Konstruktion von N=2 Super-W-Algebren

von

Andreas Wißkirchen

Diplomarbeit in Physik
angefertigt im

Physikalischen Institut

vorgelegt der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität

Bonn

im Juli 1994

Ich versichere, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie die Zitate kenntlich gemacht habe.

Referent: Prof. Dr. W. Nahm
Korreferent: Prof. Dr. G. von Gehlen

Inhalt

Danksagung

Mein Dank gebührt in erster Linie Prof. Werner Nahm für die Aufnahme in seine Arbeitsgruppe und die Themenstellung auf einem aktuellen Forschungsgebiet, weiterhin Ralph Blumenhagen für Anleitung und Beistand während der Erstellung dieser Arbeit, darüber hinaus Andreas Honecker für die Bereitstellung seines Programms „*commute*" sowie der restlichen Arbeitsgruppe, namentlich Wolfgang Eholzer, Michael Flohr, Ralf Hübel, Nourredine Mohammedi, Michael Rösgen, Rolf Schimmrigk und Raimund Varnhagen, für das gute Arbeitsklima und die ständige Diskussionsbereitschaft. Ferner wären große Teile dieser Arbeit ohne die Computer des Max-Planck-Instituts für Mathematik in Bonn nicht möglich gewesen, denn aus verschiedenen Gründen reichten die Rechner des RHRZ nicht aus. Schließlich danke ich meinen Eltern und meiner Patentante für die Unterstützung in der ganzen Studienzeit, außerdem allen meinen Schachfreunden, insbesondere Rolf, Joachim und OG d.R. in spe Georg, für unzählige gesellige Stunden.

1. Einleitung

Die Untersuchung von Symmetrien stellt die wichtigste und zugleich fruchtbarste Aufgabe der theoretischen Physik dar, denn mit ihrer Kenntnis lassen sich viele Probleme lösen oder zumindest vereinfachen. Das prominenteste Beispiel ist sicherlich die Galileigruppe in der klassischen Mechanik bzw. ihre relativistische Verallgemeinerung, die Poincarégruppe. In der modernen Teilchenphysik führten Eichsymmetrien, die aus der Elektrodynamik hinreichend bekannt sind, zu Vorhersagen von Teilchen, deren Eigenschaften und vielem anderen. Dagegen fristete die konforme Symmetrie, deren Bedeutung in der klassischen Elektrodynamik bereits 1909 erkannt wurde [29], lange Zeit ein Schattendasein, obwohl auch moderne Eichtheorien diese Symmetrie aufweisen. Allerdings fällt diese der „Mühle" der Quantisierung, Regularisierung und Renormierung zum Opfer. Lediglich in zwei Dimensionen hat man Aussicht auf zumindest teilweisen Erhalt, denn hier ist die Symmetriegruppe eigentümlicherweise unendlichdimensional.

1983 zeigten Belavin, Polyakov und Zamolodchikov [6] in einer bahnbrechenden Arbeit, daß in einer zweidimensionalen konformen Feldtheorie aufgrund der unendlichfachen Symmetrie alle Korrelatoren primärer Felder berechenbar sind. Mit dieser Arbeit entwickelte sich ein rasch wachsender und bald eigenständiger Bereich der Physik. Im folgenden fanden solche konformen Theorien viele Anwendungen in anderen Bereichen. Während man in der Superstringtheorie [44,45] an der Klassifikation aller möglichen Vakua und damit der entsprechenden konformen Modelle interessiert ist, benötigt man in der Theorie der kritischen Phänomene [28] nur ganz bestimmte Theorien, die das Verhalten eines Systems bei einem Phasenübergang zweiter Ordnung beschreiben. Ferner finden konforme Modelle Einzug in zweidimensionale Phänomene der Festkörperphysik, wie den ganzzahligen und auch fraktionalen Quantenhalleffekt [27,39,62] und die Polymerphysik [32]. Neben diesen physikalischen Anwendungen beinhalten konforme Feldtheorien soviel mathematische Struktur, daß sie auch für Mathematiker interessant sind, hier sei vor allem der Zusammenhang zur Geometrie [26,72] erwähnt.

Die Symmetriealgebra der komplexen Ebene, die Virasoroalgebra, hat allerdings nur für die Werte ihrer zentralen Ladung $c < 1$ minimale Modelle, die dann rationale Theorien liefern. Um $c \geq 1$ zu erhalten, benötigt man erweiterte Symmetrien. Dazu nimmt man zur Virasoroalgebra weitere primäre Felder der Dimension $h_1, \ldots, h_n$ hinzu. Die so entstandene $\mathcal{W}$-Algebra bezeichnet man als $\mathcal{W}(2, h_1, \ldots, h_n)$. Das erste Beispiel einer solchen Algebra, die $\mathcal{W}(2,3)$, wurde bereits 1985 von Zamolodchikov [81] konstruiert. Inzwischen sind viele $\mathcal{W}$-Algebren konstruiert worden, insbesondere von der Gruppe um W. Nahm [18]. Diese $\mathcal{W}$-Algebren haben in Toda-Theorien [11] und zweidimensionaler Quantengravitation [70] weitere Anwendungen gefunden. Der Name dieser Algebren wird übrigens Wigner [10] zugeschrieben.

Drei Methoden zur Konstruktion von $\mathcal{W}$-Algebren haben sich als erfolgreich herauskristallisiert, allerdings mit unterschiedlichen Zielsetzungen. Die erste ist die direkte Konstruktion, bei der man den Spingehalt vorher festlegt und algebraische Methoden anwendet. Dies kann entweder mit Liealgebra-Methoden [18] oder mittels der Operatorproduktentwicklung bzw. des konformen Bootstraps geschehen [46,37,57], was auch schon bei der $\mathcal{W}(2,3)$ verwendet wurde. So erhält man einen vollständigen Satz von Lösungen bei festem Spingehalt. Der Nachteil dieser Methode ist allerdings, daß die Rechnungen sehr schnell die Grenzen der Computerkapazitäten überschreiten. Es sei jedoch an dieser Stelle gesagt, daß durch die direkte Konstruktion viele Fragestellungen erst entstanden sind.

Bei der zweiten wie auch der dritten Variante geht man von unendlichdimensionalen Verallgemeinerungen von Liealgebren, den Kac-Moody-Algebren, aus. Zum einen kann man dann Casimiralgebren [3,23,24] definieren, wo die Casimiroperatoren die Generatoren der $\mathcal{W}$-Algebra bilden, zum anderen kann aus einer Kac-Moody-Algebra eine Unteralgebra herausteilen, was man als Coset-Konstruktion [3,23,25,43] bezeichnet. Beide Methoden liefern keine expliziten Ergebnisse für Strukturkonstanten, sind aber für Fragen der Darstellungstheorie von sehr großer Aussagekraft. Insbesondere können $\mathcal{W}$-Algebren betrachtet werden, die man niemals explizit konstruieren können wird. Die beiden letzteren Konstruktionen liefern sämtlich generische Algebren, d.h. diese existieren für überabzählbar viele Werte der zentralen Ladung c. Aus der direkten Konstruktion gewinnt man auch exotische Algebren, die nur für einige sporadische Werte von c existieren. Diese können so und nur so berechnet werden. Es gibt aber auch generisch existierende Algebren, die man nicht ohne weiteres aus Coset-Konstruktion oder Drinfeld-Sokolov-Reduktion [7,9,31,36,38], das ist die Verallgemeinerung der Casimirkonstruktion, gewinnt, denn sie besitzen keinen klassischen Limes. Diese Algebren sind vereinigende $\mathcal{W}$-Algebren [16], ihre Coset-Realisierungen besitzen rationalen oder negativen Level [17].

Diese Arbeit beschäftigt sich aber mit $N = 2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebren. Der Name besagt schon, daß es auch $N = 1$ Super-$\mathcal{W}$-Algebren [13,15] gibt, deren Struktur aber phänomenologisch nicht so interessant ist. Die $N = 2$ Supersymmetrie findet ihre Berechtigung hauptsächlich in der Hochenergiephysik respektive der Stringtheorie [4]. Um mit den Extrapolationen der Experimente konsistente Ergebnisse zu produzieren, benötigt man für eine vereinheitlichende Theorie eine $N = 1$ Raumzeit-Symmetrie, wo jedem Teilchen ein Superpartner zugeordnet wird. Für diese Symmetrie braucht man auf der Weltfläche des Strings eine $N = 2$ superkonforme Theorie [4]. Kompaktifiziert man den heterotischen String auf vier Dimensionen, so muß das „aufgerollte" sechsdimensionale eine Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit sein. Dieser geometrischen Bedingung entspricht, daß die konforme Theorie die zentrale Ladung $c = 9$ tragen muß.

$N = 2$ Theorien besitzen einige Besonderheiten. Zunächst wäre da die Existenz eines Stroms in der $N = 2$ Super-Virasoroalgebra, der bewirkt, daß Felder und Zustände eine zweite Quantenzahl, nämlich eine Ladung tragen. Zweitens existiert ein nichttrivialer Automorphismus der $N = 2$ Super-Virasoroalgebra, der spektraler Fluß [33,66,67,74] genannt wird. Insbesondere bildet er verschiedene Sektoren der Algebra aufeinander ab. Drittens hat man die Existenz des chiralen Rings [60], der topologische Aspekte ins Spiel bringt. Überhaupt haben diese drei Objekte geometrische Entsprechungen in der GSO-Projektion, der Raumzeit-Superladung und dem Kohomologiering von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten.

1987 konstruierte Gepner [41] explizit GSO-projezierte modular invariante Zustandssummen. Für die interne Theorie mit $c = 9$ wählte er Tensorprodukte von Virasoro-minimalen Modellen, die allesamt $c < 3$ haben. Die GUT-Eichgruppe ist dann $E_8 \times E_6 \times U(1)^{r-1}$, wobei r die Anzahl der tensorierten Modelle bezeichnet. Diese zusätzlichen $U(1)$-Faktoren werden in der Natur jedoch nicht beobachtet, was Kazama und Suzuki [58,59] dazu veranlaßte, nach $N = 2$ Theorien mit minimalen und unitären Darstellungen für $c = 9$

zu suchen. Sie konstruierten und klassifizierten Coset-Modelle von $N = 1$ Kac-Moody-Algebren, die sich zu einer $N = 2$ Supersymmetrie erweitern lassen. Der direkte Weg über $N = 2$ Kac-Moody-Algebren ist nicht gangbar, da die einzigen $N = 2$ Kac-Moody-Algebren abelsche $\hat{u}(1)^n$-Algebren sind. Diese Modelle überschreiten leicht den Wert $c = 3$ und es gibt auch einige mit dem gewünschten $c = 9$. Es ist ein ungelöstes Problem, ob diese Modelle die einzigen rationalen sind (die der Virasoroalgebra sind darin als das CP(1)-Modell enthalten). Bemerkenswert ist ferner, daß im $N = 2$ Fall alle bislang bekannten rationalen Modelle zugleich unitär sind, was eine Vermutung nahelegt. Dies könnte auch der Grund sein, warum die relative Dichte der rationalen Modelle im Falle $N = 2$ so gering ist.

Eine weitere Methode, $N = 2$ Theorien zu entwickeln, stammt aus den Landau-Ginzburg-Theorien [76]. Diese definieren am Fixpunkt ihrer Renormierungsgruppe eine $N = 2$ Theorie. Anwendung gefunden haben $N = 2$ Theorien im Geistsektor von $\mathcal{W}_n$-Gravitation [8] und in topologischen Feldtheorien [34]. Jetzt stellt sich in natürlicher Weise die Frage nach den Symmetriealgebren der $N = 2$ Modelle, insbesondere der Kazama-Suzuki-Modelle. Sie sollten generisch existierende $N = 2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebren sein [50,65].

Ito [50,51] fand mittels Quanten-Hamilton-Reduktion der Einbettung von $Osp(2,2)$ in die affine Super-Liealgebra $\mathcal{A}(n, n-1)$, daß die Symmetriealgebra des CP$(n-1)$ Kazama-Suzuki-Modells die Super-$\mathcal{W}_n$-Algebra sein sollte. Dabei handelt es sich um eine Erweiterung der $N = 2$ Super-Virasoroalgebra um bosonische Superfelder der Dimensionen zwei bis $n-1$, in der hier verwendeten Notation eine $\mathcal{SW}(1, 2, \ldots, n-1)$. Die explizite Form der klassischen Super-$\mathcal{W}_3$-Algebra wurde mittels Polyakov-Konstruktion von Lu u.a. [61] gefunden. Später konstruierte Romans [71] mit der Technik des konformen Bootstraps ihre Quantenversion explizit. Diese Algebra war bis zur Konstruktion der $\mathcal{SW}(1, 2, 3)$ die einzige generisch existierende nichtlineare $N = 2$ Quanten-Super-$\mathcal{W}$-Algebra. Diese Algebra wurde ausführlich untersucht, man fand klassische [54] und Quanten-Freifeldkonstruktionen [1,52,53]. Ferner wurden höhere klassische Superverallgemeinerungen der $\mathcal{W}_3$-Algebra [81] konstruiert, wie etwa die $N = 4$ Super-$\mathcal{W}_3$-Algebra [69] mit dem „dualen Formalismus" [68]. Inami u.a. [49] konstruierten, wenn auch teilweise fehlerhaft, die Erweiterung der $N = 2$ Super-Virasoroalgebra durch ein Superfeld der Dimension $\frac{3}{2}$. In [14] wurden auch Erweiterungen durch Superfelder höherer Dimension systematisch untersucht, allerdings mit nur sporadischen Lösungen als Ergebnis.

Man sieht, daß man aufgrund der wenigen Beispiele, insbesondere des bislang nur einen generischen, die Struktur von $N = 2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebren nur schemenhaft erkennt. Dazu soll in dieser Arbeit die Super-$\mathcal{W}_n$-Serie fortgesetzt werden, um weitere generisch existierende Super-$\mathcal{W}$-Algebren zu produzieren. Neben der erwarteten Super-$\mathcal{W}_4$-Lösung gibt es bei der $\mathcal{SW}(1, 2, 3)$ eine zweite, die man als eine vereinigende Super-$\mathcal{W}$-Algebra für die CP(n) Kazama-Suzuki-Modelle ansehen kann [20].

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

Zunächst werden im zweiten Abschnitt nicht-supersymmetrische $\mathcal{W}$-Algebren vorgestellt. Dazu werden nach einer Einführung in die konforme Feldtheorie die drei Methoden zur Konstruktion dargelegt und die bislang bekannten generisch existierenden $\mathcal{W}$-Algebren präsentiert. Dieser Abschnitt schließt mit einem Abriß über vereinigende $\mathcal{W}$-Algebren. Der dritte Abschnitt ist den Super-$\mathcal{W}$-Algebren gewidmet. Es wird zu Anfang ein manifest kovarianter Formalismus auf einem Superraum definiert, der spätere Berechnungen

in einem erträglichen Rahmen halten soll. Die $\mathcal{SW}(1,2)$ wurde in [71] nicht-kovariant berechnet, was zu einem riesigen Satz von freien Parametern führt, die dann durch Jacobiidentitäten eingeschränkt werden müssen. Bei einem kovarianten Ansatz sind die einzigen freien Parameter Selbstkopplungen der primären Felder. Nach einer sinnvollen Umdefinition des Begriffsapparats auf den supersymmetrischen Fall lassen sich aus der Super-Möbiusinvarianz Bedingungen an die Zwei- und Dreipunktfunktion sowie die OPE gewinnen. Hier ist die Literatur [78] oft fehlerhaft. Dieser Formalismus wird zu einem Algorithmus zur Konstruktion verdichtet, mit dem schon die Algebren mit einem primären Feld bis Dimension drei konstruiert worden sind [14,19]. Im vierten Abschnitt widerlegt eine Betrachtung der Vierpunktfunktion die Vermutung von Inami u.a. [49], Assoziativität und Jacobiidentitäten seien für $N = 2$ nicht mehr äquivalent. Im fünften Abschnitt wird dieser Algorithmus auf die Konstruktion der ersten Super-$\mathcal{W}$-Algebra mit drei Generatoren angewendet. Das zweite primäre Feld steigert dabei den Rechenaufwand um ein Vielfaches gegenüber dem Fall mit zwei Generatoren. Trotz dieser Widrigkeiten ließ sich die Berechnung mit dem überraschenden Ergebnis zweier Lösungen, deren Bedeutung ja schon oben erwähnt wurde, durchziehen. Verblüffend einfache Argumente führen dann zur Vorhersage der niedrigsten Strukturkonstante jeder Super-$\mathcal{W}_n$-Algebra. Bei der zweiten Lösung kann neben ihrer Identifikation noch die Existenz einer unitären Darstellung ausgeschlossen werden. Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick. Im Anhang sind dann u.a. alle Strukturkonstanten der beiden Algebren tabelliert.
Ein Großteil der hier vorgestellten Ergebnisse wurde bereits in [20] veröffentlicht. Der geneigte Leser möge dies hinzuziehen.

2. W-Algebren

In diesem Abschnitt soll das Konzept der $\mathcal{W}$-Algebren vorgestellt werden. Nach einer kurzen Einführung in die konforme Feldtheorie, die sich an [42] orientiert, werden die drei Methoden dargelegt, die sich für die Konstruktion solcher Algebren als erfolgreich herausgestellt haben. Bei der direkten Konstruktion legt man den Spingehalt vorher fest, berechnet Strukturkonstanten mit Hilfe von Liealgebra-Methoden und prüft Jacobiidentitäten. Der Arbeitsaufwand nimmt mit der Generatorenzahl und den konformen Dimensionen erheblich zu, dafür kann man aber sicher sein, alle Lösungen klassifiziert zu haben. Es werden alle bislang konstruierten generisch existierenden Algebren kurz präsentiert. Von den Casimir-Algebren, die auf Kac-Moody-Algebren beruhen, dachte man lange Zeit, es seien die einzigen generisch existierenden Algebren, was erst mit der Existenz der vereinigenden $\mathcal{W}$-Algebren widerlegt wurde. Hier stehen eher darstellungstheoretische Aspekte denn die explizite Kenntnis der Strukturkonstanten im Vordergrund. Die Casimir-Konstruktion kann als Drinfeld-Sokolov-Reduktion auch auf nicht-einfach geschnürte Liealgebren verallgemeinert werden. Die dritte Methode ist die Coset-Konstruktion, die ebenfalls weitreichende Schlüsse ohne explizite Kenntnis der Algebren erlaubt, wie man an einigen Stellen noch sehen wird. Schließlich werden die vereinigenden $\mathcal{W}$-Algebren eingeführt und an einem Beispiel erklärt. Es wird sich herausstellen, daß dieses Konzept auch im $N = 2$ supersymmetrischen Fall Anwendung finden kann. Zuguterletzt sei bemerkt, daß ohne die explizite Konstruktion und die daraus erwachsenen Fragestellungen der Fortschritt auf diesem Gebiet nie so weit gediehen wäre.

2.1. Einführung in die konforme Feldtheorie

Man betrachte eine Mannigfaltigkeit mit Minkowskimetrik. Die kausale Struktur darauf bleibt bei Transformationen nur dann erhalten, wenn es sich um *konforme* Abbildungen handelt, die winkeltreu sind, d.h. sie ändern die Metrik auf der Mannigfaltigkeit nur um einen (i.a. koordinatenabhängigen) Skalenfaktor:

$$g_{\mu\nu}(z,\overline{z}) \to \Omega(z,\overline{z}) g_{\mu\nu}(z,\overline{z}). \tag{2.1.1}$$

Für eine Metrik der Signatur (p,q) ist die Gruppe der konformen Transformationen isomorph zu $SO(p+1,q+1)$, falls $p+q > 2$ ist. In zwei Dimensionen ist die konforme Gruppe gleich dem Tensorprodukt der holomorphen und der antiholomorphen Funktionen, ist also mithin unendlichdimensional. Wegen dieser Produktstruktur genügt es, nur den holomorphen Teil zu betrachten. Die Generatoren sind durch

$$l_n = z^{1-n}\partial_z \tag{2.1.2}$$

gegeben, sie bilden die de-Witt-Algebra mit den Kommutatorrelationen

$$[l_m, l_n] = (n-m) l_{m+n}. \tag{2.1.3}$$

In der Physik sind allerdings nur Strahldarstellungen relevant, daher ist die zentrale Erweiterung, die *Virasoroalgebra*, von größerer Bedeutung. Man erweitert um eine sog. *zentrale Ladung* c:

$$[L_m, L_n] = (n-m)L_{m+n} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{m,-n}. \tag{2.1.4}$$

Dabei ist der Faktor $\frac{1}{12}$ Konvention. Die Form des Polynoms in (m, n) im Term der zentralen Erweiterung ist die einzige, die die Gültigkeit der Jacobiidentität $[[L_m, L_n], L_p]$ $+$zykl. $= 0$ sichert.
In der Virasoroalgebra gibt es eine interessante Unteralgebra, die von $\{L_{\pm 1}, L_0\}$ gebildet wird. Sie enthält nicht den zentralen Term und ist zur Liealgebra von $SU(1,1)$ isomorph. Diese drei Generatoren erzeugen die *Möbiustransformationen*, welche die einzigen globalen konformen Transformationen sind. Die übrigen Abbildungen lassen sich nicht über die ganze Riemannsche Zahlenkugel aufintegrieren.
Mit den Generatoren läßt sich ein Feld definieren, das sog. *Virasorofeld*

$$L(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{n-2}. \tag{2.1.5}$$

Die Moden sind genau die Laurentkoeffizienten des Feldes L und können durch Konturintegrale zurückgewonnen werden:

$$L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint L(z) z^{1-n} dz. \tag{2.1.6}$$

Äquivalent zu den Kommutatorrelationen ist dann der singuläre Teil der Operatorproduktentwicklung (OPE), die in Quantenfeldtheorien von Wilson [79] eingeführt wurde, um ohne Lagrangefunktion auszukommen:

$$L(z)L(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2L(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial L(w)}{z-w} + \text{reg.} \tag{2.1.7}$$

Unter den Feldern auf der Mannigfaltigkeit sind solche ausgezeichnet, die sich wie ein Tensor transformieren, sog. *primäre* Felder:

$$\Phi(z, \overline{z}) \to \left(\frac{dz'}{dz}\right)^h \left(\frac{d\overline{z}'}{d\overline{z}}\right)^{\overline{h}} \Phi(z, \overline{z}). \tag{2.1.8}$$

Die Größen $h + \overline{h}$ bzw. $h - \overline{h}$ heißen (anomale) Dimension bzw. Spin. Der Spin kann nur halb- oder ganzzahlige Werte annehmen, was aus der Lokalität der Feldtheorie folgt. Wie oben genügt es, holomorphe Felder zu betrachten, d.h. insbesondere $\overline{h} = 0$. Die infinitesimale Form der Transformationsbedingung (2.1.8) kann nach Einführung von Moden

$$\Phi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_n z^{n-h} \tag{2.1.9}$$

wieder als Kommutator geschrieben werden:

$$[L_m, \varphi_n] = (n - (h-1)m)\varphi_{m+n}. \tag{2.1.10}$$

Wie beim Virasorofeld kann man auch hier eine OPE angeben:

$$L(z)\phi(w) = \frac{h\phi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\phi(w)}{z-w} + \text{reg.} \tag{2.1.11}$$

Gilt obige Kommutatorrelation (2.1.10) nur für die Generatoren der Möbiusgruppe, so heißt das Feld *quasiprimär*. Die Definition impliziert insbesondere, daß das Virasorofeld $L(z)$ ein quasiprimäres Feld der Dimension zwei ist.
Die konforme Invarianz legt außerdem die Struktur der OPE zweier quasiprimärer Felder in der folgenden Weise fest:

$$\phi_i(z)\phi_j(z) = \sum_k C_{ij}^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{ijk}^n}{n!} \frac{\partial^n \phi_k(w)}{(z-w)^{h_i+h_j-h_k-n}} + \frac{d_{ij}}{(z-w)^{h_i+h_j}} \tag{2.1.12}$$

mit

$$a_{ijk}^n = \binom{2h_k+n-1}{n}^{-1} \binom{h_i+h_k+h_j+n-1}{n}. \tag{2.1.13}$$

Das heißt, daß durch die Kopplung an ein quasiprimäres Feld auch die Kopplungen an die Ableitungen bestimmt sind.
Der reguläre Teil der OPE definiert in kanonischer Weise normalgeordnete Produkte (NOPe):

$$\phi_i(z)\phi_j(z) = \text{sing.Terme} + \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(z-w)^n N(\phi_j \partial^n \phi_i)(w) \tag{2.1.14}$$

mit der Modenentwicklung

$$N(\phi_j\phi_i)_n = \epsilon \sum_{m<h_i} \phi_{j,n-m}\phi_{i,m} + \sum_{m\geq h_i} \phi_{i,m}\phi_{j,n-m} \tag{2.1.15}$$

mit $\epsilon = -1$ für zwei fermionische Felder und sonst $\epsilon = 1$.
Allerdings sind diese normalgeordneten Produkte nicht quasiprimär, man kann jedoch ihre Projektion angeben, dazu siehe Kapitel 2.2.
Abschließend sei auf den immer wieder implizit verwendeten Isomorphismus zwischen Zuständen und Feldern hingewiesen, der durch die Abbildung $\Phi \rightarrow lim_{z\rightarrow\infty}\Phi(z)|0\rangle = \varphi_h|0\rangle$ gegeben ist.

Sei nun die Symmetriealgebra einer konformen Feldtheorie bekannt. Sie splittet in einen holomorphen und einen antiholomorphen Teil. Der Hilbertraum der Zustände kann dann nach Darstellungen der Symmetriealgebra ausreduziert werden. Also ist es sinnvoll, zunächst Darstellungen der Virasoroalgebra zu betrachten. Wie bei gewöhnlichen Liealgebren handelt es sich um Höchstgewichtsdarstellungen, d.h. es gibt einen Zustand $|h\rangle$ mit:

$$L_0|h\rangle = h|h\rangle, \qquad L_n|h\rangle = 0,\ n<0. \tag{2.1.16}$$

Nur diese Darstellungen sind von physikalischer Relevanz, da sie zu einem nach unten beschränkten Energiespektrum führen. Daher müßte man eigentlich von Tiefstgewichtsdarstellungen sprechen. Durch Anwenden von positiven Moden auf das Vakuum bzw. Höchstgewicht kann man Zustände erzeugen. Der Raum V^h aller Zustände, die auf einem Höchstgewicht $|h\rangle$ aufgebaut sind, trägt eine natürliche Graduierung bezüglich der konformen Dimension, d.h. des L_0-Eigenwertes:

$$V^h = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}^+} V_{h+m}, \tag{2.1.17}$$

wobei V_{h+m} die Zustände mit konformer Dimension $h+m$ bezeichnet. Nach dem Poincaré-Birkhoff-de-Witt-Theorem ist eine Basis dieser Zustände durch die lexikographisch geordneten Monome in den Moden gegeben. Allerdings ist der so aufgebaute Verma-Modul i.a. nicht irreduzibel. Dazu definiert man mittels der Hermitizitätseigenschaft

$$L_n^+ = L_{-n}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2.1.18}$$

eine symmetrische Bilinearform $\langle h|.,.|h\rangle$ auf dem Verma-Modul. Nach Herausteilen aller Zustände mit Norm null hat man dann irreduzible Darstellungen.
Die Darstellungstheorie von $\mathcal{W}$-Algebren sieht strukturell genauso aus, nur hat man es mit größeren Cartan-Unteralgebren zu tun (hier war es nur L_0), so daß die Zustände mehrere Quantenzahlen tragen.
Eine konforme Feldtheorie heißt *rational*, wenn die Symmetriealgebra nur endlich viele Darstellungen besitzt, so daß die OPEen der Felder schließen. Im Falle der Virasoroalgebra sind die rationalen Modelle klassifiziert [40]. Diese *minimalen* Modelle haben alle $c < 1$:

$$\begin{aligned} c &= 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}, \qquad p,q \in \mathbb{Z}^+, ggT(p,q) = 1 \\ h_{r,s} &= \frac{(ps-qr)^2-(p-q)^2}{4pq}, \qquad 0 < r < p,\ 0 < s < q \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

Man kann auch die *unitären* Darstellungen angeben. Sie sind parametrisiert durch:

$$\begin{aligned} c &= 1 - \frac{6}{m(m+1)}, \qquad m \in \mathbb{Z}^{\geq 2} \\ h_{r,s} &= \frac{((m+1)r-ms)^2-1}{4m(m+1)}, \qquad 1 \leq s \leq r \leq m-1 \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

oder

$$c \geq 1, \quad h \geq 0.$$

Bemerkenswert ist das Kontinuum für $c \geq 1$. Im $N=2$ Falle wird sich eine ganz andere Struktur zeigen, dort gibt es nur abzählbar viele unitäre Darstellungen. Ferner sind alle rationalen Modelle der $N=2$ Super-Virasoroalgebra zugleich auch unitär.
Um minimale Modelle mit $c \geq 1$ konstruieren zu können, bedarf es einer Erweiterung der Virasoroalgebra um weitere primäre Felder, so daß man eine sog. $\mathcal{W}$-Algebra erhält.
Man definiert nun *Charaktere* einer Darstellung auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}_i$ gemäß

$$\chi_i(\tau) = Spur_{\mathcal{H}_i}(q^{L_0 - \frac{c}{24}}), \qquad q = e^{2\pi i \tau}. \tag{2.1.21}$$

Dieser Charakter ist eine holomorphe Funktion in der oberen komplexen Halbebene $\{\tau \in \mathbb{C} : Im(\tau) > 0\}$. τ kann als modularer Parameter eines Torus' aufgefaßt werden. Fordert man für den Charakter Invarianz unter globalen Transformationen auf dem Torus, so ergeben sich weitere Einschränkungen an die konforme Feldtheorie. Diese Invarianz wird auch als *modulare Invarianz* bezeichnet. Die Gruppe der modularen Transformationen ist isomorph zu $PSL(2,\mathbb{Z})$ und wird von

$$T:\tau\to\tau+1,\qquad S:\tau\to-\frac{1}{\tau} \tag{2.1.22}$$

erzeugt, wobei die Generatoren die Relationen

$$S^2=(TS)^3=1 \tag{2.1.23}$$

erfüllen.
Schließlich läßt sich die *Zustandssumme* einer konformen Feldtheorie mit den Räumen $\mathcal{H},\overline{\mathcal{H}}$ als

$$Z(q,\overline{q})=Spur_{\mathcal{H}\times\overline{\mathcal{H}}}\left(q^{L_0-\frac{c}{24}}\overline{q}^{\overline{L}_0-\frac{c}{24}}\right) \tag{2.1.24}$$

definieren. Nach Umschrieb auf Charaktere

$$Z(q,\overline{q})=\sum_{h,\overline{h}}\chi(q)\mathcal{N}_{h\overline{h}}\overline{\chi}(\overline{q}) \tag{2.1.25}$$

liefert wiederum die modulare Invarianz Einschränkungen an die Kopplungen zwischen holomorphem und antiholomorphem Sektor.
All dies zeigt, daß die Informationen über eine konforme Feldtheorie durch die Kenntnis ihrer Symmetriealgebra bzw. deren Darstellungen bereits vollständig gegeben sind.

2.2. Explizite Berechnung von W-Algebren

Die Struktur der OPE zweier quasiprimärer Felder wurde schon in $(2.1.12-13)$ dargelegt. Die Entwicklung dieser Formel nach Moden liefert folgende Liealgebra-Struktur:

$$[\phi_{i,m},\phi_{j,n}]=\sum_{k:h_k<h_i+h_j}C_{ij}^k p_{ijk}(m,n)\phi_{k,m+n}+d_{ij}\binom{n+h_j-1}{2h_j-1}\delta_{m+n,0}. \tag{2.2.1}$$

Die $p_{ijk}(m,n)$ sind universelle Polynome, die nur von den Dimensionen $\{h_i,h_j,h_k\}$ abhängen [18]. Weiterhin können die Konstanten d_{ij}, C_{ijk} in den Zwei- und Dreipunktfunktionen wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} d_{ij}&=\langle 0|\phi_{j,-h_j}\,\phi_{i,h_i}|0\rangle\\ C_{ijk}&=\langle 0|\phi_{j,-h_j}\,\phi_{k,h_j-h_i}\phi_{i,h_i}|0\rangle. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Die Kopplungskonstanten C_{ij}^k lassen sich dann aus dem linearen Gleichungssystem

$$C_{ij}^l d_{lk}=C_{ijk} \tag{2.2.3}$$

gewinnen.

Solche Formeln sind nur für quasiprimäre Felder zu beweisen. Daher braucht man die Projektion von den i.a. nicht quasiprimären naiven NOPen $N(\phi_j\phi_i)$ auf deren quasiprimären Anteil $\mathcal{N}(\phi_j\phi_i)$. Die Beziehung zwischen den beiden Variationen NOPe lautet:

$$N(\phi_j\partial^n\phi_i)(w) = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a^m_{i,j,i+j+n-m}\partial^m\mathcal{N}(\phi_j\partial^{n-m}\phi_i)(w) \qquad (2.2.4)$$
$$+\sum_{0<h_k<h_i+h_j} C^k_{ij}a^{i+j-k+n}_{ijk}\frac{n!}{(h_i+h_j-h_k+n)!}\partial^{h_i+h_j-h_k+n}\phi_k(w).$$

Diese Beziehung läßt sich dann iterativ nach den quasiprimären Projektionen auflösen [18].

Viele solcher $\mathcal{W}$-Algebren sind inzwischen als Erweiterungen der Virasoroalgebra um bis zu vier primäre Felder konstruiert worden. Die Notation lautet $\mathcal{W}(2, d_1, \ldots, d_n)$, wobei die d_i die Dimensionen der zusätzlichen primären Felder bezeichnen und die zwei das Virasorofeld repräsentiert. Diese $\mathcal{W}$-Algebren lassen sich grob in zwei Klassen einteilen als generische und exotische $\mathcal{W}$- Algebren. Erstere existieren für überabzählbar viele Werte der zentralen Ladung c, letztere nur für einige sporadische Werte. Jene Klasse kann als Trunkierung generischer $\mathcal{W}$-Algebren oder aus der Darstellungstheorie der Virasoroalgebra gewonnen werden. Für die generischen $\mathcal{W}$-Algebren lassen sich in allen bekannten Fällen Coset-Realisierungen angeben.

Im folgenden seien nun alle bislang explizit konstruierten generischen $\mathcal{W}$-Algebren vorgestellt:

•$\mathcal{W}(2,3)$[81]:
Diese Algebra wurde bereits 1985 von Zamolodchikov konstruiert. Sie kann als Casimir-Algebra von A_2 aufgefaßt werden.

•$\mathcal{W}(2,4)$[46]:
Bei dieser Algebra tritt eine Selbstkopplungskonstante auf, die jedoch durch die Jacobiidentitäten festgelegt wird. Diese Algebra korrespondiert zur Casimir-Algebra von $B_2 \cong C_2$.

•$\mathcal{W}(2,6)$[37]:
Hier gibt es wiederum eine Selbstkopplung des zusätzlichen Generators. Diese Algebra kann als Casimiralgebra von G_2 identifiziert werden. Es gibt keine weiteren generisch existierenden $\mathcal{W}$-Algebren mit zwei Generatoren.

•$\mathcal{W}(2,3,4)$[18]:
Die Konstruktion dieser Algebra erfordert bereits einen beträchtlichen Rechenaufwand. Ihre eindeutige Lösung kann der Casimir-Algebra von A_3 zugeschrieben werden.

•$\mathcal{W}(2,4,6)$[18,57]:
Hier tritt ein neues Phänomen auf, nämlich die Existenz gleich vier verschiedener Lösungen. Die ersten beiden sind als Casimir-Algebren von B_3 bzw. C_3 aufzufassen, die dritte konnte als bosonischer Sektor der $N = 1$ Super-Virasoroalgebra identifiziert werden. Die vierte Lösung war lange Zeit völlig unverstanden. Sie fand eine Erklärung als vereinigende $\mathcal{W}$-Algebra, wie auch die dritte.

•$\mathcal{W}(2,3,4,5)$[48]:
Auch hier gibt es neben der Lösung als Casimir-Algebra von A_4 noch eine weitere, die ebenfalls eine vereinigende $\mathcal{W}$-Algebra ist.

$\bullet\mathcal{W}(2,3,4,5,6)$[48]:
Diese Algebra besitzt eine eindeutige Lösung, die zur Casimir-Algebra von A_5 gehört.

2.3. Kac-Moody-Algebren

Kac-Moody-Algebren sind unendlichdimensionale Verallgemeinerungen von gewöhnlichen Liealgebren, definiert durch die Kommutatorrelationen bzw. die OPE:

$$[J^a_m, J^b_n] = f^{ab}_c J^c_{m+n} + kmd^{ab}\delta_{m+n,0}\,, \quad J^a(z)J^b(w) = \frac{d^{ab}}{(z-w)^2} + \frac{f^{ab}_c}{(z-w)} J^c + \text{reg.} \quad (2.3.1)$$

Dabei sind f^{ab}_c die Strukturkonstanten einer Liealgebra g und d^{ab} die Killingform von g. Die oben definierte Algebra nennt man *affine Kac-Moody-Algebra* $\widehat{g}$ zum Level k. Die J's heißen auch *Ströme*.
Der quadratische Casimiroperator von $\widehat{g}$

$$L(z) = \frac{1}{2(k+h^\vee)} d_{ab} N(J^a J^b)(z) \quad (2.3.2)$$

bildet eine Virasoroalgebra mit zentraler Ladung

$$c = c(\widehat{g}, k) = \frac{k\dim(g)}{k+h^\vee}, \quad (2.3.3)$$

wobei $h^\vee$ die duale Coxeterzahl der Liealgebra g bezeichnet [75]. Bezüglich dieses sog. *Sugawara* Energie-Impuls-Tensors (2.3.2) verhalten sich die Ströme $\{J^a(z), a = 1, \ldots, \dim(g)\}$ wie primäre Felder der konformen Dimension eins, daher der Name „Strom".
Der Level k ist zunächst nur für Werte aus den natürlichen Zahlen sinnvoll definiert, man kann die Definition aber auch auf rationale Werte ausdehnen.

Aus solchen Kac-Moody-Algebren kann man nun weitere Algebren aufbauen [3,23,24]. Dazu betrachtet man die Casimiroperatoren höherer Ordnung

$$W^{(s_i)}(z) = \frac{1}{s_i!}\eta^{(s_i)}(\widehat{g}, k) \sum_{a,b,c,\ldots} d_{abc\ldots} N(\ldots N(N(J^a J^b)J^c)\ldots)(z). \quad (2.3.4)$$

Dabei ist $\eta^{(s_i)}(\widehat{g}, k)$ eine Normierungskonstante und $d_{abc\ldots}$ der total symmetrische spurlose g-invariante Tensor der Ordnung s_i. Eine Liealgebra vom Rang l besitzt genau l unabhängige Casimir-Operatoren, deren Ordnungen jeweils um eins größer sind als die Exponenten e_i der Liealgebra. Die zugehörige $\mathcal{W}$-Algebra besteht nun aus dem Sugawara Energie-Impuls-Tensor und zusätzlichen Feldern höherer konformer Dimension (gerade die Ordnung des jeweiligen Operators), die durch die Casimiroperatoren gegeben sind. Diese Casimiralgebra existiert zunächst zum Level eins und damit für $c = l$, zum generischen Fall kommt man wie bei der Virasoroalgebra via variablen Levels.

Die Konstruktion der Casimir-Algebren kann verallgemeinert werden, so daß auch die nicht-einfach geschnürten Liealgebren verwendet werden können. Dies wird durch die sog. *Drinfeld-Sokolov-Reduktion* [7,9,31,36,38] geliefert. Dabei wird auf der Kac-Moody-Algebra ein System von Zwangsbedingungen eingeführt und eine BRST-Quantisierung vorgenommen. Die entstandenen BRST-invarianten Größen bilden sodann die Felder einer $\mathcal{W}$-Algebra.

2.4. Cosets

Man betrachtet eine Einbettung vom Index j einer Kac-Moody-Algebra $\widehat{h}_m$ in eine solche $\widehat{g}_k$, wobei $m = j - k$ zu setzen ist. Dann ist die Differenz der beiden Sugawara Energie-Impuls-Tensoren

$$L^{\widehat{g}/\widehat{h}}(z) = L^{\widehat{g}}(z) - L^{\widehat{h}}(z) \tag{2.4.1}$$

ein Virasorogenerator mit zentraler Ladung

$$c(\widehat{g}/\widehat{h}, k) = c(\widehat{g}, k) - c(\widehat{h}, m). \tag{2.4.2}$$

Für $c(\widehat{g}/\widehat{h}, k) = 0$ handelt es sich um eine sog. *konforme Einbettung.* Dieses Feld (2.4.1) vertauscht mit allen Feldern aus $\widehat{h}_m$. Die Gesamtheit der Felder aus der universellen Einhüllenden von $\widehat{g}_k$, die mit $\widehat{h}_m$ kommutieren, bildet eine $\mathcal{W}$-Algebra, die in allen bisher bekannten Fällen endlich erzeugt ist. Für variablen Level k erhält man eine generisch existierende $\mathcal{W}$-Algebra, die für einige spezielle Werte des Levels und damit der zentralen Ladung auf eine kleinere Algebra trunkiert, d.h. einige Generatoren werden zu Nullfeldern und fallen damit aus der Algebra heraus.

Bei den sog. *GKO-Cosets* [43] trifft man eine spezielle Wahl der Faktoren, indem man aus einer direkten Summe die diagonale Einbettung herausteilt:

$$\widehat{g} = \widehat{g}_{k_1} \oplus \widehat{g}_{k_2}, \qquad \widehat{h} = \widehat{g}_{k_1+k_2}. \tag{2.4.4}$$

Dabei wird der Nenner diagonal gemäß $J^a_{k_1+k_2} = J^a_{k_1} + J^a_{k_2}$ mit Index eins in den Zähler eingebettet.

Darstellungen L^g_a des Zählers können nach dem Nenner gemäß

$$L^g_a = \bigoplus_b (L^{g/h}_{a,b} \otimes L^h_b) \tag{2.4.3}$$

ausreduziert werden. Die Charaktere der Darstellungen $L^{g/h}_{a,b}$ heißen *Branching-Funktionen* des Cosets.

Man kann ferner den Feldinhalt der entstehenden $\mathcal{W}$-Algebra wie folgt mit dem sog. *Charakterargument* [23,24] abschätzen. Dazu betrachtet man den Vakuumcharakter

$$\chi_0(q) = Spur_{\mathcal{H}}(q^{L_0 - \frac{c}{24}}) = \frac{q^{-\frac{c}{24}}}{F_2(q)\dots F_{h_n}(q)}(1 - a_1 q^{h_1+m} + a_2 q^{h_1+m+1} + \dots) \tag{2.4.5}$$

mit

$$F_h(q) = \prod_{n=h}^{\infty}(1 - q^n). \tag{2.4.6}$$

Dann hat man eine $\mathcal{W}(2, h_1, \ldots, h_n)$ mit dem ersten generischen Nullfeld bei Dimension $h_n + m$. Auf solche oder ähnliche Weise laufen Vorhersagen von Algebren [12,50,51].

Schließlich ist es nicht so, daß verschiedene Cosets auch verschiedene $\mathcal{W}$-Algebren liefern. Dazu betrachte man zwei Cosets $\widehat{g}/\widehat{h}$ und $\widehat{g'}/\widehat{h'}$. Nun existiere eine Kac-Moody-Algebra $\widehat{g''}$, so daß die Einbettungen $\widehat{g}/\widehat{h'} \hookrightarrow \widehat{g''}$ und $\widehat{g'}/\widehat{h} \hookrightarrow \widehat{g''}$ konform sind. Dann gilt, daß die Virasorofelder der beiden Symmetriealgebren übereinstimmen. Die Branching-Funktionen der Cosets erfüllen eine lineare Beziehung, dieser Sachverhalt wird als *L-Äquivalenz* [2] bezeichnet.

In dieser Arbeit wird eine Klasse von L-äquivalenten Coset-Paaren noch von Bedeutung sein:

$$\frac{\widehat{su}(N)_1 \oplus \widehat{su}(N)_n}{\widehat{su}(N)_{n+1}} \cong \frac{\widehat{su}(n+1)_N}{\widehat{su}(n)_N \oplus \widehat{u}(1)}. \tag{2.4.7}$$

Dies liefert eine Relation zwischen den n-ten unitären Modellen der $\mathcal{WA}_{N-1}$-Algebren und den unitären Modellen der CP(n)-Cosets. Im Falle $n = 1$ ist die duale Äquivalenz, d.h. die Gleichheit der Branching-Funktionen der beiden Cosets, in [2] bewiesen worden.

2.5. Vereinigende W-Algebren

Das Konzept der vereinigenden $\mathcal{W}$-Algebren ist noch relativ neu. Historisch begann die Untersuchung dieser Fragestellung mit der nicht durch Coset-Konstruktion oder ähnliches erklärbaren dritten und vierten Lösung der $\mathcal{W}(2,4,6)$ [18,57] sowie der zweiten Lösung der $\mathcal{W}(2,3,4,5)$ [48]. Diese Algebren besitzen keinen klassischen Limes und ferner tauchen generischer Nullfelder niedriger Dimension auf, d.h. diese Dimension tritt im singulären Teil der OPE auf.

Betrachte man eine Serie generisch existierender $\mathcal{W}$-Algebren. Für jede dieser Algebren gebe es ferner eine Serie rationaler Modelle bei bestimmten Werten der zentralen Ladung. Die übliche Zusammenfassung dieser Modelle ist die als Mitglied der Serie einer festen $\mathcal{W}$-Algebra. Man kann aber auch zwischen den verschiedenen Algebren interpolieren und beispielsweise immer das erste Modell zusammenfassen. Nun ist die Frage, ob eine generische $\mathcal{W}$-Algebra existiert, die bei den gegebenen c-Werten dieses rationale Modell besitzt. Die Existenz dieser Algebra ist keinesfalls gesichert, denn beim Aufsteigen entlang der Algebren nimmt der Spingehalt dauernd zu, so daß die einzige mögliche vereinigende $\mathcal{W}$-Algebra eine wie auch immer geartete $\mathcal{W}_\infty$, für die $\mathcal{WA}_n$-Algebren z.B. eine $\mathcal{W}(2,3,4,\ldots)$, zu sein scheint. Auf klassischem Niveau ist das auch tatsächlich so, aber auf Quantenlevel hat man wundersamerweise endlich, jedoch nicht-frei erzeugte $\mathcal{W}$-Algebren mit der gewünschten Eigenschaft [21]. Dies korrespondiert zu der Tatsache, daß eben bei den relevanten c-Werten einige Strukturkonstanten divergieren, so daß nach einer Redefinition der Felder in solcher Weise, daß die Strukturkonstanten endlich werden, einige Generatoren zu Nullfeldern werden und somit aus der Algebra herausfallen. Dieses Phänomen heißt *Trunkierung*. Benutzt man die Coset-Realisierungen dieser Algebren, so können vereinigende $\mathcal{W}$-Algebren als eine Verallgemeinerung der Level-Rang-Dualität angesehen werden [2,25].

Nach soviel Abstraktion nun ein konkretes Beispiel für eine vereinigende $\mathcal{W}$-Algebra. Dazu betrachte man das k-te unitäre Modell der $\mathcal{WA}_n$-Algebren, d.h. Vir, $\mathcal{W}(2,3)$, $\mathcal{W}(2,3,4)$

usw. bei den c-Werten

$$c(n,k) = (n-1)\left(1 - \frac{n(n+1)}{(k+n)(k+n+1)}\right). \tag{2.5.1}$$

Es kann aus dem Coset

$$\frac{\widehat{su}(n)_k \oplus \widehat{su}(n)_k}{\widehat{su}(n)_{k+1}} \tag{2.5.2}$$

gewonnen werden. Für $k=1$ ist dieses Coset äquivalent [2] zum parafermionischen Coset

$$\frac{\widehat{su}(2)_n}{\widehat{u}(1)}, \tag{2.5.3}$$

was genau die Realisierung der zweiten Lösung der $\mathcal{W}(2,3,4,5)$ ist [17].
Dieser Zusammenhang äußert sich in einer Serie von Trunkierungen bei den c-Werten $c = \frac{2(n-1)}{n+2}$:

c	Trunkierung
$\frac{1}{2}$	$\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[II]} \to Vir$
$\frac{4}{5}$	$\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[II]} \to \mathcal{W}(2,3)$
1	$\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[II]} \to \mathcal{W}(2,3,4)$
$\frac{8}{7}$	$\mathcal{W}(2,3,4,5)^{[II]} = \mathcal{W}(2,3,4,5)^{[I]}$
$\frac{5}{4}$	$\mathcal{W}(2,3,4,5,6) \to \mathcal{W}(2,3,4,5)^{[II]}$

Tabelle 1: Trunkierungen der $\mathcal{WA}_n$-Algebren

Das Fazit dieser Betrachtungen ist, daß also die Klassifikation generischer $\mathcal{W}$-Algebren viel feiner als die der rationalen Modelle ist.

3. N=2 Super-W-Algebren

In diesem Abschnitt soll die Struktur von $N = 2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebren und ihre Andersartigkeit im Vergleich zu nicht supersymmetrischen Algebren vorgestellt werden. Dazu wird ein kovarianter Formalismus präsentiert, der auf einem nichtkommutativen Superraum beruht, dessen Symmetriealgebra die $N = 2$ Super-Virasoroalgebra ist, die einige eigentümliche Besonderheiten aufweist. Ferner werden Kazama-Suzuki-Modelle eingeführt, die sich als die bisher einzigen (sie schließen die Virasoromodelle mit ein) rationalen $N = 2$ Modelle herausgestellt haben. Der Formalismus wird auf den Fall holomorpher Feldtheorie angewendet, um Begriffe wie Primarität, OPE und NOPe auf den supersymmetrischen Fall zu übertragen. Die Forderung nach Super-Möbiusinvarianz schränkt die n-Punkt-Funktionen, insbesondere für $n = 2, 3$ und die OPE fast völlig ein, während für die Vierpunktfunktion noch einige Struktur verbleibt. Dieser Formalismus wird in einen Algorithmus zur Konstruktion von Super-$\mathcal{W}$-Algebren übertragen, die lediglich vier bisher berechneten Algebren werden vorgestellt und ihre Struktur kurz diskutiert.

3.1. $N = 2$ supersymmetrische konforme Feldtheorie

Die Formulierung der Theorie suf einem nichtkommutativen Superraum sorgt von Anfang an für die manifeste Kovarianz der Ausdrücke. Die Darstellung folgt in weiten Teilen der einschlägigen Literatur [63,77,78]. Die Symmetriealgebra des Superraums wird wieder als Virasoroalgebra bezeichnet, ihre Struktur ist teilweise andersartig als im nicht-supersymmetrischen Fall. Ferner werden Kazama-Suzuki-Modelle [58,59] vorgestellt, die, ausgehend von $N = 1$ supersymmetrischen Cosets, $N = 2$ Theorien liefern. Dieser Umweg ist nötig, da die einzige $N = 2$ Kac-Moody-Algebra eine abelsche $\hat{u}(1)^n$ ist.

3.1.1. Der $N = 2$ Superraum

Der zweidimensionale Superaum ist eine Erweiterung der komplexen Ebene um zwei (daher $N = 2$) Graßmann-Variablen $\theta^{\pm}$. Die Koordinaten bestehen mithin aus jeweils drei Komponenten

$$Z = (z, \theta^+, \theta^-), \qquad \overline{Z} = (\overline{z}, \overline{\theta^+}, \overline{\theta^-}), \tag{3.1.1}$$

mit $z \in \mathbb{C}$. Die θ's erfüllen folgende Antivertauschungsrelationen:

$$\{\theta^+, \theta^-\} = \{\theta^{\pm}, \theta^{\pm}\} = 0. \tag{3.1.2}$$

Entsprechend der euklidischen Metrik $ds^2 = dzd\overline{z}$ in $\mathbb{C}$ kann man auch auf dem Superraum eine solche einführen:

$$dS^2 = dZd\overline{Z}, \qquad \text{mit } dZ = dz - \frac{1}{2}d\theta^+\,\theta^- - \frac{1}{2}d\theta^-\,\theta^+. \tag{3.1.3}$$

Multipliziert nun eine Abbildung des Superraumes in sich die Metrik dS^2 nur mit einem (koordinatenabhängigen) Skalenfaktor, so heißt diese eine *superkonforme* Abbildung. Wegen (3.1.3) zerfällt die superkonforme Gruppe in zwei isomorphe Anteile, einen holomorphen und einen antiholomorphen. Daher werden im folgenden nur noch holomorphe Transformationen $F : Z \to Z'$ betrachtet:

$$dZ \to dZ' = \mu(Z)dZ. \tag{3.1.4}$$

Eine Basis aller superkonformen Transformationen ist gegeben durch das Set

$$F = \{az^{-n+1}, \sqrt{2}z^{-r+\frac{1}{2}}\theta^+\overline{\epsilon}, \sqrt{2}z^{-r+\frac{1}{2}}\theta^-\epsilon, l\theta^+\theta^-z^{-n}\}, \tag{3.1.5}$$

das wie folgt auf dem Superraum operiert:

- az^{-n+1}

$$z' = z - az^{-n+1}, \quad (\theta^{\pm})' = \theta^{\pm} - \frac{a}{2}(-n+1)z^{-n}\theta^{\pm} \tag{3.1.6}$$

- $\sqrt{2}z^{-r+\frac{1}{2}}\theta^+\overline{\epsilon}, \sqrt{2}z^{-r+\frac{1}{2}}\theta^-\epsilon$

$$\begin{aligned} z' &= z - \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-r+\frac{1}{2}}\theta^+\overline{\epsilon} - \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-r+\frac{1}{2}}\theta^-\epsilon, \\ (\theta^+)' &= \theta^+ - \sqrt{2}z^{-r+\frac{1}{2}}\epsilon - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-r+\tfrac{1}{2}\right)z^{-r-\frac{1}{2}}\theta^+\theta^-\epsilon, \\ (\theta^-)' &= \theta^- - \sqrt{2}z^{-r+\frac{1}{2}}\overline{\epsilon} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-r+\tfrac{1}{2}\right)z^{-r-\frac{1}{2}}\theta^+\theta^-\overline{\epsilon} \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

- $l\theta^+\theta^-z^{-n}$

$$z' = z, \quad (\theta^{\pm})' = \theta^{\pm} \pm lz^{-n}\theta^{\pm}. \tag{3.1.8}$$

Die Generatoren $\{L_n, G_r^{\pm}, J_n\}$ dieser superkonformen Transformationen bilden die $N=2$ Super-de-Witt-Algebra, deren zentrale Erweiterung die $N=2$ Super-Virasoroalgebra ist. Letztere ist durch die folgenden Kommutatorrelationen gegeben:

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (n-m)L_{m+n} + \frac{1}{12}c(n^3-n)\delta_{m,-n} \\ [L_m, G_r^{\pm}] &= (r \mp \frac{1}{2}m)G_{m+r}^{\pm} \\ [L_m, J_n] &= nJ_{m+n} \\ [J_m, J_n] &= \frac{1}{3}cn\delta_{m,-n} \\ [J_m, G_r^{\pm}] &= \pm G_{m+r}^{\pm} \\ \{G_r^+, G_s^-\} &= 2L_{r+s} + (s-r)J_{r+s} + \frac{2}{3}\binom{s+\frac{1}{2}}{2}\delta_{r,-s} \\ \{G_r^{\pm}, G_s^{\pm}\} &= 0 \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Die Transformationen $\{L_0, L_{\pm 1}, G_{\pm 1/2}^{\pm}, J_0\}$ erzeugen eine zur Super-Liealgebra $OSP(2|2)$ isomorphe Unteralgebra der Virasoroalgebra, man nennt sie $N=2$ *Super-Möbiustransformationen.* Sie sind die einzigen globalen Transformationen auf der Super-Riemannschen Sphäre. Man beachte, daß im $N=2$ Fall die Cartan-Unteralgebra der Virasoroalgebra zwei Generatoren enthält, und zwar $\{L_0, J_0\}$. Daher werden Zustände und Felder *zwei* Quantenzahlen tragen, Dimension H und Ladung Q.
Ferner kann man zwei kovariante Ableitungen $D^{\pm}$ definieren:

$$D^{\pm} = \partial_{\theta^{\pm}} + \frac{1}{2}\theta^{\mp}\partial_z. \tag{3.1.10}$$

Sie sind nilpotent und erfüllen die Antivertauschungsrelation

$$\{D^+, D^-\} = \partial_z. \tag{3.1.11}$$

Diese beiden Ableitungen haben gerade die Eigenschaften einer Super-Derivation. Für zwei Punkte Z_1 und Z_2 führt man noch den translationsinvarianten (d.h. invariant unter L_1 und $G^{\pm}_{\frac{1}{2}}$) Superabstand Z_{12} ein:

$$Z_{12} = z_1 - z_2 - \frac{1}{2}(\theta_1^+\theta_2^- + \theta_1^-\theta_2^+). \tag{3.1.12}$$

Durch Multiplikation mit den ebenso translationsinvarianten Bildungen

$$\theta_{12}^{\pm} = \theta_1^{\pm} - \theta_2^{\pm}, \quad \theta_{12}^+\theta_{12}^- \tag{3.1.13}$$

erhält man insgesamt vier unabhängige Superabstände.

Holomorphe Felder $\Phi(Z)$ auf diesem Superraum können formal nach den Graßmann-Variablen taylorentwickelt werden, was i.a. vier Komponentenfelder liefert:

$$\Phi(Z) = \varphi(z) + \frac{\theta^+\psi^-(z) - \theta^-\psi^+(z)}{\sqrt{2}} + \theta^+\theta^-\chi(z) \equiv \Phi_1(z) + \frac{\theta^+\Phi_2(z) - \theta^-\Phi_3(z)}{\sqrt{2}} + \theta^+\theta^-\Phi_4(z). \tag{3.1.14}$$

Man beachte, daß die fermionischen Komponenten mit den Graßmann-Variablen antivertauschen, wodurch die Superfelder entweder rein bosonisch oder rein fermionisch sind, d.h. als ganzes mit den Graßmann-Variablen (anti)kommutieren. Insbesondere lassen sich die vier Sätze von Generatoren der superkonformen Gruppe in einem Superfeld zusammenfassen

$$\mathcal{L}(Z) = J(z) + \frac{\theta^+G^-(z) - \theta^-\ G^+(z)}{\sqrt{2}} + \theta^+\theta^-L(z), \tag{3.1.15}$$

womit sich die Super-Virasoroalgebra in der OPE-Version schreiben läßt

$$\mathcal{L}(Z_1)\mathcal{L}(Z_2) = \frac{c/3}{Z_{12}^2} + \frac{\theta_{12}^+\theta_{12}^-}{Z_{12}^2}\mathcal{L}(Z_2) + \frac{\theta_{12}^+D^+ - \theta_{12}^-D^-}{Z_{12}}\mathcal{L}(Z_2) + \frac{\theta_{12}^+\theta_{12}^-}{Z_{12}}\partial\mathcal{L}(Z_2) + \text{reg.} \tag{3.1.16}$$

Dieser kovariante Formalismus wird im Kapitel 3.2. weiterentwickelt. In diesem Kapitel soll noch auf Besonderheiten der $N = 2$ Super-Virasoroalgebra eingegangen werden.

3.1.2. Besonderheiten von $N = 2$ Theorien

Im $N = 2$ Falle sind die unitären Darstellungen der $N = 2$ Super-Virasoroalgebra die einzigen bekannten rationalen Modelle [22,63]. Wie bei allen Algebren sind der Neveu-Schwarz-Sektor mit periodischen Randbedingungen an die fermionischen Felder (hier $G^{\pm}(z)$), d.h. halbzahligen Moden, und der Ramond-Sektor mit antiperiodischen Randbedingungen, d.h. ganzzahligen Moden, zu unterscheiden. Bei $N = 2$ kommen noch mehr Sektoren in Frage, aber die prinzipiell mögliche Einführung verschiedener Randbedingungen an $G^{\pm}(z)$ scheitert hier an der Ladungskonjugation, es ist aber bei Super-$\mathcal{W}$-Algebren möglich, z.B. $\mathcal{L}$

mit periodischen und Φ mit antiperiodischen Randbedingungen auszustatten, man hat aber bisher nur den Neveu-Schwarz-Sektor untersucht [19], nicht solche gemischten Randbedingungen. Die $N=2$ Super-Virasoroalgebra besitzt einen besonderen Automorphismus, den sog. *spektralen Fluß* [74], der die beiden Sektoren bijektiv aufeinander abbildet:

$$\begin{aligned}(L_n)' &= L_n + \eta J_n + \frac{c}{6}\eta^2\delta_{n,0} \\ (G_r^{\pm})' &= G_{r\pm\eta}^{\pm} \\ (J_n)' &= J_n + \frac{c}{3}\eta\delta_{n,0}.\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Für $\eta = \pm 1/2$ bildet der spektrale Fluß gerade den Neveu-Schwarz- auf den Ramond-Sektor und umgekehrt ab, für $\eta = \pm 1$ erhält man einen Automorphismus des Neveu-Schwarz-Sektors auf sich. Allerdings werden Höchstgewichtszustände nicht unbedingt auf wieder eben solche abgebildet, weswegen die Darstellungen nicht direkt mitübertragen werden.

Der spektrale Fluß kann selber als lokales Feld realisiert sein. Dazu betrachtet man den Fall $\eta = 1$ und wendet $(L_0)'$ auf das Vakuum $|0\rangle$ an, was $\frac{c}{6}|0\rangle$ ergibt. Daher kann man dem Vakuum bzgl. dieses neuen L's die Dimension $\frac{c}{6}$ zuschreiben. Für ein lokales Feld muß diese Dimension halb- oder ganzzahlig sein, d.h. $c = 6H$ mit $H \in \frac{\mathbb{Z}}{2}$. Die zugehörige Ladung ergibt sich durch die Aktion von $(J_0)'$ auf dem Vakuum zu $Q = 2H$. Die entsprechende exotische $N = 2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebra $\mathcal{SW}(1, H^{\pm Q})$ existiert dann für jedes H zu diesen Werten von c und Q. Für $H \in \{\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\}$ sind diese Algebren explizit bekannt [14,19].

Im Gegensatz zur $N = 0$ Virasoroalgebra existieren nur abzählbar viele unitäre Darstellungen von $SVir_{N=2}(c)$, die sich in zwei Serien gruppieren, deren erste die minimalen Modelle [22] enthält:

$$\begin{aligned} c &= \frac{3k}{k+2}, \qquad k \in \mathbb{Z}^{>0} \\ h_{l,m}^{NS} &= \frac{l(l+2)-m^2}{4(k+2)}, \quad q_{l,m}^{NS} = \frac{m}{k+2}, \qquad 0 \le l \le k, \quad m = -l, -l+2, \ldots, l \\ h_{l,m}^{R} &= \frac{l(l+2)-(m\pm 1)^2}{4(k+2)} + \frac{1}{8}, \quad q_{l,m}^{R} = \frac{(m\pm 1)}{k+2} \mp \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

Die c-Werte dieser Serie sind durch drei nach oben begrenzt. Diese Modelle können aus dem kompakten Coset

$$\frac{\widehat{su}(2)_k}{\widehat{u}(1)} \oplus \widehat{u}(1) \tag{3.1.19}$$

gewonnen werden. Die nicht-minimale Serie [30]

$$c = \frac{3k}{k-2}, \qquad k \in \mathbb{Q}^{>2} \tag{3.1.20}$$

ist nach unten durch drei beschränkt. Bemerkenswert ist die Parametrisierung durch die rationalen Zahlen. Sie hat ihre Erklärung in dem nicht-kompakten Coset

$$\frac{\widehat{su}(1,1)_k}{\widehat{u}(1)} \oplus \widehat{u}(1). \tag{3.1.21}$$

Neben dem spektralen Fluß gibt es noch den sog. *chiralen Ring* [60]. Holomorphe Superfelder $\Phi(Z)$ mit

$$D^{\mp}\Phi(Z) = 0 \tag{3.1.22}$$

heißen chiral bzw. antichiral. Diese Definition hat zur Folge, daß für (anti)chirale Superfelder die Komponenten $\psi^{\pm}(z)$ und $\chi'(z)$ Nullfelder sind. Man kann zeigen, daß in unitären Theorien immer $H \geq |Q|/2$ ist und daß gilt:

$$\Phi_H^Q \text{ primär, (anti)chiral} \Leftrightarrow H = \pm\frac{Q}{2}. \tag{3.1.23}$$

Ferner erfüllen primäre, (anti)chirale Zustände die Bedingung $H \leq c/6$. Der spektrale Fluß mit $\eta = 1$ überführt die antichiralen Zustände im Neveu-Schwarz-Sektor in die chiralen Zustände. Mit diesen Erkenntnissen kann man auf der Menge aller primären, (anti)chiralen Felder eines unitären Modells durch die OPE wie folgt eine Ringstruktur einführen. Die OPE zweier chiraler Felder enthält nämlich nur chirale Felder, was direkt aus der Derivationseigenschaft der kovarianten Ableitung folgt. Aufgrund der Ladungserhaltung und der Ungleichung $H \geq |Q|/2$ hat die OPE einen verschwindenden singulären Teil und man kann als Produkt zweier primärer, (anti)chiraler Felder Φ_1, Φ_2 das primäre, (anti)chirale Feld

$$\Phi_1 \times \Phi_2 = \lim_{Z \to W} \Phi_1(Z)\Phi_2(W) \tag{3.1.24}$$

definieren, d.h. ein normalgeordnetes Produkt. In einer rationalen superkonformen Feldtheorie liefert diese Operation einen wegen der Rationalität endlichen, aufgrund des verschwindenden singulären Teils der OPE kommutativen und wegen $H \leq c/6$ (d.h. die Dimensionen der Felder sind nach oben beschränkt) nilpotenten Ring. Der chirale Ring ist eine Brücke zur topologischen Feldtheorie [34].

3.1.3. Kazama-Suzuki-Modelle

Die Verallgemeinerung von Kac-Moody-Algebren auf den $N = 2$ supersymmetrischen Fall bringt Probleme mit sich: die Superströme $\mathcal{J}^a(Z)$ haben superkonforme Dimension null und können daher nur abelsche $\hat{u}(1)^n$-Algebren bilden. Die Gepnersche Konstruktion, d.h. der Wunsch nach rationalen $N = 2$ Modellen mit $c = 9$, motivierte Kazama und Suzuki zu zeigen, daß es Cosets $N = 1$ supersymmetrischer Kac-Moody-Algebren gibt, deren Symmetrie sich auf eine $N = 2$ Supersymmetrie erweitern läßt. $N = 1$ Super-Kac-Moody-Algebren $\widehat{G}$ lassen sich durch Einführung von Superströmen

$$\mathcal{J}^a(Z) = j^a(z) + \theta J^a(z) \tag{3.1.25}$$

mit den Superabständen $Z_{12} = z_1 - z_2 - \theta_1\theta_2$ und $\theta_{12} = \theta_1 - \theta_2$ kovariant schreiben:

$$\mathcal{J}^a(Z_1)\mathcal{J}^b(Z_2) = \frac{\theta_{12}}{Z_{12}} i f_c^{ab} \mathcal{J}^c(Z_2) + \frac{k/2}{Z_{12}} d^{ab}. \tag{3.1.26}$$

Die bewährte Sugawara-Konstruktion überträgt sich auf den supersymmetrischen Fall [56], so daß die beiden Generatoren der $N = 1$ Super-Virasoroalgebra herauskommen:

$$\begin{aligned} L(z) &= \frac{1}{k}\left(N(\hat{J}^a\hat{J}^a)(z) - N(j^a\partial j^a)(z)\right), \\ G^1(z) &= \frac{2}{k}\left(N(\hat{J}^a j^a)(z) - \frac{i}{3k} f_{abc} N(N(j^a j^b)j^c)\right). \end{aligned} \tag{3.1.27}$$

Dabei wurde die Abkürzung $\hat{J}^a = J^a - J^a_f$ mit $J^a_f = -\frac{i}{k} f^a_{bc} N(j^b j^c)$ verwendet. Diese beiden orthogonalen Ströme bilden zwei gewöhnliche Kac-Moody-Algebren mit den Leveln $\hat{k} = k - h^\vee$ und $k_f = h^\vee$. Die zentrale Ladung der $N = 1$ Super-Virasoroalgebra ist daher die Summe der der zentralen Ladungen zweier Sugawara Energie-Impuls-Tensoren:

$$c = \frac{1}{2}\dim(G) + \frac{\hat{k}\dim(G)}{\hat{k} + h^\vee}. \tag{3.1.28}$$

Wie im $N = 0$ Fall definiert eine Einbettung einer Unteralgebra $H \hookrightarrow G$ eine $N = 1$ superkonforme Coset-Theorie $\widehat{G}/\widehat{H}$, deren Generatoren durch

$$L_{G/H} = L_G - L_H, \qquad G^1_{G/H} = G^1_G - G^1_H \tag{3.1.29}$$

gegeben sind. Um auf $N = 2$ Supersymmetrie zu kommen, muß sich ein zweites Feld G^2 der Dimension $\frac{3}{2}$ konstruieren lassen, das mit $L(z)$ und $G^1(z)$ die $N = 2$ Super-Virasoroalgebra bildet, wogegen der Strom $J(z)$ kein Problem ist. Dazu wählten Kazama und Suzuki den allgemeinsten Ansatz für ein solches Feld

$$G^2(z) = \frac{2}{k}\left(h^2_{\bar{a}\bar{b}} N(\hat{J}^{\bar{b}} j^{\bar{a}})(z) - \frac{i}{3k} S^2_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} N(N(j^{\bar{a}} j^{\bar{b}}) j^{\bar{c}})(z)\right), \tag{3.1.30}$$

wobei $j^{\bar{a}} \in G/H$.
Fordert man nun die Kommutatorrelationen der $N = 2$ Super-Virasoroalgebra mit den Feldern $G^1(z)$ und $L(z)$, so lassen sich Bedingungen an die Parameter $h^2_{\bar{a}\bar{b}}$ und $S^2_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$ gewinnen. Eine fast erschöpfende Klasse von Lösungen dieser Gleichungen ergibt sich mit der Wahl $S^2_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = f_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = 0$. Man erhält die vollständig klassifizierten *hermiteschen symmetrischen Räume*, die in der folgenden Tabelle mit ihren c-Serien aufgelistet sind.

G/H	$c_{G/H}$
$\widehat{SU}(n+m)/\widehat{SU}(m) \oplus \widehat{SU}(n) \oplus \widehat{U}(1)$	$3\hat{k}mn/(\hat{k}+m+n)$
$\widehat{SO}(n+2)/\widehat{SO}(n) \oplus \widehat{SO}(2)$	$3\hat{k}n/(\hat{k}+n) \quad n \geq 2$
$\widehat{SO}(3)/\widehat{SO}(2)$	$3\hat{k}/(\hat{k}+2)$
$\widehat{SO}(2n)/\widehat{SU}(n) \oplus \widehat{U}(1)$	$3\hat{k}n(n-1)/2(\hat{k}+2n-2)$
$\widehat{SP}(2n)/\widehat{SU}(n) \oplus \widehat{U}(1)$	$3\hat{k}n(n+1)/2(\hat{k}+n+1)$
$\widehat{E}_6/\widehat{SO}(10) \oplus \widehat{U}(1)$	$48\hat{k}/(\hat{k}+12)$
$\widehat{E}_7/\widehat{E}_6 \oplus \widehat{U}(1)$	$81\hat{k}/(\hat{k}+18)$

Tabelle 2: Symmetrische hermitesche Räume

Daneben gibt es noch einige sporadische Cosets, die von C. Schweigert klassifiziert worden sind [73].

Kazama-Suzuki-Modelle mit $\text{rang}(G) = \text{rang}(H)$ werden durch $d = \dim(G/H)$ Paare von Fermionen $j^{\bar{a}}$ und Bosonen $J^{\bar{a}}$ erzeugt, wobei die d Fermionen eine Realisierung der $\widehat{so}(d)_1$ bilden. Somit können diese supersymmetrischen Cosets auch als $N = 0$ Kac-Moody-Cosets der Art

$$\frac{\widehat{g} \oplus \widehat{so}(d)_1}{\widehat{h}} \tag{3.1.31}$$

verstanden werden. Für die im folgenden noch interessierenden CP(n)-Cosets ergibt sich

$$\frac{\widehat{su}(n+1)_k \oplus \widehat{so}(2n)_1}{\widehat{su}(n)_{k+1} \oplus \widehat{u}(1)} \tag{3.1.32}$$

mit zentraler Ladung

$$c = \frac{3nk}{k+n+1}. \tag{3.1.33}$$

Für ganzzahligen Level k erzeugen die Kazama-Suzuki-Modelle eine Vielzahl rationaler $N=2$ superkonformer Feldtheorien, deren zentrale Ladung i.a. größer als drei ist, bei den CP(n)-Modellen für $n \geq 2$ sogar immer. Die Verwendung eines solchen rationalen Modells mit $c=9$ als interne $N=2$ Theorie in einem Gepner-Modell reduziert die Eichgruppe des Strings auf $E_8 \times E_6$ ohne die nicht angebrachten $U(1)$-Faktoren. Die Symmetriealgebren dieser Cosets sind generische $N=2$ Super $\mathcal{W}$-Algebren [50,65], von denen bislang nur die $N=2$ Virasoroalgebra (diese gehört zu CP(1) $\cong S^2 \cong \overline{\mathbb{C}}$) und die dem Modell CP(2) entsprechende $\mathcal{SW}(1,2)$ [71] explizit bekannt waren. Allgemein zeigte Ito [50,51] via Quanten-Hamilton-Reduktion der Super-Liealgebra $\mathcal{A}(n,n-1)$, daß die Symmetriealgebra des CP(n)-Modells eine $\mathcal{SW}(1,2,\ldots,n)$ ist, die daher generisch existieren sollte. Im übernächsten Abschnitt wird die $\mathcal{SW}(1,2,3)$ mit einem manifest kovarianten Formalismus explizit konstruiert.

3.2. Holomorphe $N=2$ supersymmetrische konforme Feldtheorie

Es sind die Begriffe des primären und quasiprimären Feldes, der OPE sowie der normalgeordneten Produkte auf den $N=2$ supersymmetrischen Fall zu übertragen. Fordert man Invarianz der Theorie unter $N=2$ Super-Möbiustransformationen, so werden die Zwei- und Dreipunktfunktionen von super-quasiprimären Feldern bis auf wenige Konstanten bestimmt. Dies ist noch in [63,78] zu finden, wenn auch unvollständig. Daraus gewinnt man die allgemeine Form der OPE solcher Felder, wobei die Invarianz die Kopplungen der derivativen Felder festlegt, welche in dem Sinne universell sind, daß sie nur durch die konformen Dimensionen und $u(1)$-Ladungen sowie im ladungserhaltenen Falle noch durch eine zweite Kopplungskonstante α gegeben sind. Damit schließlich lassen sich super-quasiprimäre Projektionen von Super-NOPen berechnen. Dies ist in [14] dargelegt.

3.2.1. Super-(quasi)primäre Felder

Ein holomorphes Feld $\Phi(Z)$ mit konformer Dimension H und $u(1)$-Ladung Q nennt man *superprimär*, falls für superkonforme Transformationen $Z \to Z'$ gilt:

$$\left(\Phi_H^Q\right)'(Z) = \left[D^+(\theta^+)'\right]^{H-\frac{Q}{2}} \left[D^-(\theta^-)'\right]^{H+\frac{Q}{2}} \Phi_H^Q(Z'). \tag{3.2.1}$$

Dabei bezeichnet $[\,\cdot\,]$ Super-Jacobideterminanten. Gilt (3.2.1) nur für Super-Möbiustransformationen, so heißt das Feld *super-quasiprimär*. Infinitesimalisiert man die Definition (3.2.1), so erhält man die Kommutatoren des Feldes $\Phi_H^Q(Z)$ mit den Generatoren der

Super-Virasoroalgebra:

$$
\begin{aligned}
[L_m, \Phi(Z)] &= z^{-m}\Big[z\partial_z - \tfrac{(m-1)}{2}\theta^+\partial_{\theta^+} - \tfrac{(m-1)}{2}\theta^-\partial_{\theta^-} \\
&\qquad - H(m-1) + \tfrac{Q}{4}m(m-1)\theta^+\theta^- z^{-1}\Big]\Phi(Z) \\
[G_r^\pm, \Phi(Z)]_\pm &= \sqrt{2}z^{-r+1/2}\Big[\partial_{\theta^\mp} - \tfrac{1}{2}\theta^\pm\partial_z - (H \pm \tfrac{Q}{2})(r-\tfrac{1}{2})\theta^\pm z^{-1} \\
&\qquad \mp \tfrac{1}{2}(r-\tfrac{1}{2})\theta^+\theta^- z^{-1}\partial_{\theta^\mp}\Big]\Phi(Z) \\
[J_m, \Phi(Z)] &= z^{-m}\left[-\theta^+\partial_{\theta^+} + \theta^-\partial_{\theta^-} - Hm\theta^+\theta^- z^{-1} + Q\right]\Phi(Z).
\end{aligned}
\tag{3.2.2}
$$

Die beiden Generatoren $G^\pm_{\frac{1}{2}}$ erzeugen die Super-Translationen

$$
[G^\pm_{\frac{1}{2}}, \Phi(Z)]_\pm = \sqrt{2}(\partial_{\theta^\mp} - \tfrac{1}{2}\theta^\pm\partial_z)\Phi(Z) \tag{3.2.3}
$$

und J_0 eine deformierte (man beachte das Q) „Rotation" in der Graßmann-Ebene

$$
[J_0, \Phi(Z)] = (-\theta^+\partial_{\theta^+} + \theta^-\partial_{\theta^-} + Q)\Phi(Z). \tag{3.2.4}
$$

Die vier in $(3.1.12-13)$ definierten Superabstände sind unter diesen Transformationen invariant, sofern man den Graßmann-Koordinaten eine Ladung ± 1 zuschreibt, um die Invarianz unter J_0 zu sichern.
Entwickelt man obige Kommutatoren (3.2.2) in Komponenten, so zeigt es sich, daß die vierte Komponente eines Superfeldes nicht quasiprimär bezüglich der Virasoroalgebra ist, falls das Superfeld eine Ladung trägt. Die quasiprimäre Projektion läßt sich jedoch leicht angeben:

$$
\chi'(z) = \chi(z) - \tfrac{Q}{4H}\partial_z\varphi(z). \tag{3.2.5}
$$

Damit erhält man folgendes Set von Kommutatoren, die ein primäres Feld charakterisieren:

$$
\begin{aligned}
&[L_m, \varphi_n] = (n-(H-1)m)\varphi_{m+n} \\
&[L_m, \psi_n^\pm] = (n-(H-\tfrac{1}{2})m)\psi^\pm_{m+n} \\
&[L_m, \chi'_n] = (n-Hm)\chi'_{m+n} \\
&[G_m^\pm, \varphi_n]_\pm = \mp\psi^\pm_{m+n} \\
&[G_m^\pm, \psi_n^\pm]_\pm = 0 \\
&[G_m^\pm, \psi_n^\mp]_\pm = \pm(1 \pm \tfrac{Q}{2H})(n-(2H+1)m)\varphi_{m+n} + 2\chi'_{m+n} \\
&[G_m^\pm, \chi'_n]_\pm = \tfrac{1}{2}(1 \pm \tfrac{Q}{2H})(n-2Hm)\psi^\pm_{m+n} \\
&[J_m, \varphi_n] = Q\varphi_{m+n} \\
&[J_m, \psi_n^\pm] = (Q \pm 1)\psi^\pm_{m+n} \\
&[J_m, \chi'_n] = -H(1+\tfrac{Q^2}{4H^2})m\varphi_{m+n} + Q\chi'_{m+n}.
\end{aligned}
\tag{3.2.6}
$$

Aus der niedrigsten Komponente $\varphi(z)$ eines Superfeldes kann man daher die höheren Komponenten durch Kommutieren mit den Super-Virasorogeneratoren wie folgt gewinnen:

$$\begin{aligned}\psi^{\pm}(z) &= \mp[G^{\pm}, \varphi(z)]_{\pm}, \\ \chi'(z) &= \frac{1}{2}[G^{+}[G^{-}, \varphi(z)]_{\pm}]_{\mp} - \frac{1}{2}\left(1 + \tfrac{Q}{2H}\right)[L_1, \varphi(z)].\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Die Kommutatorrelationen (3.2.2) erlauben es nun, die Struktur der Zwei- und Dreipunktfunktionen super-quasiprimärer Felder herauszuarbeiten.

3.2.2. n-Punkt-Funktionen, insbesondere $n = 2, 3$

Das Vakuum $|0\rangle$ sei $OSP(2|2)$ invariant, d.h. die Zustände, die die Generatoren der Super-Möbiustransformationen auf dem Vakuum aufbauen, verschwinden. Dies liefert acht Bedingungen an die n-Punkt-Funktionen:

$$\langle 0|[M^j, \Phi^1(Z_1)\Phi^2(Z_2)\dots\Phi^n(Z_n)]|0\rangle = 0, \qquad M^j \in OSP(2|2). \tag{3.2.8}$$

Sind die Felder $\Phi^i(Z)$ zusätzlich super-quasiprimär, so lassen sich die Kommutatorrelationen (3.2.2) ausnutzen. Durchkommutieren von M_j in (3.2.8) ergibt einen Satz von Super-Differentialgleichungen für die n-Punkt-Funktion, z.B. für J_0:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(-\theta_i^+\partial_{\theta_i^+} + \theta_i^-\partial_{\theta_i^-} + Q_i\right)\langle 0|\Phi^1(Z_1)\Phi^2(Z_2)\dots\Phi^n(Z_n)|0\rangle = 0. \tag{3.2.9}$$

Wegen der Kommutatorrelationen der Super-Virasoroalgebra sind diese Gleichungen allerdings nicht voneinander unabhängig. Die Differentialgleichungen für die Translationen $\{L_1, G^{\pm}_{\frac{1}{2}}\}$ liefern, daß die n-Punkt-Funktion nur von den Superabständen $(3.1.12 - 13)$ abhängen darf. Es bleiben dann nur noch die drei Differentialgleichungen für $\{L_0, L_1, J_0\}$ zu lösen, da diejenigen, die von $G^{\pm}_{-\frac{1}{2}}$ herkommen, automatisch erfüllt sind.
Die allgemeine Form der n-Punkt-Funktion lautet:

$$\langle 0|\Phi^1(Z_1)\dots\Phi^n(Z_n)|0\rangle = f(\text{Invarianten})\prod_{i<j} Z_{ij}^{\gamma_{ij}}\left(1 + \frac{Q_j - Q_i}{2n}\frac{\theta_{ij}^+\theta_{ij}^-}{Z_{ij}}\right). \tag{3.2.10}$$

Dabei ist f eine beliebige Funktion aller Super-Möbiusinvarianten, die sich aus n Punkten des Superraums konstruieren lassen. Ferner gilt die Bedingung

$$\sum_{j\neq i}\gamma_{ij} = -2H_i. \tag{3.2.11}$$

Für zwei Punkte hat man sechs Koordinaten $\{z_i, \theta_i^{\pm} : i = 1, 2\}$, aber acht Transformationen, unter denen die Zweipunktfunktion invariant sein soll. Daher erwartet man zwei

Einschränkungen. Dies ist auch tatsächlich so, denn die Lösung für die Zweipunktfunktion lautet [78]:

$$\langle \Phi_{H_1}^{Q_1}(Z_1)\Phi_{H_2}^{Q_2}(Z_2)\rangle = \frac{D_{12}}{Z_{12}^{2H_1}}\left(1 - \frac{Q_1}{2}\frac{\theta_{12}^+\theta_{12}^-}{Z_{12}}\right)\delta_{H_1,H_2}\delta_{Q_1,-Q_2}, \tag{3.2.12}$$

d.h. die Zweipunktfunktion verschwindet nur dann nicht, wenn die beiden Felder gleiche konforme Dimension und entgegengesetzte $u(1)$-Ladung haben. Entwickelt man diese Zweipunktfunktion (3.2.12) in Komponenten, so erkennt man, daß für $H_1 = \pm Q_1/2$ die beiden Felder $\psi_1^\pm$ und χ_1' Nullfelder sind, d.h. das Feld Φ ist (anti)chiral, was auch oben mit anderen Argumenten gezeigt wurde.

Die allgemeine Form der Dreipunktfunktion ist komplizierter. Die sieben Super-Möbiustransformationen ohne die J_0-Rotation (3.2.4) legen sieben der neun beteiligten Koordinaten $\{z_i, \theta_i^\pm : i = 1,2,3\}$, darunter die L's alle z's, fest. Es bleiben noch zwei invariante, aber geladene Ausdrücke übrig:

$$\Theta_{123}^\pm = \frac{Z_{12}\theta_3^\pm + Z_{23}\theta_1^\pm + Z_{31}\theta_2^\pm + \frac{1}{6}(\theta_1^\pm\theta_{23}^\mp(\theta_2^\pm + \theta_3^\pm) + \theta_2^\pm\theta_{31}^\mp(\theta_3^\pm + \theta_1^\pm) + \theta_3^\pm\theta_{12}^\mp(\theta_1^\pm + \theta_2^\pm))}{\sqrt{Z_{12}Z_{23}Z_{31}}} \tag{3.2.13}$$

mit $(\Theta_{123}^\pm)^2 = 0$.
Die Dreipunktfunktion hat dann die Form:

$$\langle \Phi_{H_1}^{Q_1}(Z_1)\Phi_{H_2}^{Q_2}(Z_2)\Phi_{H_3}^{Q_3}(Z_3)\rangle = f(\Theta_{123}^\pm)\frac{\prod_{i<j}\left(1 + \frac{Q_j - Q_i}{6}\frac{\theta_{ij}^+\theta_{ij}^-}{Z_{ij}}\right)}{Z_{12}^{\gamma_1}Z_{23}^{\gamma_2}Z_{31}^{\gamma_3}} \tag{3.2.14}$$

mit $\gamma_1 = H_k + H_i - H_j$, $\gamma_2 = H_i + H_j - H_k$ und $\gamma_3 = H_k + H_j - H_i$.
Dabei ist f eine beliebige Funktion der beiden Invarianten, die aber die Ladungserhaltung zu respektieren hat, d.h. es dürfen keine in den Graßmannvariablen geraden und ungeraden Terme mischen. Daher gibt es für die Gesamtladung in der Dreipunktfunktion nur die Möglichkeiten:

- $\sum Q_i = 0$

$$f = A_{123} + B_{123}\Theta_{123}^+\Theta_{123}^-, \tag{3.2.15}$$

wobei A_{123} und B_{123} *zwei unabhängige* Strukturkonstanten bezeichnen †.

- $\sum Q_i = \pm 1$

$$f = C_{123}\Theta_{123}^\pm. \tag{3.2.16}$$

In diesem Fall tritt also *nur eine* Kopplungskonstante C_{ijk} auf.

Zum Zweck der Ermittlung der Struktur der OPE ist es einfacher, folgende nicht permutationsinvariante Form [14] zu benutzen, denn die Definition der Θ's ist sehr unhandlich. Nur die darin auftretenden Strukturkonstanten werden im folgenden weiterverwendet, dabei beachte man das Vorzeichen von Q_k.

† In Ref. [78] findet sich nur der erste Term.

- $Q_i + Q_j = Q_k$

$$\langle \Phi^{-Q_k}_{H_k}(Z_1)\,\Phi^{Q_i}_{H_i}(Z_2)\,\Phi^{Q_j}_{H_j}(Z_3)\rangle = 2C_{ijk}\Big[(1-\tfrac{Q_i}{2}\tfrac{\theta^+_{23}\theta^-_{23}}{Z_{23}})(1+\tfrac{Q_k}{2}\tfrac{\theta^+_{13}\theta^-_{13}}{Z_{13}})\frac{1}{Z_{12}^{\gamma_1}\,Z_{23}^{\gamma_2}\,Z_{13}^{\gamma_3}}\Big]$$
$$+\,C_{ijk}\alpha_{ijk}\gamma_1\Big[(\tfrac{\theta^+_{23}}{Z_{23}}-\tfrac{\theta^+_{13}}{Z_{13}})(\tfrac{\theta^-_{23}}{Z_{23}}-\tfrac{\theta^-_{13}}{Z_{13}})\frac{1}{Z_{12}^{\gamma_1+1}\,Z_{23}^{\gamma_2-1}\,Z_{13}^{\gamma_3-1}}$$
$$-\,\frac{\theta^+_{23}\theta^-_{23}\theta^+_{13}\theta^-_{13}}{2}(\tfrac{Q_i}{Z_{13}}-\tfrac{Q_k}{Z_{13}})\frac{1}{Z_{12}^{\gamma_1+1}\,Z_{23}^{\gamma_2}\,Z_{13}^{\gamma_3}}\Big] \qquad (3.2.17)$$

C_{ijk} and α_{ijk} sind wieder zwei unabhängige Strukturkonstanten und es gilt die Übersetzung

$$2C_{ijk} = A_{ijk}\,,\, C_{ijk}\alpha_{ijk}\gamma_1 = B_{ijk}. \qquad (3.2.18)$$

- $Q_i + Q_j = Q_k \pm 1$

$$\langle \Phi^{-Q_k}_{H_k}(Z_1)\Phi^{Q_i}_{H_i}(Z_2)\Phi^{Q_j}_{H_j}(Z_3)\rangle = \frac{C_{ijk}}{Z_{12}^{\gamma_1+\frac{1}{2}}\,Z_{23}^{\gamma_2-\frac{1}{2}}\,Z_{13}^{\gamma_3-\frac{1}{2}}}\Big[(\tfrac{\theta^\pm_{23}}{Z_{23}}-\tfrac{\theta^\pm_{13}}{Z_{13}})+\tfrac{(Q_i\theta^\pm_{13}\theta^\pm_{23}\theta^\mp_{23}+Q_k\theta^\pm_{23}\theta^\pm_{13}\theta^\mp_{13})}{2Z_{23}\,Z_{13}}\Big] \qquad (3.2.19)$$

Das C_{ijk} ist dasselbe wie in der permutationsinvarianten Form (3.2.14, 16).
In nächsten Abschnitt wird die Vierpunktfunktion noch ausführlich besprochen.

3.2.3. Operatorproduktentwicklung

Zur Bestimmung der OPE schreibt man für die Form der OPE den allgemeinsten Ansatz hin, welcher noch die Kopplungen an die derivativen Felder als freie Parameter enthält. Diese lassen sich dann unter Ausnutzung der Kenntnis der allgemeinen Dreipunktfunktion bestimmen, was eine große Stärke eines kovarianten Formalismus' ist.
Bei der OPE hat man wie bei der Dreipunktfunktion verschiedene Fälle der Ladung des angekoppelten Feldes Φ_k zu unterscheiden:

- $Q_i + Q_j = Q_k$

$$\Phi^{Q_i}_{H_i}(Z_2)\,\Phi^{Q_j}_{H_j}(Z_3) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C^k_{ij}A^n_{ijk}}{Z_{23}^{\gamma_2-n}}\partial^n_z\Phi^{Q_k}_{H_k}(Z_3) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C^k_{ij}B^n_{ijk}}{Z_{23}^{\gamma_2-n}}[D^-,D^+]\partial^{n-1}_z\Phi^{Q_k}_{H_k}(Z_3)$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C^k_{ij}C^n_{ijk}\theta^+_{23}}{Z_{23}^{\gamma_2-n}}D^+\partial^n_z\Phi^{Q_k}_{H_k}(Z_3) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C^k_{ij}D^n_{ijk}\theta^-_{23}}{Z_{23}^{\gamma_2-n}}D^-\partial^n_z\Phi^{Q_k}_{H_k}(Z_3) \qquad (3.2.20)$$
$$+\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{C^k_{ij}E^n_{ijk}\theta^+_{23}\theta^-_{23}}{Z_{23}^{\gamma_2-n}}\partial^{n+1}_z\Phi^{Q_k}_{H_k}(Z_3) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C^k_{ij}F^n_{ijk}\theta^+_{23}\theta^-_{23}}{Z_{23}^{\gamma_2-n}}[D^-,D^+]\partial^n_z\Phi^{Q_k}_{H_k}(Z_3)$$

Hier zeigt sich eine weitere Besonderheit von $N = 2$, denn im singulären Teil der OPE stehen Felder, deren Dimension gleich der Summe der Dimensionen der kontrahierten Felder ist. Im $N = 0$ Fall tritt diese Komplikation nicht auf. Dies ist deshalb eine Komplikation, da man bei dieser Dimension schon das i.a. sehr verschachtelte Feld $\mathcal{N}_s(\Phi_j\Phi_i)$ zu beachten hat - alles eine Folge der zweiten Strukturkonstante α. Damit dieses Feld nicht im singulären Teil der OPE vorkommt, gilt nach Definition des NOPes $\alpha_{\Phi_i\Phi_j\mathcal{N}_s(\Phi_j\Phi_i)} = 0$, dazu siehe Kapitel 3.2.4., allerdings steht es in der Kac-Determinante.

Nun betrachtet man gewisse Dreipunktfunktionen [12], setzt die OPE und anschließend die Zweipunktfunktion ein und vergleicht das Ergebnis mit der allgemeinen Form der Dreipunktfunktion, der Einfachheit halber nach einer geeignet gewählten Möbiustransformation. Diese recht langwierige Rechnung liefert für die Koeffizienten [14] †:

$$
\begin{aligned}
A^n_{ijk} &= \frac{2}{n!}\binom{2H_k+n}{n}^{-1}\binom{\gamma_1+n-1}{n}\left(1+\frac{n}{2}\frac{\frac{1}{2}\alpha Q_k - H_k}{(\frac{1}{2}Q_k)^2-H_k^2}\right)\\
B^n_{ijk} &= \frac{1}{(n-1)!}\binom{2H_k+n}{n}^{-1}\binom{\gamma_1+n-1}{n}\left(\frac{\frac{1}{2}Q_k-\alpha H_k}{(\frac{1}{2}Q_k)^2-H_k^2}\right)\\
C^n_{ijk} &= \frac{2H_k}{n!}\binom{2H_k+n}{n+1}^{-1}\binom{\gamma_1+n}{n+1}\left(\frac{1+\alpha}{\frac{1}{2}Q_k+H_k}\right)\\
D^n_{ijk} &= -\frac{2H_k}{n!}\binom{2H_k+n}{n+1}^{-1}\binom{\gamma_1+n}{n+1}\left(\frac{1-\alpha}{\frac{1}{2}Q_k-H_k}\right)\\
E^n_{ijk} &= \frac{1}{(n+1)!}\binom{2H_k+n+1}{n+1}^{-1}\left\{\binom{\gamma_1+n+1}{n+2}\frac{(n+2)}{2}\left[2\alpha+(n+1)\left(\frac{\frac{1}{2}Q_k-\alpha H_k}{(\frac{1}{2}Q_k)^2-H_k^2}\right)\right]\right.\\
&\qquad\left. - Q_i\binom{\gamma_1+n}{n+1}\left[1+\frac{(n+1)}{2}\left(\frac{\frac{1}{2}\alpha Q_k-H_k}{(\frac{1}{2}Q_k)^2-H_k^2}\right)\right]\right\}\\
F^n_{ijk} &= -\frac{Q_i}{2n!}\binom{2H_k+n+1}{n+1}^{-1}\binom{\gamma_1+n}{n+1}\left(\frac{\frac{1}{2}Q_k-\alpha H_k}{(\frac{1}{2}Q_k)^2-H_k^2}\right)\\
&\quad+\frac{H_k}{n!}\binom{2H_k+n+1}{n+2}^{-1}\binom{\gamma_1+n+1}{n+2}\left(\frac{\frac{1}{2}\alpha Q_k-H_k}{(\frac{1}{2}Q_k)^2-H_k^2}\right).
\end{aligned}
\tag{3.2.21}
$$

Die Kopplungskonstanten C^k_{ij} aus der OPE sind durch die Kopplungskonstanten C_{ijk}, D_{ij} aus den Zwei- und Dreipunktfunktionen mittels des linearen Gleichungssystems

$$C^l_{ij}D_{lk} = C_{ijk} \tag{3.2.22}$$

bestimmt, wobei die Summation nur über Felder gleicher konformer Dimension läuft, was wegen der Graduierung der Zweipunktfunktion bzgl. der Dimension klar ist. Die Konstante α ist das α_{ijk} aus der Dreipunktfunktion (3.2.17). Für die anderen beiden Fälle erhält man analog:

- $Q_i + Q_j = Q_k \pm 1$

$$
\begin{aligned}
\Phi^{Q_i}_{H_i}(Z_2)\,\Phi^{Q_j}_{H_j}(Z_3) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C^k_{ij}A^n_{ij\,k}\theta^p m_{23}}{Z_{23}^{\gamma_2-n+1/2}}\partial_z^n\Phi^{Q_k}_{H_k}(Z_3)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C^k_{ij}B^n_{ij\,k}}{Z_{23}^{\gamma_2-n+1/2}}D^{\mp}\partial_z^{n-1}\Phi^{Q_k}_{H_k}(Z_3)\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C^k_{ij}C^n_{ij\,k}\theta^p m_{23}}{Z_{23}^{\gamma_2-n+1/2}}[D^-,D^+]\partial_z^{n-1}\Phi^{Q_k}_{H_k}(Z_3)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C^k_{ij}D^n_{ij\,k}\theta^+_{23}\theta^-_{23}}{Z_{23}^{\gamma_2-n+1/2}}D^{\mp}\partial_z^n\Phi^{Q_k}_{H_k}(Z_3)
\end{aligned}
\tag{3.2.23}
$$

† Der Koeffizient A in Ref. [14] ist falsch.

mit

$$
\begin{aligned}
A^n_{ijk} &= \frac{1}{n!}\binom{2H_k+n}{n}^{-1}\binom{\gamma_1+n-\frac{1}{2}}{n}\left(1+\frac{n}{2(H_k\mp\frac{1}{2}Q_k)}\right)\\
B^n_{ijk} &= \frac{1}{(n-1)!}\binom{2H_k+n-1}{n-1}^{-1}\binom{\gamma_1+n-\frac{3}{2}}{n-1}\frac{1}{(H_k\mp\frac{1}{2}Q_k)}\\
C^n_{ijk} &= \mp\frac{1}{(n-1)!}\binom{2H_k+n}{n}^{-1}\binom{\gamma_1+n-\frac{1}{2}}{n}\frac{1}{2(H_k\mp\frac{1}{2}Q_k)}\\
D^n_{ijk} &= -\frac{1}{n!}\binom{2H_k+n}{n}^{-1}\frac{1}{(H_k\mp\frac{1}{2}Q_k)}\left[\frac{Q_i}{2}\binom{\gamma_1+n-\frac{1}{2}}{n}\mp\frac{(n+1)}{2}\binom{\gamma_1+n+\frac{1}{2}}{n+1}\right]
\end{aligned}
\tag{3.2.24}
$$

Die Entwicklung dieser Formeln nach Komponenten [14] ermöglicht es, alle 64(!) Kopplungen der Komponentenfelder untereinander als Funktion nur einer bzw. zweier Super-Kopplungen zu schreiben, z.B. $C^{\varphi_k}_{\varphi_i\varphi_j} = 2C^k_{ij}\,, C^{\varphi_k}_{\chi'_i\varphi_j} = C^k_{ij}(H_i+H_k-H_j)(\alpha_{ijk}-\frac{Q_i}{2H_i})$ für $Q_k = Q_i+Q_j$ bzw. $C^{\varphi_k}_{\psi^\pm_i\varphi_j} = C^k_{ij}$ für $Q_k = Q_i+Q_j\mp 1$. Dies wird bei der Anwendung dieser Formeln auf die Konstruktion von $\mathcal{SW}$-Algebren noch stark ausgenutzt. Das erste Ergebnis dieser Berechnungen soll die Definition von superprimären Feldern in der OPE-Version sein. Mit $C^{\Phi}_{\mathcal{L}\Phi} = \frac{Q}{2}$ und $\alpha_{\mathcal{L}\Phi\Phi} = \frac{2H}{Q}$ ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(Z_2)\,\Phi^Q_H(Z_3) = {}& \frac{H\theta^+_{23}\theta^-_{23}}{Z^2_{23}}\Phi^Q_H(Z_3) + \frac{\theta^+_{23}D^+ - \theta^-_{23}D^-}{Z_{23}}\Phi^Q_H(Z_3)\\
&+ \frac{\theta^+_{23}\theta^-_{23}}{Z_{23}}\partial_z\Phi^Q_H(Z_3) + \frac{Q}{Z_{23}}\Phi^Q_H(Z_3) + \text{reg.}
\end{aligned}
\tag{3.2.25}
$$

3.2.4. Normalgeordnete Produkte

Im folgenden werden für Super-NOPe die Bezeichnungen $N_s(\Phi_j\Phi_i)$ und $\mathcal{N}_s(\Phi_j\Phi_i)$ verwendet. Ohne Index „s" bedeutet $N=0$ NOPe.
Der reguläre Teil der OPE zweier quasiprimärer Felder wird wie folgt geschrieben:

$$
\begin{aligned}
\Phi_i(Z_1)\Phi_j(Z_2) = {}& \text{sing. Terme}\\
&+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^n_{12}}{n!}N_s(\Phi_j\partial^n_z\Phi_i)(Z_2) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^+_{12}Z^n_{12}}{n!}N_s(\Phi_jD^+\partial^n_z\Phi_i)(Z_2)\\
&+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^-_{12}Z^n_{12}}{n!}N_s(\Phi_jD^-\partial^n_z\Phi_i)(Z_2) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\theta^+_{12}\theta^-_{12}Z^n_{12}}{2n!}N_s(\Phi_j[D^-,D^+]\partial^n_z\Phi_i)(Z_2).
\end{aligned}
\tag{3.2.26}
$$

Die einzelnen Komponenten dieser naiven Super-NOPe sind gewöhnliche NOPe der Komponentenfelder und können durch Entwicklung von (3.2.26) nach den Graßmann-Koordinaten ermittelt werden [14], z.B.

$$
N_s(\Phi_j\partial^n\Phi_i)_1 = N(\varphi_j\partial^n\varphi_i)\,,\quad N_s(\Phi_j[D^-,D^+]\partial^n\Phi_i)_1 = 2N(\varphi_j\partial^n\chi'_i). \tag{3.2.27}
$$

Anwenden der Ableitungen ∂_2, $D_2^{\pm}$ und $[D_2^-, D_2^+]$ auf (3.2.26) liefert die Regeln:

$$\begin{aligned} \partial N_s(\Phi_j \Phi_i) &= N_s(\Phi_j \partial\Phi_i) + N_s(\partial\Phi_j \Phi_i) \\ D^{\pm} N_s(\Phi_j \Phi_i) &= N_s(\Phi_j D^{\pm}\Phi_i) + (-1)^{2H_i} N_s(D^{\pm}\Phi_j \Phi_i) \\ [D^-, D^+] N_s(\Phi_j \Phi_i) &= N_s(\Phi_j [D^-, D^+]\Phi_i) - N_s([D^-, D^+]\Phi_j \Phi_i). \end{aligned} \tag{3.2.28}$$

Die so definierten NOPe sind normalerweise nicht super-quasiprimär. Daher wird für jedes NOP $N_s(..)$ dessen quasiprimäre Projektion $\mathcal{N}_s(..)$ auf solche Weise definiert, daß es die gleichen Kopplungskonstanten C_{ij}^k und α_{ijk} hat wie das ursprüngliche NOP. Allerdings treten in der $OSP(2|2)$ invarianten OPE noch super-derivative ($D^{\pm}, [D^-, D^+]$) Korrekturen von Termen niedrigerer Superdimension auf, welche zusammen mit dem quasiprimären Feld $\mathcal{N}_s(..)$ genau das NOP $N_s(..)$ ergeben müssen. Das bedeutet, daß $\mathcal{N}_s$ beschreibt, was neu dazukommt, während N_s ein regelrechtes „Sammelbecken" für Felder ist. Diese Konstruktionsvorschrift wird an einigen Beispielen einsichtig.

- $\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})$

Der reguläre Teil der Super-Virasoroalgebra (3.1.9,16) beginnt wie folgt:

$$\mathcal{L}(Z_1)\mathcal{L}(Z_2) = \text{sing. Terme} + \mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})(Z_2) + \frac{1}{3}[D^-, D^+]\mathcal{L}(Z_2) + \ldots, \tag{3.2.29}$$

wobei der Koeffizient $\frac{1}{3}$ aus der allgemeinen Form der OPE (3.2.26) stammt. Damit liest man die super-quasiprimäre Korrektur direkt ab:

$$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L}) = N_s(\mathcal{L}\mathcal{L}) - \frac{1}{3}[D^-, D^+]\mathcal{L}. \tag{3.2.30}$$

Die niedrigste $N = 0$ quasiprimäre Komponente lautet damit nach Anwendung des $SU(1,1)$-Projektors:

$$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})_1 = \mathcal{N}(JJ) - \frac{2}{3}L = N(JJ) - \frac{2}{3}L \tag{3.2.31}$$

und ist insbesondere orthogonal zu L, wie es auch zu sein hat, da es sich um Komponenten von quasiprimären Superfeldern verschiedener Dimension handelt. Hier ist sogar $\mathcal{N}(JJ) = N(JJ)$, da J ein *abelscher* Strom ist.
Für Super-NOPe höherer Ordnung, d.h. höher verschachtelt oder mit $D^{\pm}, [D^-, D^+]$, treten auch Korrekturen von bereits vorher definierten super-quasiprimären NOPen auf. Es genügt allerdings, die niedrigste Komponente durch $N = 0$ quasiprimäre NOPe auszudrücken, denn deren Struktur ist hinlänglich bekannt.

- $\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-, D^+]\mathcal{L})$

Die OPE (3.2.29) läuft wie folgt weiter:

$$\mathcal{L}(Z_1)\mathcal{L}(Z_2) = \ldots + \theta_{12}^+\theta_{12}^- \left(\frac{1}{2}\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-, D^+]\mathcal{L})(Z_2) + \frac{3}{20}[D^-, D^+]\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L}) + O(\partial)\right) + \ldots \tag{3.2.32}$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ kommt aus der Forderung nach gleichen Kopplungskonstanten, denn in (3.2.26) hat das naive NOP diesen Vorfaktor. Man beachte, daß die Superfelder $\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^{\pm}\mathcal{L})$ wegen (3.2.37) verschwinden und daher nicht beitragen. Damit folgt:

$$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L}) = N_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L}) - \frac{3}{10}[D^-,D^+]\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L}) + O(\partial). \tag{3.2.33}$$

Durch Anwenden des $SU(1,1)$-Projektors erhält man schließlich für die erste Komponente das exakte Resultat, dabei fallen die Terme $O(\partial)$ weg und vierte Komponenten werden projeziert:

$$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L})_1 = 2\mathcal{N}(JL) - \frac{3}{5}\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})'_4. \tag{2.3.34}$$

Mit dieser Prozedur läßt sich nun iterativ der gesammte „Turm" von NOPen, die nur das Super-Virasorofeld enthalten, aufbauen.
Anwenden des $OSP(2|2)$-Projektors auf (3.2.28) ergibt die folgenden Symmetrieeigenschaften des super-quasiprimären NOPes:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_s(\Phi_j\partial\Phi_i) &= -\mathcal{N}_s(\partial\Phi_j\Phi_i) \\ \mathcal{N}_s(\Phi_j D^{\pm}\Phi_i) &= (-1)^{2H_i+1}\mathcal{N}_s(D^{\pm}\Phi_j\Phi_i) \\ \mathcal{N}_s(\Phi_j[D^-,D^+]\Phi_i) &= \mathcal{N}_s([D^-,D^+]\Phi_j\Phi_i). \end{aligned} \tag{3.2.35}$$

Weiterhin gilt

$$\mathcal{N}_s(\Phi_j\Phi_i) = \epsilon\mathcal{N}_s(\Phi_i\Phi_j), \tag{3.2.36}$$

wobei $\epsilon = -1$ für zwei fermionische Felder und andernfalls $\epsilon = 1$ ist. Die Eigenschaften (3.2.35,36) bedeuten insbesondere

$$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^{\pm}\partial^{2n}\mathcal{L}) = 0. \tag{3.2.37}$$

Dieser Formalismus ist aber nicht nur für das Super-Virasorofeld geeignet: Sei Φ ein holomorphes Superfeld mit Dimension H und Ladung null.

- $\mathcal{N}_s(\Phi\mathcal{L})$

Der reguläre Teil dieser OPE hat als erste Terme:

$$\mathcal{L}(Z_1)\Phi(Z_2) = \text{sing. Terme} + \mathcal{N}_s(\Phi\mathcal{L})(Z_2) + \frac{1}{2H+1}[D^-,D^+]\Phi(Z_2) + \dots \tag{3.2.38}$$

Damit erhält man für die super-quasiprimäre Korrektur:

$$\mathcal{N}_s(\Phi\mathcal{L}) = N_s(\Phi\mathcal{L}) - \frac{1}{2H+1}[D^-,D^+]\Phi, \tag{3.2.39}$$

womit die niedrigste $N=0$ quasiprimäre Komponente

$$\mathcal{N}_s(\Phi\mathcal{L})_1 = \mathcal{N}(\varphi J) - \frac{2}{2H+1}\chi' = N(\varphi J) - \frac{2}{2H+1}\chi \tag{3.2.40}$$

lautet.
Wesentlich komplizierter gestaltet sich die Berechnung von NOPen, die zwei primäre Felder beinhalten. Dies wird im weiteren Verlauf noch dargelegt.

3.3. Der Algorithmus zur Konstruktion von $N = 2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebren

Der oben rekapitulierte manifest kovariante Formalismus soll nun zu einem Algorithmus zur Konstruktion von $N = 2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebren ausgearbeitet werden. Dazu ist ein geeigneter Mittelweg zwischen der kovarianten OPE-Formulierung und den weit entwickelten Liealgebra-Methoden zu finden. Dieser sieht wie folgt aus:

Zunächst schreibt man den allgemeinsten Ansatz für die OPE der primären Felder hin. Dabei werden normalgeordnete Produkte auftreten, deren Anzahl bei Dimension H man mit der Beziehung

$$\#(H) = p(H) - p(H - \frac{1}{2}) - \#(H - \frac{1}{2}), \tag{3.3.1}$$

wobei $p(x)$ die Anzahl der Monome in den positiven Moden (natürlich nur die, die das Vakuum nicht annihilieren) der Komponentenfelder der Generatoren zur Dimension x angibt, bestimmen kann. Auf diese Weise erhält man eine Basis von normalgeordneten Produkten. Ein großes Stück Arbeit besteht nun darin, die quasiprimäre Projektion dieser Produkte zu berechnen. Treten NOPe mit zwei primären Feldern auf, so können diese zunächst nicht projeziert werden, denn dazu braucht man die Strukturkonstanten. Allerdings reicht es aus, die niedrigste Komponente auszurechnen, die anderen folgen dann durch Kommutatorbildung.

Dann entwickelt man die Superfelder in Komponenten und diese wiederum in Moden. Auf diesem Level lassen sich die Strukturkonstanten für die niederen Komponenten berechnen. Dazu werden die oben vorgestellten Liealgebra-Methoden wie die universellen Polynome verwendet [18]. Die Berechnung von Zwei- und Dreipunktfunktionen erfolgt mit dem leistungsfähigen C-Programm „*commute*" [47]. Alle anderen Manipulationen werden mit $Mathematica^{TM}$ [80] durchgeführt. Sodann kann man die Superkopplungskonstanten berechnen, die dann wieder die Kopplungen aller Komponentenfelder untereinander festlegen. Evtl. hat man im Ansatz noch freie Kopplungen der zusätzlichen primären Felder untereinander. Alle Strukturkonstanten lassen sich darauf zurückführen.

Schließlich müssen noch die Konsistenzgleichungen, also die Jacobiidentitäten der Komponentenfelder oder äquivalent die Assoziativität der Super-Vierpunktfunktion untersucht werden. Da im vorigen Schritt bereits die Strukturkonstanten für alle Komponentenfelder berechnet wurden, ist es kein zusätzlicher Aufwand, die Jacobiidentitäten zu prüfen. Aufgrund des kovarianten Ansatzes genügt es, sie für die zusätzlichen primären Felder zu verifizieren, denn Jacobiidentitäten, die das Super-Virasorofeld beinhalten, sind wegen der $Osp(2,2)$-Invarianz automatisch erfüllt. Ferner glaubt man, daß es reicht, den Check für die einfachen Felder durchzuführen. Das ist einsichtig bei Ableitungen und NOPen mit dem Virasorofeld, allerdings bei Feldern wie $\mathcal{N}_s(\Phi\Phi)$ eher eine Erfahrungssache.
Sei also $(\phi_i\phi_j\phi_k\phi_l)$ der Koeffizient der Jacobiidentität $[[\phi_i,\phi_j],\phi_k]$ + zykl. vor dem Feld $\phi_l^\star$, wobei $\phi_l^\star$ das Adjungierte des Feldes ϕ_l bzgl. der Form $\langle .,. \rangle$ bedeutet, z.B. $\psi^{-\star} = \psi^+$.
Nun nutzt man die Invarianz unter Ladungskonjugation $Q \to -Q$ und die Symmetrie

$$(\phi_i\phi_j\phi_k\phi_l) = 0 \Rightarrow (\phi_j\phi_i\phi_l\phi_k) = 0 \tag{3.3.2}$$

aus. Dabei gilt letztere nur für paarweise gleiche Dimensionen der Komponentenfelder ϕ_i und ϕ_j sowie ϕ_k und ϕ_l eines Superfeldes, was man durch explizites Hinschreiben der Jacobiidentitäten direkt erhält. Dies reduziert die 256 möglichen Kombinationen auf nur noch acht für die Komponenten eines ungeladenen Superfeldes:

$$(\varphi\varphi\varphi\varphi),(\varphi\varphi\varphi\chi),(\varphi\varphi\chi\chi),(\varphi\chi\chi\chi),(\chi\chi\chi\chi),(\varphi\varphi\psi^+\psi^-),(\psi^+\psi^-\chi\chi),(\psi^+\psi^-\psi^+\psi^-). \tag{3.3.3}$$

Bei zwei Superfeldern braucht man einige Identitäten mehr, siehe dazu den übernächsten Abschnitt. Selbst diese Bedingungen sind noch nicht unabhängig, wie die Erfahrung zeigt, mithin erzeugt die $N = 2$ Supersymmetrie weitere Relationen.
Die Jacobiidentitäten liefern Einschränkungen an die Selbstkopplungen und die zentrale Ladung, so daß jenachdem eine generische oder exotische $\mathcal{W}$-Algebra herauskommt.

3.4. Die bisher konstruierten $N = 2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebren

Hier gibt es noch nicht viele explizit bekannte Beispiele. Inami u.a. [49] erweiterten die Super-Virasoroalgebra um ein Feldpaar $\Phi^{\pm}$ (die Hinzunahme eines ladungskonjugierten Partners ist durch das Nichtverschwinden der Zweipunktfunktion (3.2.12) vorgegeben) der Superdimension $\frac{3}{2}$ mit Ladung $\pm Q$, in der hier verwendeten Notation eine $\mathcal{SW}(1, \frac{3}{2}^{\pm Q})$, allerdings mit dem schon erwähnten falschen Resultat. Romans [71] konstruierte mit erheblichem algebraischen Aufwand die $\mathcal{SW}(1,2)$ mit Ladung null, das Ergebnis bestätigte die Vorhersage von Ito [50,51]. Blumenhagen [14,19] untersuchte Algebren mit einer Dimension des primären Feldes bis zu drei, erhielt aber nur sporadische Lösungen. Ein Überblick ist in der folgenden Tabelle gegeben.

H	Q	c	zusätzliche Bedingungen
$\frac{3}{2}$	0	$\frac{9}{4}, \frac{3}{5}, -\frac{3}{2}$	
	± 3	9	
	± 1	3	$C_{\Phi^+\Phi^-}^{\Phi^+} = C_{\Phi^+\Phi^-}^{\Phi^-} = 0$
		-1	$C_{\Phi^+\Phi^-}^{\Phi^+} C_{\Phi^+\Phi^-}^{\Phi^-} = -\frac{128}{15}$
2	0	generisch	$(C_{\Phi\Phi}^{\Phi})^2 = \frac{(c+3)^2(5c-12)^2}{2(15-c)(c-1)(c+6)(2c-3)}$
	± 4	$12, -9, -21$	
	$\pm\frac{3}{2}$	$\frac{15}{4}$	
$\frac{5}{2}$	0	$\frac{5}{2}, \frac{9}{7}, -\frac{9}{2}$	
	± 5	15	
	± 2	$\frac{9}{2}$	
	± 1	3	$C_{\Phi^+\Phi^-}^{\Phi^+} = C_{\Phi^+\Phi^-}^{\Phi^-} = 0$
3	0	$\frac{18}{7}, \frac{10}{3}, -\frac{9}{5}$	$(C_{\Phi\Phi}^{\Phi}\alpha_{\Phi\Phi\Phi})^2 = 0, \frac{268960000}{88803}, -\frac{106815267}{88000}$
	± 6	$18, -15, -33$	
	$\pm\frac{5}{2}$	$\frac{21}{4}$	
	$\pm\frac{4}{3}$	$\frac{10}{3}$	

Tabelle 3: Die bisher konstruierten Algebren mit zwei Generatoren

Man erkennt bereits an diesen Beispielen einige Strukturen. So existiert die jeweilige Algebra im chiralen Fall $H = \frac{Q}{2}$ für $c = 6H$. Dies sind die Algebren, wo der spektrale Fluß als Feld auftritt. Ferner existieren die fermionischen Algebren für $Q = \pm 1$ und $c = 3$, man erwartet eine Freifeldkonstruktion mit einem chiralen und einem antichiralen Fermion [14]. Bemerkenswert ist die Existenz exotischer Algebren für $c > 3$, wogegen im Falle $N = 0$ stets $c < 1$ und auch für $N = 1$ immer $c < \frac{3}{2}$ ist. Die $\mathcal{SW}(1,2)$ ist die einzige generisch existierende Algebra mit zwei Generatoren, obwohl für gewisse Werte der Ladung ($Q = 0$ bei Bosonen und $Q = \pm 1$ bei Fermionen) eine Selbstkopplung möglich ist. Daß bei jeder Dimension eine Selbstkopplung in Frage kommt, stellt eine weitere Besonderheit von $N = 2$ dar. Somit ist die Struktur der $N = 2$ $\mathcal{SW}$-Algebren andersartig als die im $N = 0$ und dem hier nicht erwähnten $N = 1$ Fall. Das äußert sich auch in den rationalen Modellen [19]. Erstens gibt es davon nur sehr wenige und zweitens sind diese alle wieder unitär.
Die Konstruktion einer weiteren generischen Algebra soll daher die Struktur etwas aufhellen, allerdings kann man keine rationalen Modelle mit $c = 9$ erwarten, denn für n Superfelder gilt stets $c < 3n$ [28]. Erst das CP(4)-Modell, was zur $\mathcal{SW}(1,2,3,4)$ gehört, hat für den Level $k = 15$ die magische zentrale Ladung $c = 9$, aber die Konstruktion dieser Algebra steht noch in den Sternen.

4. Äquivalenz Jacobiidentitäten-Crossingsymmetrie

Ausgehend von der kovarianten Formulierung von OPE und n-Punkt-Funktionen läßt sich die Form der Vierpunktfunktion festlegen. Dies erlaubt eine algorithmische Implementierung der Crossingsymmetrie, was im $N = 0$ Falle in [64] schon angedeutet wurde. Es wird ein Test an an der $\mathcal{SW}(1, \frac{3}{2}^{\pm Q})$ vorgenommen.
Motivation dafür war die Behauptung von Inami u.a. [49], Jacobiidentitäten und Assoziativität seien für $N = 2$ nicht mehr äquivalent. Denn sie erhielten, daß diese Algebra mit $Q = 0$ generisch existieren sollte, während die Jacobiidentitäten nur sporadische Lösungen liefern sollten. Dem kann jedoch widersprochen werden, mit diesem Formalismus kamen dieselben c-Werte wie bei den Jacobiidentitäten heraus. Für $Q \neq 0$ führte die Anwendung dieser Formeln ebenfalls auf die Ergebnisse von Blumenhagen [14]. Das hat seine Erklärung darin, daß in [49] die Assoziativität nicht für alle Sätze von Komponentenfeldern gecheckt wurde. Es fehlten genau diejenigen, die Einschränkungen ergeben, denn die Erfahrung zeigt, daß die Assoziativität für manche Kombinationen, wie etwa nur die niedrigsten Komponenten, automatisch erfüllt ist.

4.1. Die Vierpunktfunktion

Die Vierpunktfunktion ist durch Super-Möbiusinvarianz nicht mehr eindeutig bestimmt. Ihre Assoziativität ist im Gegenteil äquivalent zur Gültigkeit von Jacobiidentitäten der Komponentenfelder, also den Konsistenzbedingungen einer Algebra. Diese Äquivalenz wurde zu Anfang in Zweifel gezogen, da in Ref. [49] die beiden Verfahren unterschiedliche Ergebnisse lieferten, es handelte sich aber um einen Rechenfehler.
Ausgehend von den zwölf Koordinaten hat man nach Anwenden der sieben Möbiustransformationen ohne J_0 noch fünf freie Parameter. Es gibt allerdings auch fünf Möbiusinvarianten, die sich aus vier Punkten des Superraums konstruieren lassen, und zwar je zwei der Θ's, man wähle z.B. $\Theta^{\pm}_{124}, \Theta^{\pm}_{234}$. Daneben tritt eine neue Größe auf, die supersymmetrische Verallgemeinerung des Doppelverhältnisses:

$$X = \frac{Z_{12}Z_{34}}{Z_{14}Z_{32}}. \tag{4.1.1}$$

Die Struktur der Vierpunktfunktion lautet dann:

$$\langle \Phi^{Q_1}_{H_1}(Z_1)\Phi^{Q_2}_{H_2}(Z_2)\Phi^{Q_3}_{H_3}(Z_3)\Phi^{Q_4}_{H_4}(Z_4)\rangle = f(X, \Theta^{\pm}_{124}, \Theta^{\pm}_{234}) Z^H_{14} Z^H_{23} \prod_{i<j} \frac{1 + \frac{Q_j - Q_i}{8}\frac{\theta^+_{ij}\theta^-_{ij}}{Z_{ij}}}{Z_{ij}^{H_i + H_j}} \tag{4.1.2}$$

mit $H = \sum_{i=1}^4 H_i$.
In der Wahl der Exponenten γ_{ij} der Z_{ij} hat man noch gewisse Freiheiten, es ist lediglich die Bedingung (3.2.11) zu erfüllen. Die oben getroffene Wahl erweist sich jedoch als zweckmäßig. f ist eine zunächst beliebige Funktion der Invarianten, allerdings ist die Ladungserhaltung zu respektieren. Je nach Gesamtladung in der Vierpunktfunktion lautet dann die allgemeinste Form für f:

$\bullet Q=0$:

$$f=\sqrt{-X_{2\leftrightarrow 3}}^{\epsilon}\left(\sum_{k=\beta}^{H-\beta}a_k(-X)^k+(-X)\sum_{k=\beta-1}^{H-1-\beta}b_k(-X)^k\Theta^+_{124}\Theta^-_{124}\right.$$
$$+\sqrt{-X}\sum_{k=-\beta}^{H-1-\beta}c_k(-X)^k\Theta^+_{124}\Theta^-_{234}+\sqrt{-X}\sum_{k=-\beta}^{H-1-\beta}d_k(-X)^k\Theta^-_{124}\Theta^+_{234} \tag{4.1.3}$$
$$\left.+\sum_{k=\beta}^{H-\beta}e_k(-X)^k\Theta^+_{234}\Theta^-_{234}+(-X)\sum_{k=\beta-1}^{H-1-\beta}f_k(-X)^k\Theta^+_{124}\Theta^-_{124}\Theta^+_{234}\Theta^-_{234}\right)$$

$\bullet Q=\pm 1$:

$$f=\sqrt{-X_{2\leftrightarrow 3}}^{\epsilon}\left(\sqrt{-X}\sum_{k=\beta}^{H-1-\beta}a_k(-X)^k\Theta^\pm_{124}+\sum_{k=\beta}^{H-\beta}b_k(-X)^k\Theta^\pm_{234}\right. \tag{4.1.4}$$
$$\left.+(-X)\sum_{k=\beta-1}^{H-1-\beta}c_k(-X)^k\Theta^+_{124}\Theta^-_{124}\Theta^\pm_{234}+\sqrt{-X}\sum_{k=\beta}^{H-1-\beta}d_k(-X)^k\Theta^\pm_{124}\Theta^+_{234}\Theta^-_{234}\right)$$

$\bullet Q=\pm 2$:

$$f=\sqrt{-X_{2\leftrightarrow 3}}^{\epsilon}\sqrt{-X}\sum_{k=\beta}^{H-1-\beta}a_k(-X)^k\Theta^\pm_{124}\Theta^\pm_{234} \tag{4.1.5}$$

Dabei ist $\epsilon=1$ für $H_1+H_3\notin\mathbb{Z}$ und 0 sonst sowie $\beta=H_1+H_2-[H_1+H_2]\in\{0,\frac{1}{2}\}$. Ferner bedeutet „$2\leftrightarrow 3$", daß Z_2 und Z_3 vertauscht sind. Diese Größen dienen nur dazu, später übersichtlichere Formeln zu erhalten.

Aus der OPE folgen die polynomiale Abhängigkeit von X und die Summationsbereiche. Die Wurzeln sind wegen der Definition der Θ's einzuführen. Für andere Werte der Gesamtladung verschwindet die Vierpunktfunktion identisch.

Nun setzt man in die Vierpunktfunktion die OPE der beiden ersten Felder ein und verwendet die Dreipunktfunktion. Dies ergibt eine rationale Funktion in den z's und θ's, die mit dem allgemeinen Ansatz übereinstimmen muß. Dazu wird der Limes $z_4\to\infty$ betrachtet. In diesem Fall gilt: $X\to\frac{Z_{12}}{Z_{32}},\Theta^\pm_{124}\to\frac{\theta^\pm_{12}}{\sqrt{Z_{12}}},\Theta^\pm_{234}\to\frac{\theta^\pm_{23}}{\sqrt{Z_{23}}}$ Durch Koeffizientenvergleich erhält man nach langer Rechnung die Funktion f:

$\bullet Q=0$

$$a_k=\sum_{X^0,m+n+s=k,n,s\geq 0}\binom{[H_1+H_3]}{s}C_{12}^{X}C_{34X}2\left(A^n_{12m}(-1)^n n!\binom{m34+n-1}{n}\right.$$
$$\left.+B^n_{12m}\left(\frac{Q_3-Q_1-Q_2}{3}+\alpha_{34X}\right)(-1)^{n-1}(n-1)!\binom{m34+n-1}{n-1}\right)$$

$$
+ \sum_{X^{\pm}, m+n+s=k+\frac{1}{2}, n\geq 1, s\geq 0} \binom{[H_1+H_3]}{s} C_{12}^{X} C_{34X} B_{12X}^{n\pm} (-1)^{n-1}(n-1)! \binom{m34+n-\frac{3}{2}}{n-1}
$$

$$
\begin{aligned}
e_k = & - \frac{Q_3-Q_2}{8} a_k - \frac{Q_3-Q_1}{8} \sum_{j=0}^{[k]} (-1)^j a_{k-j} \\
& + \sum_{X^0, m+n+s=k, n,s\geq 0} \binom{[H_1+H_3]}{s} C_{12}^{X} C_{34X} \Bigg(B_{12m}^{n} (-1)^{n+1}(n+1)! \binom{m34+n}{n+1} \\
& \qquad + A_{12m}^{n} \left(\frac{Q_3-Q_1-Q_2}{3} + \alpha_{34X} \right) (-1)^n n! \binom{m34+n}{n} \Bigg) \\
& + \sum_{X^{\pm}, m+n+s=k+\frac{1}{2}, n\geq 1, s\geq 0} \binom{[H_1+H_3]}{s} C_{12}^{X} C_{34X} (\mp B_{12X}^{n\pm}) \frac{1}{2} (-1)^n n! \binom{m34+n-\frac{1}{2}}{n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_k = & - \frac{Q_2-Q_1}{8} a_{k+1} - \frac{Q_3-Q_1}{8} \sum_{j=0}^{[k]} (-1)^j a_{k-j} \\
& + \sum_{X^0, m+n+s=k, n\geq -1, s\geq 0} \binom{[H_1+H_3]}{s} C_{12}^{X} C_{34X} 2 \Bigg(E_{12m}^{n} (-1)^{n+1}(n+1)! \binom{m34+n}{n+1} \\
& \qquad + F_{12m}^{n} \left(\frac{Q_3-Q_1-Q_2}{3} + \alpha_{34X} \right) (-1)^n n! \binom{m34+n}{n} \Bigg) \\
& + \sum_{X^{\pm}, m+n+s=k+\frac{1}{2}, n,s\geq 0} \binom{[H_1+H_3]}{s} C_{12}^{X} C_{34X} D_{12X}^{n\pm} (-1)^n n! \binom{m34+n-\frac{1}{2}}{n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_k = & - \frac{Q_3-Q_1}{8} \sum_{j=0}^{[k]} (-1)^j a_{k-j} \\
& + \sum_{X^0, m+n+s=k, n,s\geq 0} C_{12}^{X} C_{34X} \Bigg([H_1+H_3] \binom{[H_1+H_3]-1}{s} \Bigg(A_{12m}^{n} (-1)^n n! \binom{m34+n-1}{n} \\
& \qquad + B_{12m}^{n} \left(\frac{Q_3-Q_1-Q_2}{3} + \alpha_{34X} \right) (-1)^{n-1}(n-1)! \binom{m34+n-1}{n-1} \Bigg) \\
& \qquad + \binom{[H_1+H_3]}{s} C_{12m}^{n} \left(\frac{Q_3-Q_1-Q_2}{3} - m34 + \alpha_{34X} \right) (-1)^n n! \binom{m34+n}{n} \Bigg) \\
& + \sum_{X^{\pm}, m+n+s=k+\frac{1}{2}, n,s\geq 0} C_{12}^{X} C_{34X} \Bigg(\binom{[H_1+H_3]}{s} (A_{12X}^{n-} - C_{12X}^{n-}) (-1)^n n! \binom{m34+n-\frac{1}{2}}{n} \\
& \qquad + \frac{1}{2} [H_1+H_3] \binom{[H_1+H_3]-1}{s} B_{12X}^{n\pm} (-1)^{n-1}(n-1)! \binom{m34+n-\frac{3}{2}}{n-1} \Bigg)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_k =& \frac{Q_3-Q_1}{8}\sum_{j=0}^{[k]}(-1)^j a_{k-j} \\
&+ \sum_{X^0, m+n+s=k, n,s\geq 0} C_{12}^X C_{34X}\Bigg([H_1+H_3]\binom{[H_1+H_3]-1}{s}\Bigg(A_{12m}^n(-1)^n n!\binom{m34+n-1}{n} \\
&\qquad + B_{12m}^n\left(\frac{Q_3-Q_1-Q_2}{3}+\alpha_{34X}\right)(-1)^{n-1}(n-1)!\binom{m34+n-1}{n-1}\Bigg) \\
&\qquad + \binom{[H_1+H_3]}{s}D_{12m}^n\left(-\frac{Q_3-Q_1-Q_2}{3}-m34-\alpha_{34X}\right)(-1)^n n!\binom{m34+n}{n}\Bigg) \\
&+ \sum_{X^\pm, m+n+s=k+\frac{1}{2}, n,s\geq 0} C_{12}^X C_{34X}\Bigg(\binom{[H_1+H_3]}{s}(A_{12X}^{n+}+C_{12X}^{n+})(-1)^n n!\binom{m34+n-\frac{1}{2}}{n} \\
&\qquad + \frac{1}{2}[H_1+H_3]\binom{[H_1+H_3]-1}{s}B_{12X}^{n\pm}(-1)^{n-1}(n-1)!\binom{m34+n-\frac{3}{2}}{n-1}\Bigg)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_k =& -\frac{Q_3-Q_2}{8}\frac{Q_2-Q_1}{8}a_{k+1}-\frac{Q_3-Q_2}{8}b_k-\frac{Q_2-Q_1}{8}e_{k+1}-\frac{Q_3-Q_1}{8}\sum_{j=0}^{[k]}(-1)^j e_{k-j} \\
&-\frac{Q_3-Q_1}{8}\frac{Q_2-Q_1}{8}\sum_{j=0}^{[k]+1}(-1)^j a_{k+1-j}-\frac{Q_3-Q_1}{8}\frac{Q_3-Q_2}{8}\sum_{j=0}^{[k]}(-1)^j a_{k-j} \\
&-\frac{Q_3-Q_1}{8}\sum_{j=0}^{[k]+1}(-1)^j b_{k-j}+\frac{Q_3-Q_1}{8}\sum_{j=0}^{[k+\frac{1}{2}]}(-1)^j c_{k-j}-\frac{Q_3-Q_1}{8}\sum_{j=0}^{[k+\frac{1}{2}]}(-1)^j d_{k-j} \\
&+ \sum_{X^0, m+n+s=k, n\geq -1, s\geq 0} C_{12}^X C_{34X}\Bigg(\binom{[H_1+H_3]}{s}\Bigg(F_{12m}^n(-1)^{n+2}(n+2)!\binom{m34+n+1}{n+2} \\
&\qquad + E_{12m}^n\left(\frac{Q_3-Q_1-Q_2}{3}+\alpha_{34X}\right)(-1)^{n+1}(n+1)!\binom{m34+n+1}{n+1}\Bigg) \\
&\quad + \frac{1}{2}[H_1+H_3]\binom{[H_1+H_3]-1}{s}(-1)^n n!\binom{m34+n}{n} \\
&\qquad \left(C_{12m}^n\left(\frac{Q_3-Q_2-Q_1}{3}-m34+\frac{1}{2}\alpha_{X34}\right)+D_{12m}^n\left(-\frac{Q_3-Q_2-Q_1}{3}-m34-\frac{1}{2}\alpha_{X34}\right)\right) \\
&\quad + \binom{[H_1+H_3]}{2}\binom{[H_1+H_3]-2}{s}\Bigg(A_{12m}^n(-1)^n n!\binom{m34+n-1}{n} \\
&\qquad + B_{12m}^n(-1)^{n-1}(n-1)!\binom{m34+n-1}{n-1}\left(\frac{Q_3-Q_2-Q_1}{3}-\alpha_{X34}\right)\Bigg)\Bigg)
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{X^{\pm},m+n+s=k+\frac{1}{2},n,s\geq 0} C_{12}^{X}C_{34X}\Bigg(\Bigg(\binom{[H_1+H_3]}{s}\frac{1}{2}(-1)^{n+1}(n+1)!\binom{m34+n+\frac{1}{2}}{n+1}(\mp D_{12m}^{n\pm})$$

$$+\binom{[H_1+H_3]}{2}\binom{[H_1+H_3]-2}{s}\frac{1}{2}(-1)^{n-1}(n-1)!\binom{m34+n-\frac{3}{2}}{n-1}B_{12m}^{n\pm}\Bigg)$$

$$+[H_1+H_3]\binom{[H_1+H_3]-1}{s}\frac{1}{2}(-1)^{n}n!\binom{m34+n-\frac{1}{2}}{n}(A_{12m}^{n\pm}\pm C_{12m}^{n\pm}) \quad (4.1.6)$$

$\bullet Q=1$

$$a_k=-\sum_{X^{-},m+n+s=k+\frac{1}{2},n,s\geq 0}\binom{[H_1+H_3]}{s}C_{12}^{X}C_{34X}2\Bigg(A_{12m}^{n-}(-1)^{n}n!\binom{m34+n-1}{n}$$

$$+C_{12m}^{n-}\left(\frac{Q_3-Q_1-Q_2+1}{3}+\alpha_{34X}\right)(-1)^{n-1}(n-1)!\binom{m34+n-1}{n-1}\Bigg)$$

$$-\sum_{X^{0},m+n+s=k,n,s\geq 0}\binom{[H_1+H_3]}{s}C_{12}^{X}C_{34X}C_{12X}^{n}(-1)^{n}n!\binom{m34+n-\frac{1}{2}}{n}$$

$$b_k=-\sum_{X^{-},m+n+s=k+\frac{1}{2},n\geq 1,s\geq 0}\binom{[H_1+H_3]}{s}C_{12}^{X}C_{34X}B_{12m}^{n-}(-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$\binom{m34+n-1}{n-1}\left(-\frac{Q_3-Q_1-Q_2+1}{3}-m34-\alpha_{X34}\right)$$

$$-\sum_{X^{0},m+n+s=k,n,s\geq 0}\binom{[H_1+H_3]}{s}C_{12}^{X}C_{34X}(A_{12X}^{n}+B_{12X}^{n})(-1)^{n}n!\binom{m34+n-\frac{1}{2}}{n}$$

$$c_k=-\frac{Q_2-Q_1}{8}b_{k+1}+\frac{Q_3-Q_1}{8}\sum_{j=0}^{[k]}(-1)^{j}a_{k-j}-\frac{Q_3-Q_1}{8}\sum_{j=0}^{[k]}(-1)^{j}b_{k-j}$$

$$-\sum_{X^{0},m+n+s=k,n\geq -1,s\geq 0}C_{12}^{X}C_{34X}\Bigg(\Bigg(\binom{[H_1+H_3]}{s}(-1)^{n+1}(n+1)!\binom{m34+n+\frac{1}{2}}{n+1}(E_{12X}^{n}+F_{12X}^{n})$$

$$+[H_1+H_3]\binom{[H_1+H_3]-1}{s}C_{12X}^{n}\frac{1}{2}(-1)^{n}n!\binom{m34+n-\frac{1}{2}}{n}\Bigg)\Bigg)$$

$$-\sum_{X^{-},m+n+s=k+\frac{1}{2},n,s\geq 0}C_{12}^{X}C_{34X}\Bigg([H_1+H_3]\binom{[H_1+H_3]-1}{s}\Bigg(A_{12X}^{n-}(-1)^{n}n!\binom{m34+n-1}{n}$$

$$+C_{12X}^{n-}(-1)^{n-1}(n-1)!\binom{m34+n-1}{n-1}\left(\frac{Q_3-Q_1-Q_2+1}{3}+\alpha_{X34}\right)\Bigg)$$

$$+\binom{[H_1+H_3]}{s}D_{12X}^{n-}(-1)^{n}n!\binom{m34+n}{n}\left(-\frac{Q_3-Q_1-Q_2+1}{3}-m34-\alpha_{X34}\right)\Bigg)$$

$$
\begin{aligned}
d_k =& -\frac{Q_3-Q_2}{8}a_k - \frac{Q_3-Q_1}{8}\sum_{j=0}^{[k]}(-1)^j a_{k-j} + \frac{Q_3-Q_1}{8}\sum_{j=0}^{[k]}(-1)^j b_{k-j}\\
&+ \sum_{X^0, m+n+s=k, n,s\geq 0} C_{12}^X C_{34X}\Bigg(\binom{[H_1+H_3]}{s} C_{12X}^n \frac{1}{2}(-1)^{n+1}(n+1)!\binom{m34+n+\frac{1}{2}}{n+1}\\
&\qquad + [H_1+H_3]\binom{[H_1+H_3]-1}{s}\frac{1}{2}(-1)^n n!\binom{m34+n-\frac{1}{2}}{n}(A_{12X}^n + B_{12X}^n)\Bigg)\\
&- \sum_{X^-, m+n+s=k+\frac{1}{2}, n,s\geq 0} C_{12}^X C_{34X}\Bigg(\binom{[H_1+H_3]}{s}\Bigg(C_{12X}^{n-}(-1)^{n+1}(n+1)!\binom{m34+n}{n+1}\\
&\qquad + A_{12X}^{n-}(-1)^n n!\binom{m34+n}{n}\left(\frac{Q_3-Q_1-Q_2+1}{3}+\alpha_{X34}\right)\Bigg)\\
&\qquad + [H_1+H_3]\binom{[H_1+H_3]-1}{s} B_{12X}^{n-}\frac{1}{2}(-1)^{n-1}(n-1)!\binom{m34+n-1}{n-1}\\
&\qquad\qquad \left(\frac{Q_3-Q_1-Q_2+1}{3}+m34+\alpha_{X34}\right)\Bigg) \qquad (4.1.7)
\end{aligned}
$$

$\bullet Q = -1$

$$
\begin{aligned}
a_k =& -\sum_{X^+, m+n+s=k+\frac{1}{2}, n,s\geq 0}\binom{[H_1+H_3]}{s} C_{12}^X C_{34X} 2\Bigg(A_{12m}^{n+}(-1)^n n!\binom{m34+n-1}{n}\\
&\qquad + C_{12m}^{n+}\left(\frac{Q_3-Q_1-Q_2-1}{3}+\alpha_{34X}\right)(-1)^{n-1}(n-1)!\binom{m34+n-1}{n-1}\Bigg)\\
&- \sum_{X^0, m+n+s=k, n,s\geq 0}\binom{[H_1+H_3]}{s} C_{12}^X C_{34X} D_{12X}^n (-1)^n n!\binom{m34+n-\frac{1}{2}}{n}\\
b_k =& -\sum_{X^+, m+n+s=k+\frac{1}{2}, n\geq 1, s\geq 0}\binom{[H_1+H_3]}{s} C_{12}^X C_{34X} B_{12m}^{n+}(-1)^{n-1}(n-1)!\\
&\qquad \binom{m34+n-1}{n-1}\left(\frac{Q_3-Q_1-Q_2-1}{3}-m34+\alpha_{X34}\right)\\
&- \sum_{X^0, m+n+s=k, n,s\geq 0}\binom{[H_1+H_3]}{s} C_{12}^X C_{34X}(A_{12X}^n - B_{12X}^n)(-1)^n n!\binom{m34+n-\frac{1}{2}}{n}\\
c_k =& -\frac{Q_2-Q_1}{8}b_{k+1} + \frac{Q_3-Q_1}{8}\sum_{j=0}^{[k]}(-1)^j a_{k-j} - \frac{Q_3-Q_1}{8}\sum_{j=0}^{[k]}(-1)^j b_{k-j}\\
&- \sum_{X^0, m+n+s=k, n\geq -1, s\geq 0} C_{12}^X C_{34X}\Bigg(\binom{[H_1+H_3]}{s}(-1)^{n+1}(n+1)!\binom{m34+n+\frac{1}{2}}{n+1}(E_{12X}^n - F_{12X}^n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - [H_1+H_3]\binom{[H_1+H_3]-1}{s} D^n_{12X}\frac{1}{2}(-1)^n n!\binom{m34+n-\frac{1}{2}}{n}\Bigg)\Bigg)\\
&- \sum_{X^+,m+n+s=k+\frac{1}{2},n,s\geq 0} C^X_{12}C_{34X}\Bigg([H_1+H_3]\binom{[H_1+H_3]-1}{s}\Bigg(-A^{n+}_{12X}(-1)^n n!\binom{m34+n-1}{n}\\
&\quad - C^{n+}_{12X}(-1)^{n-1}(n-1)!\binom{m34+n-1}{n-1}\left(\frac{Q_3-Q_1-Q_2-1}{3}-\alpha_{X34}\right)\Bigg)\\
&\quad + \binom{[H_1+H_3]}{s} D^{n+}_{12X}(-1)^n n!\binom{m34+n}{n}\left(-\frac{Q_3-Q_1-Q_2-1}{3}-m34+\alpha_{X34}\right)\Bigg)\\
d_k =& -\frac{Q_3-Q_2}{8}a_k-\frac{Q_3-Q_1}{8}\sum_{j=0}^{[k]}(-1)^j a_{k-j}+\frac{Q_3-Q_1}{8}\sum_{j=0}^{[k]}(-1)^j b_{k-j}\\
&- \sum_{X^0,m+n+s=k,n,s\geq 0} C^X_{12}C_{34X}\Bigg(\binom{[H_1+H_3]}{s} D^n_{12X}\frac{1}{2}(-1)^{n+1}(n+1)!\binom{m34+n+\frac{1}{2}}{n+1}\\
&\quad + [H_1+H_3]\binom{[H_1+H_3]-1}{s}\frac{1}{2}(-1)^n n!\binom{m34+n-\frac{1}{2}}{n}(A^n_{12X}-B^n_{12X})\Bigg)\\
&- \sum_{X^+,m+n+s=k+\frac{1}{2},n,s\geq 0} C^X_{12}C_{34X}\Bigg(\binom{[H_1+H_3]}{s}\Bigg(C^{n+}_{12X}(-1)^{n+1}(n+1)!\binom{m34+n}{n+1}\\
&\quad + A^{n+}_{12X}(-1)^n n!\binom{m34+n}{n}\left(\frac{Q_3-Q_1-Q_2-1}{3}+\alpha_{X34}\right)\Bigg)\\
&\quad + [H_1+H_3]\binom{[H_1+H_3]-1}{s} B^{n+}_{12X}\frac{1}{2}(-1)^{n-1}(n-1)!\binom{m34+n-1}{n-1}\\
&\qquad \left(\frac{Q_3-Q_1-Q_2-1}{3}-m34+\alpha_{X34}\right)\Bigg)
\end{aligned}
\tag{4.1.8}
$$

• $Q = 2$

$$
a_k = \sum_{X^-,m+n+s=k+\frac{1}{2},n,s\geq 0}\binom{[H_1+H_3]}{s} C^X_{12}C_{34X}(A^{n-}_{12m}+C^{n-}_{12m})(-1)^n n!\binom{m34+n-\frac{1}{2}}{n}
\tag{4.1.9}
$$

• $Q = -2$

$$
a_k = \sum_{X^+,m+n+s=k+\frac{1}{2},n,s\geq 0}\binom{[H_1+H_3]}{s} C^X_{12}C_{34X}(A^{n+}_{12m}-C^{n+}_{12m})(-1)^n n!\binom{m34+n-\frac{1}{2}}{n}
\tag{4.1.10}
$$

Dabei durchläuft X alle Felder, die in der OPE $\Phi_1 \circ \Phi_2$ auftreten. m ist die Dimension von X sowie $m34 = m + H_3 - H_4$. X^0 heißt, daß X die Ladung $Q_1 + Q_2$ trägt, entsprechend

X^- $Q_1 + Q_2 - 1$ und X^+ $Q_1 + Q_2 + 1$. Ferner bezeichnet $A^{n\pm}_{12X}$ usw. die jeweiligen Koeffizienten in der OPE, wobei „$\pm$" den Fall bedeutet, daß sich die Ladung um eins erhöht bzw. erniedrigt, wobei das X als Index so gemeint ist, daß man die zugehörigen Größen Dimension, Ladung und $\alpha_{\Phi_1\Phi_2X}$ einzusetzen hat. Schließlich ist bei $X^\pm$ über beide Ladungen zu summieren, dann mit den entsprechenden Koeffizienten aus der OPE.

4.2. Crossingsymmetrie

Man ist keineswegs dazu gezwungen, mit der Kontraktion der beiden ersten Felder zu beginnen. Die Formeln (4.1.6 – 4.1.10) für die Koeffizienten gelten dann sinngemäß weiter mit einer Permutation der Indizes (1,2,3,4). Die Assoziativität der Vierpunktfunktion bedeutet gerade, daß das Ergebnis nicht von der Wahl der Kontraktion abhängt. Ein Vergleich der Ergebnisse bei verschiedenen Kontraktionen gibt daher Aufschluß über die Assoziativität. Dazu genügt es, die Kontraktionen (1,2), (1,3) und (1,4) zu betrachten. Jede liefert einen Satz von Koeffizienten, die mit $a_k, \hat{a}_k, \tilde{a}_k$ und sofort bezeichnet werden sollen. Für $\hat{a}_k$ gilt die Formel für a_k mit dem Austausch $2 \leftrightarrow 3$, bei $\tilde{a}_k$ hat man $2 \leftrightarrow 4$. In der allgemeinen Formel manifestieren sich diese Umbenennungen in einem wohldefinierten Transformationsverhalten der Invarianten:

$2 \leftrightarrow 4$:

$$X_{2\leftrightarrow 4} = -\frac{1}{X}, \Theta^\pm_{124,2\leftrightarrow 4} = \Theta^\pm_{142} = -i\Theta^\pm_{124}, \Theta^\pm_{234,2\leftrightarrow 4} = \Theta^\pm_{432} = -i\Theta^\pm_{234} \tag{4.2.1}$$

$2 \leftrightarrow 3$:

$$\begin{aligned} X_{2\leftrightarrow 3} &= 1 - X - \frac{\sqrt{-X}}{2}\left(\Theta^+_{124}\Theta^-_{234} + \Theta^-_{124}\Theta^+_{234}\right) \\ \Theta^\pm_{124,2\leftrightarrow 3} &= \Theta^\pm_{134} = \sqrt{\frac{-X}{X_{2\leftrightarrow 3}}}\Theta^\pm_{124} + \frac{1}{\sqrt{X_{2\leftrightarrow 3}}}\Theta^\pm_{234} \\ \Theta^\pm_{234,2\leftrightarrow 3} &= \Theta^\pm_{324} = -i\Theta^\pm_{234}. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Die Formeln (4.2.2) gelten allerdings nur im Limes $z_4 \to \infty$.

Mit diesen Erkenntnissen lassen sich jetzt Relationen zwischen den verschiedenen Koeff izienten aufstellen, die bei Assoziativität erfüllt sein müssen.

Dazu zunächst einige Bemerkungen: Bei $Q = 0, \pm 2$ kann in der Vierpunktfunktion nur eine gerade Anzahl von Fermionen stehen, ansonsten verschwindet der Ausdruck identisch. Dies erkennt man an der Struktur der OPE. Bei der Möglichkeit „2+2" seien die beiden Fermionen an Stelle zwei und drei gesetzt. Für $Q = \pm 1$ dagegen kann hat man entweder nur ein Boson oder nur ein Fermion, was dann an der vierten Stelle gruppiert wird. Auf diese Weise erklären sich die Bereiche der Indizes der verschiedenen Koeffizienten.

$\bullet Q = 0$

$$\begin{aligned} a_k &= M\tilde{a}_{H-k-\beta}\,, \qquad && \beta \le k \le H - \beta \\ e_k &= -M\tilde{a}_{H-k-\beta}\,, && \beta \le k \le H - \beta \\ c_k &= M\tilde{c}_{H-k-1-\beta}\,, && \beta \le k \le H - 1 - \beta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d_k =& M\tilde{d}_{H-k-1-\beta}\,, \qquad \beta \le k \le H-1-\beta \\
b_k =& -M\tilde{b}_{H-k-2-\beta}\,, \qquad -1+\beta \le k \le H-1-\beta \\
f_k =& M\tilde{f}_{H-k-2-\beta}\,, \qquad -1+\beta \le k \le H-1-\beta \\
a_k =& V\sum_{j=k}^{H-\beta}(-1)^{j-\beta}\binom{j-\beta}{k-\beta}\hat{a}_j\,, \qquad \beta \le k \le H-\beta \\
b_k =& -V\left(-(-1)^{k-\beta}\hat{b}_{-1+\beta} - \sum_{j=k}^{H-1-\beta}(-1)^{j-\beta}\binom{j-\beta}{k-\beta}\hat{b}_j\right)\,, \qquad \beta \le k \le H-\beta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_{-1+\beta} =& 0 \\
e_k =& V\left(\sum_{j=k}^{H-\beta} -(-1)^{j-\beta}\binom{j-\beta}{k-\beta}\hat{e}_j + \sum_{j=k}^{H-1-\beta}(-1)^{j-\beta}\binom{j-\beta}{k-\beta}\left(\hat{c}_j-\hat{b}_j-\hat{d}_j\right)\right)\,, \\
& \beta \le k \le H-\beta \\
c_k =& V\Bigg((-1)^{k-\beta}\hat{b}_{-1+\beta} - \sum_{j=k}^{H-1-\beta} -(-1)^{j-\beta}\binom{j-\beta}{k-\beta}\left(\hat{b}_j-\hat{c}_j\right) \\
& + \sum_{j=k}^{H-\beta}(-1)^{j-\beta}(j-\beta)\binom{j-1-\beta}{k-\beta}\frac{1}{2}\hat{a}_j\Bigg)\,, \qquad \beta \le k \le H-1+\beta \\
c_{-\frac{1}{2}} =& 0\,, \text{falls vorhanden} \\
d_k =& V\Bigg((-1)^{k-\beta}\hat{b}_{-1+\beta} - \sum_{j=k}^{H-1-\beta} -(-1)^{j-\beta}\binom{j-\beta}{k-\beta}\left(\hat{b}_j+\hat{d}_j\right) \\
& + \sum_{j=k}^{H-\beta}(-1)^{j-\beta}(j-\beta)\binom{j-1-\beta}{k-\beta}\frac{1}{2}\hat{a}_j\Bigg)\,, \qquad \beta \le k \le H-1-\beta \\
d_{-\frac{1}{2}} =& 0\,, \text{falls vorhanden} \\
f_k =& V\Bigg(-(-1)^{k-\beta}\left(\hat{f}_{-1+\beta}+\frac{1}{2}\left(\hat{c}_{-1+\beta}+\hat{d}_{-1+\beta}\right)\right) \\
& + \sum_{j=k}^{H-1-\beta} -(-1)^{j-\beta}\binom{j-\beta}{k-\beta}\hat{f}_j \\
& + \sum_{j=k}^{H-1-\beta}(-1)^{j-\beta}(j-\beta)\binom{j-1-\beta}{k-\beta}\frac{1}{2}\left(\hat{c}_j+\hat{d}_j\right) \\
& + \sum_{j=k}^{H-\beta}(-1)^{j-\beta}\binom{j-\beta}{2}\binom{j-2-\beta}{k-\beta}\frac{1}{2}\hat{a}_j\Bigg)\,, \qquad \beta \le k \le H-1-\beta \\
f_{-1+\beta} =& 0 \qquad\qquad (4.2.3)
\end{aligned}
$$

$\bullet Q = \pm 1$

$$
\begin{aligned}
a_k =& \tilde{M} \tilde{a}_{H-k-1} \,, \qquad 0 \leq k \leq H - \frac{3}{2} \\
b_k =& \tilde{M} \tilde{a}_{H-k} \,, \qquad 0 \leq k \leq H - \frac{1}{2} \\
c_k =& - \tilde{M} \tilde{a}_{H-k-2} \,, \qquad -1 \leq k \leq H - \frac{3}{2} \\
d_k =& - \tilde{M} \tilde{a}_{H-k-1} \,, \qquad 0 \leq k \leq H - \frac{3}{2} \\
a_k =& \tilde{V} \sum_{j=k}^{H-\frac{3}{2}} (-1)^j \binom{j}{k} \hat{a}_j \,, \qquad 0 \leq k \leq H - \frac{3}{2} \\
b_k =& \tilde{V} \left(\sum_{j=k}^{H-\frac{3}{2}} (-1)^j \binom{j}{k} \hat{a}_j - \sum_{j=k}^{H-\frac{1}{2}} (-1)^j \binom{j}{k} \hat{b}_j \right) \,, \qquad 0 \leq k \leq H - \frac{3}{2} \\
c_k =& \tilde{V} \left(-(-1)^k \hat{c}_{-1} + \sum_{j=k}^{H-\frac{3}{2}} (-1)^j \binom{j}{k} \hat{c}_j \pm \sum_{j=k}^{H-\frac{3}{2}} (-1)^j j \binom{j-1}{k} \hat{a}_j \right) \,, \qquad 0 \leq k \leq H - \frac{3}{2} \\
c_{-1} =& 0 \\
d_k =& \tilde{V} \left((-1)^k \hat{c}_{-1} - \sum_{j=k}^{H-\frac{3}{2}} (-1)^j \binom{j}{k} \left(\hat{c}_j + \hat{d}_j \right) \right. \\
& \left. \mp \sum_{j=k}^{H-\frac{3}{2}} (-1)^j j \binom{j-1}{k} \hat{a}_j \pm \sum_{j=k}^{H-\frac{1}{2}} (-1)^j j \binom{j-1}{k} \hat{b}_j \right) \,, \qquad 0 \leq k \leq H - \frac{3}{2}
\end{aligned}
\tag{4.2.4}
$$

$\bullet Q = \pm 2$

$$
\begin{aligned}
a_k &= M \tilde{a}_{H-k-1-\beta} \,, \qquad \beta \leq k \leq H - 1 - \beta \\
a_k &= V \sum_{j=k}^{H-1-\beta} (-1)^{j-\beta} \binom{j-\beta}{k-\beta} \hat{a}_j \,, \qquad \beta \leq k \leq H - 1 - \beta
\end{aligned}
\tag{4.2.5}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
M =& (-1)^{H-2H_1} (-1)^{(2,3)(2,4)(3,4)} \\
\tilde{M} =& (-1)^{2H-2H_1} (-1)^{(2,3)(2,4)(3,4)} (-1)^{H+\frac{1}{2}} \\
V =& (-1)^{H+H_2+H_3} (-1)^{(2,3)} \\
\tilde{V} =& (-1)^{H_2+H_3} (-1)^{(2,3)} (-1)^{H+\frac{1}{2}} \,,
\end{aligned}
\tag{4.2.6}
$$

wobei (i,j)=1, falls Φ_i und Φ_j beide fermionisch sind, andernfalls hat man kein Vorzeichen.

Sind nun zusätzlich noch Felder in der Vierpunktfunktion identisch, so gibt es weitere Relationen. So ist etwa für $\Phi_3 = \Phi_4$ noch $\hat{a}_k = \tilde{a}_k$ und so fort.

4.3. Test am Beispiel $\mathcal{SW}(1, \frac{3}{2}^{\pm Q})$

In dieser Algebra hat man für generisches Q vier Felder in der OPE $\Phi^+ \circ \Phi^-$, die mit ihren Strukturkonstanten [14] wie folgt lauten †, während die OPEen $\Phi^\pm \circ \Phi^\pm$ trivial sind:

NOP $\mathcal{F}$	$C_{\Phi^+\Phi^-}^{\mathcal{F}}$	$\alpha_{\Phi^+\Phi^-\mathcal{F}}$	$C_{\Phi^+\Phi^-\mathcal{F}}$
$\mathcal{L}$	Q	$\frac{3}{Q}$	$\frac{cQ}{3}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})$	$\frac{3(Q^2-1)}{2(c-1)}$	$\frac{8Q}{3(Q^2-1)}$	$\frac{c(Q^2-1)}{3}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\frac{Q(15Q^2-31)(2cQ^2+13Q^2-2c-1)}{2(c-1)(c+6)(2c-3)(5Q^2-1)}$	$\frac{107Q^2-27}{3Q(15Q^2-31)}$	$\frac{cQ(15Q^2-31)}{45}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-, D^+]\mathcal{L})$	$\frac{7Q(-2Q^2+3c-4)}{6(c+6)(2c-3)}$	$\frac{54+Q^2}{21Q}$	$\frac{7cQ}{15}$

Tabelle 4: Relevante NOPe in der $\mathcal{SW}(1, \frac{3}{2}^{\pm Q})$

Zur Verdeutlichung der Vorgehensweise mag der ungeladene Fall genügen. Man erhält für die Koeffizienten in allen Kontraktionen:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{4c^2}{9}\,, a_1 = \frac{4c^2}{3}\,, a_2 = \frac{2c^2(2c+1)}{3(c-1)}\,, a_3 = \frac{4c^2(c+8)}{(c-1)}\,, \\
c_0 &= \frac{2c^2}{3}\,, c_1 = \frac{c(4c+9)}{3}\,, c_2 = \frac{2c(c^2+11c-9)}{3(c-1)}\,, \\
f_{-1} &= 0\,, f_0 = \frac{c(2c+9)}{3}\,, f_1 = \frac{2c(c+18)}{3}\,, f_2 = \frac{9c(4c^3+36c^2-99c+63)}{2(c-1)(c+6)(2c-3)}
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Koeffizienten wie a_4 usw. sind dann durch (4.2.3) bestimmt. Diese lassen sich i.a. nicht berechnen, da sie schon in den regulären Teil der OPE reichen, dort gilt das lineare Gleichungssystem für die Bestimmung der Strukturkonstanten nicht mehr. Man hätte dann freie Kopplungen an diese Felder einzuführen, die aber durch die Relationen (4.2.3) bestimmt würden, so daß man sie von vornherein weglassen kann. Hier in diesem Falle ist zunächst für die Felder der Dimension drei noch eine der beiden Kopplungen frei, was daran liegt, daß man schon auf der Grenze zum regulären Teil der OPE steht. Diese zweite Kopplung kann jedoch über die Dreipunktfunktion berechnet werden, da auch hier das α auftritt. Die Sonderrolle des ungeladenen Falls (d.h. $\Phi^\pm$ ist ein- und dasselbe Feld) bedingt noch zusätzlich $d_i = c_i$ und das Verschwinden der Koeffizienten $b_i\,, e_i$, wie man sich leicht mit Symmetrieargumemten überlegen kann. Die Relationen (4.2.3) liefern dann drei Bedingungen, die zu folgenden Einschränkungen an die zentrale Ladung führen:

$$c = \frac{3}{5}\,, -\frac{3}{2}\,, \frac{9}{4}. \tag{4.3.2}$$

Dabei erhält man auch $c = 0$, da dann alle n-Punkt-Funktionen verschwinden. Für diesen Wert ist die Algebra aber nicht konsistent.

† In Ref. [14] sind diese verkehrt.

Die Rechnung läßt sich auch für nichtverschwindende Werte der Ladung durchführen, dann muß man allerdings noch das Feld $\mathcal{N}_s(\Phi^+\Phi^-)$ mitnehmen (für $Q=0$ ist dies null wegen der Symmetrieeigenschaften der NOPe). Es ergeben sich die Lösungen:

$$\begin{aligned}
&\{c=3\,, Q=\pm 1\,, C_{\Phi^+\Phi^-}^{\mathcal{N}_s(\Phi^+\Phi^-)} C_{\Phi^+\Phi^-\mathcal{N}_s(\Phi^+\Phi^-)} = \frac{4}{9}\}\,, \\
&\{c=9\,, Q=\pm 3\,, C_{\Phi^+\Phi^-}^{\mathcal{N}_s(\Phi^+\Phi^-)} C_{\Phi^+\Phi^-\mathcal{N}_s(\Phi^+\Phi^-)} = \frac{4}{11}\}.
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Es treten auch andere Lösungen auf, die aber nicht die notwendige Bedingung $\alpha_{\Phi^+\Phi^-\mathcal{N}_s(\Phi^+\Phi^-)} = 0$ erfüllen.

In allen Fällen ergeben sich nicht mehr (wenn man von $c=0$ einmal absieht) und nicht weniger Lösungen als in [14], wo mit Jacobiidentitäten gerechnet wurde. Der Fall $Q=\pm 1$, der eine Selbstkopplung erlaubt und so eine weitere Lösung für $c=-1$ zuläßt, wurde nicht mehr betrachtet. Der vorgestellte Test sollte trotzdem genügen, einzusehen, daß Jacobiidentitäten und Crossingsymmetrie für $N=2$ doch äquivalent sind.

5. Die SW(1,2,3)

Nun wird der oben entwickelte Algorithmus auf die Konstruktion der ersten $N = 2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebra mit *drei* Generatoren, der $\mathcal{SW}(1,2,3)$, angewendet. Zur $N = 2$ Super-Virasoroalgebra werden zwei zusätzliche superprimäre Felder $\mathcal{W}$ $(H = 2, Q = 0)$ und $\mathcal{V}$ $(H = 3, Q = 0)$ hinzugenommen. Man beachte, daß es schier unmöglich wäre, eine allgemeine $N = 0$ $\mathcal{W}$-Algebra mit zwölf Generatoren zu konstruieren. Die zusätzliche $N = 2$ Struktur macht eine solche Rechnung jedoch möglich.

5.1. Die Konstruktion

Zunächst werden die Zweipunktfunktionen auf die übliche Weise normiert, was $\langle 0|0\rangle = 1$ entspricht:

$$\langle \mathcal{W}(Z_1)\mathcal{W}(Z_2)\rangle = \frac{c/2}{Z_{12}^4}, \qquad \langle \mathcal{V}(Z_1)\mathcal{V}(Z_2)\rangle = \frac{c/3}{Z_{12}^6}. \tag{5.1.1}$$

Die allgemeinsten Ansätze für die Super-OPEen der primären Felder sind schematisch durch

$$\begin{aligned} \mathcal{W}\circ\mathcal{W} &= [\mathcal{L}] + [\mathcal{W}] + [\mathcal{V}] \\ \mathcal{V}\circ\mathcal{W} &= [\mathcal{L}] + [\mathcal{W}] + [\mathcal{V}] + [\mathcal{W}\mathcal{W}] \\ \mathcal{V}\circ\mathcal{V} &= [\mathcal{L}] + [\mathcal{W}] + [\mathcal{V}] + [\mathcal{W}\mathcal{W}] + [\mathcal{V}\mathcal{W}] \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

gegeben. Dabei bezeichnet $[\mathcal{F}]$ die konforme Familie eines einfachen Feldes $\mathcal{F}$, d.h. alle Ableitungen und NOPe mit dem Super-Virasorofeld $\mathcal{L}$. Eine besondere Eigenschaft von Algebren mit mehr als einem primären Feld ist das Auftreten von NOPen, die zwei primäre Felder beinhalten. Diese komplizieren die Rechnungen erheblich.
Man beachte, daß es nötig ist, das Auftreten von $[\mathcal{L}]$ in der OPE $\mathcal{V}\circ\mathcal{W}$ anzunehmen, obwohl Dreipunktfunktionen, die $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ und $\mathcal{F}$ involvieren, für alle Felder $\mathcal{F} \in [\mathcal{L}]$ identisch verschwinden. Denn die D-Matrizen (D_{ij}) sind nicht mehr blockdiagonal bzgl. der konformen Familien, sobald $[\mathcal{W}\mathcal{W}]$ oder $[\mathcal{V}\mathcal{W}]$ auftreten. Auf diese Art und Weise können beim „Hochziehen" nichtverschwindende Kopplungskonstanten $C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{F}}$ mit $\mathcal{F} \in [\mathcal{L}]$ entstehen.
Diese Tatsache kann man auch wie folgt einsehen: Angenommen, alle Kopplungskonstanten von $\mathcal{V}\circ\mathcal{W}$ an $[\mathcal{L}]$ verschwinden. Dann enthält das Feld $\mathcal{N}_s(\mathcal{V}\mathcal{W})$ keine Beiträge aus $[\mathcal{L}]$. Sei nun $\mathcal{F}$ ein quasiprimäres Superfeld der Dimension fünf aus dem Virasoro-Turm, $\mathcal{F} = \mathrm{F} -$ Korrekturen niedrigerer Superdimension. Nun gilt: $0 = \langle \mathcal{F}, \mathcal{N}_s(\mathcal{V}\mathcal{W})\rangle = \langle \mathrm{F}, \mathcal{N}_s(\mathcal{V}\mathcal{W})\rangle \sim \langle \mathrm{F}, [D^-, D^+]\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{W})\rangle \neq 0$, denn die Kopplung von $\mathcal{V}$ mit $\mathcal{W}$ an $\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{W})$ ist nicht null. Daher sind Counterterme nötig, d.h. Felder aus $[\mathcal{L}]$ müssen in $\mathcal{N}_s(\mathcal{V}\mathcal{W})$ auftreten.

Als nächstes braucht man für jede in den OPEen auftretende Dimension eine Basis aus super-quasiprimären NOPen. Dabei benötigt man die Dimensionen bis einschließlich $\frac{11}{2}$. Die Dimension sechs, die im allgemeinen Fall auch noch relevant sein könnte, braucht nicht beachtet zu werden, da die OPE eines ungeladenen bosonischen Feldes Φ mit sich im singulären Teil keine Felder mit Dimension $2H_\Phi$ enthält. Das erleichtert die Sache ein wenig, denn schon allein im Virasoro-Turm hat man bei Dimension sechs schon 18 weitere NOPe zu berechnen. Dagegen sind in der gemischten OPE $\mathcal{V}\circ\mathcal{W}$ durchaus Felder der

Dimension fünf von Bedeutung. Insgesamt sind 73 NOPe mitzunehmen. Diese sind in Tabelle 5 aufgelistet.

H	Q	konf. Fam.	NOPe $\mathcal{F}$
1	0	$[\mathcal{L}]$	$\mathcal{L}$
2	0	$[\mathcal{L}]$	$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})$
		$[\mathcal{W}]$	$\mathcal{W}$
3	0	$[\mathcal{L}]$	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})\,,\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L})$
		$[\mathcal{W}]$	$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{L})$
		$[\mathcal{V}]$	$\mathcal{V}$
$\frac{7}{2}$	∓ 1	$[\mathcal{L}]$	$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^\pm\partial\mathcal{L})$
		$[\mathcal{W}]$	$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^\pm\mathcal{L})$
4	0	$[\mathcal{L}]$	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})\,,\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L})\mathcal{L})\,,\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\partial^2\mathcal{L})$
		$[\mathcal{W}]$	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{L})\mathcal{L})\,,\mathcal{N}_s(\mathcal{W}[D^-,D^+]\mathcal{L})\,,\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\partial\mathcal{L})$
		$[\mathcal{V}]$	$\mathcal{N}_s(\mathcal{V}\mathcal{L})$
		$[\mathcal{W}\mathcal{W}]$	$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{W})$
$\frac{9}{2}$	∓ 1	$[\mathcal{L}]$	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^\pm\partial\mathcal{L})\mathcal{L})$
		$[\mathcal{W}]$	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^\pm\mathcal{L})\mathcal{L})\,,\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^\pm\partial\mathcal{L})$
		$[\mathcal{V}]$	$\mathcal{N}_s(\mathcal{V}D^\pm\mathcal{L})$
5	0	$[\mathcal{L}]$	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})\,,\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})\,,$ $\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\partial^2\mathcal{L})\mathcal{L})\,,\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^\pm\partial\mathcal{L})D^\mp\mathcal{L})\,,\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\partial^2\mathcal{L})$
		$[\mathcal{W}]$	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})\,,\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}[D^-,D^+]\mathcal{L})\mathcal{L})\,,$ $\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^\pm\mathcal{L})D^\mp\mathcal{L})\,,\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\partial^2\mathcal{L})\,,\mathcal{N}_s(\mathcal{W}[D^-,D^+]\partial\mathcal{L})$
		$[\mathcal{V}]$	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{V}\mathcal{L})\mathcal{L})\,,\mathcal{N}_s(\mathcal{V}[D^-,D^+]\mathcal{L})\,,\mathcal{N}_s(\mathcal{V}\partial\mathcal{L})$
		$[\mathcal{W}\mathcal{W}]$	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{W})\mathcal{L})\,,\mathcal{N}_s(\mathcal{W}[D^-,D^+]\mathcal{W})$
		$[\mathcal{V}\mathcal{W}]$	$\mathcal{N}_s(\mathcal{V}\mathcal{W})$
$\frac{11}{2}$	∓ 1	$[\mathcal{L}]$	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})D^\pm\mathcal{L})\,,\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^\pm\partial\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})\,,$ $\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L})\mathcal{L})D^\pm\mathcal{L})\,,\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\partial^2\mathcal{L})D^\pm\mathcal{L})$
		$[\mathcal{W}]$	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^\pm\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})\,,\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}[D^-,D^+]\mathcal{L})D^\pm\mathcal{L})\,,$ $\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\partial\mathcal{L})D^\pm\mathcal{L})\,,\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^\pm\partial\mathcal{L})\mathcal{L})\,,\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^\pm\partial^2\mathcal{L})$
		$[\mathcal{V}]$	$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{V}D^\pm\mathcal{L})\mathcal{L})\,,\mathcal{N}_s(\mathcal{V}D^\pm\partial\mathcal{L})$
		$[\mathcal{W}\mathcal{W}]$	$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^\pm\partial\mathcal{W})\,,\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{W})D^\pm\mathcal{L})$
		$[\mathcal{V}\mathcal{W}]$	$\mathcal{N}_s(\mathcal{V}D^\pm\mathcal{W})$

Tabelle 5: Quasiprimäre NOPe bis zur Dimension $\frac{11}{2}$

Nun kann man zu jeder Dimension die Determinanten der D-Matrizen berechnen, die sog. Kac-Determinanten im Vakuumsektor. Ihre Nullstellen geben Aufschluß über das Auftreten von Nullfeldern. Die Determinanten findet man in Tabelle 6. Es sind vollständig faktorisierende Polynome in der zentralen Ladung c, insbesondere gibt es also keine irrationalen Nullstellen wie bei einigen anderen Super-$\mathcal{W}$-Algebren. Dieses Verhalten ist ein guter Test, ob man richtig gerechnet hat, andererseits vermutet man, daß für die Kac-Determinanten von $\mathcal{W}$-Algebren eine ähnliche Formel gilt, wie sie für die Virasoroalgebra existiert [55]. Die Level 4, 5 und $\frac{11}{2}$ werden zunächst unterdrückt, da diese Determinanten die à priori unbekannten Selbstkopplungen der primären Felder untereinander enthalten. Diese werden unten nachgereicht, wenn man die Lösung für die Selbstkopplungen eingesetzt hat, die man vom Prüfen der Jacobiidentitäten gewinnt. Die hier auftretenden positiven Nullstellen kommen von der Virasoroalgebra $(1, \frac{3}{2})$ und der $\mathcal{SW}(1,2)$ $(\frac{12}{5})$. Für die negativen Nullstellen kennt man keine Interpretation, sie sind wohl nicht mit minimalen Modellen verbunden, denn man vermutet ja, daß diese unitär sind.

H	$\det(D_H) \sim$
1	c
2	$c^2(c-1)$
3	$c^4(c-1)(c+6)(2c-3)(5c-12)$
$\frac{7}{2}$	$c^4(c-1)^2(c+3)^2$
$\frac{9}{2}$	$c^8(c-1)^4(c+3)^2(c+6)^2(2c-3)^2(5c-12)^2$

Tabelle 6: Kac-Determinanten

Nun werden die Strukturkonstanten berechnet. Dabei genügt es, die Super-Kopplungskonstanten zu erhalten, denn diese bestimmen alle Strukturkonstanten der Komponentenfelder. Für die Superkopplungen in der OPE $\mathcal{W} \circ \mathcal{W}$ erhält man einfache rationale Funktionen der zentralen Ladung c. Die Selbstkopplungen sind dabei zunächst noch frei. Die Strukturkonstanten, die in der OPE $\mathcal{W} \circ \mathcal{W}$ auftreten, sind in Tabelle 7 dargestellt. Natürlich stehen hier nur Felder, die im singulären Teil der OPE vorkommen, denn allein dieser zeichnet für die Kommutatorrelationen der Moden verantwortlich.

NOP $\mathcal{F}$	$C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{F}}$	$C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{F}} \alpha_{\mathcal{W}\mathcal{W}\mathcal{F}}$
$\mathcal{L}$	0	3
$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})$	$-\frac{3}{2(c-1)}$	0
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})$	0	$-\frac{3(4c+3)}{(2c-3)(c-1)(c+6)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-, D^+]\mathcal{L})$	0	$\frac{23c-30}{2(2c-3)(c+6)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^\pm\partial\mathcal{L})$	$-\frac{6}{c-1}$	$-$
$\mathcal{V}$	0	$\frac{3}{2} C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}} \alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}$
$\mathcal{W}$	$C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}$	0
$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{L})$	0	$\frac{14 C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{5c-12}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^\pm\mathcal{L})$	$\pm\frac{12 C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{c+3}$	$-$

Tabelle 7: Strukturkonstanten der OPE $\mathcal{W} \circ \mathcal{W}$

Mit der Kenntnis dieser Strukturkonstanten läßt sich jetzt das Feld $\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{W})$ bestimmen.

Man braucht Korrekturen von Superfeldern der Dimension 3 und $\frac{7}{2}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{W}) = N_s(\mathcal{W}\mathcal{W}) &- \frac{1}{4}\frac{12C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{c+3}\left(D^-\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^+\mathcal{L}) - D^+\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^-\mathcal{L})\right) \\ &- \frac{1}{4}\frac{6}{1-c}\left(D^-\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^+\partial\mathcal{L}) + D^+\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^-\partial\mathcal{L})\right) \\ &- \frac{1}{7}\frac{3}{2}C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}[D^-,D^+]\mathcal{V} - \frac{1}{7}\frac{14C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{5c-12}[D^-,D^+]\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{L}) \\ &- \frac{1}{7}\frac{23c-30}{2(2c-3)(c+6)}[D^-,D^+]\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L}) \\ &- \frac{1}{7}\frac{-3(4c+3)}{(2c-3)(c-1)(c+6)}[D^-,D^+]\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L}). \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Dabei stammen die Faktoren $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{7}$ aus der allgemeinen Form der OPE (3.2.26). Für die niedrigste Komponente wird der $SU(1,1)$-Projektor angewendet, was bei $D^\pm$ bzw. $[D^-,D^+]$ jeweils die entsprechenden Komponentenfelder ergibt, multipliziert mit Faktoren $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ bzw. 2.

$$\begin{aligned}[\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{W})]_1 &= \mathcal{N}(\mathcal{W}_1\mathcal{W}_1) + \dots \\ &= N(\mathcal{W}_1\mathcal{W}_1) - \frac{3c}{10(1-c)}\partial^2 L - \frac{9}{20(1-c)}\partial^2 N(jj) - \frac{3C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{10}\partial^2\mathcal{W}_1 + \dots\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

Die anderen Strukturkonstanten sind im Anhang tabelliert. Insbesondere für die Dimensionen 4, 5 und $\frac{11}{2}$ ergeben sich zunächst komplizierte rationale Funktionen in c und den Selbstkopplungen, die sich erst dann vernünftig vereinfachen, wenn man die Lösung einsetzt. Aber auch dann müssen sie nicht faktorisieren, denn sie hängen von der Basiswahl der NOPe ab. Lediglich die Kac-Determinanten, Selbstkopplungen und erlaubten c-Werte bei exotischen $\mathcal{W}$-Algebren sind intrinsisch für die Algebra.

An diese Stelle sei noch etwas zur Komplexität der Rechnungen gesagt. So brauchte das D-Matrixelement $\langle\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})D^\pm\mathcal{L}), \mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{W})D^\mp\mathcal{L})\rangle = \frac{-4c(4528c+4677)}{55125}$ fünf Tage CPU-Zeit auf einer IBM Risc 6000. Der ursprüngliche Ausdruck hatte eine Länge von ca. 10000 Zeilen, der dann auf dieses quadratische Polynom faktorisierte. Die Berechnung erfolgt mit den niedrigsten Komponenten. Man wäre übrigens ganz chancenlos, wenn man nicht aufgrund der $OSP(2,2)$-Invarianz bei einem der beiden Felder die Korrekturen niedrigerer Superdimension fortlassen könnte. Jetzt ist man auf dem Niveau $N=0$ quasiprimärer Felder, so daß auch die derivativen Korrekturen entfallen können. So genügt z.B. bei Dimension vier $N(\mathcal{W}_1\mathcal{W}_1)$ statt $[\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{W})]_1$. Allerdings verkürzt dies die Ausdrücke nicht immer so drastisch, im obigen Beispiel „nur" um die Hälfte.

Schließlich hat man noch die Jacobiidentitäten nachzurechnen. Für $\mathcal{SW}(1,2,3)$ brechen die zu prüfenden 48 Jacobiidentitäten auf vier Bedingungen zusammen. Die einzelnen Sätze von Komponentenfeldern nach ihrem Superfeldinhalt sortiert ergeben ($\langle\Phi_1\dots\Phi_4\rangle$ bedeutet die entsprechende Super-Vierpunktfunktion):

$\bullet\langle \mathcal{WWWW} \rangle$

Die dazugehörigen acht Jacobiidentitäten reduzieren sich auf eine einzige Bedingung:

$$\left(C_{\mathcal{WW}}^{\mathcal{W}}\right)^2 = \frac{(c+3)(5c-12)(144-12c-20c^2-54(C_{\mathcal{VW}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{VWW}})^2+27c(C_{\mathcal{VW}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{VWW}})^2+6c^2(C_{\mathcal{VW}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{VWW}})^2)}{8(c-15)(c-1)(c+6)(2c-3)}. \tag{5.1.5}$$

Für $C_{\mathcal{VW}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{VWW}} = 0$ ergibt sich genau die Selbstkopplungskonstante der $\mathcal{SW}(1,2)$, dies nur als Konsistenzcheck.

$\bullet\langle \mathcal{WWWV} \rangle$

Nun gibt es 16 Jacobiidentitäten, die wiederum nur eine Bedingung liefern:

$$C_{\mathcal{VW}}^{\mathcal{W}} = \frac{3(c+6)(2c-3)C_{\mathcal{WW}}^{\mathcal{W}}}{(c+3)(5c-12)} \quad \text{oder} \quad C_{\mathcal{VW}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{VWW}} = 0. \tag{5.1.6}$$

Die zweite Alternative entspricht wieder der $\mathcal{SW}(1,2)$. Sie erweist sich als inkonsistent mit den anderen Bedingungen.

$\bullet\langle \mathcal{WWVV} \rangle$

Die 16 Jacobiidentitäten ergeben nun zwei weitere Bedingungen, allerdings zwei unterschiedliche Sätze:

$$\left(C_{\mathcal{VW}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{VWW}}\right)^2 = \frac{36(c-33)(c-3)(c-1)^2(c+3)(c+18)}{(c-21)(c+6)(c+9)(2c-3)(5c-12)(5c-9)} \quad \text{und}$$

$$C_{\mathcal{VW}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{VWW}}C_{\mathcal{VV}}^{\mathcal{V}}\alpha_{\mathcal{VVV}} = \frac{12(c-1)(-1312200+1234926c-393093c^2+72306c^3-7641c^4-123c^5-7c^6)}{(c-21)(c+6)(c+9)(2c-3)(5c-12)^2(5c-9)} \tag{5.1.7.I}$$

oder

$$\left(C_{\mathcal{VW}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{VWW}}\right)^2 = \frac{8(24-c)(c-1)^2(c+3)^2}{3(c+1)(c+6)(2c-3)(5c-12)} \quad \text{und}$$

$$C_{\mathcal{VW}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{VWW}}C_{\mathcal{VV}}^{\mathcal{V}}\alpha_{\mathcal{VVV}} = \frac{2(c-24)(c-1)(-1296+2484c-36c^2-315c^3-74c^4)}{3(c+1)(c+6)(2c-3)(5c-12)^2}. \tag{5.1.7.II}$$

Alle anderen Jacobiidentitäten sind damit auch erfüllt. Mithin hat man also zwei generisch existierende Lösungen erhalten, die nun nacheinander untersucht und identifiziert werden.

5.2. $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[I]}$, die Super-$\mathcal{W}_4$-Algebra

Löst man die Bedingungen (5.1.5–7.I) aus den Jacobiidentitäten nach den Selbstkopplungen auf, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\left(C_{\mathcal{WW}}^{\mathcal{W}}\right)^2 &= \frac{(c+3)^2(7c-27)^2}{2(1-c)(c-21)(c+9)(5c-9)} \\
\left(C_{\mathcal{VW}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{VWW}}\right)^2 &= \frac{36(c-33)(c-3)(c-1)^2(c+3)(c+18)}{(c-21)(c+6)(c+9)(2c-3)(5c-12)(5c-9)} \\
\left(C_{\mathcal{VW}}^{\mathcal{V}}\right)^2 &= \frac{9(c+6)^2(2c-3)^2(7c-27)^2}{2(9-5c)(c-21)(c-1)(c+9)(5c-12)^2} \\
\left(C_{\mathcal{VV}}^{\mathcal{V}}\alpha_{\mathcal{VVV}}\right)^2 &= \\
&\frac{4\left(1312200-1234926c+393093c^2-72306c^3+7641c^4+123c^5+7c^6\right)^2}{(c-33)(c-21)(c-3)(c+3)(c+6)(c+9)(c+18)(2c-3)(5c-12)^3(5c-9)}.
\end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Mit diesen Werten können nun auch endlich die restlichen Kac-Determinanten angegeben werden:

H	$\det(D_H) \sim$
4	$c^8(c-33)(c-3)(c-1)^5(c+3)(c+6)(c+18)(2c-3)(5c-12)(5c+27)(7c-27)/$ $((c-21)(c+9))$
5	$c^{18}(c-57)(c-33)(c-18)(c-3)^2(c-1)^{11}(c+3)^4(c+6)^4(c+15)(c+18)^2(c+36)$ $(2c-9)(2c-3)^4(5c-12)^4(5c+27)^2(7c-27)^2/\Big((c-21)^3(c+9)^3(5c-9)^2\Big)$
$\frac{11}{2}$	$c^{28}(c-33)^2(c-27)^2(c-18)^2(c-3)^2(c-1)^{20}(c+3)^{10}(c+6)^6(c+15)^2(c+18)^2$ $(2c-3)^6(5c-12)^6(5c+27)^4(7c-27)^2/\Big((c-21)^6(c+9)^6(5c-9)^4\Big)$

Tabelle 8: Kac-Determinanten [I]

Die Pole in den Determinanten haben keine besondere Bedeutung, sie rühren von den Polen der Strukturkonstanten her und würden nach einer Redefinition gewisser Felder verschwinden. So müßte man bei Level vier das Feld $\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{W})$ mit dem Faktor $(c-21)(c+9)$ reskalieren. Diese beiden c-Werte sind gerade Pole der Selbstkopplung von $\mathcal{W}$. Die Vielzahl positiver Nullstellen läßt eine ganze Reihe minimaler Modelle vermuten. Man erkennt bereits hier die ersten c-Werte des CP(3) Kazama-Suzuki-Modells, nämlich $\frac{9}{5}, 3, \frac{27}{7}, \frac{9}{2}$. Die anderen positiven, insbesondere die großen ganzen Zahlen, und die negativen Nullstellen können noch nicht verstanden werden, dafür müßte man harte Darstellungstheorie betreiben, was hier den Rahmen sprengen würde.

Die Strukturkonstanten besitzen einen klassischen Limes, wozu man folgende Ersetzungen durchführt:

$$[,] \to \frac{1}{\hbar}\{,\}\,, \Phi \to \frac{1}{\hbar}\Phi\,, c \to \frac{c^{cl}}{\hbar}. \tag{5.2.2}$$

Anschließend bildet man den Limes $\hbar \to 0$ bei festem c^{cl}, d.h. $c \to \infty$.
Bei der zweiten Lösung divergieren die Selbstkopplungen linear für $c \to \infty$. Daher kann nur diese erste Lösung die vorhergesagte Super-$\mathcal{W}_4$-Algebra, die Symmetriealgebra des CP(3) Kazama-Suzuki-Modells, sein. Diese Modelle besitzen nämlich klassische Analoga. Um diese Vermutung zu bestätigen, benutzt man die Zerlegung des CP(n) Kazama-Suzuki-Modells in drei bosonische Coset-Modelle:

$$\frac{\widehat{su}(n+1)_k \oplus \widehat{so}(2n)_1}{\widehat{su}(n)_{k+1} \oplus \widehat{u}(1)} \cong \frac{\widehat{su}(k)_n \oplus \widehat{su}(k)_1}{\widehat{su}(k)_{n+1}} \oplus \frac{\widehat{su}(n)_k \oplus \widehat{su}(n)_1}{\widehat{su}(n)_{k+1}} \oplus \widehat{u}(1). \tag{5.2.3}$$

Dabei bedeutet die Äquivalenz, daß eine Darstellung auf der linken Seite nach den Summanden der rechten Seite ausreduziert werden kann.
Diese Zerlegung erhält man wie folgt [71]:
Man startet mit dem Kazama-Suzuki-Modell CG(m, n) in der $N = 0$ Form

$$\frac{\widehat{su}(m+n)_k \oplus \widehat{so}(2mn)_1}{\widehat{su}(m)_{n+k} \oplus \widehat{su}(n)_{m+k} \oplus \widehat{u}(1)} \tag{5.2.4}$$

mit der dazugehörigen Serie von zentralen Ladungen

$$c = \frac{3mnk}{m+n+k}. \tag{5.2.5}$$

Diese Graßmann-Mannigfaltigkeit reduziert sich für $m = 1$ auf den schon erwähnten CP(n). Es gibt eine bemerkenswerte Dualität, denn diese Modelle sind für jede Permutation von (m, n, k) äquivalent, was sich augenscheinlich an der zentralen Ladung manifestiert [58,59]. Diese Dualität liefert dann:

$$\frac{\widehat{su}(n+1)_k \oplus \widehat{so}(2n)_1}{\widehat{su}(n)_{m+k} \oplus \widehat{u}(1)} \cong \frac{\widehat{su}(n+k)_1 \oplus \widehat{so}(2nk)_1}{\widehat{su}(n)_{k+1} \oplus \widehat{su}(k)_{n+1} \oplus \widehat{u}(1)}. \tag{5.2.6}$$

Das Coset auf der rechten Seite kann nun weiterbehandelt werden, da im Zähler nur der Level eins auftritt [35]:
Dazu betrachte man eine kählersche Coset-Mannigfaltigkeit G/H$'$ mit Rang(G)=Rang(H$'$). Die übliche GKO-Konstruktion kann dann zu einer $N = 2$ superkonformen Theorie verallgemeinert werden, die auf einem Coset $\mathcal{M}$ der Form

$$\mathcal{M} = \frac{\mathrm{G} \oplus SO(d)}{\mathrm{H}'} \tag{5.2.7}$$

beruht, wobei d die (reelle) Dimension von G/H$'$ ist. Dies ist gerade die Idee von Kazama-Suzuki-Modellen, dazu siehe Kapitel 3.1.3., insbesondere den Umschrieb (3.1.31,32) auf $N = 0$. Der SO-Faktor repräsentiert bosonisierte Fermionen und hat daher den Level eins. Dabei wird H$'$ diagonal in G bzw. $SO(d)$ eingebettet, wobei letztere durch die Aktion von H$'$ auf dem Tangentialraum von G/H$'$ induziert wird. Der Index der Einbettung $\mathrm{H}' \hookrightarrow SO(d)$ ist $g - h$, wobei g bzw. h die dualen Coxeterzahlen von G bzw. H$'$ bezeichnen. Daher muß die Kac-Moody-Algebra zu H$'$ den Level $k + g - h$ besitzen, wenn k der Level der zu G war.
Hier betrachtet man den Spezialfall, daß G den Level eins hat. Ferner sei G/H$'$ ein hermitescher, symmetrischer Raum. Es genügt, G als einfach anzunehmen. Da G/H$'$ ein symmetrischer Raum ist, ist die Einbettung $\mathrm{H}' \hookrightarrow SO(d)$ konform. Daher sind Darstellungen der Kac-Moody-Algebra $\widehat{so}(d)_1$ endlich reduzibel in Darstellungen von H'_{g-h}. Ferner sind Darstellungen von G_1 endlich reduzibel in Darstellungen von H'_1, da der Level von G eins ist sowie G und H$'$ denselben Rang haben. Man bemerke, daß dies für einfach geschnürte Algebren aus der Vertexoperatorkonstruktion folgt. Packt man all dies zusammen, so gilt bis auf Fragen der endlichen Reduzierbarkeit:

$$\mathcal{M} \cong \frac{\mathrm{H}'_1 \oplus \mathrm{H}'_{g-h}}{\mathrm{H}'_{g-h+1}}. \tag{5.2.8}$$

Da G/H$'$ kählersch ist, enthält H$'$ wenigstens einen $U(1)$-Faktor, der die komplexe Struktur definiert. Für hermitesche, symmetrische Räume mit einfachem G findet man $\mathrm{H}' = \mathrm{H} \oplus U(1)$, wobei H entweder einfach oder das Produkt von zwei einfachen Faktoren ist. Nun kann man solche $U(1)$-Faktoren kürzen, d.h. man führt eine Reskalierung der Ströme durch. Daher gilt dann:

$$\mathcal{M} \cong \frac{\mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{H}_{g-h}}{\mathrm{H}_{g-h+1}} \oplus U(1). \tag{5.2.9}$$

Der $U(1)$-Faktor steht für den Strom der $N = 2$ Super-Virasoroalgebra.
Nun wird dieses Vorgehen auf den vorliegenden Fall übertragen. Hier ist $\mathrm{G} = SU(n+k)$, $\mathrm{H}' = SU(n) \oplus SU(k) \oplus U(1)$, mithin $\mathrm{H} = SU(n) \oplus SU(k)$. Die Ränge von G und H sind jeweils $n+k$, die duale Coxeterzahl von $SU(m)$ ist m. Ferner ist $2nk$ gerade die Differenz der reellen Dimensionen von G und H$'$. Die duale Coxeterzahl für $U(1)$ wird sinnvollerweise als null definiert. Bei Produkten sind die Coxeterzahlen als Vektoren zu verstehen. Damit ist nun die rechte Seite von (5.2.3) äquivalent zu

$$\frac{\widehat{su}(k)_n \oplus \widehat{su}(n)_k \oplus \widehat{su}(n)_1 \oplus \widehat{su}(k)_1}{\widehat{su}(n)_{k+1} \oplus \widehat{su}(k)_{n+1}} \oplus \widehat{u}(1), \tag{5.2.10}$$

was schließlich nach richtigem Zusammenfassen die Zerlegung (5.2.3) liefert.

Benutzt man noch die L-Äquivalenz

$$\frac{\widehat{su}(k)_n \oplus \widehat{su}(k)_1}{\widehat{su}(k)_{n+1}} \cong \frac{\widehat{su}(n+1)_k}{\widehat{su}(n)_k \oplus \widehat{u}(1)}, \tag{5.2.11}$$

so läßt sich das erste Coset der rechten Seite von (5.2.3) durch ein bosonisches CP(n)-Coset ersetzen. Für $n = 1$ kann man sogar eine duale Äquivalenz beweisen. Diese Substitution ist dadurch motiviert, daß dann auch für rationale Werte des Levels k die Zerlegung (5.2.3) noch sinnvoll ist.

Angenommen, $\mathcal{SW}(1,2,3)$[I] sei die Symmetriealgebra des CP(3) Kazama-Suzuki-Modells. Dann sollte der Zerlegung auf Coset-Niveau eine Transformation der Unteralgebra der Dimension-zwei-Felder, und zwar $\{N(JJ), L, \varphi = \mathcal{W}_1\}$, in eine direkte Summe dreier normaler Virasoroalgebren entsprechen. Diese drei Virasorofelder lassen sich explizit konstruieren: mit der Abkürzung

$$\gamma = \sqrt{4c - \left(C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\right)^2 + c\left(C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\right)^2} \tag{5.2.12}$$

erhält man drei kommutierende Virasorogeneratoren und ihre zugehörigen zentralen Ladungen:

- bosonischer CP(n)-Anteil

$$T_1 = \tfrac{\gamma+\sqrt{c-1}C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{2\gamma} L - \tfrac{\sqrt{c-1}}{\gamma}\varphi - \tfrac{3\left(\gamma+\sqrt{c-1}C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\right)}{4c\gamma} N(JJ) \tag{5.2.13}$$

$$\tilde{c}_1 = (c-1)\frac{\gamma + \sqrt{c-1}C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{2\gamma},$$

- $\mathcal{W}_n$-Anteil

$$T_2 = \tfrac{\gamma-\sqrt{c-1}C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{2\gamma} L + \tfrac{\sqrt{c-1}}{\gamma}\varphi - \tfrac{3\left(\gamma-\sqrt{c-1}C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\right)}{4c\gamma} N(JJ) \tag{5.2.14}$$

$$\tilde{c}_2 = (c-1)\frac{\gamma - \sqrt{c-1}C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{2\gamma},$$

- $\widehat{u}(1)$-Anteil

$$T_3 = \tfrac{3}{2c}N(JJ) \tag{5.2.15}$$
$$\tilde{c}_3 = 1.$$

Dabei gilt natürlich $c = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 + \tilde{c}_3$. Die Selbstkopplung $C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}$ hängt nun noch von der Super-$\mathcal{W}$-Algebra ab. Setzt man die Lösung (5.2.1) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}\tilde{c}_1 &= \frac{(c+9)(5c-9)}{3(c+27)}\\ \tilde{c}_2 &= \frac{2c(21-c)}{3(c+27)}\\ \tilde{c}_3 &= 1.\end{aligned} \tag{5.2.16}$$

Unitäre Darstellungen der $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[\mathrm{I}]}$ sind insbesondere unitäre Darstellungen des $\mathcal{W}_3$-Anteils. Daher ist

$$\tilde{c}_2 = 2\left(1 - \frac{12}{(k+3)(k+4)}\right) \tag{5.2.17}$$

eine notwendige Bedingung an die c-Werte der unitären Serie von $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[\mathrm{I}]}$. Setzt man (5.2.17) in (5.2.16) ein, so ergibt sich eine quadratische Gleichung, deren Lösung aus einer aufsteigenden und einer absteigenden Serie zentraler Ladungen besteht:

$$c = \frac{9k}{k+4}, \qquad c = \frac{9(k+7)}{(k+7)-4}. \tag{5.2.18}$$

Die erste Serie ist tatsächlich die unitäre Serie des CP(3) Kazama-Suzuki-Modells, was die Identifizierung der $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[\mathrm{I}]}$ als seine Symmetriealgebra, die Super-$\mathcal{W}_4$-Algebra, untermauert.
Die zweite Serie erhält man aus der ersten durch die formale Ersetzung $k \to -k-7$. Es gehört zu der nicht-kompakten Version des Cosets, das auf $SU(3,1)$ statt $SU(4)$ basiert, dazu siehe Ref. [5]. Man vergleiche mit dem nicht-kompakten Coset (3.1.21) für die Virasoroalgebra. Wegen $c > 9$ kann es sich nur um die nicht-minimale Serie handeln.
Des weiteren lohnt es sich, die entstandenen Unteralgebren, in denen die T_i liegen, auf die Existenz primärer Felder zu untersuchen. Es geht insbesondere darum, eine $\mathcal{W}(2,3)$ zu ermitteln, die die Symmetriealgebra des $\mathcal{W}_3$-Anteils ist. Dazu schreibt man den allgemeinsten Ansatz für ein Feld der gegebenen Dimension hin und verlangt, daß die Felder mit $J(z)$ und dem nichtzugehörigen Virasorogenerator kommutieren sowie bzgl. „ihres" Virasorofeldes primär sein sollen.
Tatsächlich kann man im $\mathcal{W}_3$-Anteil einen Spin-3-Generator konstruieren, der zusammen mit T_2 eine $\mathcal{W}(2,3)$ bildet, es gibt insbesondere kein primäres Feld der Dimension vier. Nach Ref. [17] sollte das bosonische CP(3)-Modell eine $\mathcal{W}(2,3,\ldots,19)$ als Symmetriealgebra besitzen, die Felder der Dimension drei und vier wurden explizit konstruiert. Romans

[71] glaubte übrigens noch, die Symmetriealgebra des dort auftretenden CP(2) sei eine $\mathcal{W}_\infty$, es ist aber eine $\mathcal{W}(2,3,\ldots,11)$. Die o.g. Felder sind dem Anhang (A.1−A.3) zu entnehmen.
Da die Form der Virasorofelder (5.2.13−15) allgemein gehalten werden kann und nicht von der speziellen Struktur der $\mathcal{SW}(1,2,3)$ abhängt, ist es möglich, das Vorgehen umzukehren und die allgemeine Selbstkopplungskonstante des Dimension-zwei-Feldes für jede Super-$\mathcal{W}_{n+1}$-Algebra vorherzusagen. Dazu verlangt man, daß c bzw. $\tilde{c}_2$ die Werte der unitären Serien des CP(n) Kazama-Suzuki-Modells bzw. des $\mathcal{W}_n$-Modells annehmen:

$$c = \frac{3nk}{k+n+1}, \qquad \tilde{c}_2 = (n-1)\left(1 - \frac{n(n+1)}{(k+n)(k+n+1)}\right). \tag{5.2.19}$$

Nun setzt man $\tilde{c}_2$ in (5.2.14) ein und erhält nach Elimination von k durch c:

$$\left(C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\right)^2 = \frac{(c+3)^2\left((2n+1)c - 3n^2\right)^2}{(n-1)(c-1)\,(c+3n)\,(6n+3-c)\,\left((n+2)c-3n\right)}. \tag{5.2.20}$$

Diese Formel wird bei der Identifizierung der zweiten Lösung $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[\mathrm{II}]}$ noch sehr von Nutzen sein.

5.3. $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[\mathrm{II}]}$, eine vereinigende Super-$\mathcal{W}$-Algebra

Die Bedingungen (5.1.5−7.II) liefern in diesem Fall:

$$\begin{aligned}
\left(C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\right)^2 &= \frac{c(c+3)^2}{2(1-c)(1+c)} \\
\left(C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}\right)^2 &= \frac{8(24-c)(c-1)^2(c+3)^2}{3(c+1)(c+6)(2c-3)(5c-12)} \\
\left(C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}\right)^2 &= \frac{9c(c+6)^2(2c-3)^2}{2(1-c)(1+c)(5c-12)^2} \\
\left(C_{\mathcal{V}\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}\mathcal{V}}\right)^2 &= \frac{(24-c)\left(1296-2484c+36c^2+315c^3+74c^4\right)^2}{6(c+1)(c+3)^2(c+6)(2c-3)(5c-12)^3}.
\end{aligned} \tag{5.3.1}$$

Die übrigen Kac-Determinanten faktorisieren wiederum vollständig:

H	$\det(D_H) \sim$
4	$c^9(c-1)^5(c+3)^2(c+6)(2c-3)(5c-12)(5c+27)$
5	$c^{20}(c-1)^{11}(c+3)^6(c+6)^4(c+8)^2(2c-3)^4(5c-12)^4(5c+27)^2/(c+1)^2$
$\frac{11}{2}$	$c^{28}(c-1)^{18}(c+3)^{14}(c+6)^4(c+8)^2(2c-3)^4(5c-12)^4(5c+27)^2/(c+1)^2$

Tabelle 9: Kac-Determinanten [II]

Man erkennt auf den ersten Blick, daß man es mit ganz anderen und insbesondere viel weniger Nullstellen zu tun hat. Gegenüber den Nullstellen der anderen Kac-Determinanten

in Tabelle 6 kommen keine neuen positiven hinzu, was schon aufdrängt, hier keine neuen rationalen Modelle zu finden.
Bei Dimension $\frac{11}{2}$ tritt ein Paar generischer Nullfelder auf. Es kann im Anhang (A.4) eingesehen werden. Daher basiert die Determinante beim Level $\frac{11}{2}$ nur auf 26 Feldern, nicht auf 28 wie bei der anderen Lösung.
Das Auftreten dieser Nullfelder und das Nichtvorhandensein eines klassischen Limes' sind ein starker Hinweis darauf, daß es sich um eine vereinigende Super-$\mathcal{W}$-Algebra handeln könnte.
Setzt man wiederum die Lösung (5.3.1) in (5.1.13−15) ein, so splittet sich die zentrale Ladung auf sehr einfache Weise:

$$c = -2 + (c+1) + 1, \tag{5.3.2}$$

was folgender Zerlegung entspricht:

$$\frac{\widehat{su}(n+1)_{-\frac{n}{2}} \oplus \widehat{so}(2n)_1}{\widehat{su}(n)_{-\frac{n-2}{2}} \oplus \widehat{u}(1)} \cong \frac{\widehat{su}(n+1)_{-\frac{n}{2}}}{\widehat{su}(n)_{-\frac{n}{2}} \oplus \widehat{u}(1)} \oplus \frac{\widehat{su}(n)_{-\frac{n}{2}} \oplus \widehat{su}(n)_1}{\widehat{su}(n)_{-\frac{n-2}{2}}} \oplus \widehat{u}(1). \tag{5.3.3}$$

Dies erhält man aus (5.2.3) durch Einsetzen von (5.2.11) und formales Setzen des Levels k auf $-\frac{n}{2}$. Dies ist dadurch motiviert, daß das bosonische CP(n)-Modell zum Level $k = -\frac{n}{2}$ immer die zentrale Ladung $\tilde{c} = -2$ besitzt, wie man aus den Formeln für die Sugawara-Konstruktion (2.3.3) direkt ablesen kann:

$$c = \frac{-\frac{n}{2} dim(SU(n+1))}{h^\vee(SU(n+1)) - \frac{n}{2}} - \left(\frac{-\frac{n-2}{2} dim(SU(n))}{h^\vee(SU(n)) - \frac{n-2}{2}} + 1 \right) = -2. \tag{5.3.4}$$

Dieses Setzen von k in der unitären Serie des CP(3) Kazama-Suzuki-Modells sollte zu einer Trunkierung von $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[II]}$ auf die Super-$\mathcal{W}_{n+1}$-Algebra für $n < 3$ und umgekehrt für $n > 3$ führen (für $n = 3$ gilt $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[II]} = \mathcal{SW}(1,2,3)^{[I]}$), und zwar bei

$$c = -\frac{3n^2}{n+2}. \tag{5.3.5}$$

Auf Niveau von Strukturkonstanten kann man dies für die ersten drei Beispiele explizit zeigen:

- $c = -1$: Alle Selbstkopplungen divergieren. Nach der Reskalierung der Generatoren mit einem Faktor $(c+1)^x$, so daß die Strukturkonstanten endliche Werte annehmen, werden $\mathcal{W}$ und $\mathcal{V}$ zu Nullfeldern.
- $c = -3$: $C_{\mathcal{VW}}^{\mathcal{W}} \alpha_{\mathcal{VWW}}$ und $C_{\mathcal{VV}}^{\mathcal{V}} \alpha_{\mathcal{VVV}}$ divergieren. Das redefinierte Feld $\mathcal{V}$ wird zum Nullfeld und $C_{\mathcal{WW}}^{\mathcal{W}}$ ist gleich der Selbstkopplungskonstante der Super-$\mathcal{W}_3$-Algebra bei diesem c-Wert.
- $c = -\frac{27}{5}$: Die entsprechenden Strukturkonstanten von $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[II]}$ und $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[I]}$ stimmen überein, und zwar bei diesem und nur bei diesem c-Wert. Insbesondere ist in der $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[I]}$ der Wert $c = -\frac{27}{5}$ eine Nullstelle der Kac-Determinante bei Level $\frac{11}{2}$, mithin gibt es ein Nullfeld.

Das liest sich kurz und bündig wie in der folgenden Tabelle:

c	Trunkierung
-1	$\mathcal{SW}(1,2,3)^{[II]} \to SVir_{N=2}$
-3	$\mathcal{SW}(1,2,3)^{[II]} \to \mathcal{SW}(1,2)$
$-\frac{27}{5}$	$\mathcal{SW}(1,2,3)^{[II]} = \mathcal{SW}(1,2,3)^{[I]}$

Tabelle 10: Trunkierungen der Super-$\mathcal{W}_n$-Algebren

Für $n > 3$ ist weiter $C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}$ der $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[II]}$ gleich der Strukturkonstante (5.2.20) der Super-$\mathcal{W}_{n+1}$-Algebra für den entsprechenden Wert der zentralen Ladung. Dies ist eine weitere Stütze für die Einordnung der $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[II]}$ als eine vereinigende Super-$\mathcal{W}$-Algebra.

Ferner kann man wieder die Symmetriealgebren der einzelnen Summanden der Zerlegung (5.3.3) suchen. Im ersten Summanden findet man eine $\mathcal{W}(2,3)$ mit zentraler Ladung $\tilde{c} = -2$, im zweiten nur eine Virasoroalgebra. Die Symmetriealgebren sind also viel kleiner als bei der ersten Lösung. Das Spin-3-Feld ist im Anhang (A.5) dargelegt.

Schließlich erlaubt diese $\mathcal{W}(2,3)$ mit der von der übergreifenden zentralen Ladung unabhängigen internen zentralen Ladung noch eine interessante Folgerung: $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[II]}$ besitzt überhaupt keine unitären Darstellungen. Dies kann man wie folgt einsehen: Angenommen, $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[II]}$ habe eine unitäre Darstellung. Im Sinne der Äquivalenz in (5.2.3) wäre diese nach unitären Darstellungen der Symmetriealgebren der einzelnen Cosets auf der rechten Seite von (5.3.3) ausreduzierbar. Die $\mathcal{W}(2,3)$ bei $\tilde{c} = -2$ besitzt jedoch keine unitären Darstellungen. Ihre Darstellungen sind noch nicht einmal rational, so daß zu vermuten ist, daß es noch nicht einmal rationale Modelle der $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[II]}$ gibt. Das entspräche der Vermutung, daß im $N = 2$ Fall gilt: rational$\Rightarrow$unitär.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist die Konstruktion der ersten Super-$\mathcal{W}$-Algebra mit drei Generatoren, der $\mathcal{SW}(1,2,3)$, mit ihren beiden Lösungen. Zur Konstruktion wurde ein manifest kovarianter Formalismus weiterentwickelt und an einigen Stellen verbessert. Ferner wurden die genauen Strukturen der n-Punkt-Funktionen für $n=3$ korrigiert und für $n=4$ ermittelt, um die doch vorhandene Äquivalenz von Assoziativität der Vierpunktfunktion und Gültigkeit von Jacobiidentitäten aufzuzeigen.
Nun soll jedoch die Struktur der beiden berechneten Algebren noch einmal kurz zusammengefaßt werden.
Die erste Lösung mit ihrem klassischen Limes kann mit der Super-$\mathcal{W}_4$-Algebra, der Symmetriealgebra des CP(3) Kazama-Suzuki-Modells, identifiziert werden. Verwendet man eine Zerlegung dieses zugrundeliegenden Coset-Modells, was auf algebraischer Ebene zu drei Unteralgebren führt, so erhält man nach dem Einsetzen deren wohlbekannten unitären Serien genau die (aufsteigende) unitäre Serie des CP(3) Kazama-Suzuki-Modells. Es gibt eine zweite absteigende Serie, die zur nicht-kompakten Version dieses Cosets gehört. Als Prüfung der Konsistenz wurden diese Unteralgebren identifiziert und soweit wie möglich ihre Generatoren konstruiert. Die Umkehr dieser Argumentation erlaubt die Vorhersage der niedrigsten Strukturkonstante für jede Super-$\mathcal{W}_n$-Algebra.
Die zweite Lösung besitzt einige Eigentümlichkeiten, denn sie hat keinen klassischen Limes, und es tritt ein generisches Nullfeld bei einer Dimension auf, die noch im singulären Teil der OPE vorkommt. Die obenstehende Zerlegung führt zu Unteralgebren mit nur wenigen Generatoren: außer einer $\hat{u}(1)$ hat man eine Virasoroalgebra und eine $\mathcal{W}(2,3)$ bei $c=-2$, wobei dieser Wert unabhängig von der zentralen Ladung der großen Algebra ist. Die ersten beiden Fakten legen es nahe, zu vermuten, daß es sich um eine vereinigende Super-$\mathcal{W}$-Algebra für die CP(n) Kazama-Suzuki-Modelle handeln könnte. Diese Vermutung kann auf Niveau von Strukturkonstanten für die ersten drei Fälle explizit bewiesen werden. Fährt man in der Serie weiter fort, so stimmen wenigstens die niedrigsten Strukturkonstanten überein, wobei obige Vorhersage eingeht. Schließlich erlaubt die Existenz dieser speziellen $\mathcal{W}(2,3)$ den Ausschluß einer jeden unitären Darstellung und möglicherweise auch den von rationalen Modellen.
Leider kann man auch von der ersten Lösung aufgrund eines Arguments von Cardy [28] kein minimales Modell für $c=9$ erwarten. Dazu muß man Super-$\mathcal{W}$-Algebren mit noch mehr Generatoren konstruieren.

Nun folgen noch einige Fragen, die sich im Anschluß an diese Arbeit auf natürliche Weise stellen:

(i) Gibt es $N=2$ minimale Modelle, die nicht zugleich auch unitär sind?
(ii) Schöpfen die Kazama-Suzuki-Modelle die $N=2$ unitären Modelle vollständig aus?
(iii) Bekommt man auch bei der Berechnung höherer $\mathcal{SW}(1,2,\ldots,n)$-Algebren andere Lösungen als die Super-$\mathcal{W}_{n+1}$-Algebra?
(iv) Wie sehen die vereinigenden Super-$\mathcal{W}$-Algebren für die anderen Kazama-Suzuki-Modelle aus, wenn es sie denn gibt?
(v) Existieren vereinigende Super-$\mathcal{W}$-Algebren mit unitären Darstellungen?

7. Anhang

In diesem Kapitel sind alle restlichen Daten der beiden Algebren dargestellt.

7.1. Felder

Es folgen Nullfelder und die Generatoren der Unteralgebren.

7.1.1. $\mathcal{SW}(1,2,3)$[I]

- Der Spin-3-Generator der $\mathcal{W}(2,3)$ für $\tilde{c} = \frac{4(21-c)c}{c+27}$:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\tfrac{2(33-c)}{5c+27}}\,\tfrac{6c(c-21)}{(c-1)(c+6)(c+27)(2c-3)}\Big(\tfrac{2(c-1)(c+6)(c+9)(2c-3)(5c-9)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{3c(c+3)(5c-12)(7c-27)}N(\mathcal{W}_1 J)\\
&+\tfrac{(c+6)(c+9)(2c-3)(5c-9)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{18c(c-33)}\mathcal{V}_1-\tfrac{(c-1)(c+6)(c+9)(2c-3)(5c-9)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{9(c+3)(5c-12)(7c-27)}\mathcal{W}_4\\
&+\tfrac{c}{18}\partial^2 J+\tfrac{c}{6}\partial L-\tfrac{c}{6}N(G^-G^+)+N(LJ)-\tfrac{1}{c}N(N(JJ)J)\Big)
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

- Der Spin-3-Generator des CP(3)-Anteils für $\tilde{c} = \frac{2(c+9)(5c-9)}{c+27}$:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\tfrac{6(3-c)(c+18)}{c(c-27)}}\,\tfrac{3(c+9)(5c-9)}{(c-1)(c+6)(c+27)(2c-3)}\Big(\tfrac{4(c-21)(c-1)(c+6)(2c-3)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{3(c+3)(5c-12)(7c-27)}N(\mathcal{W}_1 J)\\
&+\tfrac{c(c-21)(c+6)(2c-3)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{54(c-3)(c+18)}\mathcal{V}_1-\tfrac{2c(c-21)(c-1)(c+6)(2c-3)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{9(c+3)(5c-12)(7c-27)}\mathcal{W}_4\\
&+\tfrac{c}{18}\partial^2 J+\tfrac{c}{6}\partial L-\tfrac{c}{6}N(G^-G^+)+N(LJ)-\tfrac{1}{c}N(N(JJ)J)\Big)
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

- Der Spin-4-Generator des CP(3)-Anteils für $\tilde{c} = \frac{2(c+9)(5c-9)}{c+27}$:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\tfrac{54(27-7c)(c-21)(c+3)(c+9)(5c-9)}{(c-81)(c-27)(c-3)(c-1)(c+18)(c+27)(5c+27)}}\Big(\tfrac{c(c+9)(1458-909c+84c^2+7c^3)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{72(3-2c)(c+3)^2(c+6)(7c-27)^2}\partial^3 J\\
&+\tfrac{-1944+1557c+373c^2}{c(c-1)(5c-12)(1377+246c+25c^2)}N(N(\mathcal{W}_1 J)J)-\tfrac{2(2430-4059c+1350c^2+223c^3)}{3(c+3)(c-1)(5c-12)(1377+246c+25c^2)}N(\mathcal{W}_1 L)\\
&+\tfrac{c(c+9)(1458-909c+84c^2+7c^3)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{12(c+3)^2(c+6)(2c-3)(7c-27)^2}N(\partial G^-G^+)-\tfrac{(c-21)(c+9)(5c-9)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{6(c+3)^2(7c-27)^2}N(\mathcal{V}_1 J)\\
&+\tfrac{(c+9)(1458-909c+84c^2+7c^3)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{2(c+3)^2(c+6)(2c-3)(7c-27)^2}N(N(G^-J)G^+)+\tfrac{(c+9)(1458-909c+84c^2+7c^3)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{2(3-2c)(c+3)^2(c+6)(7c-27)^2}N(\partial LJ)\\
&+\tfrac{(c-6)(c+9)(1458-909c+84c^2+7c^3)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{12(3-2c)(c+3)^2(c+6)(7c-27)^2}N(G^-\partial G^+)+\tfrac{c(c-21)(c+9)(5c-9)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{54(c+3)^2(7c-27)^2}\mathcal{V}_4\\
&-\tfrac{(c-21)(c+9)(5c-9)(-135+140c+3c^2)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{3(c+3)^2(7c-27)^2(1377+246c+25c^2)}N(\mathcal{W}_1\mathcal{W}_1)-\tfrac{2916-2457c+96c^2+29c^3}{12(c+3)(5c-12)(1377+246c+25c^2)}\partial^2\mathcal{W}_1\\
&-\tfrac{(c+9)(-3542940+2589408c+1216053c^2+265545c^3-552258c^4+1194c^5+4937c^6+141c^7)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{4c(c-1)(c+3)^2(c+6)(2c-3)(7c-27)^2(1377+246c+25c^2)}N(N(JJ)L)\\
&+\tfrac{(c+9)(590490-1496637c+1241676c^2-352494c^3+13866c^4+859c^5)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{6(c-1)(c+3)(c+6)(2c-3)(7c-27)^2(1377+246c+25c^2)}N(LL)-\tfrac{2}{(c+3)(5c-12)}N(\mathcal{W}_4 J)\\
&+\tfrac{3(c+9)(-1062882+1200663c-59049c^2-13257c^3-74907c^4+6846c^5+346c^6)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{2c^2(c-1)(c+3)^2(c+6)(2c-3)(7c-27)^2(1377+246c+25c^2)}N(N(JJ)N(JJ))\\
&+\tfrac{3(c+9)(-1653372+685260c+122445c^2-1422c^3-17088c^4+770c^5+47c^6)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{4c(c+3)^2(c+6)(2c-3)(7c-27)^2(1377+246c+25c^2)}N(N(LJ)J)\\
&-\tfrac{(c+9)(2125764-3254256c+1198719c^2+108432c^3-87174c^4+1848c^5+107c^6)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{8c(c+3)^2(c+6)(2c-3)(7c-27)^2(1377+246c+25c^2)}N(\partial J\partial J)\\
&+\tfrac{(c+9)(-1062882+2630961c-1045872c^2-89964c^3+47376c^4+987c^5+34c^6)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{(1377+246c+25c^2)12(3-2c)(c+3)^2(c+6)(7c-27)^2}\partial^2 L\\
&-\tfrac{c}{6(c+3)(5c-12)}N(\mathcal{W}_3 G^-)+\tfrac{c}{6(c+3)(5c-12)}N(\mathcal{W}_2 G^+)\Big)
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

7.1.2. $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[II]}$

- Das Paar $\Phi^{\mp}$ generischer Nullfelder der Dimension $\frac{11}{2}$:

$$
\begin{aligned}
\Phi^{\mp} \sim{}& \pm\tfrac{36+180c+293c^2-8c^3-4c^4}{8c(c-1)(c+1)(c+6)(2c-3)}\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})D^{\mp}\mathcal{L}) \\
&\pm\tfrac{288-810c+3919c^2-2379c^3-52c^4}{84c(c-1)(c+1)(c+6)(2c-3)}\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L})\mathcal{L})D^{\mp}\mathcal{L}) \\
&+\tfrac{33-4c}{2(c-1)(2c-3)}\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^{\mp}\partial\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L}) \pm \tfrac{-108+185c+38c^2}{42c(1-c)(c+1)}\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\partial^2\mathcal{L})D^{\mp}\mathcal{L}) \\
&+\tfrac{2(144-234c+41c^2)C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{7c(c-24)(c-1)}\mathcal{N}_s(\mathcal{V}D^{\mp}\partial\mathcal{L}) \pm \tfrac{(c+1)(5c-12)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{c(24-c)(c+3)}\mathcal{N}_s(\mathcal{V}D^{\mp}\mathcal{W}) \\
&\pm\tfrac{12(5c-12)C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{5c(c-24)(c-1)}\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{V}D^{\mp}\mathcal{L})\mathcal{L}) \pm \tfrac{18(4c+3)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{5c(3-2c)(c+3)(c+6)}\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^{\mp}\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L}) \\
&+\tfrac{3(-648-1440c+939c^2+71c^3)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{5c(3-2c)(c+3)(c+6)(5c-12)}\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\partial\mathcal{L})D^{\mp}\mathcal{L}) \pm \tfrac{1}{c}\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{W})D^{\mp}\mathcal{L}) \\
&\pm\tfrac{(3672+3852c-4254c^2+114c^3+95c^4)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{5c(c+3)(c+6)(2c-3)(5c-12)}\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^{\mp}\partial^2\mathcal{L}) + \mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^{\mp}\partial\mathcal{W}) \\
&\pm\tfrac{7(-216+144c-93c^2+53c^3)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{5c(c+3)(c+6)(2c-3)(5c-12)}\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}[D^-,D^+]\mathcal{L})D^{\mp}\mathcal{L}) \\
&+\tfrac{48(-324+81c+138c^2+7c^3)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{25c(c+3)(c+6)(2c-3)(5c-12)}\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^{\mp}\partial\mathcal{L})\mathcal{L})
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

- Der Spin-3-Generator der $\mathcal{W}(2,3)$ für $\tilde{c}=-2$:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\tfrac{6(c-24)}{c}}\tfrac{6}{(c-1)(c+6)(2c-3)}\Big(\tfrac{2(c-1)(c+1)(c+6)(2c-3)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{3c(c+3)(5c-12)}N(\mathcal{W}_1 J) \\
&+\tfrac{(c+1)(3-2c)(c+6)C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{6(c-24)}\mathcal{V}_1 + \tfrac{(1-c)(c+1)(c+6)(2c-3)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{9(c+3)(5c-12)}\mathcal{W}_4 \\
&+\tfrac{c}{18}\partial^2 J + \tfrac{c}{6}\partial L - \tfrac{c}{6}N(G^-G^+) + N(LJ) - \tfrac{1}{c}N(N(JJ)J)\Big)
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

Die Wurzeln sind in der Normierung der Felder auf $\langle\Phi\Phi\rangle = \frac{\tilde{c}}{H_\Phi}$ begründet.

7.2. Strukturkonstanten

In den folgenden Tabellen sind die restlichen Strukturkonstanten aufgelistet. Dazu zunächst einige Hinweise:

Stehen bei einem Feld zwei Sätze von Konstanten, so sind diese nach den beiden Lösungen aufgeschlüsselt, wobei die erste Zeile zur Super $\mathcal{W}_4$-Lösung gehört, die zweite zur vereinigenden.

Ist ein Feld nicht aufgeführt, so taucht es in der jeweiligen OPE nicht auf. Man beachte, daß aus Symmetriegründen in der OPE $\mathcal{V}\circ\mathcal{V}$ keine Felder der Dimension $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \ldots$ stehen können. Ferner ist stets $C_{\mathcal{V}\mathcal{V}}^{\mathcal{F}} = 0$ für Felder der Dimension 5.

In der Tabelle für $\mathcal{SW}(1,2,3)^{[II]}$ fehlen die Felder $\mathcal{N}_s(\mathcal{V}D^{\pm}\mathcal{W})$ der Dimension $\frac{11}{2}$, da wegen des auftretenden Nullfeldes ein Feld aus der Basis herausgenommen werden muß.

NOP $\mathcal{F}$	$C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{F}}$	$C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{F}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{F}}$
$\mathcal{W}$	0	$C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{L})$	$-\frac{9C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{5c-12}$	0
$\mathcal{V}$	$C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$	0
$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^{\pm}\mathcal{L})$	$\frac{9C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{c+3}$	$-$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})$	0	$-\frac{27(c-21)(c+9)(9-3c+22c^2)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{5(c-33)(c-3)(c-1)^2(c+3)^2(c+18)(7c-27)}$
	0	$\frac{9(9-3c+22c^2)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{10c(c-1)^2(c+3)^3}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L})\mathcal{L})$	0	$\frac{18(c-21)(c+9)(-72+609c-716c^2+235c^3)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{35(c-33)(c-3)(c-1)^2(c+3)^2(c+18)(7c-27)}$
	0	$\frac{3(72-609c+716c^2-235c^3)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{35c(c-1)^2(c+3)^3}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\partial^2\mathcal{L})$	0	$-\frac{12(c-21)(c+6)(c+9)(2c-3)^2C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{35(c-33)(c-3)(c-1)^2(c+3)^2(c+18)}$
	0	$\frac{2(c+6)(2c-3)^2(7c-27)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{35c(c-1)^2(c+3)^3}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{L})\mathcal{L})$	0	$\frac{9(2430-1377c-756c^2+711c^3-28c^4)C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{5(c-33)(c-3)(c-1)^2(c+18)(5c-12)}$
	0	$\frac{3(-135+60c+26c^2)C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{5(c-1)^2(c+3)(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}[D^-,D^+]\mathcal{L})$	0	$\frac{3(15390-31023c+21591c^2-5001c^3+163c^4)C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{100(c-33)(c-3)(c-1)^2(c+18)}$
	0	$\frac{(-315+330c-71c^2)C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{100(c-1)^2(c+3)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\partial\mathcal{L})$	$\frac{3C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{4(c-1)}$	0
$\mathcal{N}_s(\mathcal{V}\mathcal{L})$	0	$\frac{18(-279+117c+22c^2)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{5(c+3)(5c-12)(7c-27)}$
	0	$\frac{18(48-47c+6c^2)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{5c(c+3)(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{W})$	0	$\frac{6(c-21)(c+1)(c+6)(c+9)(2c-3)(5c-9)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{5(c-33)(c-3)(c-1)(c+3)^2(c+18)(7c-27)}$
	0	$-\frac{(c+1)(c+6)(2c-3)(5c-9)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{5c(c-1)(c+3)^3}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^{\pm}\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\pm\frac{27(4c+3)C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{4(c-1)(c+3)(5c-12)}$	$-$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^{\pm}\partial\mathcal{L})$	$\frac{3(17c-24)C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{2(c-1)(5c-12)}$	$-$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^{\pm}\mathcal{L})D^{\mp}\mathcal{L})$	0	$\frac{9(4c+3)C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{(5c-12)(c-1)(c+3)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}[D^-,D^+]\partial\mathcal{L})$	0	$\frac{7(c+3)C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{2(5c-12)(c-1)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{V}\partial\mathcal{L})$	0	$-\frac{C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}}{2c-3}$

Tabelle A1: Strukturkonstanten der OPE $\mathcal{V}\circ\mathcal{W}$

NOP $\mathcal{F}$	$C_{\mathcal{V}\mathcal{V}}^{\mathcal{F}}$	$C_{\mathcal{V}\mathcal{V}}^{\mathcal{F}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}\mathcal{F}}$
$\mathcal{L}$	0	3
$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})$	$-\frac{3}{2(c-1)}$	0
$\mathcal{W}$	$\frac{2}{3}C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$	0
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})$	0	$-\frac{18(c+1)}{(2c-3)(c-1)(c+6)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L})$	0	$\frac{3(11c-14)}{2(2c-3)(c+6)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{L})$	0	$\frac{16C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}}{(5c-12)}$
$\mathcal{V}$	0	$C_{\mathcal{V}\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}\mathcal{V}}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^{\pm}\partial\mathcal{L})$	$-\frac{9}{(c-1)}$	$-$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^{\pm}\mathcal{L})$	$\pm\frac{12C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}}{(c+3)}$	$-$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\frac{9(157464-303264c+153090c^2-200475c^3+140292c^4-32103c^5-540c^6+80c^7)}{2(c-33)(c-3)(c-1)^2(c+3)(c+6)(c+18)(2c-3)(5c-12)(5c-9)}$	0
	$\frac{9(1944-1404c+4941c^2-1593c^3-544c^4-12c^5)}{4(c-1)^2(c+1)(c+3)^2(c+6)(2c-3)(5c-12)}$	0
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\frac{3(2519424-8001504c+17335620c^2-22093560c^3+14882697c^4-4943268c^5+628110c^6+15980c^7-1675c^8)}{14(c-33)(c-3)(c-1)^2(c+3)(c+6)(c+18)(2c-3)(5c-12)(5c-9)}$	0
	$\frac{3(15552-140832c+205038c^2-92394c^3+343c^4+5494c^5+135c^6)}{14(c-1)^2(c+1)(c+3)^2(c+6)(2c-3)(5c-12)}$	0
$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\partial^2\mathcal{L})$	$\frac{-787320-3792258c+8425539c^2-5904981c^3+1746090c^4-169920c^5-5925c^6+455c^7}{28(c-33)(c-3)(c-1)^2(c+3)(c+18)(5c-12)(5c-9)}$	0
	$\frac{72252-91665c+27216c^2+2946c^3-1208c^4-21c^5}{28(c-1)^2(c+1)(c+3)^2(5c-12)}$	0
$\mathcal{N}_s(\mathcal{V}\mathcal{L})$	$\frac{3(2916-1728c+126c^2-6c^3+c^4)C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{(c-3)(c-1)(c+3)(c+18)(5c-12)}$	0
	$\frac{9(-648+252c+69c^2-2c^3)C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{4(c-1)(c+3)^2(5c-12)}$	0
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\frac{6(3-2c)(c+6)(648-1935c-255c^2+16c^3)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{(c-33)(c-3)(c-1)(c+3)(c+18)(5c-12)^2}$	0
	$\frac{3(c+6)(2c-3)(23c+96)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{(c-1)(c+3)^2(5c-12)^2}$	0
$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}[D^-,D^+]\mathcal{L})$	$\frac{2(c+6)(2c-3)(162+675c-420c^2+19c^3)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{5(c-33)(c-3)(c-1)(c+3)(c+18)(5c-12)}$	0
	$\frac{2(3-2c)(c+6)(16c-33)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{5(c-1)(c+3)^2(5c-12)}$	0
$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{W})$	$\frac{(3-2c)(c+6)(2592-1899c+156c^2+23c^3)}{(c-33)(c-3)(c-1)(c+3)(c+18)(5c-12)}$	0
	$\frac{(c+6)(2c-3)(-120+47c+5c^2)}{2(c-1)(c+3)^2(5c-12)}$	0

Tabelle A2: Strukturkonstanten der OPE $\mathcal{V}\circ\mathcal{V}$ bis einschl. Dimension 4

NOP $\mathcal{F}$	$C^{\mathcal{F}}_{\mathcal{V}\mathcal{V}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}\mathcal{F}}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\frac{81(-2916+3078c+4239c^2+4104c^3+5055c^4-1880c^5+80c^6)}{5(c-33)(c-3)(c-1)^2(c+3)(c+6)(c+18)(2c-3)(5c-12)(5c-9)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\frac{-5589972-46762434c+34368948c^2-9650502c^3+20934585c^4-14492970c^5+2662785c^6-82600c^7}{35(c-33)(c-3)(c-1)^2(c+3)(c+6)(c+18)(2c-3)(5c-12)(5c-9)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\partial^2\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\frac{-1197120060-1719454392c+3844396323c^2-2585991906c^3+1397773314c^4-647784342c^5+158912298c^6-15854230c^7+362355c^8}{315(c-33)(c-3)(c-1)^2(c+3)(c+6)(c+18)(2c-3)(5c-12)(5c-9)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^{\pm}\partial\mathcal{L})D^{\mp}\mathcal{L})$	$\frac{2916-94608c+149391c^2-86022c^3+58056c^4-30572c^5+4710c^6}{6(c-3)(c-1)^2(c+3)(c+6)(c+18)(2c-3)(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\partial^2\mathcal{L})$	$\frac{13203648-36115956c+39229380c^2-26999973c^3+14499006c^4-4654466c^5+524676c^6+4005c^7}{900(c-3)(c-1)^2(c+3)(c+6)(c+18)(2c-3)(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{V}\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\frac{3(-27702+25353c+54810c^2-26730c^3-1275c^4+44c^5)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{5(c-33)(c-3)(c-1)^2(c+3)(c+18)(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{V}[D^-,D^+]\mathcal{L})$	$\frac{(5852412-13648338c+10656036c^2-3478599c^3+416457c^4+6837c^5-805c^6)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{70(c-33)(c-3)(c-1)^2(c+3)(c+18)(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\frac{108(486-15417c-37728c^2+20541c^3+2890c^4-172c^5)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{5(c-33)(c-3)(c-1)(c+3)(c+18)(5c-12)^2(7c-27)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}[D^-,D^+]\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\frac{(116112204+256229892c-421642017c^2+149005764c^3-2078955c^4-4743258c^5+177170c^6)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{75(c-33)(c-3)(c-1)(c+3)(c+18)(5c-12)^2}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^{\pm}\mathcal{L})D^{\mp}\mathcal{L})$	$\pm\frac{(-12325932+8737308c+10137393c^2-10516608c^3+2303415c^4+197634c^5-81610c^6)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{20(c-3)(c-1)(c+3)^2(c+18)(5c-12)^2(7c-27)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\partial^2\mathcal{L})$	$\frac{(-7922772+9334440c-3239001c^2+225801c^3+61071c^4-9049c^5+1110c^6)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}}{15(c-3)(c-1)(c+3)(c+18)(5c-12)^2(7c-27)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{V}\mathcal{W})$	$\frac{2(c-21)(c+6)(c+9)(2c-3)(21+4c)(5c-9)C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{W}\mathcal{W}}C^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{5(c-33)(c-3)(c-1)(c+3)^2(c+18)(7c-27)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{W})\mathcal{L})$	$\frac{54(3-2c)(c+1)(c+6)(7c-27)}{5(c-33)(c-3)(c-1)(c+3)(c+18)(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}[D^-,D^+]\mathcal{W})$	$\frac{(c+6)(2c-3)(162-105c+22c^2)}{5(c-3)(c-1)(c+3)(c+18)(5c-12)}$

Tabelle A3: Strukturkonstanten der OPE $\mathcal{V}\circ\mathcal{V}$ für Dimension 5 im Falle $\mathcal{SW}(1,2,3)$[I]

NOP $\mathcal{F}$	$C_{\mathcal{V}\mathcal{V}}^{\mathcal{F}}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})D^{\pm}\mathcal{L})$	$\pm\frac{3(57631824+12150972c-55806408c^2-13591233c^3+26756244c^4-4912326c^5-528264c^6+61071c^7+2060c^8-100c^9)}{16(c-33)(c-3)(c-1)^2(c+3)(c+6)(c+18)(2c-3)(5c-12)(5c-9)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^{\pm}\partial\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\frac{3(540+657c-174c^2-231c^3+20c^4)}{4(c-1)^2(c+3)(2c-3)(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L})\mathcal{L})D^{\pm}\mathcal{L})$	$\pm\frac{720870192-603900684c-189930744c^2-136775709c^3+532160847c^4-267651918c^5+32832018c^6+2394123c^7-56345c^8-1300c^9}{56(c-33)(c-3)(c-1)^2(c+3)(c+6)(c+18)(2c-3)(5c-12)(5c-9)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\partial^2\mathcal{L})D^{\pm}\mathcal{L})$	$\pm\frac{-37843848+14141142c+27404001c^2-14812254c^3-291078c^4+682302c^5+13485c^6-950c^7}{28(c-33)(c-3)(c-1)^2(c+3)(c+18)(5c-12)(5c-9)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{V}D^{\pm}\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\pm\frac{24(-10206-21951c+8910c^2+4635c^3-990c^4+2c^5)C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{5(c-33)(c-3)(c-1)^2(c+3)(c+18)(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{V}D^{\pm}\partial\mathcal{L})$	$\frac{2(2812482-4369383c+2306313c^2-520047c^3+39456c^4+5544c^5+35c^6)C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{7(c-33)(c-3)(c-1)^2(c+3)(c+18)(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^{\pm}\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\pm\frac{972(-27+3c-4c^2)(-36+30c-67c^2+3c^3)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{5(c-33)(c-3)(c-1)(c+3)^2(c+18)(5c-12)^2}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}[D^-,D^+]\mathcal{L})D^{\pm}\mathcal{L})$	$\pm\frac{189(2916-25272c+14229c^2-2925c^3+3747c^4-1715c^5+60c^6)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{5(c-33)(c-3)(c-1)(c+3)^2(c+18)(5c-12)^2}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\partial\mathcal{L})D^{\pm}\mathcal{L})$	$\frac{9(-1845828-1045872c+1145583c^2+391581c^3-257895c^4-2949c^5+340c^6)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{5(c-33)(c-3)(c-1)(c+3)^2(c+18)(5c-12)^2}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^{\pm}\partial\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\frac{144(26244-519048c+12231c^2+106245c^3+27513c^4-2085c^5+20c^6)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{25(c-33)(c-3)(c-1)(c+3)^2(c+18)(5c-12)^2}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^{\pm}\partial^2\mathcal{L})$	$\pm\frac{3(16699932-11495844c-282447c^2-1485c^3+550899c^4-28785c^5-1360c^6+50c^7)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{5(c-33)(c-3)(c-1)(c+3)^2(c+18)(5c-12)^2}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{V}D^{\pm}\mathcal{W})$	$\pm\frac{2(c-21)(c+6)(c+9)(2c-3)(5c-9)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{(c-33)(c-3)(c-1)(c+3)^2(c+18)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^{\pm}\partial\mathcal{W})$	$\frac{6(3-2c)(c+6)}{(c-1)(c+3)(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{W})D^{\pm}\mathcal{L})$	$\pm\frac{54(3-2c)(c+1)(c+6)(7c-27)}{(c-33)(c-3)(c-1)(c+3)(c+18)(5c-12)}$

Tabelle A4: Strukturkonstanten der OPE $\mathcal{V}\circ\mathcal{V}$ für Dimension $\frac{11}{2}$ im Falle $\mathcal{SW}(1,2,3)$[I]

NOP $\mathcal{F}$	$C_{\mathcal{V}\mathcal{V}}^{\mathcal{F}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{V}\mathcal{F}}$ bzw. $C_{\mathcal{V}\mathcal{V}}^{\mathcal{F}}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\frac{9(-11664+11340c-33561c^2+16227c^3+1914c^4-328c^5)}{10c(c-1)^2(c+1)(c+3)^2(c+6)(2c-3)(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\frac{-1119744+10539720c-17945496c^2+10408662c^3-1137561c^4-486853c^5+27530c^6}{140c(c-1)^2(c+1)(c+3)^2(c+6)(2c-3)(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\partial^2\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\frac{136048896-294252264c+183196620c^2-17163414c^3-1453191c^4-5408203c^5+437030c^6+103236c^7}{1260c(c-1)^2(c+1)(c+3)^2(c+6)(2c-3)(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^\pm\partial\mathcal{L})D^\mp\mathcal{L})$	$\frac{-70632-6588c+288630c^2-270609c^3+51200c^4+9420c^5}{24(c-1)^2(c+3)^2(c+6)(2c-3)(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\partial^2\mathcal{L})$	$\frac{12669696-41097996c+47080494c^2-21418392c^3+2107345c^4+599493c^5+2520c^6}{1800(c-1)^2(c+3)^2(c+6)(2c-3)(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\frac{6(9936-3978c-2427c^2+487c^3)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{5c(c-1)(c+3)^2(5c-12)^2}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}[D^-,D^+]\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\frac{(-2101248+4169304c-2987844c^2+815194c^3-38535c^4)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{300c(c-1)(c+3)^2(5c-12)^2}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^\pm\mathcal{L})D^\mp\mathcal{L})$	$\pm\frac{(-165888-765720c+2026620c^2-1395870c^3+243833c^4+28605c^5)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{80c(c-1)(c+3)^3(5c-12)^2}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\partial^2\mathcal{L})$	$\frac{(177984-272124c+139902c^2-42286c^3+10869c^4-135c^5)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{30c(c-1)(c+3)^2(5c-12)^2}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{V}\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\frac{9(-7776+12636c-4842c^2-249c^3+182c^4)C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{20c(c-1)^2(c+3)^2(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{V}[D^-,D^+]\mathcal{L})$	$\frac{3(-2268+10476c-11079c^2+2847c^3+220c^4)C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{140(c-1)^2(c+3)^2(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{W})\mathcal{L})$	$\frac{(c+6)(2c-3)(648-375c+55c^2)}{5c(c-1)(c+3)^2(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}[D^-,D^+]\mathcal{W})$	$\frac{(c+6)(2c-3)(108-84c+5c^2)}{20(c-1)(c+3)^2(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{V}\mathcal{W})$	$\frac{3(3-2c)(c+1)(c+6)(5c-6)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{10c(c-1)(c+3)^3}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s\mathcal{L}\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})D^\pm\mathcal{L})$	$\pm\frac{3(36936-1458c+137619c^2-89127c^3-9651c^4+3139c^5+80c^6-20c^7)}{16(c-1)^2(c+1)(c+3)^2(c+6)(2c-3)(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}D^\pm\partial\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\frac{3(1620-8181c+6777c^2-327c^3-315c^4+20c^5)}{4(c-1)^2(c+3)^2(2c-3)(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}[D^-,D^+]\mathcal{L})\mathcal{L})D^\pm\mathcal{L})$	$\pm\frac{246888-3059694c+5316597c^2-3211236c^3+447102c^4+148592c^5-15585c^6-260c^7}{56(c-1)^2(c+1)(c+3)^2(c+6)(2c-3)(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{L}\partial^2\mathcal{L})D^\pm\mathcal{L})$	$\pm\frac{150228-212589c+70215c^2+9999c^3-2473c^4-190c^5}{28(c-1)^2(c+1)(c+3)^2(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^\pm\mathcal{L})\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\pm\frac{162(c+6)(2c-3)(19c+30)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{5(c-1)(c+3)^3(5c-12)^2}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}[D^-,D^+]\mathcal{L})D^\pm\mathcal{L})$	$\pm\frac{63(3-2c)(c+6)(135-33c+10c^2)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{5(c-1)(c+3)^3(5c-12)^2}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\partial\mathcal{L})D^\pm\mathcal{L})$	$\frac{9(c+6)(2c-3)(-1035-969c+170c^2)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{5(c-1)(c+3)^3(5c-12)^2}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^\pm\partial\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\frac{144(c+6)(2c-3)(675+309c+10c^2)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{25(c-1)(c+3)^3(5c-12)^2}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^\pm\partial^2\mathcal{L})$	$\pm\frac{3(c+6)(2c-3)(2925+3282c-695c^2+25c^3)C_{\mathcal{W}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}}{5(c-1)(c+3)^3(5c-12)^2}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{V}D^\pm\mathcal{L})\mathcal{L})$	$\pm\frac{72(-171+66c+14c^2)C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{5(c-1)(c+3)^2(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{V}D^\pm\partial\mathcal{L})$	$\frac{3(-14796+9216c+609c^2-370c^3)C_{\mathcal{V}\mathcal{W}}^{\mathcal{W}}\alpha_{\mathcal{V}\mathcal{W}\mathcal{W}}}{14(c-1)(c+3)^2(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{W}D^\pm\partial\mathcal{W})$	$\frac{3(c+6)(2c-3)(7c-6)}{(c-1)(c+3)^2(5c-12)}$
$\mathcal{N}_s(\mathcal{N}_s(\mathcal{W}\mathcal{W})D^\pm\mathcal{L})$	$\pm\frac{9(c+6)(2c-3)}{(c-1)(c+3)^2}$

Tabelle A5: Strukturkonstanten der OPE $\mathcal{V}\circ\mathcal{V}$ für die Dimensionen 5 und $\frac{11}{2}$ im Falle $\mathcal{SW}(1,2,3)$[II]

8. Referenzen

[1] C. Ahn, *Free superfield realization of $N = 2$ quantum super $\mathcal{W}_3$-algebra*, Mod. Phys. Lett. **A9** (1994) 271

[2] D. Altschuler, *Quantum equivalence of coset space models*, Nucl. Phys. **B313** (1989) 293

[3] F.A. Bais, P. Bouwknegt, K. Schoutens, M. Surridge, *Coset construction for extended Virasoro algebras*, Nucl. Phys. **B304** (1988) 371

[4] T. Banks, L.J. Dixon, D. Friedan, E. Martinec, *Phenomenology and conformal field theory, or Can String theory predict the weak mixing angle?*, Nucl. Phys. **B299** (1988) 613

[5] I. Bars, *Heterotic superstring vacua in four dimensions based on non-compact affine current algebras*, Nucl. Phys. **B334** (1990) 125

[6] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. **B241** (1984) 333

[7] M. Bershadsky, *Conformal field theories via hamilton reduction*, Comm. Math. Phys. **139** (1991) 71

[8] M. Bershadsky, W. Lerche, D. Nemeschansky, N.P. Warner, *Extended $N = 2$ superconformal structure of gravity and $\mathcal{W}$-gravity coupled to matter*, Nucl. Phys. **B401** (1993) 304

[9] M. Bershadsky, H. Ooguri, *Hidden $SL(n)$ symmetry in conformal field theories*, Comm. Math. Phys. **126** (1989) 49

[10] L.C. Biedenharn, J.D. Louck, *The Racah-Wigner algebra in quantum theory*, Encyclopedia of Mathematics Vol. 9 (1980)

[11] A. Bilal, J.L. Gervais, *Nonlinearly extended Virasoro-algebras: new prospects for building string-theories*, Nucl. Phys. **B326** (1989) 222

[12] R. Blumenhagen, *Nicht-frei erzeugte $\mathcal{W}$-Algebren und Konstruktion von $N = 2$ Super-$\mathcal{W}$-Algebren*, Dissertation BONN 1994

[13] R. Blumenhagen, *Covariant Construction of $N = 1$ Super $\mathcal{W}$-algebras*, Nucl. Phys. **B381** (1992) 641

[14] R. Blumenhagen, *$N = 2$ supersymmetric $\mathcal{W}$-algebras*, Nucl. Phys. **B405** (1993) 744

[15] R. Blumenhagen, W. Eholzer, A. Honecker, R. Hübel, *New $N = 1$ extended superconformal algebras with two or three generators*, Int. Jour. Mod. Phys. **A7** (1992) 7841

[16] R. Blumenhagen, W. Eholzer, A. Honecker, K. Hornfeck, R. Hübel, *Cosets and unifying $\mathcal{W}$-algebras*, preprint BONN-TH-94-01 (hep-th/9404113), erscheint in Phys. Lett. B

[17] R. Blumenhagen, W. Eholzer, A. Honecker, K. Hornfeck, R. Hübel, *Coset realization of unifying $\mathcal{W}$-algebras*, preprint BONN-TH-94-11 (hep-th/9406203)

[18] R. Blumenhagen, M. Flohr, A. Kliem, W. Nahm, A. Recknagel, R. Varnhagen, *$\mathcal{W}$-algebras with two and three generators*, Nucl. Phys. **B361** (1991) 255

[19] R. Blumenhagen, R. Hübel, *A note on representations of $N = 2$ $\mathcal{SW}$-algebras*, preprint BONN-TH-94-08

[20] R. Blumenhagen, A. Wißkirchen, *Extension of the $N = 2$ Virasoro algebra by two primary fields of dimension 2 and 3*, preprint BONN-TH-94-12

[21] J. de Boer, L. Fehér, A. Honecker, *A class of $\mathcal{W}$-algebras with infinitely generated classical limit*, preprint BONN-HE-93-49, ITP-SB-93-84

[22] W. Boucher, D. Friedan, A. Kent, *Determinant formulae and unitary for the $N = 2$ superconformal algebras in two dimensions or exact results on string-compactification* Phys. Lett. **172B** (1986) 316

[23] P. Bouwknegt, *Extended conformal algebras from Kac-Moody algebras*, in „Infinite-dimensional Lie-algebras and Lie-groups", ed. V. Kac, Proc. CIRM-Luminy conf., 1988 (World Scientific, Singapore, 1989)

[24] P. Bouwknegt, K. Schoutens, *$\mathcal{W}$-symmetry in conformal field theory*, Phys. Rep. **223** (1993) 183

[25] P. Bowcock, P. Goddard, *Coset construction and extended conformal algebra*, Nucl. Phys. **B305** (1988) 685

[26] P. Candelas, G.T. Horowitz, A. Strominger, E. Witten, *Vacuum configurations for superstrings*, Nucl. Phys. **B258** (1985) 46

[27] A. Capelli, C.A. Trugenberger, G.R. Zemba, *Infinite symmetry in the quantum-Hall-effect*, Nucl. Phys. **B396** (1993) 465

[28] J.L. Cardy, *Operator content of two dimensional conformally invariant theories*, Nucl. Phys. **B270**[FS16] (1986) 186 1986

[29] E. Cunningham, *The principle of relativity in electrodynamics and an extension thereof*, Proceedings of th London Mathematical Society, Vol. 8 (1910) p. 77

[30] L.J. Dixon, M.E. Peskin, J. Lykken, *$N = 2$ superconformal symmetry and $SO(2,1)$ current algebra*, Nucl. Phys. **B325** (1989) 329

[31] V. Drinfeld, V. Sokolov, *Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type*, Jour. Sov. Math. **30** (1984) 1975

[32] B. Duplantier, H. Saleur, *Exact critical properties of two-dimensional dense self-avoiding walks*, Nucl. Phys. **B290** [FS20] (1987) 291

[33] T. Eguchi, H. Ooguri, A. Taormina, S.K. Yang, *Superconformal algebras and string compactification on manifolds with SU(n) holonomy*, Nucl. Phys. **B315** (1989) 193

[34] T. Eguchi, S.K. Yang, *$N = 2$ superconformal models as topological field theories*, Mod. Phys. Lett. **A5** (1990) 1693

[35] P. Fendley, W. Lerche, S.D. Mathur, N.P. Warner, *$N = 2$ supersymmetric integrable models from affine Toda theories*, Nucl. Phys. **B348** (1991) 66

[36] J.M. Figueroa-O'Farrill, *On the homological construction of Casimir algebras*, Nucl. Phys. **B343** (1990) 450

[37] J.M. Figueroa-O'Farrill, *The spin-6 extended conformal algebra*, Phys. Lett. **245B** (1990) 471

[38] J.M. Figueroa-O'Farrill, E. Ramos, *Classical $N = 2$ $\mathcal{W}$-superalgebras and supersymmetric Gel'fand-Dickey brackets*, Nucl. Phys. **B368** (1992) p. 361

[39] M. Flohr, R. Varnhagen, *Infinite symmetry in the fractional quantum Hall effect*, preprint BONN-HE-93-29, erscheint in Phys. Lett. B

[40] D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker, *Conformal invariance, unitarity and critical exponents in two dimensions*, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1575

[41] D. Gepner, *Space-time supersymmetry in compactified string theory and superconformal models*, Nucl. Phys. **B296** (1988) 757

[42] P. Ginsparg, *Applied conformal field theory*, Conference Les Houches „Fields, Strings and critical Phenomena" (1990)

[43] P. Goddard, A. Kent, D. Olive, *Virasoro algebras and coset space models*, Phys. Lett. **152B** (1985) 88

[44] M. Green, J.H. Schwarz, E. Witten, *Superstring theory I+II*, Cambridge Univ. Press 1987

[45] D.J. Gross, J.A. Harvey, E. Martinec, R. Rohm, *Heterotic string theory (I) (II)*, Nucl. Phys. **B256** (1985) 253, Nucl. Phys. **B267** (1985) 75

[46] K. Hamada, M. Takao, *Spin-*4 *current algebra*, Phys. Lett. **209B** (1988) 247

[47] A. Honecker, *A note on the algebraic evaluation of correlators in local chiral conformal field theories*, preprint BONN-HE-92-25 (hep-th/9209029)

[48] K. Hornfeck, *$\mathcal{W}$-algebras with a set of primary fields of dimension* $(3,4,5)$ *and* $(3,4,5,6)$, Nucl. Phys. **B407** (1993) 237

[49] T. Inami, Y. Matsuo, I. Yamanaka, *Extended conformal algebra with $N=2$ supersymmetry*, Int. Jour. Mod. Phys. **A5** (1990) 4441

[50] K. Ito, *Quantum hamiltonian reduction and $N=2$ coset models*, Phys. Lett. **259B** (1991) 73

[51] K. Ito, *$N=2$ superconformal CP(n) model*, Nucl. Phys. **B370** (1992) 123

[52] K. Ito, *Free field realization of $N=2$ super $\mathcal{W}_3$-algebra*, Phys. Lett. **B304** (1993) 271

[53] K. Ito, H. Kanno, *Lie superalgebra and extended topological conformal symmetry in non-critical $\mathcal{W}_3$-strings*, hep-th/9405049

[54] E. Ivanov, S. Krivonos, *Superfield realization of $N=2$ super-$\mathcal{W}_3$*, Phys. Lett. **291B** (1992) 63

[55] V.G. Kac, *„Infinite dimensional Lie algebras"*, Cambridge Univ. Press 1985

[56] V.G. Kac, I.T. Todorov, *Superconformal current algebras and their unitary representations*, Comm. Math. Phys. **102** (1985) 337

[57] H.G. Kausch, G.M.T. Watts, *A study of $\mathcal{W}$-algebras using Jacobi identities*, Nucl. Phys. **B354** (1991) 740

[58] Y. Kazama, H. Suzuki, *New $N=2$ superconformal field theories and superstring compactification*, Nucl. Phys. **B321** (1989) 232

[59] Y. Kazama, H. Suzuki, *Bosonic construction of conformal field theories with extended supersymmetry*, Mod. Phys. Lett. **A4** (1989) 235

[60] W. Lerche, C. Vafa, N.P. Warner, *Chiral rings in $N=2$ superconformal theories*, Nucl. Phys. **B324** (1989) 427

[61] H. Lu, C.N. Pope, L.J. Romans, X. Shen, X.J. Wang, *Polyakov construction of the $N=2$ super $\mathcal{W}_3$-algebra*, Phys. Lett. **264B** (1991) 91

[62] G. Moore, N. Read, *Fractional quantum Hall effect and nonabelian statistics*, Nucl. Phys. **B360** (1991) 362

[63] G. Mussardo, G. Sotkov, M. Stanishkov, *$N=2$ superconformal minimal models*, Int. Jour. Mod. Phys. **A4** (1989) 1135

[64] W. Nahm, „*Conformal quantum field theories in two dimensions*", World Scientific, in Vorbereitung

[65] D. Nemeschansky, S. Yankielowicz, $N = 2$ $\mathcal{W}$*-algebras, Kazama-Suzuki models and Drinfeld-Sokolov reduction*, preprint USC-91/005

[66] S. Odake, *Character Formulas of an Extended Superconformal Algebra Relevant to String Compactification*, Int. Jour. Mod. Phys. **A5** (1990) 897

[67] S. Odake, $c = 3d$ *Conformal Algebra with Extended Supersymmetry*, Mod. Phys. Lett. **A5** (1990) 561

[68] R.E.C. Perret, *Dual formulation of classical* $\mathcal{W}$*-algebras*, Lett. Math. Phys. 27 (1993) 27

[69] R.E.C. Perret, *A classical* $N = 4$ *super* $\mathcal{W}$*-algebra*, Int. Jour. Mod. Phys. **A8** (1993) 3615

[70] C.N. Pope, L.J. Romans, K.S. Stelle, *On* $\mathcal{W}_3$ *strings*, Phys. Lett. **269B** (1991) 287

[71] L.J. Romans, *The* $N = 2$ *super* $\mathcal{W}_3$*-algebra*, Nucl. Phys. **B369** (1992) 403

[72] R. Schimmrigk, *A new construction of a three-generation Calabi-Yau manifold*, Phys. Lett. **193B** (1987) 175

[73] C. Schweigert, *On the classification of* $N = 2$ *superconformal coset theories*, Comm. Math. Phys. **149** (1992) 425

[74] A. Schwimmer, N. Seiberg, *Comments on the* $N = 2, 3, 4$ *superconformal algebras in two dimensions*, Phys. Lett. **184B** (1987) 191

[75] H. Sugawara, *A field theory of currents*, Phys. Rev. Vol 170,5 (1969) 1659

[76] C. Vafa, N.P. Warner, *Catastrophes and the classification of conformal field theories*, Phys. Lett. **184B** (1987) 191

[77] P. di Vecchia, J.L. Petersen, H.B. Zheng, $N = 2$ *Extended superconformal theories in two dimensions*, Phys. Lett. **218B** (1989) 51

[78] P. West, „*Introduction to supersymmetry and supergravity*", second edition 1990, World Scientific, Singapore

[79] K.G. Wilson, *Non-Lagrangian Models of Current Algebra*, Phys. Rev. Vol. 179,5 (1969) 1499

[80] S. Wolfram, „*Mathematica*", Addison-Wesley, Reading, MA (1991)

[81] A.B. Zamolodchikov, *Infinite additional symmetries in two dimensional conformal quantum field theory*, Theor. Math. Phys. 65 (1986) 1205