Darstellungstheorie von W-Algebren

Diplomarbeit von
Raimund Varnhagen

Datum: 14. März 1991
Referent: Prof. W. Nahm
Koreferent: Prof. G. v.Gehlen

Inhalt

---

1. Einleitung

Quantenfeldtheorien beschreiben bis heute fast alle fundamentalen Phänomene der Natur, außer Gravitation. Es gibt viele mehr oder weniger elegante Methoden, Quantenfeldtheorien zu lösen. In den 30iger Jahren gelang es E.P. Wigner [1] durch Einführung darstellungstheoretischer Mittel, einen tieferen Einblick in die Rolle von Symmetrien in Quantenfeldtheorien zu bekommen. Jede Symmetrie liefert über das Noether-Theorem einen Strom und eine erhaltene Ladung. In vier Dimensionen wird die Raum-Zeit-Symmetrie durch die Poincaré-Gruppe beschrieben. Sie liefert automatisch auch den Spin eines Teilchens und das dazugehörige Antiteilchen. Aber Quantenfeldtheorien haben unendlich viele Freiheitsgrade, die Poincaré-Gruppe in vier Dimensionen dagegen nur 10. Das ist erheblich weniger und reicht nicht aus, 4D-Quantenfeldtheorien exakt zu lösen. Seit langem weiß man, daß noch weitere Symmetrien wie z.B. Eichsymmetrien existieren. Auch hat man versucht, durch Einführung von Supersymmetrien weitere Erhaltungsgrößen abzuleiten.

Cunningham hat schon 1909 gezeigt, daß die Elektrodynamik nicht nur Poincaré-, sondern sogar konform invariant ist [2]. Auch die Verallgemeinerungen der Elektrodynamik, die nichtabelschen Eichtheorien, sind ebenfalls konform invariant. Auch masselose Fermionen und skalare Bosonen mit Φ^4-Selbstwechselwirkung verletzen diese Symmetrie nicht. Anfang der 60er Jahre hat man deshalb versucht, mit Hilfe der größeren konformen Symmetrie Baryonen- oder Leptonenzahlerhaltung zu erklären, allerdings vergeblich, da bei der Quantisierung die klassische konforme Invarianz generisch wegen des Auftretens von Skalenanomalien gebrochen wird. In zwei Dimensionen, wo die konforme Gruppe unendlichdimensional ist, überlebt diese Symmetrie leichter die Quantisierung als in vier Dimensionen.

Im Jahre 1983 gelang es A.A. Belavin, A.M. Polyakov und A.B. Zamolodchikov in einer bahnbrechenden Arbeit [3] zu zeigen, daß man in zweidimensionalen konformen Quantenfeldtheorien aufgrund der großen Symmetrie nicht nur Zwei- und Dreipunktfunktionen, sondern alle Korrelationsfunktionen eindeutig bestimmen kann, und daß alle lokalen Felder, die die Operatoralgebra aufspannen, durch die irreduziblen Höchstgewichts-Darstellungen der sogenannten Virasoro-Algebra bestimmt sind. Seitdem ist die Klassifikation aller möglichen konformen 2D-Quantenfeldtheorien ein sehr interessantes Problem der theoretischen Physik. Dies ist bekannterweise eine offene Frage in der Theorie zweidimensionaler Phasenübergänge zweiter Ordnung und vielleicht noch in Stringtheorien.

A.B. Zamolodchikov hat 1985 [4] ein Konzept zur Klassifikation aufgezeigt. Er konstruierte erweiterte konforme Algebren, sogenannte W-Algebren, die die Virasoro-Algebra als Unteralgebra enthalten und die Operatorproduktentwicklung konform invarianter chiraler Felder beschreiben.

Zusammen mit R. Blumenhagen, M. Flohr, A. Kliem und A. Recknagel [5] habe ich eine ganze Reihe solcher W-Algebren nach einem Verfahren von W. Nahm [6] konstruiert. Der eigentliche Part meiner Diplomarbeit beschäftigt sich nun mit der Darstellungstheorie eines Teils der von uns gefundenen W-Algebren. Dies ist eine interessante Frage, da alle in einer Feldtheorie mit dieser spektrumerzeugenden Algebra auftretenden Felder durch diese Darstellungen bestimmt sind; ebenso sind sie Voraussetzung, um z.B. Massenspektren von verschiedenen Stringtheorien zu berechnen oder um statistische Systeme in der Nähe des kritischen Punktes zu untersuchen.

In dieser Arbeit werde ich zuerst einen kurzen Überblick über bekannte Resultate aus der zweidimensionalen konformen Quantenfeldtheorie geben. Dabei wird sich zeigen, daß die Höchstgewichts-Darstellungen der Virasoro-Algebra das wichtigste mathematische Werkzeug in der 2D-CFT sind, die danach erklärt werden. In Kapitel 4 wird auf die modulare Invarianz der Zustandssumme eingegangen. Kapitel 5 und 6 beschäftigen sich mit der Theorie und der expliziten Konstruktion von einer ganzen Klasse von W-Algebren. Kapitel 7 enthält die Darstellungstheorie der einfachsten fermionischen W-Algebra, der $W(2, \frac{5}{2})$. Die dabei erzielten Resultate werden in Kapitel 8 auf eine größere Klasse von W-Algebren verallgemeinert. Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung der erzielten Resultate und einem Ausblick auf noch offene Fragen.

2. Konforme Quantenfeldtheorie in zwei Dimensionen

Als zugrunde liegenden Konfigurationsraum betrachten wir die zweidimensionale Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R} \times S^1$ mit der minkowskischen Raum-Zeit-Struktur, d.h., die Metrik ist gegeben durch

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 \qquad \text{mit} \;\; t \in \mathbb{R} \;\; \text{und} \;\; x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \tag{2.1}$$

Die Minkowski-Metrik kann auch geschrieben werden als

$$ds^2 = du dv \quad \text{wobei} \;\; u = t + x \text{ und } v = t - x \tag{2.2}$$

ist. Die Gruppe der konformen Transformationen ist gegeben durch Diffeomorphismen $u' = f(u)$ und $v' = g(v)$ und ist isomorph zu $Diff(S^1)_L \times Diff(S^1)_R \times \mathbb{Z}$. Die konformen Transformationen werden also durch zwei unabhängige Kopien der Witt-Algebra erzeugt. Sie ist gegeben durch $Witt := < L_n, \; n \in \mathbb{Z} >$ mit $[L_m, L_n] = (n - m)L_{m+n}$. Diese Algebra hat eine eindeutige zentrale Erweiterung, die sogenannte Virasoro-Algebra, die physikalisch interessanter ist, da man in der Quantenfeldtheorie nur an projektiven Darstellungen interessiert ist: $Vir = Witt \oplus < c >$

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (n - m)L_{m+n} + \frac{c}{2}\binom{n+1}{3}\delta_{m+n,0} \\ [L_m, c] &= 0 \quad m \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{2.3}$$

Aber nur die sogenannte kleine konforme Algebra, die durch $< L_{-1}, L_0, L_1 >$ aufgespannt wird und isomorph zu $su(1,1)$ ist, erzeugt globale konforme Transformationen.

Setzt man $z := e^{iu}$ und $\bar{z} := e^{iv}$, kann man die Mannigfaltigkeit komplex fortsetzen, wenn man z und $\bar{z}$ als unabhängige Variablen betrachtet. Dadurch ist es möglich, im folgenden minkowskische und euklidische Feldtheorie – letztere spielt eine große Rolle bei Phasenübergängen zweiter Ordnung – zusammen zu untersuchen.

Belavin, Polyakov und Zamolodchikov (BPZ) [3] haben nun folgende Eigenschaften einer konformen 2D-Quantenfeldtheorie gezeigt:

(i) Die Fourierkomponenten der beiden unabhängigen Komponenten des Energie-Impuls–Tensors sind die Generatoren der konformen Gruppe:

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{n-2} L_n \,, \quad \bar{T}(\bar{z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{z}^{n-2} \bar{L}_n \tag{2.4}$$

Die Algebra dieser Generatoren stimmt mit der Virasoro-Algebra überein. Der Wert der zentralen Ladung c ist ein Parameter der Theorie.

(ii) Unter den Feldern, die die Operatoralgebra aufspannen, sind sogenannte primäre Felder $\Phi_i(z, \bar{z})$, die sich auf einfache Weise transformieren:

$$\Phi_i(z, \bar{z}) \longrightarrow (\frac{dz'}{dz})^{\Delta_i} (\frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}})^{\bar{\Delta}_i} \Phi(z', \bar{z}') \qquad (2.5a)$$

für $z \to z'(z)$ und $\bar{z} \to \bar{z}'(z)$; Δ_i und $\bar{\Delta}_i$ sind reelle nicht negative Parameter. $\Delta_i + \bar{\Delta}_i$ bezeichnet man als die anomale Dimension und $\Delta_i - \bar{\Delta}_i$ als den Spin. Der Spin lokaler Felder kann nur ganz- oder halbzahlige Werte annehmen. Das einfachste Beispiel eines primären Feldes ist der Identitätsoperator.

Eine wichtige Rolle unter den Feldern der Operatoralgebra spielen noch die sogenannten quasi-primären Felder, die sich nur für

$$z \longrightarrow \frac{az + b}{cz + d} \text{ und } \bar{z} \longrightarrow \frac{a'\bar{z} + b'}{c'\bar{z} + d'} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R}) \qquad (2.5b)$$

wie (2.5a) transformieren.

(iii) Die gesamte Menge der Felder $\{A_j\}$ kann in konforme Familien $[\Phi_i]$ zerlegt werden, so daß jedes Feld einem primären Feld zugeordnet werden kann, das die ganze konforme Familie erzeugt:

$$\{A_j\} = \bigoplus_n [\Phi_n] \qquad (2.6)$$

Jede konforme Familie enthält unendlich viele sekundäre Felder. Die Dimensionen eines sekundären Feldes unterscheiden sich um ganze positve Zahlen von den Dimensionem des zugehörigen primären Feldes.

$$\Delta_n^{(k)} = \Delta_n + k \ , \quad \bar{\Delta}_n^{(\bar{k})} = \bar{\Delta}_n + \bar{k} \qquad (2.7)$$

Variationen von sekundären Felder unter infinitesimalen konformen Transformationen ergeben Linearkombinationen von Feldern aus derselben konformen Familie, d.h. jede konforme Familie korrespondiert zu einer Höchstgewichts-Darstellung der Virasoro-Algebra. In Übereinstimmung mit (2.4) ist diese Darstellung ein direktes Produkt $[\Phi_n] = V_n \otimes \bar{V}_n$, wobei V_n und $\bar{V}_n$ im allgemeinen irreduzible Darstellungen der Virasoro-Algebra mit zentraler Ladung c sind. Diese Darstellungen sind nur noch durch die konformen Dimensionen Δ_n und $\bar{\Delta}_n$ charakterisiert.

Bemerkung : Alle quasi-primären Felder zusammen mit ihren Ableitungen bilden auch eine Basis von $\{A_j\}$.

(iv) Die Korrelationsfunktionen der sekundären Felder lassen sich alle auf die Korrelationsfunktionen der zugehörigen primären Felder zurückführen; deshalb stekken alle Informationen der konformen Quantenfeldtheorie in den Korrelationsfunktionen der primären Felder.

(v) Die Strukturkonstanten $C_{ij}^{l}(z,\bar{z})$ der Operatoralgebra können im Prinzip alle durch den Koeffizienten C_{ij}^{l} des primären Feldes Φ_l in der Operatorproduktentwicklung von $\Phi_i\Phi_j$ ausgedrückt werden. Aus der Assoziativität der Operatorproduktentwicklung (Bootstrap) erhält man nun Bedingungen an diese Koeffizienten und die Dimensionen der primären Felder.

(vi) Für einen gegebenen rationalen Wert der zentralen Ladung existieren in der Regel unendlich viele Werte Δ, so daß die Darstellung $[\Phi_\Delta]$ degeneriert ist, d.h. es gibt Linearkombinationen von Feldern, deren Skalarprodukt mit allen Feldern verschwindet. Als die wichtigste Eigenschaft resultiert daraus, daß eine Korrelationsfunktion, die das Feld Φ_Δ enthält, einer speziellen, durch die oben genannte Linearkombination bestimmten, Differentialgleichung genügt. Im einfachsten Fall ist das eine hypergeometrische Differentialgleichung.

(vii) Falls die zentrale Ladung c die Gleichung

$$c = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq} \tag{2.8}$$

erfüllt, wobei p und q positive, teilerfremde ganze Zahlen sind, gibt es endlich viele verschiedene Werte Δ, so daß die zugehörigen konformen Familien alle degeneriert sind und diese Operatoralgebra abgeschlossen ist. Dies sind die sogenannten minimalen Modelle.

(viii) Das Vakuum der Theorie $|\, v\rangle$ wird durch einen Höchstgewichtsvektor dargestellt, so daß es invariant unter der kleinen konformen Gruppe ist.

Die Operatoralgebra enthält zwei sehr wichtige Unteralgebren, die Algebra der links- bzw. rechts-chiralen Felder, d.h. Felder mit konformer Dimension $(\Delta,0)$ bzw.$(0,\bar{\Delta})$; diese Unteralgebra werde ich von hier an als W-Algebra bezeichnen. Der Energie-Impuls-Tensor ist auf jedem Fall ein Element dieser Unteralgebra. Für die Felder der chiralen Algebra gilt:

$$\partial_{\bar{z}}\Phi_L(z) = 0 \quad \text{bzw. } \partial_z\Phi_R(\bar{z}) = 0. \tag{2.9}$$

Dies führt dazu, daß man zusätzlich unendlich viele Symmetrien in einer solchen Feldtheorie hat, wobei die Ströme durch

$$j_L(z) = \epsilon(z)\Phi_L(z) \quad \text{bzw. } j_R(\bar{z}) = \epsilon(\bar{z})\Phi_R(\bar{z}) \tag{2.10}$$

gegeben sind. Nachdem A.B. Zamoldchikov damit begonnen hat solche Algebren explizit zu konstruiern [4], haben V.A. Fateev und A.B. Zamolodchikov 1986 die Darstellungen einer chiralen Algebra, die zusätzlich zum Energie-Impuls-Tensor noch ein primäres Feld der Dimensionen (3,0) hat, untersucht und haben dort ebenfalls sogenannte minimale Modelle gefunden, aber zu anderen c-Werten als (2.8) [13].

Diese Resultate sind von V.A. Fateev und S.L. Lykanov noch verallgemeinert worden, indem sie noch größere W-Algebren und deren Darstellungen konstruiert haben [14]. Inzwischen sind noch mehr konforme Modelle zu größeren Symmetriealgebren mit anderen c-Serien bekannt.

Man hofft, durch Klassifikation aller möglichen W-Algebren, auch eine mögliche Klassifikation aller möglichen 2D-CFT zu erhalten. Im fünften Kapitel werde ich die Konstruktion von solchen W-Algebren erklären.

3. Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra

Wie man im letzten Kapitel gesehen hat, ist die wichtigste mathematische Struktur hierbei die Theorie der Höchstgewichts-Darstellungen (HGD) der Virasoro-Algebra, die nun behandelt werden soll.

HGD sind durch Elemente des Dualraums der Cartan-Unteralgebra, die hier durch L_0 gegeben ist [1], charakterisiert.

Definition: Es seien h, c als komplexe Zahlen fest gewählt.

a) Eine HGD der Virasoro-Algebra $M_{h,c}$ enthält einen Vektor $|h\rangle$, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} (1) \quad & M_{h,c} = U(Vir) \mid h\rangle \\ (2) \quad & L_n \mid h\rangle = 0\,, \quad n < 0 \\ (3) \quad & L_0 \mid h\rangle = h \mid h\rangle\,, \end{aligned}$$

wobei U(Vir) die universell einhüllende Algebra der Virasoro-Algebra ist.

b) Eine HGD $V_{h,c}$ heißt Verma-Modul, falls folgende Sequenz für alle HGD $M_{h,c}$ exakt ist. $V_{h,c} \longrightarrow M_{h,c} \longrightarrow 0$.

Der Verma-Modul $V_{h,c}$ besitzt eine natürliche Graduierung

$$V_{h,c} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_{h,c}^n \quad , \tag{3.1}$$

wobei $V_{h,c}^n$ der L_0-Eigenraum mit Eigenwert $n + h$ ist. Man sieht leicht, daß $dim V_{h,c} = p(n)$ gilt, wobei $p(n)$ die Zahl der Partitionen von n ist:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = \frac{1}{\prod_{n=0}^{\infty}(1 - q^n)} \tag{3.2}$$

Definiert man nun auf dem Verma-Modul folgendermaßen einen antilinearen Automorphismus σ :

$$\begin{aligned} \sigma(L_n) &= L_{-n} \\ \sigma(\mid h\rangle) &= \langle h \mid, \end{aligned} \tag{3.3}$$

so ist mit $\langle h \mid h\rangle = 1$ eindeutig ein nicht notwendigerweise positiv definites Skalarprodukt definiert. Man sieht sofort, daß $V_{h,c}^n$ orthogonal zu $V_{h,c}^m$ für $n \neq m$ ist. Deshalb kann man sinnvoll die Determinante des auf $V_{h,c}^n$ eingeschränkten Skalarproduktes definieren. Sie ist ein reelles Polynom in h und c. Diese Determinante

[1] *Eigentlich wird die Cartan-Unteralgebra durch die zwei Elemente L_0 und c aufgespannt.*

ist das entscheidene Hilfsmittel zur Untersuchung der HGD, wie Kac 1979 zeigen konnte [7] . Er konnte auch eine explizite Formel für seine Determinante angeben, die 1982 von B.L. Feigin und D.B. Fuks [20] bewiesen worden ist:

$$\det_n(\ )_{h,c} = A_n \prod_{1\leq rs\leq n} \big(h - h_{r,s}(c)\big)^{p(n-rs)} \tag{3.4}$$

mit $h_{r,s} = \frac{1}{48}\Big((13-c)(r^2+s^2)+\sqrt{c^2-26c+25}(r^2-s^2)-24rs+2c-2\Big)$, wobei A_n unabhängig von c und h ist. Im Verma-Modul $V_{h,c}$ gibt es nun genau dann einen sogenannten singulären Vektor v mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned} L_0 v &= (h+rs)v\ , \\ L_n v &= 0 \quad\ \ n<0\,, \end{aligned} \tag{3.5}$$

wenn das Höchstgewicht durch $h = h_{r,s}$ mit positiven ganzen Zahlen r und s gegeben ist. Dann läßt sich $V_{h+rs,c}$ in $V_{h,c}$ einbetten, und das Bild liegt im Radikal von $(\ )_{h,c}$. Im interssantesten Fall, wenn nämlich die zentrale Ladung (2.8) erfüllt, ist diese Bedingung äquivalent zu

$$h = h_{r,s} = \frac{(rp-sq)^2-(p-q)^2}{4pq} \qquad r,s\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}. \tag{3.6}$$

Alle diese Verma-Module haben unendlich viele singuläre Vektoren. Eine besondere Rolle spielen die Darstellungen mit

$$0<r<q\ , \qquad 0<s<p\ , \tag{3.7}$$

denn ihre Fusionsalgebra ist endlich und abgeschlossen, was äquivalent zu Aussage (vii) von BPZ ist. Sie hat folgende Form:

$$[\Phi_{m_1,m_2}][\Phi_{n_1,n_2}] = \sum_{\substack{1\leq k_1\leq q-1\\ 1\leq k_2\leq p-1}} N^{(k_1,k_2)}_{(m_1,m_2),(n_1,n_2)}[\Phi_{k_1,k_2}] \tag{3.8}$$

Die $N^{(k_1,k_2)}_{(m_1,m_2),(n_1,n_2)}$ ändern sich nicht bei Permutationen ihrer Indizes . Für das Nichtverschwinden von $N^{(k_1,k_2)}_{(m_1,m_2),(n_1,n_2)}$ ist notwendig, daß

$$\mid m_i-n_i\mid\leq k_i\leq m_i+n_i \quad \text{und} \quad m_i+n_i+k_i = 1\ (mod\ 2) \quad \text{für } i\in\{1,2\}. \tag{3.9}$$

gilt.

D. Friedan, Z. Qiu und S. Shenker zusammen mit P. Goddard, A. Kent und D. Olive konnten 1986 zeigen, daß nur für $c\geq 1$ oder $p = q+1\geq 3$ in (2.8) unitäre Darstellungen existieren [21,22].

Der Charakter einer irreduziblen Darstellungen der Virasoro-Algebra ist definiert als

$$\chi_{h,c} = \mathrm{tr}_{L_{h,c}} q^{(L_0 - \frac{c}{24})}. \tag{3.10}$$

Falls (2.8), (3.6) und (3.7) gelten, ist der Charakter wie folgt gegeben:

$$\chi_{r,s} = \frac{q^{-\frac{c}{24}}}{\prod_{i=1}^{\infty}(1-q^i)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (q^{a(k)} - q^{b(k)}) \tag{3.11}$$

mit $a(k) = h_{r+2qk,s}$ und $b(k) = h_{r+2qk,-s}$.

4. Modulare Invarianz

Die Zustandssumme einer Quantenfeldtheorie ist durch

$$Z = tr\ e^{-\beta H} \tag{4.1}$$

gegeben. Geht man nun zu einer 2D-CFT auf einem Torus über, lautet die Zustandssumme

$$Z(\tau,\bar\tau) = (q\bar q)^{-\frac{c}{24}}\mathrm{tr}(q^{L_0}\bar q^{\bar L_0}) = \sum_{(h,\bar h)} N_{h,\bar h}\,\chi_h(\tau)\chi^\star_{\bar h}(\bar\tau)\,, \qquad (4.2),$$

wobei τ und $\bar\tau$ die modularen Parameter des Torus sind.

Betrachtet man nun eine CFT mit periodischen Randbedingungen auf einem Torus, so hat Cardy gezeigt [7], daß $Z(\tau,\bar\tau)$ invariant unter den Transformationen

$$\begin{aligned} &T : \tau \to \tau + 1 \quad \text{und} \\ &S : \tau \to -\frac{1}{\tau} \end{aligned} \tag{4.3}$$

(ebenso für $\bar\tau$) ist. S und T erzeugen frei mit den Relationen $S^2 = (ST)^3 = 1$ die sogenannte Modulgruppe $SL(2,\mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$. Die modulare Invarianz bedeutet, daß die Charaktere der HGD der Virasoro-Algebra einen Darstellungsraum dieser Gruppe aufspannen. Die Charaktere (3.11) mit den Bedingungen (3.7) zeigen folgendes Transformationsverhalten unter S:

$$S : \chi_{r,s} \longrightarrow \sum_{\substack{1\le r'\le q-1\\ 1\le s'\le p-1}} S^{r',s'}_{r,s}\ \chi_{r',s'} \tag{4.4}$$

wobei

$$S^{r',s'}_{r,s} = \sqrt{\frac{2}{pq}}(-1)^{rs'+r's+1}\sin\frac{\pi prr'}{q}\sin\frac{\pi qss'}{p} \tag{4.5}$$

Es gibt einen überraschenden Zusammenhang zwischen dieser S-Matrix und der Fusionsalgebra (vgl. 3.8). E. Verlinde hat 1988 folgende Beziehung vermutet, die dann von G. Moore und N. Seiberg bewiesen worden ist [11,12]:

$$N^c_{a,b} = \sum_m \frac{S^a_m\, S^b_m\, S^m_c}{S^m_0} \tag{4.6}$$

Unter Ausnutzung der modularen Invarianz ist es A. Cappelli, C. Itzykson und J.-B. Zuber 1987 gelungen alle konformen Feldtheorien mit $c < 1$ zu klassifizieren. Dabei tritt ein sehr interessanter Zusammenhang mit den halbeinfachen Lie-Algebren der A-D-E-Serie auf [15].

Wenn eine Quantenfeldtheorie Fermionen enthält, gilt nicht mehr die Invarianz der Zustandssumme unter der vollen Modulgruppe; denn bei Fermionen – Teilchen mit halbzahligem Spin – geht das periodische Verhalten in der $(z, \bar{z})$-Ebene in anti-periodisches Verhalten auf dem Zylinder über und umgekehrt. Nun muß man zwischen dem sogenannten Neveu-Schwartz-Sektor (periodisches Fermion in der $(z, \bar{z})$-Ebene) und dem sogenannten Ramond-Sektor (antiperiodisches Fermion in der $(z, \bar{z})$-Ebene) unterscheiden. Im ersten Sektor ist $Z(\tau, \bar{\tau})$ nur noch unter S und T^2 invariant, im zweiten unter ST^2S und T. Diese Operationen erzeugen frei zwei disjunkte Untergruppen der Modulgruppe vom Rang 3 [8], die zueinander konjugiert sind. Durch die Operation TST gelangt man von dem einen Sektor in den anderen und wieder zurück.

5. Allgemeine Resultate über W-Algebren

Es sei $\mathcal{F}$ die Algebra der lokalen chiralen Felder einer konformen Feldtheorie, definiert auf einer 2-dimensionalen Raum-Zeit (mit kompaktifiziertem Raum). Wegen SU(1,1)-Invarianz trägt $\mathcal{F}$ eine natürliche Graduierung durch die konformen Dimensionen und ist aufgespannt durch die quasi-primären Felder zusammen mit ihren Ableitungen. Lokalität und Invarianz unter rationalen konformen Transformationen schränken den Kommutator von zwei chiralen Feldern so sehr ein, daß er fast vollständig, bis auf einige Strukturkonstanten, durch die Dimensionen bestimmt ist.

Theorem (W.Nahm): Es sei $\{\phi_i \mid i \in I\}$ eine Menge quasi-primärer Felder mit ganz- oder halbzahliger konformer Dimension $d(\phi_i) = h(i)$, die zusammen mit ihren Ableitungen $\mathcal{F}$ aufspannen. Definiert man die Fourier-Zerlegung eines links-chiral Feldes durch $\phi(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{n-d(\phi)}\phi_n$, bezeichnet das Vakuum der Theorie mit $|v\rangle$ und setzt weiter

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \langle v \mid \phi_{i,-h(i)}\phi_{j,h(j)} \mid v\rangle\,, \\ C_{ijk} &= \langle v \mid \phi_{k,-h(k)}\phi_{i,h(k)-h(j)}\phi_{j,h(j)} \mid v\rangle\,, \end{aligned} \tag{5.1a}$$

dann hat die Lie-Algebra der Fourier-Komponenten der links-chiralen Felder die Form

$$[\phi_{i,m},\phi_{j,n}]_\pm = \sum_{k\in I} C_{ij}^k\, p_{ijk}(m,n)\phi_{k,m+n} + d_{ij}\,\delta_{n,-m}\binom{n+h(i)-1}{2h(i)-1} \tag{5.1b}$$

wobei $C_{ij}^l d_{lk} = C_{ijk}$. Mit der Notation $h(ijk) = h(i)+h(j)-h(k)$ sind die universellen Polynome p_{ijk} gegeben durch

$$p_{ijk}(m,n) = \sum_{\substack{r,s\in\mathbb{Z}_+\\ r+s=h(ijk)-1}} c_{r,s}^{ijk}\binom{m+h(i)-1}{r}\binom{n+h(j)-1}{s} \tag{5.1c}$$

mit

$$c_{r,s}^{ijk} = (-1)^r\frac{(2h(k)-1)!s!r!}{(h(i)+h(j)+h(k)-2)!}\binom{2h(i)-2-r}{s}\binom{2h(j)-2-s}{r}\,. \tag{5.1d}$$

Die C_{ijk} sind invariant unter geraden Permutationen ihrer Indizes und ändern unter ungeraden Permutationen ihr Vorzeichen um den Faktor $(-1)^{h(ijk)}$.

Falls $\mathcal{F}$ zusätzlich eine Involution $\phi \mapsto \phi^+$ besitzt, und man die Felder so wählt, daß gilt $\phi_i^+ = (-1)^{[h(i)+\frac{1}{2}]}\phi_{-i}$, dann sind die Strukturkonstanten d_{ij} und C_{ijk} alle reell. Ein Beweis dieses Theorems und der folgenden Aussagen findet sich in [6].

Zusätzlich zur Lie-Klammerstruktur besitzt eine W-Algebra eine andere wichtige Operation, das Bilden von normalgeordneten Produkten (NOPs) aus chiralen Feldern. Das NOP von zwei chiralen Feldern ϕ, χ ist mit Hilfe der Fourier-Komponenten wie folgt definiert

$$N(\phi,\chi)_n := \sum_{k<d(\chi)} \phi_{n-k}\chi_k + \sum_{k\geq d(\chi)} \chi_k \phi_{n-k} \; ; \tag{5.2}$$

in dieser Form tritt es in der OPE von ϕ und χ (siehe unten) auf, ist aber kein quasi-primäres Feld, so daß Gleichung (5.1) keine Information über seinen Kommutator mit anderen Feldern liefert; deshalb muß dieser Ausdruck noch auf die quasi-primären Felder projiziert werden. Dies führt zu folgender Definition:

Definition und Lemma (W.Nahm): Mit den Annahmen und Notationen von oben definiert man das normalgeordnete Produkt zweier chiraler Felder durch

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\phi_j, \partial^n \phi_i) := {} & \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \binom{h(ijk)+\sigma(ijk)+2n-1}{r}^{-1} \binom{2h(i)+n-1}{r} \\ & \times \partial^r N(\phi_j, \partial^{n-r}\phi_i) \\ & - (-1)^n \sum_{\{k:h(ijk)\geq 1\}} C_{ij}^k \binom{h(ijk)+n-1}{n} \binom{h(ijk)+\sigma(ijk)+2n-1}{n}^{-1} \\ & \times \binom{2h(i)+n-1}{h(ijk)+n} \binom{\sigma(ijk)-1}{h(ijk)-1}^{-1} \frac{\partial^{h(ijk)+n}\phi_k}{(\sigma(ijk)+n)(h(ijk)-1)!}\end{aligned} \tag{5.3}$$

wobei $\sigma(ijk) = h(i) + h(j) + h(k) - 1$.

Dieses Feld ist quasi-primär und hat konforme Dimension $h(i) + h(j) + n$.

Die Operation der Normalordnung ist (anti)kommutativ – d. h. für zwei bosonische Felder ϕ, χ gilt $\mathcal{N}(\phi,\chi) = \mathcal{N}(\chi,\phi)$ – aber nicht assoziativ. Es gilt $\mathcal{N}(\phi, \partial\chi) = -\mathcal{N}(\partial\phi, \chi)$.

Die letzte Aussage weist darauf hin, daß es einige lineare Abhängigkeiten zwischen den verschiedenen NOPs derselben konformen Dimension gibt. Unter Beachtung der quasi-primären Natur von $\mathcal{N}(\phi,\chi)$ und des Isomorphismus zwischen dem Vektorraum der Felder und dem Hilbertraum der Theorie, konnte ich zeigen, daß unter den NOPs gleicher konformer Dimension d, die nur aus dem Energie-Impuls-Tensor aufgebaut sind, – für generisches c – genau $p(d)-2p(d-1)+p(d-2)$ linear unabhängige existieren, wobei $p(k)$ die Zahl der Partitionen von k bezeichnet. Analog spannen, die nicht-abgeleiteten sekundären Felder eines primären Feldes mit konformer Dimension $\delta \neq 0$ generisch einen Vektorraum der Dimension $p(d-\delta) - p(d-\delta-1)$ auf.

Die Notation des NOP führt direkt zu einer anderen, nämlich der von einfachen Feldern. Ein quasiprimäres chirales Feld ϕ wird einfach genannt, wenn es orthogonal zu allen normalgeordneten Produkten ist, d. h. $d_{\phi X} = 0$ für alle NOPs X. Man kann zeigen, daß jedes einfache Feld Virasoro-primär oder gleich dem Energie-Impuls-Tensor L ist.

Die Unterscheidung von quasi-primären Feldern in NOPs und einfache Felder erweist sich als sehr nützlich.

Lemma (W.Nahm): Der Kommutator von normalgeordneten Produkten ist vollständig durch die Kommutatoren der enthaltenen einfachen Felder bestimmt.

Das bedeutet, daß die ganze Lie-Algebrastruktur der W-Algebra schon durch die Kommutatorrelationen der einfachen Felder bestimmt ist.

Diese allgemeinen Definitionen reichen nun aus, einen Algorithmus für die explizite Konstruktion von W-Algebren mit endlich vielen einfachen Feldern anzugeben. Die einzelnen Schritte sind die folgenden:

a) Als Eingabe müssen die Virasoro-primären einfachen Felder festgelegt werden; für einfache Felder der Dimension $h(i)$ bezeichnet man die resultierende W-Algebra mit $\mathrm{W}(2, h(1), h(2), \ldots)$. (Hier symbolisiert die 2 das Virasoro-Feld, während der Identitätsoperator nicht explizit erwähnt wird.)

b) Von allen linear unabhängigen NOPs, die im Kommutator von einfachen Feldern auftreten, benötigt man nur die NOPs mit Dimension bis zu $2\delta - 2$, wobei δ die maximale Dimension der einfachen Felder ist ($2\delta - 1$, falls δ halbzahlig ist).

c) Nun muß man die Strukturkonstanten, die im Kommutator von zwei einfachen primären Felder auftreten, mit Hilfe des Nahmschen Theorems berechnen. Die Strukturkonstanten, die die Fusion dreier einfacher Felder beschreiben, bleiben vorläufig noch als freie Parameter übrig.

d) Während die SU(1,1)-Invarianz der W-Algebra schon durch die Form der universellen Nahmschen Polynome (5.1c,d) garantiert ist, müssen die Jacobi-Identitäten noch überprüft werden. Das ergibt eine bestimmte Anzahl von Bedingungen an die noch freien Strukturkonstanten der Theorie (vgl auch [6]).

Wegen des vorangegangenen Lemmas ist nur das Verschwinden von $\big[[\phi, \chi], \psi\big] + cycl.$ für drei einfache Felder ϕ, χ, und ψ zu zeigen; dies stellt sicher, daß die Jacobi-Identitäten für alle sekundären Felder auch erfüllt ist. Mehr noch ist es hinreichend, nur die primären Felder auf der rechten Seite dieses Ausdrucks zu betrachten (vgl. [6, 9]). Da zusätzlich alle Jacobi-Identitäten, die den Energie-Impuls-Tensor auf der linken Seite enthalten, erfüllt sind (dies folgt aus der Tatsache, daß die Strukturkonstanten, die sekundäre Felder enthalten, schon durch die konforme Invarianz bestimmt sind), reduziert sich Schritt d) für die $W(2,\delta)$-Algebren auf das Überprüfen einer einzigen Jacobi- Identität.

Gültigkeit der Jacobi-Identitäten gibt die einzige Einschränkung an die Strukturkonstanten und die zentrale Ladung der Theorie. Wenn dies erfüllt ist, garantiert die Konstruktion die Existenz einer W-Algebra oder äquivalent dazu die Assoziativität der Feldalgebra bezüglich der Operatorproduktentwicklung.

Zusammen mit R. Blumenhagen, M. Flohr, A. Kliem und A. Recknagel habe ich nach diesem Verfahren von W. Nahm eine ganze Reihe solcher W-Algebren explizit konstruiert (vgl. [5]). Dabei konnten wir sowohl die Existenz von unendlich vielen W-Algebren der Form $W(2,\delta)$ beweisen, als auch einige andere interessante Schemata bei der Existenz von W-Algebren in Abhängigkeit der zentralen Ladung feststellen.

Eine nun natürlich auftretende Frage ist: Wie sieht die 2D-CFT mit dieser spektrumerzeugenden Algebra aus? Welche Felder können in ihr auftreten? Ist es möglich minimale Modelle ähnlich wie BPZ zu finden? Mathematisch reduziert sich dies auf die Frage nach den möglichen Höchstgewichts-Darstellungen. Es wird sich zeigen, daß die Darstellungstheorie am einfachsten im Falle der $W(2,\delta)$ mit halbzahligem δ ist. Deshalb werde ich mich im nächsten Kapitel nur auf die explizite Konstruktion dieser W-Algebren beschränken.

6. Explizite Konstruktion einiger W-Algebren

Im folgenden werde ich den im letzten Kapitel erklärten Algorithmus exemplarisch am Fall der $W(2,\frac{5}{2})$ vorführen und zum Schluß die Ergebnisse der $W(2,\delta)$ mit $\delta = \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}$ und $\frac{15}{2}$ angeben und interpretieren.

$W(2,\frac{5}{2})$:

Diese Algebra wurde schon 1985 von A.B. Zamolodchikov konstruiert [4], gibt aber die Möglichkeit, die wichtigsten Schritte des Algorithmus zu erklären. Die einfachen Felder sind hier der Identitätsoperato r, der Energie-Impuls-Operator, der der Virasoro-Algebra

$$[L_m, L_n] = (n-m)L_{m+n} + \frac{c}{2}\binom{n+1}{3}\delta_{m+n,0} \tag{6.1}$$

mit zentraler Ladung c genügt, und zusätzlich ein primäres Feld $W(z)$ mit konformer Dimension $\frac{5}{2}$:

$$[L_m, W_n] = (n - \frac{3}{2}m)W_{m+n} \tag{6.2}$$

Den Ausdruck, den man nun zu untersuchen hat, ist der Antikommutator von W(z) mit sich selbst. Aus der Lokalität, $SU(1,1)$-Invarianz, und den zyklischen bzw. antizyklischen Eigenschaften der Strukturkonstanten folgt, daß er nur quasi-primäre Felder gerader Dimension bis 4 enthalten kann. Diese sind gegeben durch 1, L und das normalgeordnete Produkt von L mit sich selbst:

$$\Lambda := \mathcal{N}(L,L) = N(L,L) - \frac{3}{10}\partial^2 L \tag{6.3}$$

Das Feld W(z) kann selber nicht auftreten, was die Berechnung dieser W-Algebra im Vergleich zu anderen W-Algebren mit mindestens einem primären Feld mit geradzahliger konformer Dimension erheblich vereinfacht. Der Antikommutator sieht nun folgendermaßen aus:

$$[W_m, W_n]_+ = d_{WW}\binom{n+\frac{3}{2}}{4}\delta_{m+n} + C_{WW}^{L} p_{\frac{5}{2}\frac{5}{2}2}(m,n)L_{m+n} + C_{WW}^{\Lambda} p_{\frac{5}{2}\frac{5}{2}4}(m,n)\Lambda_{m+n}$$
(6.4),

Im folgenden werde ich W(z) durch

$$d_{WW} = \frac{c}{\delta} \quad (\text{hier} \quad = \frac{2c}{5}\ ) \tag{6.5}$$

normieren. Benutzt man nun die allgemeinen Formeln des Theorems von W. Nahm aus dem letzten Kapitel, kann man ohne große Schwierigkeiten die Strukturkonstanten berechnen:

$$\begin{aligned} C^L_{WW} &= 2 \ , \\ C^\Lambda_{WW} &= \frac{27}{5c+22} \end{aligned} \tag{6.6}$$

Die Nennernullstelle von C^Λ_{WW} tritt auf, weil $\Lambda\,|\,0\rangle$ für $c = -\frac{22}{5}$ ein singulärer Vektor ist (vgl. 3.5). Der einzige freie Parameter ist nur noch die zentrale Ladung c, die durch die Forderung nach Gültigkeit der Jacobi-Identität noch eingeschränkt wird. Setzt man (6.4),(6.5) und (6.6) in $\big[[W_m, W_n]_+, W_q\big]_+ + cycl. = 0$ ein und benutzt (5.1), so erhält man

$$\big[[W_m, W_n], W_q\big] + cycl. = P_2(m,n,q)L_{m+n+q} + P_{\frac{5}{2}}(m,n,q)W_{m+n+q} + R_{m+n+q} \stackrel{!}{=} 0 \tag{6.7}$$

wobei $P_k(m,n,q)$ Linearkombinationen von Produkten der Nahmschen Polynome bezeichnen, die auch den noch freien Parameter c enthalten. Der nicht-einfache Rest der rechten Seite ist in R_{m+n+q} zusammengefaßt. In Kapitel 5 habe ich erklärt, daß für das Verschwinden der rechten Seite $P_{\frac{5}{2}}(m,n,q) = 0$ hinreichend ist. Dies führt nach kurzer Rechnung zu der Bedingung

$$14c + 13 = 0 \tag{6.8}$$

(Die zentrale Ladung $c = -\frac{13}{14}$ ist in der minimalen Serie (2.8) mit $p = 4$ und $q = 7$ enthalten.)

Dieselbe Prozedur kann man für andere Werte von halbzahligen δ durchziehen. Für $\delta > \frac{15}{2}$ stößt man schnell an die Grenzen der Computerkapazitäten. In der Diplomarbeit von A. Kliem [16] wird darauf genauer eingegangen, dem es auch gelungen ist, für noch größere Werte von δ, $W(2,\delta)$ zu berechnen. Im folgenden will ich nur noch die zentralen Ladungen weiterer halbzahliger W-Algebren angeben.

Tabelle (6.9) zeigt die c-Werte für fermionische $\mathcal{W}(2,\delta)$-Algebren

$\mathcal{W}(2,\frac{7}{2})$:	$c = \frac{21}{22}\,,\ -\frac{19}{6}\,,\ -\frac{161}{8}\,;$
$\mathcal{W}(2,\frac{9}{2})$:	$c = \frac{25}{26}\,,\ -\frac{7}{20}\,,\ -\frac{125}{22}\,,\ -\frac{279}{10}\,,\ -35\,;$
$\mathcal{W}(2,\frac{11}{2})$:	$c = -\frac{217}{26}\,;$
$\mathcal{W}(2,\frac{13}{2})$:	$c = \frac{9}{34}\,,\ -\frac{611}{14}\,,\ -\frac{111}{10}\,;$
$\mathcal{W}(2,\frac{15}{2})$:	$c = \frac{25}{28}\,,\ -\frac{11}{38}\,,\ -\frac{39}{10}\,,\ -\frac{473}{34}\,,\ -\frac{825}{16}\,,\ -59\,.$

Obwohl die Forderung $P_\delta(m,n,q) = 0$ (vgl. 6.7) mit steigendem δ immer mehr linear unabhängige Bedingungen für den einzigen freien Parameter liefert, existieren überraschenderweise auch noch für große δ W-Algebren der Form $W(2,\delta)$. In [5] konnten wir sogar zeigen, daß für jedes δ eine $W(2,\delta)$ für bestimmte zentrale Ladungen existieren muß .

Proposition: Für jedes $\delta \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ und jede Zerlegung $\delta = \frac{(p-2)(q-2)}{4}$, $p \in 4\mathbb{Z}$, $q \in 2\mathbb{Z}+1$ und p, q teilerfremd existiert eine $W(2,\delta)$ mit $c = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}$.

Der Beweis beruht auf einfachen Untersuchungen der Fusionsalgebra. In einem minimalen Modell mit oben angegebenen Werten p und q ist die konforme Dimension des Feldes $\Phi_{q-1,1}$ gleich δ. Dieses Feld hat folgende Eigenschaft in der Fusionsalgebra:

$$[\Phi_{q-1,1}][\Phi_{i,j}] = [\Phi_{q-i,j}] \tag{6.10}$$

Insbesondere gilt $[\Phi_{q-1,1}][\Phi_{q-1,1}] = [\Phi_{1,1}] = 1$; deshalb bilden $1, L(z), W(z)$ eine abgeschlossene Unteralgebra. Dies ist hinreichend für die Existenz einer solchen W-Algebra. Die folgende Tabelle zeigt die c-Werte aus Tabelle 6.9, die dieser Proposition genügen.

Tabelle(6.11) zeigt all die c-Werte, die von der Proposition kommen

	$(2,1)$	$(1,3)$	$(4,1)$	$(6,1)$
$\mathcal{W}(2,\frac{5}{2})$:		$(4,7) = -\frac{13}{14}$		
$\mathcal{W}(2,\frac{7}{2})$:	$(16,3) = -\frac{161}{8}$	$(4,9) = -\frac{19}{6}$		
$\mathcal{W}(2,\frac{9}{2})$:	$(20,3) = -\frac{279}{10}$	$(4,11) = -\frac{125}{22}$	$(8,5) = -\frac{7}{20}$	
$\mathcal{W}(2,\frac{11}{2})$:		$(4,13) = -\frac{217}{26}$		
$\mathcal{W}(2,\frac{13}{2})$:	$(28,3) = -\frac{611}{14}$	$(4,15) = -\frac{111}{10}$		
$\mathcal{W}(2,\frac{15}{2})$:	$(32,3) = -\frac{825}{16}$	$(4,17) = -\frac{473}{34}$	$(12,5) = -\frac{39}{10}$	$(8,7) = \frac{25}{28}$

Die c-Werte aus (6.9), die nicht in (6.11) enthalten sind, lassen sich in zwei Serien einordnen.

Tabelle (6.12) zeigt eine Serie, die nicht aus der Proposition folgt

$\mathcal{W}(2,\frac{7}{2})$:	$(12,11) = \frac{21}{22}$
$\mathcal{W}(2,\frac{9}{2})$:	$(12,13) = \frac{25}{26}$
$\mathcal{W}(2,\frac{13}{2})$:	$(12,17) = \frac{9}{34}$
$\mathcal{W}(2,\frac{15}{2})$:	$(12,19) = -\frac{11}{38}$

Bemerkenswerterweise ist die Dimension des zusätzlichen Generators in diesen Fällen bei gegebenem p und q durch $\delta = h_{1,5}$ (3.6) bestimmt. Dieser Sachverhalt wird bei Betrachtung der Darstellungen klarer (siehe Kapitel 6).

In Tabelle (6.9) sind noch zwei W-Algebren enthalten, deren c-Werte nicht in der minimalen Serie liegen: $W(2, \frac{9}{2})$ bei $c = -35$ und $W(2, \frac{15}{2})$ bei $c = -59$. In diesem Fall gilt $c = 1 - 12k$ und $2\delta = 3k$ mit $k \in \mathbb{Z}_+$. Es wäre etwas vermessen, anhand dieser zwei Beispiele schon von einer Serie zu sprechen; aber wenn man nicht nur den fermionischen Fall betrachtet, sondern auch den bosonischen, so setzt sich diese Serie ohne Einschränkungen fort. An der Struktur des Ausdrucks für c läßt sich schon erahnen, daß diese W-Algebren in engem Zusammenhang mit Vertexoperatorkonstruktionen stehen müssen. Mehr dazu ist in der Diplomarbeit von Michael Flohr [17,18] zu finden.

In den nächsten Kapiteln werde ich nun die Darstellungen der ersten beiden Serien angeben. Für den Fall mit $c = 1 - 12k$ wurden einige Darstellungen von Michael Flohr [17,18] berechnet und interessante Muster entdeckt.

7. Darstellungen der W(2,5/2)

Die einfachste W-Algebra mit einem zusätzlichen fermionischen primären Feld zum Energie-Impuls-Tensor ist die $W(2,\frac{5}{2})$. (Die $W(2,\frac{3}{2})$ ist die Super-Virasoroalgebra, die für alle Werte von c existiert und unendlich viele Darstellungen besitzt, die alle bekannt sind.) Die $W(2,\frac{5}{2})$ ist durch (6.2-6) gegeben, und existiert für $c = -\frac{13}{14}$, wie die Proposition in Kapitel 6 verlangt.

Die HGD einer W-Algebra sind durch Elemente des Dualraums ihrer Cartan-Unteralgebra gegeben. Falls $W(z)$ symmetrisch ist (Neveu-Schwartz-Sektor) – das ist der Fall den ich zuerst untersuchen will –, haben die Fourier-Komponenten W_m von $W(z)$ halbzahlige Indizes; dann ist es einfach zu sehen, daß die Cartan-Unteralgebra der $W(2,\frac{5}{2})$ eindimensional ist und nur L_0 enthält. (Dies gilt mit der gleichen Einschränkung wie auf Seite 8 Fußnote 1.) So kann man die HGD durch einen einzigen Parameter charakterisieren:

$$\begin{aligned} L_n \,|h\rangle &= 0 \quad n < 0\,, \\ W_n \,|h\rangle &= 0 \quad n < 0\,, \\ L_0 \,|h\rangle &= h\,|h\rangle \end{aligned} \tag{7.1}$$

Der Darstellungs-Modul wird aufgespannt durch Vektoren der Form

$$L_{n_i} ... L_{n_1} W_{m_j} ... W_{m_1} \,|h\rangle \tag{7.2}$$

mit $n_i \geq ... \geq n_1 \geq 1$ und $m_i \geq ... \geq m_1 \geq \frac{1}{2}$. Aus physikalischen Gründen und der Art der Konstruktion der W-Algebra ist es klar, daß die Vakuum-Darstellung mit $h = 0$ existieren muß . (Für $h = 0$ gilt: $W_n \mid h\rangle = \ 0$ für $n < \frac{5}{2}$). In dem nicht minimalen Modell mit $p = 4$ and $q = 7$ ($c = -\frac{13}{14}$) kann W(z) mit dem Feld $\Phi_{1,3} = \Phi_{6,1}$ identifiziert werden. Gleichung (6.10) ergibt in diesem Fall

$$\Phi_{6,1}\Phi_{i,j} = \Phi_{i,4-j} = \Phi_{7-i,j} \quad 0 < i < 7\,,\ 0 < j < 4; \tag{7.3}$$

insbesondere $\Phi_{6,1}\Phi_{6,1} = \Phi_{1,1} = 1$ (d.h. $W\,W = 1$); dies bedeutet, daß der Charakter der HGD mit $h = 0$ folgende Form hat:

$$\chi^W_{1,1} := \chi_{1,1} + \chi_{6,1} \tag{7.4}$$

Dafür ist zu zeigen, daß jeder Virasoro-singuläre Vektor von $[\Phi_{1,1}]$ und $[\Phi_{6,1}]$ nicht nur ein Virasoro-singulärer, sondern auch ein W-Algebra-singulärer Vektor ist, d.h., es gilt zusätzlich zu (3.5)

$$W_n v = 0 \quad n < 0 \tag{7.5}$$

Dies kann man zeigen, indem man eine Abbildung aus dem irreduziblen HG-Unter-Virasoro-Modul, das durch einen singulären Vektor in $[\Phi_{1,1}]$ erzeugt wird, in den irreduziblen HG-Virasoro-Modul $[\Phi_{6,1}]$ mit der Hilfe eines Vertexoperators der Dimension δ wie in Referenz [10] konstruiert. Da der erste Virasoro-Modul außerhalb von (3.7) ist, ist dieser Vertexoperator gleich null [10]. Dieselben Argumente gelten für einen singulären Vektor im Virasoro-Modul $[\Phi_{6,1}]$.

Da die Transformationen der Virasoro-Charaktere unter S bekannt sind (4.4-3), ist es möglich, die S-Transformation von $\chi^W_{1,1}$ zu berechnen. Dies muß eine Linearkombination von Charakteren möglicher HGD der W-Algebra sein, die einen Vektorraum aufspannen, der unter S invariant ist. Bei genauer Betrachtung von (4.5)) zeigt sich, daß gilt:

$$S : \chi^W_{1,1,} \longrightarrow \frac{2}{\sqrt{7}} \sin\frac{4\pi}{7}\chi^W_{1,1} + \frac{2}{\sqrt{7}} \sin\frac{6\pi}{7}\chi^W_{2,1} - \frac{2}{\sqrt{7}} \sin\frac{2\pi}{7}\chi^W_{3,1}\,, \tag{7.6}$$

wobei $\chi^W_{2,1} = \chi_{2,1} + \chi_{5,1}$ und $\chi^W_{3,1} = \chi_{3,1} + \chi_{4,1}$. Diese drei Charaktere gehören zu den HGD mit $h = 0, h = -\frac{1}{14}$ und $h = \frac{1}{7}$, die invariant unter S sind, das folgende Gestalt hat:

$$S = \frac{2}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} \sin\frac{4\pi}{7} & \sin\frac{6\pi}{7} & -\sin\frac{2\pi}{7} \\ \sin\frac{6\pi}{7} & \sin\frac{2\pi}{7} & \sin\frac{4\pi}{7} \\ -\sin\frac{2\pi}{7} & \sin\frac{4\pi}{7} & -\sin\frac{6\pi}{7} \end{pmatrix}. \tag{7.7}$$

Die Argumentation für die singulären Vektoren ist zusammen mit (7.3) die gleiche wie oben, da alle auftretenden Teildarstellungen Elemente der minimalen Serie sind.

Bei dem Versuch das Analogon einer Kac-Determinante für diese W-Algebra zu berechnen, bin ich auf folgende sehr interessante Tatsache gestoßen. Wenn man die Vierpunktfunktion $\langle h \,|\, W_{-\frac{1}{2}}W_{-\frac{1}{2}}W_{\frac{1}{2}}W_{\frac{1}{2}} \;|\, h\rangle$ berechnet, kann man dies auf zwei unterschiedlichen Wegen tun

$$\begin{aligned} \langle h \,|\, W_{-\frac{1}{2}}W_{-\frac{1}{2}}W_{\frac{1}{2}}W_{\frac{1}{2}} \;|\, h\rangle &= \langle h \,|\, W_{-\frac{1}{2}}[W_{-\frac{1}{2}}, W_{\frac{1}{2}}]_+ W_{\frac{1}{2}} + W_{-\frac{1}{2}}W_{\frac{1}{2}}[W_{-\frac{1}{2}}, W_{\frac{1}{2}}]_+ \;|\, h\rangle \\ &= \frac{2\cdot 3^6}{7^6}(14h+1)(7h+2)h \end{aligned} \tag{7.8}$$

$$\begin{aligned} \langle h \,|\, W_{-\frac{1}{2}}W_{-\frac{1}{2}}W_{\frac{1}{2}}W_{\frac{1}{2}} \;|\, h\rangle &= \frac{1}{4}\langle h \,|\, [W_{-\frac{1}{2}}, W_{-\frac{1}{2}}]_+[W_{\frac{1}{2}}, W_{\frac{1}{2}}]_+ \;|\, h\rangle \\ &= \frac{2\cdot 3^6}{7^6}(14h+1)^2 h \end{aligned} \tag{7.9}$$

Nur die Werte $h = 0, h = -\frac{1}{14}$ und $h = \frac{1}{7}$ geben in beiden Rechnungen dieselben Resultate. Dies sind aber gerade die HGD, die ich oben schon gefunden habe. Das bedeutet, daß die $W(2, \frac{5}{2})$ mit antisymmetrischem primärem Feld der Dimension $\frac{5}{2}$ genau drei konsistente HGD besitzt. Diese Rechnung zeigt, daß $\mathcal{N}(W, W)$ (vgl. 5.3) in jedem Sektor verschwinden muß , was aber nur in diesen drei speziellen Fällen erfüllt ist. Das ist analog zum Verschwinden von z.B. $\Lambda = \mathcal{N}(L, L)$ in jedem

Darstellungssektor mit $c = -\frac{22}{5}$ (vgl. Kap2 (vi) S.6). Mit Hilfe von (4.6) und (7.7) kann man die Fusionsalgebra berechnen:

$$\begin{aligned} [\Phi^W_{2,1}][\Phi^W_{2,1}] &= [\Phi^W_{1,1}] + [\Phi^W_{3,1}] \\ [\Phi^W_{3,1}][\Phi^W_{3,1}] &= [\Phi^W_{1,1}] + [\Phi^W_{2,1}] + [\Phi^W_{3,1}] \\ [\Phi^W_{2,1}][\Phi^W_{3,1}] &= [\Phi^W_{2,1}] + [\Phi^W_{3,1}] \end{aligned} \tag{7.10}$$

Geht man nun zum Ramond-Sektor über, d.h. W(z) ist antisymmetrisch, wobei die Fourier-Komponenten W_m von W(z) dann ganzzahlige Indizes haben, ergibt eine analoge Rechnung für die Vierpunkfunktion $\langle h \mid W_{-1}W_{-1}W_1W_1 \mid h\rangle$ wie 7.8 und 7.9, daß h nur die Werte $\frac{13}{16}$, $\frac{27}{112}$ und $-\frac{5}{112}$ annehmen darf. Diese Werte stimmen mit $h_{1,2}$, $h_{2,2}$ und $h_{2,3}$ in der minimalen Serie für $p = 4$ und $q = 7$ überein. Diese Darstellungen haben folgende Charaktere:

$$\chi^W_{1,2} = \chi_{1,2}\,,\ \chi^W_{2,2} = \chi_{2,2} \ \text{ und } \ \chi^W_{3,2} = \chi_{3,2}\ . \tag{7.11}$$

Eine kurze Rechnung zeigt, daß der von diesen Charakteren aufgespannte Raum invariant unter den Transformationen T und ST^2S ist, wie es notwendig für den Ramond-Sektor ist. So folgt, daß dies die einzigen erlaubten Darstellungen im Ramond-Sektor sind.

Genauso kann man leicht zeigen, daß TST die beiden Sektoren ineinander überführt.

8. Verallgemeinerungen

Die Resultate des letzten Kapitels werde ich nun zuerst für die fermionischen W-Algebren, die aus der Proposition von Kapitel 6 folgen, verallgemeinern. Falls $p \in 4\mathbb{Z}$, $q \in 2\mathbb{Z}+1$, p und q teilerfremd sind, dann existiert $W(2,\delta)$ mit $\delta = \frac{(p-2)(q-2)}{4}$ und zentraler Ladung $c = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}$. In diesem minimalen Modell hat das Feld $\Phi_{q-1,1}$ konforme Dimension δ, und kann mit dem zusätzlichen Feld der W-Algebra identifiziert werden. Zuerst werde ich den Fall untersuchen, in dem W(z) symmetrisch ist, d.h. sich im Neveu-Schwartz-Sektor befindet. Dieses Feld operiert in der Fusionsalgebra wie (6.10). Deshalb läßt sich der Charakter der Vakuumdarstellung wie folgt schreiben:

$$\chi^W_{1,1} = \chi_{1,1} + \chi_{q-1,1} \tag{8.1}$$

Die Argumentation bezüglich der singulären Vektoren ist dieselbe wie im letzten Kapitel. Die Charaktere der verschiedenen Darstellungen dieser W-Algebra müssen einen Darstellungsraum der Untergruppe der modularen Gruppe, die durch S und T^2 frei erzeugt wird, aufspannen. Sie sind gegeben durch:

$$\chi^W_{i,j} = \chi_{i,j} + \chi_{q-i,j}$$
$$\text{wobei}\quad 1 \le i < \frac{q}{2}, \quad 1 \le j < \frac{p}{2} \quad \text{und} \quad j \text{ ungerade} \tag{8.2}$$

Da das Transformationsverhalten der einzelnen Virasoro-Charaktere unter S durch (4.4-5) bestimmt ist, gilt

$$S : \chi^W_{i,j} \longrightarrow \sum_{\substack{1 \le r' \le q-1 \\ 1 \le s' \le p-1}} (S^{r',s'}_{i,j} + S^{r',s'}_{q-i,j})\chi_{r',s'}, \tag{8.3}$$

wobei

$$S^{r',s'}_{i,j} + S^{r',s'}_{q-i,j} = \sqrt{\frac{2}{pq}}(-1)^{is'+jr'+1}(1-(-1)^{s'}) \sin\frac{\pi q j s'}{p} \sin\frac{\pi p i r'}{q}. \tag{8.4}$$

Nach kurzer Rechnung kann man zeigen, daß für j und l ungerade

$$S^{k,l}_{i,j} + S^{k,l}_{q-i,j} = S^{q-k,l}_{i,j} + S^{q-k,l}_{q-i,j} \tag{8.5}$$

gilt. Daraus, und weil (8.4) für ungerade s' verschwindet, folgt, daß die die Charaktere (8.2) unter S invariant sind und zu Darstellungen der W-Algebra gehören. Diese Darstellungen korrespondieren zu den h-Werten $h_{i,j}$ aus der minimalen Serie

(3.6) mit denselben Einschränkungen an i und j wie in (8.2). Die S-Matrix der W-Algebra ist durch

$$\tilde{S}_{i,j}^{i',j'} = 4\sqrt{\frac{2}{pq}}(-1)^{ij'+ji'+1} \sin\frac{\pi q j j'}{p} \sin\frac{\pi p i i'}{q} \tag{8.6}$$

gegeben. ($p = 4$ und $q = 7$ gibt die Darstellungen der $W(2, \frac{5}{2})$.)

Berechnung der Vierpunktfunktion aus Kapitel 7 auf den zwei alternativen Wegen (7.8) und (7.9) liefert für die $W(2, \frac{7}{2})$ und die $W(2, \frac{9}{2})$ wieder genau diese h-Werte. Leider ist es mir nicht gelungen, einen allgemeinen Beweis für diese Einschränkungen an die h-Werte zu erhalten. Mir scheint aber das Ergebnis so überzeugend zu sein, daß man davon ausgehen kann, daß die oben gefundenen h-Werte alle Darstellungen, der in diesem Abschnitt untersuchten W-Algebren liefern, und in nicht allzu ferner Zukunft dafür ein Beweis gefunden werden kann.

Mithilfe der Formel von E. Verlinde (4.6) habe ich mit einem Computerprogramm aus der S-Matrix (8.6) für eine große Anzahl von W-Algebren die Fusionsalgebra berechnet; daraus ließ sich sehr schnell eine allgemeine Gesetzmäßigkeit erkennen:

$$[\Phi^W_{m_1,m_2}][\Phi^W_{n_1,n_2}] = \sum_{\substack{1 \le k_1 < \frac{q}{2} \\ 1 \le k_2 < \frac{p}{2} \\ k_2 \text{ ungerade}}} N^{(k_1,k_2)}_{(m_1,m_2)(n_1,n_2)} [\Phi^W_{k_1,k_2}] \tag{8.7}$$

$$\text{wobei} \quad 1 \le m_1, n_1, k_1 < \frac{q}{2}, \quad 1 \le m_2, n_2, k_2 < \frac{p}{2} \quad \text{und} \quad m_2, n_2, k_2 \;\; \text{ungerade.}$$

Die $N^{(k_1,k_2)}_{(m_1,m_2)(n_1,n_2)}$ ändern sich nicht unter Permutationen ihrer Indizes (m_i, n_i, k_i). Für das Nichtverschwinden der $N^{(k_1,k_2)}_{(m_1,m_2)(n_1,n_2)}$ ist es notwendig, daß gilt:

$$\begin{array}{ll} (1) & |\, m_i - n_i \,| < \;k_i\; < |\, m_i + n_i \,| \quad i \in \{1,2\} \\ (2) & (m_1 + n_1 + k_1) = 1 \;(mod\ 2) \;\;\text{oder}\;\; m_1 + n_1 + k_1 > p \end{array} \tag{8.8}$$

Als nächstes will ich die Darstellungstheorie der sogenannten 12er-Serie (Tabelle 6.12) untersuchen. Anhand der Ergebnisse aus Kapitel 6, insbesondere des Schemas, das in Tabelle 6.12 erkennbar ist, läßt sich sehr begründet vermuten, daß für q ungerade und nicht durch 3 teilbar eine $W(2, \delta)$ mit $\delta = \frac{q-4}{2}$ und zentraler Ladung $c = 1 - \frac{(12-q)^2}{2q}$ existiert. In dem minimalen Modell mit $p = 12$ und q (wie oben) hat das Feld $\Phi_{1,5}$ konforme Dimension δ und kann mit dem zusätzlichen primären Feld der W-Algebra identifiziert werden. Im Gegensatz zu vorher hat dieses Feld nicht eine so einfache Gestalt in der Fusionsalgebra (vgl. 6.10). Aber man kann leicht zeigen, daß hier die Felder $\Phi_{1,1}$, $\Phi_{1,5}$, $\Phi_{1,7}$ und $\Phi_{1,11}$ eine abgeschlossene

Fusionsunteralgebra bilden. Sie haben die konformen Dimensionen 0, $\frac{q-4}{2}$, $q-3$ bzw. $\frac{5q-10}{2}$. Daraus folgt, daß die Vakuumdarstellung eine Summe von vier Virasoro-Darstellungen ist:

$$\chi_1^W = \chi_{1,1} + \chi_{1,5} + \chi_{1,7} + \chi_{1,11} \tag{8.9}$$

Da die Operation von S auf χ_1^W wieder eine Linearkombination von Charakteren von Darstellungen geben muß, kann man auch hier auf die möglichen Darstellungen schließen. Setzt man

$$\chi_i^W = \chi_{i,1} + \chi_{i,5} + \chi_{i,7} + \chi_{i,11} \quad \text{mit} \quad 1 \leq i < \frac{q}{2}\,, \tag{8.10}$$

dann schließen diese Charaktere unter S, das folgendermaßen bestimmt ist:

$$\tilde{S}_i^j = \sqrt{\frac{8}{3q}}(-1)^{i+j+1}(\sin\frac{q\pi}{12} + \sin\frac{5q\pi}{12})\sin\frac{12\pi ij}{q} \tag{8.11}$$

Im Fall der $W(2,\frac{7}{2})$ bei $c = \frac{21}{22}$ zeigt wieder eine Untersuchung der Vierpunktfunktion, daß nur die Darstellungen mit diesen Charakteren erlaubt sind.

Mit Hilfe von (4.6) kann man wieder die Fusionsalgebra mit einem kleinen Computerprogramm berechnen. Man erhält:

$$[\Phi_i^W][\Phi_j^W] = \sum_{1\leq k<\frac{q}{2}} N_{i,j}^k[\Phi_k^W], \tag{8.12}$$

wobei für das Nichtverschwinden der $N_{i,j}^k$ notwendig ist, daß

$$\begin{array}{ll} (1) & |\, i-j \,| < \; k \; < |\, i+j \,| \\ (2) & i+j+k = 1 \ (mod\ 2) \ \ \text{oder} \ \ i+j+k > q \end{array} \tag{8.13}$$

An diesen Charakteren kann man nun das Auftreten von primären Felder in einer W-Algebra erkennen, da jedes Virasoro-Höchstgewicht in dem Charakter in eins zu eins Korrespondenz mit einem primären Feld steht. Für die W-Algebren, die aus der Proposition folgen, existieren demnach keine weiteren primäre Felder, außer dem schon bekannten. Im Gegensatz dazu enthalten die W-Algebren der 12-Serie noch zwei weitere primäre Felder und zwar mit den Dimensionen $q-3$ und $\frac{5q-10}{2}$. Das erste bildet zusammen mit dem Energie-Impuls-Tensor die bosonische Unteralgebra der W-Algebra. Im einfachsten Fall, der $W(2,\frac{7}{2})$ bei $c = \frac{21}{22}$, entspricht die bosonische Unteralgebra einer $W(2,8)$, die wir auch gefunden haben [5]. Das zweite primäre Feld dagegen hat wieder halbzahligen Spin.

Geht man nun zum Ramond-Sektor über, indem man ein antisymmetrisches Fermion betrachtet, erhält man Einschränkungen an die Höchstgewichte der Darstellungen, wenn man die Vierpunktfunktionen untersucht. Im Falle der W-Algebren aus der Proposition sind diese h-Werte wieder aus der minimalen Serie:

$$h = h_{i,j}$$

$$\text{wobei} \;\; 1 \leq i < \frac{q}{2}, \quad 1 \leq j \leq \frac{p}{2} \;\; \text{und} \;\; j \text{ gerade} \tag{8.14}$$

Die dazugehörigen Charaktere sind

$$\begin{aligned} \chi^W_{i,j} &= \chi_{i,j} + \chi_{q-i,j} \quad \text{für} \;\; j \neq \frac{p}{2} \\ \text{und} \quad \chi^W_{i,\frac{p}{2}} &= \chi_{i,\frac{p}{2}} \end{aligned} \tag{8.15}$$

Eine kurze Rechnung zeigt, daß diese Charaktere invariant unter T und ST^2S sind, wie es im Ramond-Sektor gefordert wird.

Bei der 12-Serie ergibt sich dabei interessanterweise, daß die Charaktere im Ramond-Sektor nur noch die Summe von zwei Virasoro-Charakteren sind. Sie sehen folgendermaßen aus:

$$\chi^W_i = \chi_{i,4} + \chi_{i,8} \quad \text{wobei} \;\; 1 \leq i < \frac{q}{2}$$

Auch diese Charaktere erfüllen die modularen Bedingungen des Ramond-Sektors, und TST vermittelt zwischem Ramond- und Neveu-Schwartz-Sektor.

9. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Diplomarbeit wurde zuerst eine Klasse von W-Algebren mit einem zusätzlichen fermionischen primären Feld zum Energie-Impuls-Tensor konstruiert. Das wesentliche Ergebnis dieser Arbeit ist das Auffinden aller Darstellungen dieser Klasse von W-Algebren. Dies wurde durch Untersuchung von Vierpunktfunktionen und Ausnutzung der modularen Eigenschaften einer 2D-CFT erreicht. Das Ergebnis zeigt, daß es zu den hier betrachteten W-Algebren keine neuen, bisher unbekannten konformen Modelle mit anderen c-Serien gibt, sondern daß die hier gewonnenen Modelle im wesentlichen alle durch die Klassifikation von A. Cappelli, C. Itzykson und J.-B. Zuber, auf die ich nicht eingegangen bin, erfaßt sind. Andererseits konnte ein besseres Verständnis von W-Algebren erzielt werden, da die Existenz der meisten hier behandelten W-Algebren unerwartet war. Es hat sich aber auch gezeigt, daß existierende Vermutungen zur vollständigen Klassifikation von zweidimensionalen konformen Quantenfeldtheorien noch unzureichend sind. Es bestehen auch gute Aussichten, das hier entwickelte Verfahren zur Untersuchung von Darstellungen auf weitere W-Algebren anzuwenden, insbesondere auf die W-Algebren mit einem zusätzlichen bosonischen primären Feld. Hier sind vor allen Dingen die $W(2,4)$ und die $W(2,5)$ von großem Interesse, da beide – die $W(2,4)$ mit verschwindender Selbstkopplung – für bestimmte irrationale c-Werte existieren, die bisher völlig unerklärt sind. Dort kann die Darstellungstheorie vielleicht zu neuen Erkenntnissen führen.

Ganz besonders möchte ich Herrn Prof. W. Nahm für die unermüdliche, ausgezeichnete Betreuung und für das interessante und spannende Thema an der Front der aktuellen Forschung danken.

Äußerst wertvoll und motivierend war die Zusammenarbeit mit R. Blumenhagen, M. Flohr, A. Kliem und A. Recknagel. Die freundschaftliche Atmosphäre innerhalb der Arbeitsgruppe hat mir meine Tätigkeit sehr erleichtert und wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen. Mein Dank gilt auch J. Kellendonk und M. Terhoeven und der ganzen Theorieabteilung des Physikalischen Institutes für ihre ständige Diskussions- und Hilfsbereitschaft.

Abschließend gilt mein Dank all denen, die mich außerhalb der Physik unterstützt haben, insbesondere meinen Eltern, die mir erst dieses Studium ermöglicht und finanziert haben.

Literatur

[1] E.P. Wigner, Annals of Mathematics **40** (1939) 149

[2] Cunningham, London, Math. Society **8** (1909) 77

[3] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov,
Nucl. Phys. B **241**(1984) 333

[4] A.B. Zamolodchikov, Theor. Math. Phys. **65** (1986) 1205

[5] R. Blumenhagen, M. Flohr, A. Kliem, W. Nahm, A. Recknagel, R. Varnhagen,
Bonn preprint BONN-HE-90-05, wird in Nucl. Phys. B veröffentlicht

[6] W. Nahm, Proc. Trieste Conf. on Recent Developments in
Conformal Field Theories, Trieste, October 1989;
W. Nahm, Conformal Quantum Field Theories in Two Dimensions,
World Sientific, wird veröffentlicht

[7] J.L. Cardy, Nucl. Phys. B **270** [FS 16] (1986) 186

[8] Privates Gespräch mit F. Grunewald

[9] P. Bouwknegt, Phys. Lett. B **207** (1988) 295
P. Bouwknegt, preprint CTP-1665 (1988)

[10] G. Felder, Nucl. Phys. B **317** (1989) 215

[11] E. Verlinde, Nucl. Phys. B **300** (1988) 360

[12] G. Moore, N. Seiberg, Phys. Lett. B **212** (1988) 451

[13] V.A. Fateev, A.B. Zamoldchikov, Nucl. Phys. B bf 200[FS18] (1987) 644

[14] V.A. Fateev, S.L. Lykyanov Int.Jour.Mod.Phys.**A3**(1989) 1491

[15] A. Cappelli, C. Itzykson, J.-B. Zuber, Comm. Math. Phys. **113** (1987) 1

[16] A. Kliem, Diplomarbeit Bonn, in Vorbereitung

[17] M. Flohr, Diplomarbeit Bonn

[19] M. Flohr, BONN-Preprint, in Vorbereitung

[20] B.L. Feigin, D.B. Fuks, Funkt. Anal. Appl. **16** (1982) 114

[21] D. Friedan, Z. Qiu,S. Shenker, Comm. Math. **107** (1986) 535

[22] P. Goddard,A. Kent,D. Kent,D. Olive Phys. Lett. B **152** (1985) 88

[23] R. Blumenhagen, Diplomarbeit Bonn