 10-24.

D. Gepner (1988) *Nucl. Phys.* **B311**, 191-204.

D. Gepner (1989), *Lectures on N=2 String Theory*, preprint PUPT-1121 *oder* proceedings of the Spring School on Superstrings, Trieste, April 1989.

D. Gepner (1989b) *Phys. Lett.* **222B**, 207.

D. Gepner (1990), *On the Algebraic Structure of N=2 String Theory*, preprint WIS-90/47/Ph.

D. Gepner, Z. Qiu (1987) *Nucl. Phys.* **B285**, 423-453.

D. Gepner, E. Witten (1986) *Nucl. Phys.* **B278**, 493-549.

P. Ginsparg (1988), *Applied Conformal Field Theory*, preprint HUTP-88/A054 *oder* Les Houches, Session XLIX, 1988, Fields, Strings, and Critical Phenomena, Elsevier Science Publishers.

P. Goddard, A. Kent, D. Olive (1986), *Comm. Math. Phys.* **103**, 105-119.

P. Goddard, D. Olive (1986), *Int. Journ. Mod. Phys. A* **Vol. 1, No. 2**, 303-414.

B. R. Greene, M. R. Plesser (1990) *Nucl. Phys.* **B338**, 15-37.

B. R. Greene, S.-S. Roan, S.-T. Yau (1991) *Comm. Math. Phys.* **142**, 245-259.

B. R. Greene, C. Vafa, N. P. Warner (1989) *Nucl. Phys.* **B324**, 371-390.

(GSW) M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten (1987), *Superstring theory, Vol. 1 & 2* (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).

A. Honecker (1992), Diplomarbeit, Bonn.

C. M. Hull, E. Witten (1985) *Phys. Lett.* **160B**, 398.

V. G. Kac, D. H. Peterson (1984), *Adv. in Math.* **53**, 125-264.

V. G. Kac (1983), *Infinite Dimensional Lie Algebras* (Progress in Mathematics, Vol. 44, Birkhäuser).

M. Kaku (1988), *Introduction to Superstrings* (Graduate Texts in Contemporary Physics, Springer-Verlag).

M. Kaku (1991), *Strings, Conformal Fields, and Topology* (Graduate Texts in Contemporary Physics, Springer-Verlag).

Y. Kazama, H. Suzuki (1989a) *Nucl. Phys.* **B321**, 232-268.

Y. Kazama, H. Suzuki (1989b) *Mod. Phys. Lett.* **A Vol. 4, No. 3**, 235-242.

E. B. Kiritsis (1988), *Int. Journ. Mod. Phys. A* **Vol. 3, No. 8**, 1871-1906.

A. Klemm (1990) Doktorarbeit, preprint (Heidelberg) HD-THEP-90-45, *Stringkompaktifizierung durch Tensorprodukte minimaler n=2 superkonformer Feldtheorien und ihre geometrische Interpretation* .

B. Kostant (1959), *Am. J. Math.* **81**, 973.

W. Lerche, B. E. W. Nilsson, A. N. Schellekens (1989), *Nucl. Phys.* **B294**, 136-156.

W. Lerche, A. N. Schellekens, N. P. Warner (1989), *Phys. Rep.* **177**, 1-140.

W. Lerche, C. Vafa, N. P. Warner (1989), *Nucl. Phys.* **B324**, 427-474.

D. Lüst, S. Theisen (1989), *Lectures on String Theories* (Lecture Notes in Physics, Vol. 346, Springer-Verlag).

M. Lynker, R. Schimmrigk (1988a), *Phys. Lett.* **208B**, 216.

M. Lynker, R. Schimmrigk (1988b), *Phys. Lett.* **215B**, 681.

M. Mueller, E. Witten (1986), *Phys. Lett.* **182B**, 28.

G. Moore, N. Seiberg (1989), *Nucl. Phys.* **B313**, 16-40.

G. Mussardo, G. Sotkov, M. Stanishkov (1987), *Int. Journ. Mod. Phys. A* **Vol. 4, No. 5**, 1135-1206.

W. Nahm (1974), *Nucl. Phys.* **B114**, 174.

W. Nahm (1988), *Comm. Math. Phys.* **118**, 171-176.

Z. Qiu (1987a), *Phys. Lett.* **188B**, 207.

Z. Qiu (1987b), *Phys. Lett.* **198B**, 497.

F. Ravanini, S.-K. Yang (1987), *Phys. Lett.* **195B**, 202.

A. N. Schellekens (1989), *Superstring Construction*, Chapter 2, (Current Physics - Sources and Comments, North-Holland).

A. N. Schellekens, S. Yankielowicz (1990a), *Nucl. Phys.* **B330**, 103-123.

A. N. Schellekens, S. Yankielowicz (1990b), *Int. Journ. Mod. Phys. A* **Vol. 5, No. 15**, 2903.

A. Schwimmer, N. Seiberg (1987), *Phys. Lett.* **184B**, 191.

M. F. Sohnius (1985), *Phys. Rep.* **128**, 39-204.

C. Vafa (1986), *Nucl. Phys.* **B273**, 592-606.

C. Vafa (1989), preprint HUTP-89/A057.

R. Varnhagen (1992), *Phys. Lett.* **275B**, 87.

N. P. Warner (1988), preprint CTP 1745.

S.-K. Yang (1987), *Nucl. Phys.* **B285**, 183-203.

A. B. Zamolodchikov, V. A. Fateev (1985), *Sov. Phys. JETP* **62**(2), 215.

A. B. Zamolodchikov, V. A. Fateev (1986), *Sov. Phys. JETP* **63**(5), 913.

A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov (1989) *Sov. Sci. Rev. A Phys.* **Vol. 10**, 269-433.