Die rationalen konformen Quantenfeldtheorien in zwei Dimensionen mit effektiver zentraler Ladung $c \leq 1$

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms Universität
zu Bonn

vorgelegt von
Michael Flohr
aus
Bonn

Bonn 1994

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms Universität Bonn

Referent: Prof. Werner Nahm
Korreferent: Prof. Günther von Gehlen
Tag der Promotion: 23. 9. 1994

Für meine Mutter

Weltflächen aufspannen
wie als Kinder Fäden auf unsren Händen
zu immer neuen Mustern und Gebilden
zwischen Fingern

Weltflächen aufspannen
mit Worten
die sich zu Sätzen formen
verknüpft im Sinngeflecht unsrer Gedanken

Weltflächen aufspannen
mit Farben und Tönen
gewebt zu Bildern und Liedern
Stoffbahnen gleich

Weltflächen aufgespannt
Raumzeit
durch kreisförmige Saiten
auf denen Quantenwelt lebt

Weltbilder entdecken
mit immer neuen Mustern
ihre Fläche aufspannen
vor unseren Augen

Birgitt Federau

Ouverture

FUGA

CODA

I Exposition

Quantenfeldtheorie (TÆQ[i]) ist wohl das zur Zeit leistungsfähigste Instrument zur Beschreibung der mikroskopischen physikalischen Natur. Alle fundamentalen Phänomene außer der Gravitation werden bis heute mittels TÆQ modelliert. Allerdings ist es auch das vielleicht umstrittenste Instrument, da zwar einerseits überragende Übereinstimmungen zwischen Experiment und Theorie erreicht werden, die TÆQ sich andererseits aber ihrer mathematisch exakten Formulierung in fast allen nicht trivialen Fällen nach wie vor widersetzt [463]. Zum Beispiel erlaubt es die Quantenelektrodynamik, die Feinstrukturkonstante sowie den anomalen g-Faktor des Elektrons bis auf die heutigen Grenzen der Meßgenauigkeit (von 10^{-15}!) richtig vorherzusagen, obwohl sie wahrscheinlich als mathematisches Objekt gar nicht existiert (bzw. nur am trivialen Fixpunkt im Raum des Renormierungsgruppenflusses).
TÆQ ist auch deshalb umstritten, weil es nicht möglich scheint, wirklich alle fundamentalen Wechselwirkungen mit Hilfe einer Gattung von Instrumenten zu beschreiben. Zumindest dann, wenn eine TÆQ Lorentz-Invarianz, Mikrokausalität und Punktförmigkeit der "elementaren Teilchen" besitzt, ist ihre generelle Struktur bereits so weit festgelget [991], daß sie prinzipiell die Gravitation nicht konsistent beschreiben kann. Dies ist unter anderem eine der Motivationen für Stringtheorien, in denen die "elementaren Teilchen" nicht mehr als punktförmig angenommen werden. Allerdings ist das Problem der Formulierung von Stringfeldtheorien noch nicht befriedigend gelöst [523, 673].
Gegen TÆQ läßt sich weiterhin einwenden, daß man sie im allgemeinen nicht exakt lösen kann – erinnern doch die Störungsreihen und andere mehr oder weniger elegante Entwicklungen in irgendwelche Parameter etwas an die Epizyklen-Theorien der Astronomen zur Zeit von G. Galilei und J. Kepler. Wie so oft in der Physik ist man in der Lage, "gute" Gleichungen in dem Sinne zu formulieren, daß die Natur Lösungen zu diesen Gleichungen "berechnen" kann, wenn man durch

[i] Theoria Æquoris Quanti

geeignete Experimente die richtigen Fragen an sie stellt. Wie so oft in der Physik kann man dies lediglich numerisch oder näherungsweise überprüfen, da eine exakte Lösung der Gleichungen in der Sprache der Mathematik nicht bekannt ist. Die Theorien sind also nur insofern "gut", als die numerische Simulation der Welt gemäß den Gesetzen der Theorie ein mehr oder weniger zutreffendes Abbild des Verhaltens der realen Welt ist.

Der Einwand meint dabei nicht eigentlich die Tatsache, daß es keine exakte Lösung gibt, sondern daß die Näherungen keine mit wachsender Ordnung konvergierenden Reihen darstellen. Trotz der sehr kleinen Kopplungskonstanten in der Quantenelektrodynamik ist die Störungsreihe divergent, ja nicht einmal Borel-summierbar. Um dennoch endliche Ausdrücke zu erhalten, wurde das Konzept der Renormierung erfunden, die notwendigerweise Parameter in die Theorie einführt, die aus dem Experiment gewonnen werden müssen. Renormierung ist ein häufiger Angriffspunkt der Mathematiker, und sie widerspricht der Suche nach Theorien, die möglichst keine äußeren Parameter mehr benötigen.

Nichtsdestotrotz ist die Eleganz der Beschreibung von Natur mittels TÆQ von andauernder Faszination [991] – gilt doch die Schönheit einer Formulierung bis heute oft als ein Maß für ihre "Richtigkeit". So spielen Begriffe wie Symmetrie seit der Einführung der Darstellungstheorie in die Quantenmechanik durch E.P. Wigner [1061] Ende der 30er Jahre eine zunehmend wichtige Rolle. Jede kontinuierliche Symmetrie generiert über das Noether-Theorem einen Strom und eine Erhaltungsgröße. TÆQ haben allerdings unendlich viele Freiheitsgrade, die meisten in der Natur auftretenden Symmetriegruppen hingegen sind nur endlich dimensional. So hat beispielsweise die Symmetriegruppe der Raum-Zeit in vier Dimensionen, die Poincarè-Gruppe, lediglich zehn freie Parameter. Daher sind TÆQ in vier Dimensionen nicht exakt lösbar. Auch abstraktere Symmetrieprinzipien wie Eichgruppen, die nicht mehr auf der Raum-Zeit selbst, sondern in Faserbündeln über ihr operieren, oder Supersymmetrie, liefern in den physikalisch relevanten Fällen nur endlich viele weitere Erhaltungsgrößen.

Die Poincarè-Gruppe ist aber durchaus nicht die größtmögliche Symmetrie der Raum-Zeit. Schon lange war bekannt, daß die meisten Feldtheorien, zumindest vor der Quantisierung, auch konform invariant sind, so zum Beispiel Elektrodynamik [197], nicht abelsche Yang-Mills-Theorien, masselose Fermionen oder skalare Φ^4-Bosonen, also Theorien mit masselosen Teilchen, die Skaleninvarianz besitzen. Leider nützt dies nur wenig. Denn zum einen ist die konforme Gruppe für Räume mit drei oder mehr Dimensionen auch nur endlich dimensional, $\mathrm{CG}(\mathbb{R}^{p,q}) \simeq \mathrm{SO}(p+1,q+1)$, $p+q>2$, zum anderen wird die konvorme Invarianz bei der Quantisierung durch das Auftreten von Skalenanomalien gebrochen. In zwei Dimensionen hingegen ist die konforme Gruppe isomorph zu $\mathit{Diff}(S^1)_L \times \mathit{Diff}(S^1)_R \ltimes \mathbb{Z}$, also unendlich dimensional. Mehr noch, der zugehörige Noether-Strom (der Energie-Impuls-Tensor) kann direkt als ein Quantenfeld einer konformen Quantenfeldtheorie (TÆC[ii]) intepretiert werden, so daß die konforme Invarianz die Quantisierung überlebt.

In zwei Dimensionen existieren also TÆQ mit unendlich vielen Erhaltungsgrößen, eben die TÆC. In der Tat konnten 1983 A.A. Belavin, A.M. Polyakov und A.B. Zamolodchikov [37] zeigen, daß alle Korrelationsfunktionen – zumindest prinzipiell – exakt bestimmt werden können, und daß alle lokalen Felder, die die Operatoralgebra aufspannen, durch die Höchstgewichts-Darstellungen (RPA[iii]) der Symmetriealgebra gegeben sind (genauer durch die ihrer zentralen Erweiterung, da einen in TÆQ bekanntlich die projektiven Darstellungen interessieren). Seitdem ist die Untersuchung aller möglichen TÆC in zwei Dimensionen eine natürliche Frage der mathematischen Physik.

Hat sich damit die grundsätzliche Situation verbessert? Ja, denn TÆC ist kein physikalisch anwendungsloses Spielzeug, sondern eröffnet Zugang zu einem immensen Bereich physikalischer Phänomene aber auch mathematischer Fragestellungen:

[ii] Theoria Æquoris Conformis
[iii] Representatio Ponderis Altissimi

- In der statistischen Physik sind es die Universalitätsklassen zweidimensionaler Phasenübergänge zweiter Ordnung [419, 173, 1123], zu denen es bereits gute experimentelle Befunde gibt [19, 131, 191, 701, 839, 883];

- in der Festkörperphysik sind es zweidimensionale Phänomene, wie zum Beispiel der Quanten-Hall-Effekt (EQH[iv]) [431, 157, 163, 379], Polymere [251] und vielleicht auch Hochtemperatur-Supraleitung;

- in der Superstring-Theorie sind es die möglichen String-Vacua, die mit $N=2$ supersymmetrischen TÆC in Beziehung stehen, die von der Reparametrisierungs-Invarianz der durch den String aufgespannten Weltfläche herrühren [523];

- in der klassischen Mechanik sind es integrable Systeme, die mit Toda-Theorien beschrieben werden können (obwohl das Auftreten dimensionsbehafteter Größen die konforme Invarianz teilweise bricht), sowie Hierarchien partieller Differentialgleichungen (KP-Hierarchie etc.), bei denen konforme Invarianz eine Rolle spielt [31, 53, 109];

- in der Topologie sind es Mannigfaltigkeiten in drei Dimensionen [757] und Knoten [1093], für deren Klassifikation völlig neue Möglichkeiten eröffnet werden;

- in der algebraischen Geometrie sind es Abzählprobleme und Mirrorsymmetrie [137, 139, 521];

- in der diskreten Mathematik sind es die Konstruktion des Monsters und die Theorie selbstdualer Gitter und Codes [409, 223];

Jeder dieser Bereiche korrespondiert zur Untersuchung eines bestimmten Typs von TÆC. Die Klassifikation aller möglichen TÆC in zwei Dimensionen ist also auch eine Frage, deren Lösung viele Antworten von physikalischer und mathematischer Relevanz liefern wird.
Wie weit ist man nun mit der Klassifikation? Nun, nicht sehr weit. Bis vor etwa fünf Jahren waren im Grunde nur vier Typen von TÆC genauer verstanden:

- zum einen die sogenannten minimalen Modelle [37, 151];

- zum anderen die Theorien mit der zentralen Ladung $c = 1$ [457, 211, 709];

- außerdem die TÆC, die über (selbstduale, gerade) Gitter und Codes definiert werden können und deren zentrale Ladung $c \in \{8, 16, 24\}$ ist [409, 223, 967];

- schließlich die Modelle zu unendlich dimensionalen Lie-Algebren (Kac-Moody-Algebren);

Alle deise Typen von TÆC besitzen supersymmetrische Verallgemeinerungen. Gemeinsam ist diesen Modellen, daß sie allein aus der Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra weitgehend klassifiziert werden können. Die konforme Gruppe reicht in diesen Fällen aus, die Theorie auf eine gewissermassen "endliche" (im unten stehenden Sinne) Theorie zu reduzieren.
Bereits 1985 hat A.B. Zamolodchikov [1117] ein weiterführenderes Konzept zur Klassifikation von TÆC aufgezeigt, das mit (maximal) erweiterten Symmetrie-Algebren arbeitet, den sogenannten $\mathcal{W}$-Algebren[v]. Sie enthalten die Virasoro-Algebra als Unteralgebra und sind äquivalent zur Operatorproduktentwicklung (EXPO[vi]) konform kovarianter, lokaler, chiraler Felder. Aufgrund der größeren Algebra hat man mit deren Darstellungstheorie ein feineres Instrument zur Verfügung. Es zeigt sich nämlich, daß die Frage nach der Klassifikation aller TÆC an sich zu allgemein ist. Physikalisch interessant sind vor allem solche TÆC, deren Observablen-Algebra endlich erzeugt ist. Solche TÆC

[iv] Effectus Quantus secundum Hall

[v] der Begriff der $\mathcal{W}$-Algebra ist vermutlich auf $\mathcal{W}$igner zurückzuführen, der Operatoralgebren mit SU(2)-Symmetrie betrachtete, vgl. [47].

[vi] EXpansio Producti Operatorum

nennt man rational (TÆCR[vii]). Sie haben den Vorteil, daß ihre (maximale) Symmetriealgebra nur endlich viele RPA besitzt.
In den letzten Jahren entwickelte sich geradezu eine $\mathcal{W}$-Industrie, die im wesentlichen mit drei Methoden $\mathcal{W}$-Algebren und damit TÆC konstruiert [103]:

- Auf direktem Weg nimmt man einen Satz lokaler chiraler Felder und erhält die Bedingungen für algebraische Konsistenz in Abhängigkeit von den Strukturkonstanten ihrer Operatoralgebra, i.e. man überprüft Jakobi-Identitäten [79, 683]. Dieser Weg ist allerdings sehr rechenintensiv und daher auf kleine Sätze von lokalen, chiralen Feldern beschränkt.

- Die Theorie unendlich dimensionaler Lie-Algebren, die zu jeder gewöhnlichen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ eine sogenannte Kac-Moody-Algebra $\hat{\mathfrak{g}}$ assoziiert [647], liefert zwei weitere Methoden:

•• Bei der sogenannten Coset-Konstruktion teilt man eine Unteralgebra $\hat{\mathfrak{h}} \subset \hat{\mathfrak{g}}$ so heraus, daß die Felder der Kommutanten von $\hat{\mathfrak{h}}$ in $\hat{\mathfrak{g}}$ in der Universellen Einhüllenden eine $\mathcal{W}$-Algebra bilden [479, 499].

•• Die sogenannte Quanten-Drinfeld-Sokolov-Reduktion arbeitet mit zusätzlichen Zwangsbedingungen und BRST-Quantisierung. Die BRST-invarianten Größen bilden dann die Felder der $\mathcal{W}$-Algebra [239, 401].

Die Ergebnisse dieser drei Methoden sind umfangreich aber keineswegs erschöpfend. Insbesondere die direkte Konstruktion von $\mathcal{W}$-Algebren lieferte einige – zunächst sporadisch anmutende – Beispiele, die nicht in die allgemeinen Serien, die man aus den indirekten Methoden erhält, passen wollen. Weiter hat man insbesondere für das Regime $c > 1$ nach wie vor nur einige Serien generisch existierender $\mathcal{W}$-Algebren allgemein angeben, aber im allgemeinen nicht deren rationale Modelle klassifizieren können. Da für wachsendes c Symmetrie-Algebren mit zunehmender Zahl von Generatoren erforderlich sind, wird deren Darstellungstheorie ebenfalls komplexer [269, 71, 281, 271]. Recht gut verstanden sind nur diejenigen $\mathcal{W}$-Algebren, deren Generatoren mit den Exponenten einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ korrespondieren, sie stellen sozusagen das unendlich dimensionale Analogon $\mathcal{W}(\hat{\mathfrak{g}})$ der Casimir-Algebren $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$ dar.
Können denn überhaupt keine weiteren, vielleicht allgemeineren Typen von TÆC vollständig klassifiziert werden? Doch, denn konforme Invarianz impliziert noch eine weitere Invarianz, wenn die TÆC auf einer Riemannsche Fläche mit Geschlecht $g > 0$ lebt – die modulare Invarianz [167, 863]. Damit hat man für $g = 1$ den sehr gut entwickelten mathematischen Apparat der Modulformen zur Verfügung sowie die Darstellungstheorie von PSL(2,$\mathbb{Z}$). Das ist deshalb besonders wichtig, weil die Charaktere einer TÆC, und damit auch die Zustandssumme, durch die Null-Punkt-Funktionen auf dem Torus gegeben sind. Es liegt daher nahe, mittels modularer Invarianz TÆC zu klassifizieren [181, 257]. Allerdings zeigt sich, daß dieses Konzept allein zu grob ist. Man muß weitere Bedingungen fordern, um physikalisch relevante Modelle zu erhalten.
Alle bis jetzt skizzierten Konzepte sind jeweils für sich betrachtet nicht in der Lage, wirklich einen ganzen Bereich von TÆC zu klassifizieren. Kombiniert man sie jedoch miteinander, mag genau dies möglich werden, mögen die zu allgemeinen Blickwinkel der einzelnen Konzepte sich ergänzen. Dabei kann es sehr wichtig sein, durch explizite Beispiele überhaupt eine Vorstellung zu gewinnen, welche Typen von TÆC auftreten. So kann auch das "Un-Konzept" der direkten Konstruktion von $\mathcal{W}$-Algebren sehr viel zur tatsächlichen Klassifikation von TÆC beitragen.

Ziel dieser Arbeit ist es, einen Beitrag zur Klassifikation von TÆC zu leisten und mögliche Anwendungen der dabei gefundenen Typen von TÆC in der Physik realer Systeme aufzuzeigen. Die Strategie liegt dabei in einer Kombination der beiden Prinzipien konformer sowie modularer Invarianz.

[vii] Theoria Æquoris Conformis Rationalis

Was wurde davon erreicht? Nun, natürlich nicht die Klassifikation aller TÆC überhaupt. Aber immerhin ist es gelungen, alle TÆC, deren effektive zentrale Ladung $c_{eff} = c - h_{min} \leq 1$ ist, sowie alle supersymmetrischen $N=1$ TÆC mit $c_{eff} \leq 3/2$ zu klassifizieren. Dabei ist h_{min} das kleinste Gewicht aller auftretenden Virasoro-RPA.
Der Aufbau der Arbeit entspricht der Logik, mit der wir die Klassifikation durchführen, und sei hier kurz erläutert:

- Der erste Teil, das Præluium, hat einführenden Charakter. Wir stellen die benötigten Definitionen und Resultate zusammen, auf denen unsere Arbeit aufbaut. Um der Arbeit keine unnötige Länge zu geben, werden die Sätze ohne Beweise zitiert. Um sie übersichtlicher zu gestalten, ist die Einführung in zwei Teile gegliedert, wobei dem einen konforme Invarianz, dem anderen modulare Invarianz zugrundeliegt. Zwei wichtige Ergebnisse formulieren wir bereits im Præludium: Wir können aus der konformen Invarianz bereits weitgehend die Struktur sogenannter degenerierter Modelle der Virasoro-Algebra klassifizieren, außerdem versetzt uns die modulare Invarianz in die Lage, diejenigen Modulformen anzugeben, aus denen sich letztlich die Charaktere von Theorien mit $c_{eff} \leq 1$ (bzw. supersymmetrische $N=1$-Theorien mit $c_{eff} \leq 3/2$) zusammensetzen. Diese beiden Resultate ergänzen sich, denn letzteres impliziert, daß eine solche Theorie bereits ein degeneriertes Modell der (Super-) Virasoro-Algebra sein muß. Genauer gesagt lassen sich alle möglichen modul-invarianten Zustandssummen für $c_{eff} \leq 1$ klassifizieren und eindeutig mit bestimmten degenerierten Modellen in Beziehung setzen. Umgekehrt impliziert die Struktur degenerierter Modelle, daß damit alle Möglichkeiten ausgeschöpft sind.

- Der Kernteil der Arbeit findet sich in den beiden Themen der Fuge. Wir widmen uns dort einer systematischen Untersuchung von solchen degenerierten Modellen, für die bis jetzt keine rationalen Theorien bekannt waren. Neben den bereits bekannten Serien (minimale Modelle und $c=1$-Modelle) können wir zwei weitere Serien konstruieren, die eine ist parametrisiert durch $c = 1 - 6k, k \in \mathbb{N}$, die andere durch $c = c_{1,k} = 13 - k - k^{-1}, k \in \mathbb{N}$. Von beiden neuen Serien erarbeiten wir die Darstellungstheorie und damit die Struktur der rationalen Modelle. Ferner beweisen wir dabei, daß diese beiden neuen Serien die einzigen noch möglichen weiteren rationalen Modelle mit $c_{eff} \leq 1$ darstellen. Beide Serien haben analoge Konstruktionen für den supersymmetrischen Fall mit $N=1$, die ihrerseits die Möglichkeiten für rationale $N=1$-Modelle mit $c_{eff} \leq 3/2$ komplettieren.

- Dem erste Thema der Fuge, das sich mit der Serie $c = 1 - 6k, k \in \mathbb{N}$ befaßt, schließt sich ein Interludium mit einem weiteren wichtigen Resultat an. Wir konnten nämlich bei der Untersuchung des Modul-Raumes dieser Theorien überraschende Einsichten in den Raum aller TÆC gewinnen, da dieser zumindest in dem von uns untersuchten Ausschnitt alles andere als eine algebraische Varietät ist. Vielmehr tritt hier zum erstenmal direkt eine Verbindung von TÆC zu arithmetischer Geometrie zu Tage, die nicht allein ästhetisch von hohem Reiz ist.

- Dem Kernteil folgt als drittes Thema in der Fuga eine Toccata, die eine mögliche physikalische Anwendung der Modelle mit $c = 1 - 6k, k \in \mathbb{N}$ aufzeigt, den fraktionalen Quanten-Hall-Effekt (EQFH[viii]). Bei diesem Teil muß die Neuheit, Eleganz und Einfachheit des Modells zur Beschreibung des EQFH für den Moment als Rechtfertigung für seine Niederlegung genügen, da es naturgemäß schwieriger ist, wirklich gemessene Zahlen mit mathematisch rigoros beweisbaren Sätzen in Verbindung zu bringen. Allerdings spielt auch hier wieder arithmetische Geometrie eine verblüffende Rolle.

[viii] Effectus Quantus Fractionalis secundum Hall

- Die Coda faßt die aufgetretenen Themen noch einmal zusammen, listet kurz die erzielten Resultate auf und entläßt den Hörer[ix] mit einem Ausblick auf den weiteren Weg, den diese Arbeit hat vorzeichnen wollen, und dem Dank an die, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben.

Der Arbeit liegen folgende bereits publizierte Artikel zu Grunde:

R. Blumenhagen, M. Flohr, A. Kliem, W. Nahm, A. Recknagel, R. Varnhagen,
$\mathcal{W}$-Algebras with two and three Generators, Nucl. Phys. **B361** (1991) 255 [bes. Cap. II]

W. Eholzer, M. Flohr, A. Honecker, R. Hübel, R. Varnhagen,
$\mathcal{W}$-Algebras in Conformal Field Theory, erscheint in Proc. Trieste Workshop *Superstrings and Related Topics*, Trieste, July 1993 [bes. Cap. II]

W. Eholzer, M. Flohr, A. Honecker, R. Hübel, W. Nahm, R. Varnhagen,
Representations of $\mathcal{W}$-Algebras with Two Generators and New Rational Models, Nucl. Phys. **B383** (1992) 249 [Cap, IV]

M. Flohr,
$\mathcal{W}$-Algebras, New Rational Models and the Completeness of the $c = 1$ Classification, Commun. Math. Phys. **157** (1993) 179 [bes. Cap. IV]

M. Flohr,
Curiosities at Effective $c = 1$, Mod. Phys. Lett. **A9** (1994) 1071 [Cap. V]

M. Flohr, H.G. Kausch,
New Rational Models with $c = c_{1,q}$, in Vorbereitungl [Cap. VI]

M. Flohr, R. Varnhagen,
Infinite symmetry in the fractional quantum-Hall-effect, Jour. Phys. **A27** Math. Gen. (1994) 3999 [Cap. VII]

[ix] Leser

PRAE
LUDIUM

Es ist ein seltsames Mysterium, daß die Natur, allmächtig und blind zugleich, auf ihren Kreisen durch die unermeßlichen Abgründe des Raumes zuletzt ein Kind gezeugt hat, das zwar immer noch ihrer Macht unterworfen ist, dem aber als Gaben das Vermögen zu sehen, das Wissen um Gut und Böse und die Fähigkeit verliehen sind, die Werke seiner vernunftlosen Mutter zu beurteilen.

Bertrand Russell

2

Dux
Konforme Invarianz

Konforme Invarianz einer Theorie ist eigentlich keine neue Idee [197] und ist für Theorien mit Raumverzerrungen, die durch Gravitationeffekte entstehen, eigentlich eine sehr naheliegende Idee. Doch ändert sich die Struktur von Quantenfeldtheorien im allgemeinen nicht wesentlich, wenn konforme Invarianz eingeführt wird, da die konforme Gruppe im allgemeinen nur endlich viele weitere Erhaltungsgrößen liefert. In zwei Dimensionen ist das alles ganz anders. Hier ist die konforme Gruppe unendlich dimensional und liefert ausreichend viele Erhaltungsgrößen, um Quantenfeldtheorien exakt lösen zu können. Auch die Struktur der Theorien ist grundsätzlich anderer Art, da der Energie-Impuls-Tensor selbst direkt als Quantenfeld aufgefaßt werden kann. Im folgenden werden wir kurz skizzieren, was wir unter einer TÆC verstehen möchten. Auch werden wir diejenigen allgemeinen Resultate angeben, die wir im weiteren Teil der Arbeit verwenden werden. Der Zugang folgt im wesentlichen Ideen von P. Goddard [467] und W. Nahm [853, 857, 859], wo sich auch die Beweise für die hier zitierten Sätze finden, und arbeitet mit sogenannten chiralen Vertexoperatoren.

Der Anschauungs-Raum sei die Mannigfaltigkeit $M = S^1 \times \mathbb{R}$, auf dem die Felder $\phi(x,t)$ definiert seien. Es ist zweckmäßig, chirale, i.e. lichtartige, Koordinaten $u = t + x$ und $v = t - x$ einzuführen und auf M eine kausale Struktur über die vom Skalarprodukt $u \cdot v$ induzierte Metrik zu definieren. M ist damit eine minkowskische Mannigfaltigkeit. Ein Feld heißt *chiral*, wenn es von u oder v allein abhängt. Üblicherweise rechnet es sich einfacher euklidisch mit den komplexen Koordinaten $z = e^{-iu}$ und $\bar{z} = e^{-iv}$, wobei zuvor die Wick-Rotation $t \mapsto it$ angewandt wurde. Die Felder $\phi(z, \bar{z})$ sind dann *chiral*, wenn sie entweder holomorph oder antiholomorph sind.

Wenn wir z und $\bar{z}$ als unabhängige Koordinaten des $\mathbb{C}^2$ betrachten, können wir beide Sektoren der Theorie, den minkowskischen sowie den euklidischen, durch geeignete reelle Schnitte erhalten.

2.1 Vertexoperatoren und Lokalität

Sei im folgenden $\mathcal{H}$ der Hilbertraum der Zustände (bei nicht unitären Theorien hat man allerdings lediglich einen mit einem nicht degenerierten Skalarprodukt versehenen Raum der Zustände) und $\mathcal{F} = \coprod_{i\in I}\mathcal{F}_i$ ein dichter graduierter Teilraum mit $dim\,\mathcal{F}_i < \infty$ und I eine abzählbare Indexmenge. Weiter bezeichne $\overline{\mathcal{F}} = \prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$ den Abschluß von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}' = \coprod_{i\in I}\mathcal{F}_i^*$ den sogenannten graduierten Dualraum zu $\mathcal{F}$. Offenbar gilt dann $(\mathcal{F}')^* = \overline{\mathcal{F}}$. Mit Hilfe der auf $\mathcal{H}$ gegebenen Metrik sei ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $\overline{\mathcal{F}}$ über die natürliche Paarung zwischen $\mathcal{F}'$ und $\overline{\mathcal{F}}$ eingeführt. Schließlich bezeichne $\Psi_0 \in \mathcal{F}$ einen ausgezeichneten Zustand, das *Vakuum*, und $\mathcal{L}$ einen speziellen Operator, der das Vakuum annihiliert, i.e.

$$\mathcal{L}\Psi_0 = 0\,. \tag{2.1}$$

Dieser Operator wird später als der Generator der Translationen interpretiert werden und auch die oben geforderte Graduierung implementieren. Oft wird außerdem gefordert, daß das Vakuum ein zyklischer Zustand ist.
Wir betrachten nun lineare Operatoren $V : \mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}$. Der Raum dieser Operatoren stellt keine Algebra dar, da das Produkt zweier Operatoren nicht immer wohldefiniert ist. Mit $V = \sum_{i,j} V_{ij} : \mathcal{F}_i \longrightarrow \mathcal{F}_j$ sind die V_{ij} als diejenigen linearen Abbildungen eindeutig bestimmt, für die für alle $\phi\in\mathcal{F}_i$, $\psi\in\mathcal{F}_j$ gilt, daß $\langle\psi, V\phi\rangle = \langle\psi, V_{ij}\phi\rangle$ ist. Wir wollen sagen, das Produkt $VW : \mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}$ existiere, wenn $\sum_{k\in I}\langle\psi, V_{kj}W_{ik}\phi\rangle$ für alle $i,j\in I$ und alle $\phi\in\mathcal{F}_i$, $\psi\in\mathcal{F}_j$ absolut konvergent ist. $VW = \sum_{i,j}(VW)_{ij}$ ist dann durch $\langle\psi, (VW)_{ij}\phi\rangle$ definiert und assoziativ. Mit $\overline{End}\,\mathcal{F}$ sei der Raum der linearen Operatoren von $\mathcal{F}$ nach $\overline{\mathcal{F}}$, versehen mit dem oben definierten Produkt, bezeichnet.

Definition 1. *Ein* Vertexoperator *zu einem gegebenen Zustand $\psi\in\mathcal{F}$ ist ein für alle $z\in\mathbb{C}$ definierter Operator $V(\psi,z)\in\overline{End}\,\mathcal{F}$ mit den folgenden vier Eigenschaften:*
- *Angewandt auf das Vakuum hat der Operator die Gestalt*

$$V(\psi,z)\Psi_0 = e^{z\mathcal{L}}\psi\,, \tag{2.2}$$

- *für alle $\phi_1,\phi_2\in\mathcal{F}$ sind die Matrixelemente*

$$\langle\phi_1, V(\psi,z)\phi_2\rangle \tag{2.3}$$

algebraische Funktionen in z,
- *der Definitionsbereich von $V(\psi,z)$ kann induktiv auf alle* verallgemeinerten kohärenten Zustände *der Form $V(\psi_1,z_1)V(\psi_2,z_2)\ldots V(\psi_n,z_n)\phi$ für $\phi\in\mathcal{F}$ erweitert werden, falls das Produkt* radial geordnet *ist, i.e. $|z_1| > |z_2| > \ldots > |z_n|$,*
- *für $|z| > |\zeta|$ und für alle $\phi_1,\phi_2,\psi,\chi\in\mathcal{F}$ existiere eine analytische Fortsetzung, so daß gilt*

$$\langle\phi_1, V(\psi,z)V(\chi,\zeta)\phi_2\rangle \;=\; \varepsilon_{\psi\chi}\langle\phi_1, V(\chi,\zeta)V(\psi,z)\phi_2\rangle\,, \tag{2.4}$$

wo $\varepsilon_{\psi\chi}$ eine allein von den Zuständen ψ,χ abhängige Phase ist.

Die letzten beiden Forderung besagen zweierlei. Zum einen verlangen sie, daß das Produkt zweier Operatoren immer definiert ist. Zum anderen begründen sie sich aus der Tatsache, daß Matrixelemente von Produkten von Feldoperatoren nur wohldefiniert sind, wenn das Produkt eine bestimmte Ordnung der Punkte, um die die Feldoperatoren lokalisiert sind, respektiert. In minkowskischen Quantenfeldtheorien betrachtet man daher üblicherweise Vakuumerwartungswerte von zeitgeordneten Produkten. Beim Übergang zur euklidischen Theorie wird aus der Zeitordnung eine radiale Ordnung. Oft werden wir die letzte Forderung der Einfachheit halber als Operatoridentität

$$V(\psi,z)V(\chi,\zeta) = \varepsilon_{\psi\chi}V(\chi,\zeta)V(\psi,z)$$

schreiben, worunter wir immer das Verhalten der durch die Matrixelemente definierten Funktionen verstehen wollen. Das durch die obige Definition gegebene System $V(\cdot,\cdot)$ von Operatoren nennt man auch eine *Vertexoperatoralgebra*. Die Struktur einer Algebra erhält man, indem man in Definition 0 auch Operatoren $V(\psi,z)$ für allgemeine kohärente Zustände ψ zuläßt, so daß das System bezüglich des Produktes abgeschlossen ist. Diese Algebra-Struktur ist fundamental, nicht jedoch die Hilbertraum-Struktur (insbesondere die Vollständigkeit ist lediglich bequem).

DEFINITION -2. *Zwei Feldoperatoren $\xi(z),\eta(\zeta)$ heißen* lokal *zueinander, wenn ihre Matrixelemente $f_{\xi\eta}(z,\zeta) = \langle\phi_1, \xi(z)\eta(\zeta)\phi_2\rangle$ für $|z| > |\zeta|$ holomorphe Funktionen definieren, deren meromorphe Fortsetzungen die Gleichung $f_{\xi\eta}(z,\zeta) = \varepsilon_{\xi\eta} f_{\xi\eta}(\zeta,z)$ mit $\varepsilon_{\xi\eta} = \pm 1$ erfüllen.*
Ein lokales System *von Vertexoperatoren ist eine Menge $\mathcal{V} = \{V(\psi,z)\,|\psi\in\mathcal{F}\}$ von Vertexoperatoren, so daß alle Matrixelemente meromorphe Funktionen und alle Operatoren zueinander lokal sind.*
Eine nicht singuläre Transformation U operiert lokal *auf einem lokalen System $\mathcal{V}$, wenn für alle $\psi\in\mathcal{F}$ die Operatoren $UV(\psi,z)U^{-1}$ lokal zu allen Vertexoperatoren aus $\mathcal{V}$ sind.*

Der wesentliche Effekt dieser zusätzlichen Forderung ist, daß alle Matrixelemente wohldefinierte Funktionen darstellen. Allerdings lassen sich viele der weiter unten aus der Lokalität gewonnenen Folgerungen schon allein mit (2.4) ableiten, man spricht dann von *regulären Systemen* von Vertexoperatoren und *relativ lokal* operierenden Transformationen, die die Phasen bis auf das Vorzeichen invariant lassen.
Da $\mathcal{W}$-Algebren immer Algebren lokaler Systeme chiraler Felder sind, werden wir zunächst die unmittelbaren Folgerungen, die sich aus der Annahme von Lokalität ergeben, angeben.

LEMMA -7. EINDEUTIGKEIT. *Sei $\mathcal{V} = \{V(\psi,z)\,|\,\psi\in\mathcal{F}\}$ ein lokales System von Vertexoperatoren und sei $\tilde V(\phi,z)$ mit*
$$\tilde V(\phi,z)\Psi_0 = e^{z\mathcal{L}}\phi \tag{2.5}$$
ein für ein bestimmtes $\phi\in\mathcal{F}$ gegebener, zu allen Vertexoperatoren aus $\mathcal{V}$ lokaler Operator. Dann ist
$$\tilde V(\phi,z) = V(\phi,z)\,. \blacksquare \tag{2.6}$$

In einem lokalen System sind die Operatoren also durch die Eigenschaft (2.2) bereits eindeutig bestimmt. Insbesondere ist in einem lokalen System von Vertexoperatoren immer $V(\Psi_0,z) = \mathbb{1}$.

LEMMA -25/2. TRANSLATIONEN. *Wenn $U = e^{\lambda\mathcal{L}}$ lokal auf $\mathcal{V}$ operiert, so ist U der Translationsoperator, i.e. es ist*
$$e^{\lambda\mathcal{L}}V(\psi,z)e^{-\lambda\mathcal{L}} = V(\psi,z+\lambda) \tag{2.7}$$
für alle $V(\psi,z)\in\mathcal{V}$. $\blacksquare$

Als Korollar ergibt sich sofort durch Differentation nach λ an der Stelle 0 in Gleichung (2.7), daß
$$\frac{d}{dz}V(\psi,z) = [\mathcal{L},\,V(\psi,z)] = V(\mathcal{L}\psi,z)\,. \tag{2.8}$$
Sei nun U irgendeine lokal operierende Transformation, die das Vakuum invariant läßt, i.e. $U\Psi_0 = \Psi_0$. Dann gilt allgemeiner die Beziehung
$$V_U(\psi,z)\Psi_0 = e^{z\mathcal{L}_U}U\psi\,, \tag{2.9}$$
wobei $V_U(\psi,z) = UV(\psi,z)U^{-1}$ und $\mathcal{L}_U = U\mathcal{L}U^{-1}$ gesetzt ist.

LEMMA -91/5. DUALITÄT.[x] *Seien $V(\phi,z), V(\psi,z)\in\mathcal{V}$. Dann ist*
$$V(\psi,z)V(\phi,\zeta) = V(V(\psi,z-\zeta)\phi,\zeta)\,. \tag{2.10}$$

[x] Die Bezeichnung Dualität für Lemma −91/5 stammt von den sogenannten Duale-Resonanz-Modellen her, den Vorläufern der modernen Superstringtheorie [523, 673].

Das Produkt zweier Vertexoperatoren läßt sich also wieder durch einen Vertexoperator aus $\mathcal{V}$ ausdrücken. Dabei ist die rechte Seite als geeigneter Limes im Sinne von Definition 1 zu verstehen. ■

Dieses Resultat stellt die Grundlage einer präzisen Definition der noch einzuführenden Operatorproduktentwicklung dar und besagt an sich nichts weiter, als daß Vertexoperatoren einen Isomorphismus zwischen Feldern und Zuständen des Hilbertraumes vermitteln. Da Vertexoperatoren, wie wir noch sehen werden, eine C^*-Algebra bilden[xi], haben wir mit ihnen eine explizite Manifestation der Gelfand-Naimark-Segal-Konstruktion [443]. Daher werden wir oft einfach den Raum der Felder mit dem Raum $\mathcal{F}$ der Zustände, beziehungsweise mit dessen Vervollständigung identifizieren.

2.2 SU(1,1)-Invarianz

Bis jetzt haben wir lediglich Translationsinvarianz. Als nächsten Schritt wollen wir das Verhalten unter den Möbiustransformationen

$$z \mapsto \gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc = 1 \tag{2.11}$$

betrachten. Dies sind die auf der Riemannschen Zahlenkugel global definierbaren konformen Transformationen. Weiter bilden sie die Zusammenhangskomponente der Eins von SL(2,$\mathbb{C}$). Wenn wir vom euklidischen Bereich in den minkowskischen gehen, erhalten wir aus der Möbiusgruppe die SU(1,1). Die Möbiustransformationen sind Symmetrien der Theorie genau dann, wenn sie das Vakuum und damit die Vakuumerwartungswerte invariant lassen. So ist der Vakuumerwartungswert $\langle \Psi_0, V(\psi,z)\Psi_0\rangle$ dann und nur dann translationsinvariant, wenn $\mathcal{L}^+\Psi_0 = 0$ gilt, denn in diesem Fall ist

$$\langle V(\psi,z)\rangle \equiv \langle \Psi_0, V(\psi,z)\Psi_0\rangle = \langle \Psi_0, \psi\rangle = 0$$

für alle Vertexoperatoren von Zuständen orthogonal zum Vakuum. Dabei sind die Generatoren der Möbiusgruppe $L_1 = \mathcal{L}$, $L_{-1} = \mathcal{L}^+$ und $L_0 = \frac{1}{2}[\mathcal{L}^+, \mathcal{L}]$. (Für den Translationsgenerator $\mathcal{L}$ werden wir von nun an immer L_1 schreiben.)
Es sei zunächst ein Operator L_0 mit den Eigenschaften

$$[L_0, L_1] = L_1, \quad L_0^+ = L_0 \quad \text{und} \quad L_0\Psi_0 = 0 \tag{2.12}$$

eingeführt, der zusammen mit L_1 eine Untergruppe der Möbiustransformationen generiert.

Lemma -24. Skalentransformationen. *Sei L_0 ein Operator, der (2.12) genügt, sei $L_0\psi = h\psi$, und operiere $x^{L_0} \equiv e^{\lambda L_0}$ lokal auf $\mathcal{V}$. Dann ist*

$$x^{L_0} V(\psi,z) x^{-L_0} = x^h V(\psi, xz)\,. \blacksquare \tag{2.13}$$

Analog zur Translationsinvarianz lautet die infinitesimale Schreibweise

$$[L_0, V(\psi,z)] = \left(z\frac{d}{dz} + h\right) V(\psi,z)\,. \tag{2.14}$$

[xi] Dieser Punkt ist mathematisch subtil: Für $|z| < 1$ sind die Vertexoperatoren $V(\psi,z)$ operatorwertige Funktionen und nicht im Hilbertraum abschließbar, können damit nicht zu einer C^*-Algebra gehören. Für $|z| > 1$ liegt ihr Bildbereich ohnehin nicht im Hilbertraum. Nur für $|z| = 1$ stellen sie operatorwertige Distributionen dar, deren mit Testfunktionen f verschmierte Operatoren $\int_0^{2\pi} V(\psi, e^{i\phi}) f(\phi) d\phi$ die Operatoren der C^*-Algebra liefern.

Die Lemmata $-25/2$ und -24 gestatten es auch, Zwei-Punkt-Funktionen zu berechnen. Für z, ζ, x, ξ beliebig mit $|z| > |\zeta|$ und $|x| > |\xi|$ ist dann

$$\begin{aligned}\langle V(\psi, z)V(\phi, \zeta)\rangle &\equiv \langle \Psi_0, V(\psi, z)V(\phi, \zeta)\Psi_0\rangle \\ &= \left(\frac{x-\xi}{z-\zeta}\right)^{h(\psi)+h(\phi)} \langle V(\psi, x)V(\phi, \xi)\rangle\,,\end{aligned}$$

wobei $L_0\psi = h(\psi)\psi$, $L_0\phi = h(\phi)\phi$ und $L_1^+\Psi_0 = 0$ sein soll. Die Zwei-Punkt-Funktion verhält sich also bezüglich Translationen und Streckungen wie eine automorphe Funktion vom Gewicht $h(\psi) + h(\phi)$.
Zusammen mit $L_{-1} = L_1^+$ erhält man eine $\mathfrak{su}(1,1)$-Lie-Algebra

$$[L_0,\, L_{\pm 1}] = \pm L_{\pm 1}\,,\quad [L_1,\, L_{-1}] = 2L_0\,, \tag{2.15}$$

von der wir annehmen wollen, daß sie das Vakuum annihiliert, i.e.

$$L_n\Psi_0 = 0 \;\text{ für }\; n = -1, 0, 1\,. \tag{2.16}$$

Die durch L_{-1} erzeugten Transformationen heißen *spezielle konforme Transformationen*, und es gilt, falls sie lokal auf $\mathcal{V}$ operieren, daß

$$e^{\mu L_{-1}}V(\psi, z)e^{-\mu L_{-1}} = (1-\mu z)^{-2h}V(\psi, z(1-\mu z)^{-1})\,, \tag{2.17}$$

wobei noch $L_0\psi = h\psi$ und $L_{-1}\psi = 0$ gefordert wird. Die folgende Proposition faßt die bis dahin gewonnenen Ergebnisse zusammen.

PROPOSITION -209/7. SU(1,1)-INVARIANZ. *Seien L_n, $n = -1, 0, 1$ Operatoren, die eine $\mathfrak{su}$(1,1)-Lie-Algebra darstellen und das Vakuum annihilieren, i.e. $L_n\Psi_0 = 0$ für $n = -1, 0, 1$. Ferner möge die durch sie generierte Möbiusgruppe lokal auf $\mathcal{V}$ operieren. Wenn $\psi \in \mathcal{F}$ mit $L_0\psi = h\psi$ und $L_{-1}\psi = 0$ ein $\mathfrak{su}$(1,1)-*Tiefstgewichtszustand *(SPA[xii]) und $\gamma \in SU(1,1)$ ist, so gilt*

$$D_\gamma V(\psi, z)D_\gamma^{-1} = \left(\frac{d\gamma(z)}{dz}\right)^h V(\psi, \gamma(z))\,, \tag{2.18}$$

wobei die Darstellung D der Möbiusgruppe auf $\mathcal{V}$ für $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ gegeben ist durch

$$D_\gamma = \exp\left(\frac{b}{d}L_1\right) d^{-2L_0} \exp\left(-\frac{c}{d}L_{-1}\right)\,.$$

Vertexoperatoren zu $\mathfrak{su}$(1,1)-SPA sind also automorphe Funktionen vom konformen Gewicht *h, das von nun an auch als die* Dimension *$h(\psi)$ des Feldes $V(\psi, z)$ bezeichnet wird. Äquivalent zu (2.18) ist die infinitesimale Schreibweise*

$$[L_n,\, V(\psi, z)] = z^{-n}\left(z\frac{d}{dz} - (n-1)h\right)V(\psi, z), n = -1, 0, 1\,. \tag{2.19}$$

Felder, die (2.18) oder (2.19) erfüllen, heißen auch quasiprimär *oder $\mathfrak{su}$(1,1)-*primär. ∎

In der Mathematik arbeitet man üblicherweise mit Höchstgewichtszuständen. Die hier gewählte Konvention will die physikalische Bedeutung des Spektrums von L_0 als Energie deutlicher machen, das deshalb nach unten beschränkt sein soll. Weiter sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß die $\mathfrak{su}$(1,1) Lie-Algebra (2.15) lokal isomorph zu $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ ist. Sie stellt jedoch keine kompakte Form der letzteren dar, so daß es keine endlichdimensionalen irreduziblen unitären Darstellungen gibt.

[xii] Status Ponderis Altissimi

Für quasiprimäre Felder kann man auch die Drei-Punkt-Funktionen berechnen. Mit den Bezeichnungen $L_0\psi_j = h(j)\psi_j$ und $h_{ij} = h(i) + h(j) - h(6-i-j)$ erhält man

$$\langle V(\psi_1, z_1)V(\psi_2, z_2)V(\psi_3, z_3)\rangle = \prod_{i<j} \left(\frac{w_i - w_j}{z_i - z_j}\right)^{h_{ij}} \langle V(\psi_1, w_1)V(\psi_2, w_2)V(\psi_3, w_3)\rangle . \tag{2.20}$$

Wenn also SU(1,1) lokal auf $\mathcal{V}$ operiert und das Vakuum invariant läßt, sind die Zwei- und Drei-Punkt-Funktionen bereits eindeutig durch das Transformationsverhalten der Vertexoperatoren festgelegt.

2.3 Hermitizität und L_0-Graduierung

Observablen in TÆQ sind im allgemeinen selbstadjungierte oder zumindest hermitesche Operatoren, haben also ein reelles, i.e. physikalisch meßbares, Spektrum. Als Operatoren in linearen Räumen besitzen sie eine Vektorraum-Struktur und lassen unter bestimmten Bedingungen auch die Verknüpfung zu (siehe oben), bilden also eine Algebra. Wir könnten nun Erwartungswerte algebraisch definieren, wenn eine Norm und eine Adjunktion auf der Observablen-Algebra existierten, diese also eine C^*-Algebra bildete.
Da in der euklidischen Theorie die radiale Richtung mit der Zeit korrespondiert, vermittelt L_0 so etwas wie die Translationen in der Zeit. Tatsächlich stellt $L_0 + \bar{L}_0$ den Energieoperator einer allgemeinen, nicht chiralen konformen Feldtheorie dar, die als direkte Summe zweier (meist identischer) chiraler Feldtheorien gegeben ist. Ein allgemeines Feld $\Phi(z, \bar{z})$ hat dann ein $\mathfrak{su}(1,1)$-Gewicht $(h, \bar{h})$. Es ist daher sinnvoll, für L_0 ein beschränktes Spektrum zu fordern.
Wir wollen zunächst voraussetzen, daß L_0 in $\mathcal{F}$ diagonalisiert werden kann, so daß $\mathcal{F}$ die direkte Summe der Eigenräume von L_0 ist, i.e.

$$\mathcal{F} = \coprod_\lambda \mathcal{F}_\lambda, \quad \text{wo} \quad L_0\psi = \lambda\psi \quad \forall \psi \in \mathcal{F}_\lambda . \tag{2.21}$$

Da L_1 und L_{-1} die Eigenwerte von L_0 um ± 1 ändern, wollen wir weiter annehmen, daß sie die entsprechenden Eigenräume ineinander abbilden, also $L_{\pm 1} : \mathcal{F}_\lambda \longrightarrow \mathcal{F}_{\lambda \pm 1}$. Wenn dann ψ ein $\mathfrak{su}(1,1)$-RPA ist und ferner $L_1^+ = L_{-1}$ gesetzt wird, so hat man

$$\|L_1\psi\|^2 = \langle \psi,\, L_{-1}L_1\psi\rangle = 2h\|\psi\|^2 , \tag{2.22}$$

so daß zwingend $h \geq 0$ sein muß, wenn der Raum ein positiv definites Skalarprodukt besitzt.
Sei nun das Spektrum von L_0 nicht negativ und somit beschränkt. Dann folgt mit Standardargumenten der Darstellungstheorie, daß $\mathcal{F}$ die direkte Summe von $\mathfrak{su}(1,1)$-RPA ist. Im folgenden sei immer davon ausgegangen, daß $\mathcal{F}$ die direkte Summe von $\mathfrak{su}(1,1)$-RPA ist und daß der durch Ψ_0 erzeugte Unterraum der einzige SU(1,1)-invariante ist. Wenn das Skalarprodukt positiv definit ist, folgt daraus umgekehrt, daß das Spektrum von L_0 nicht negativ und der Unterraum $\mathcal{F}_0$ eindimensional ist. Außerdem folgt, daß alle Eigenräume $\mathcal{F}_\lambda$ endlichdimensional sind. Dieser Fall des positiv definiten Skalarproduktes werde als der *euklidische Bereich* der Theorie bezeichnet.
Es wird sich aber zeigen, daß wir auch den allgemeineren Fall betrachten müssen, bei dem entartete L_0-Eigenräume auftreten können, i.e.

$$\mathcal{F} = \coprod_\lambda \mathcal{F}_\lambda, \quad \text{wo} \quad L_0\psi = \lambda\psi + \psi' \text{ mit } \psi' \in \mathcal{F}_\lambda \quad \forall \psi \in \mathcal{F}_\lambda . \tag{2.23}$$

Die Wirkung von $L_{\pm 1}$ soll sich jedoch nicht ändern. Wenn das Spektrum von L_0 nicht negativ ist, dann bleibt die Aussage gültig, $\mathcal{F}$ sei direkte Summe von $\mathfrak{su}(1,1)$-RPA. Die Hermitizität von

$L_n, n = -1, 0, 1$ wird davon ebenfalls nicht berührt. Diesen Fall wollen wir aus später klar werdenden Gründen *logarithmische* TÆC nennen.
Die Hermitizitätsbedingungen $L_n^+ = L_{-n}$ und die Gleichung (2.19) implizieren für $\mathfrak{su}(1,1)$-SPA ψ, daß

$$V^+(\psi, z) = z^{-2h}\,(V(\psi, 1/z^*))^+ \tag{2.24}$$

ebenfalls ein quasiprimäres Feld vom Gewicht h ist. Man postuliert, daß für jeden $su(1,1)$-SPA ψ der Grenzwert

$$\psi^+ = \lim_{\varepsilon\to 0} V^+(\psi, \varepsilon)\Psi_0 \tag{2.25}$$

existiert und daß $V^+(\psi, z)$ lokal bezüglich $\mathcal{V}$ ist. Dies ist eine Adjunktion mit der aus $\mathcal{V}$ eine C^*-Algebra gewonnen werden kann, siehe dazu Fußnote (xi). Die Eindeutigkeit (Lemma -7) impliziert dann

$$V^+(\psi, z) = V(\psi^+, z)\,. \tag{2.26}$$

Ein $\mathfrak{su}(1,1)$-SPA mit $\psi^+ = \psi$ heißt *reell*, und es ist immer möglich, im Raum aller $\mathfrak{su}(1,1)$-SPA vom Gewicht h, $\mathcal{F}^Q(h) = \{\psi \in \mathcal{F} | L_0\psi = h\psi,\ L_{-1}\psi = 0\}$, eine reelle Basis zu wählen. Für die Zwei-Punkt-Funktionen von $\psi \in \mathcal{F}^Q(h)$ erhält man dann

$$\langle V(\psi^+, z)V(\psi, \zeta)\rangle = \left(\frac{x-\xi}{z-\zeta}\right)^{2h} \langle V(\psi^+, x)V(\psi, \xi)\rangle\,, \tag{2.27}$$

also insbesondere für lokale Systeme die Bedingung $2h \in \mathbb{Z}$. Da alle Zustände durch Anwenden von L_1 auf $\mathfrak{su}(1,1)$-SPA erzeugt werden können, muß das Spektrum von L_0 halbzahlig sein. Wenn ψ reell ist, erkennt man mit Hilfe von Gleichung (2.4), daß im Falle $\varepsilon_{\psi\psi} = 1$ immer $h \in \mathbb{Z}$ und im Falle $\varepsilon_{\psi\psi} = -1$ immer $h \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ ist, i.e. daß lokale Vertexoperatoren entweder bosonische oder fermionische Felder sind.

2.4 Operatorproduktentwicklung

Die Operatorproduktentwicklung (EXPO) wurde zuerst von Wilson [1087, 1151] eingeführt, zunächst um Quantenfeldtheorien ohne Lagrangefunktionen definieren zu können. Die Idee ist, daß ein System von Observablen $\{\Phi_i(z) | i \in I\}$, also insbesondere lokaler Operatoren, eine assoziative Algebra (mit Eins) bildet, solange die Punkte, um die die Operatoren lokalisiert sind, sehr nahe beieinander liegen. Ein Produkt zweier "nahe beieinander liegender" Operatoren hat dann eine asymptotische Entwicklung in jeweils mit analytischen Funktionen multiplizierten Observablen,

$$\Phi_a(x)\Phi_b(y) = \sum_{i\in I} \frac{f^i_{ab}(x-y)}{((x-y)^2)^{(d_a+d_b-d_i)/2}}\Phi_i(y)\,,$$

wo die d_j die Skalen- oder Massendimensionen der Felder Φ_j und $f^i_{ab}(x-y)$ in einer Umgebung von y nicht divergierende Funktionen sind[xiii]. Dabei heißt "nahe beieinander liegend", daß x und y raumartig mit $(x-y)^2 \approx 0$ sind. Wenngleich EXPO auf elegante Weise einen Lagrange-freien Zugang zu einer Quantenfeldtheorie zu eröffnen scheinen, ist es im allgemeinen Fall nicht möglich, eine mathematisch einwandfreie Definition zu geben, – die Situation ändert sich jedoch entscheidend im Falle zweidimensionaler TÆC.
Dazu seien die (Fourier-) Moden eines Feldes $V(\psi, z)$ mit $L_0\psi = h\psi$ über die Entwicklung

$$V(\psi, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}+h} V_n(\psi) z^{n-h} \tag{2.28}$$

[xiii] Es können unter bestimmten Umständen logarithmische Divergenzen hinzukommen.

eingeführt. Gemäß Gleichung (2.7) ist dann natürlich

$$\psi = V_h(\psi)\Psi_0 \quad \text{und} \quad V_n(\psi)\Psi_0 = 0 \; \forall n < h\,. \tag{2.29}$$

Offensichtlich sind die Moden von Bosonen ganz- und die von Fermionen halbzahlig. Die Gleichung (2.19) ist dann äquivalent zu dem System von Vertauschungsrelationen

$$[L_m, V_n(\psi)] = (n - m(h-1))\, V_{m+n}(\psi), \;\; m = -1, 0, 1 \tag{2.30}$$

der homogenen Komponenten von $V(\psi, z)$. Insbesondere ist $[L_0, V_n(\psi)] = nV_n(\psi)$, so daß $V_n(\psi)$ den Eigenwert von L_0 um n erhöht.
Diese Entwicklung nach Moden kann natürlich auch in der Dualitätsrelation (2.10) angewandt werden. Diese nimmt die folgende Form an, die gerade eine Operatorproduktentwicklung im oben definierten Sinne darstellt.

Proposition -143/4. Operatorproduktentwicklung. *Seien $V(\psi, z), V(\phi, \zeta) \in \mathcal{V}$ und $\psi \in \mathcal{F}_{h(\psi)}$, $\phi \in \mathcal{F}_{h(\phi)}$. Dann ist für alle $|z| > |\zeta|$ die Operatorproduktentwicklung gegeben durch*

$$V(\psi, z)V(\phi, \zeta) = \sum_{r\geq 0} (z-\zeta)^{r-h(\psi)-h(\phi)} V(\chi_r, \zeta)\,, \tag{2.31}$$

wobei $r \in \mathbb{Z} + h(\psi) + h(\phi)$ und die Felder der linken Seite durch die Zustände

$$\chi_r = V_{r-h(\phi)}(\psi)\phi \in \mathcal{F}_r \tag{2.32}$$

gegeben werden. ■

Dies ist, zumindest für lokale Systeme, eine mathematisch einwandfreie Formulierung der EXPO basierend allein auf Lokalität und Dualität, wobei letztere Ausdruck der Assoziativität der EXPO ist. Das Operatorprodukt kann als Summe über lokale Operatoren geschrieben werden, wobei der singuläre Teil von endlicher Ordnung ist. Offensichtlich sind Kommutatoren durch den singulären Teil der EXPO bestimmt und können in der Tat mit dessen Hilfe berechnet werden. Interessanterweise gilt jedoch für $\mathcal{W}$-Algebren auch die Umkehrung, daß die EXPO durch den Kommutator bereits vollständig bestimmt ist. Es sei noch angemerkt, daß $V_n(\psi)^+ = V_{-n}(\psi^+)$ ist und somit für reelle ψ die Moden der Vertexoperatoren der Hermitizitätsbedingung $V_r(\psi)^+ = V_{-r}(\psi)$ genügen.

2.5 Konforme Invarianz und die Virasoro-Algebra

Wir haben bereits gesehen, wie durch Einführen chiraler Koordinaten ein Zusammenhang zwischen Skalarprodukt und kausaler Struktur hergestellt wird. Eine physikalisch sinnvolle Theorie muß eine kausale Stuktur respektieren, was im allgemeinen Invarianz des Skalarproduktes unter der Lorentz-Gruppe beziehungsweise der ganzen Poincaré-Gruppe bedeutet. Sei genauer (M, g) eine Mannigfaltigkeit M versehen mit einer Metrik g der Signatur (p, q). Dann ist das durch die Metrik definierte Skalarprodukt invariant unter $\mathrm{SO}(p, q)$ zuzüglich der Translationen. Wenn die Theorie allerdings die zusätzliche Eigenschaft der Skaleninvarianz besitzt, wie es zum Beispiel bei masselosen Theorien und besonders bei statistischen Systemen am Phasenübergang zweiter Ordnung der Fall ist, so braucht auch die Metrik g nur bis auf einen Skalenfaktor invariant zu sein, i.e.

$$g_{\mu\nu}(x) \mapsto g'_{\mu\nu}(x') = \lambda(x')g_{\mu\nu}(x')\,. \tag{2.33}$$

Transformationen mit dieser Eigenschaft sind die *konformen* oder winkeltreuen Transformationen. Für $M = \mathbb{R}^{p,q}$, $p + q \neq 2$ kann die konforme Gruppe im wesentlichen in $\mathrm{SO}(p+1, q+1)$ eingebettet werden. Ist hingegen $M = \mathbb{R}^{1,1}$, so ist die konforme Gruppe des kompaktifizierten

Raumes $\hat{M} = S^1 \times S^1$ der Signatur $(1,1)$ unendlichdimensional. Beim Übergang ins Euklidische wird konforme Invarianz gleichbedeutend mit Holomorphie oder Antiholomorphie von Funktionen, denn jede auf der ganzen Riemannschen Zahlenkugel (anti-)holomorphe Funktion, und das sind gerade die Möbiustransformationen, bildet diese konform in sich ab. Auf $S^1 \times S^1$ ist die konforme Gruppe gerade $\mathit{Diff}(S^1) \times \mathit{Diff}(S^1)$, also unendlichdimensional und wird gerade durch die Lie-Algebra der linksinvarianten Vektorfelder $L_n = z^{n+1}\partial_z$, $n \in \mathbb{Z}$, mit $[L_m, L_n] = (n-m)L_{m+n}$, generiert [577]. Die gerade gemachten Ausführungen sollen verdeutlichen, daß man zwar generell im zweidimensionalen Fall die unendlichdimensionale Algebra der infinitesimalen konformen Transformationen hat, diese aber nur in dem speziellen Fall $M = \hat{M}$ vollständig zur unendlichdimensionalen Gruppe integriert werden kann.

Wir wollen annehmen, es gäbe einen $\mathfrak{su}(1,1)$-SPA ω_c mit $h(\omega_c) = 2$, den sogenannten *konformen Zustand*, dessen assoziierter Vertexoperator durch

$$V(\omega_c, z) = T(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n z^{n-2} \tag{2.34}$$

gegeben sei, so daß die Moden $L_n, n \in \mathbb{Z}$ die Gleichungen (2.30) erfüllen. Aus der Definition von Vertexoperatoren, Gleichung (2.7), erhält man dann, daß $\omega_c = L_2\Psi_0$ ist, und aus (2.34), daß auch tatsächlich $L_{-1}\omega_c = 0$, also ω_c ein $\mathfrak{su}(1,1)$-SPA ist. Außerdem kann man o.B.d.A. ω_c als reell annehmen. Damit hat man dann Hermitizität für alle Komponenten, i.e.

$$L_n^+ = L_{-n} \quad \forall n \in \mathbb{Z}\,. \tag{2.35}$$

Wie nicht anders zu erwarten, ist $T(z)$ der Generator der konformen Transformationen und stellt eine Komponente des Energie-Impuls-Tensors dar.

Der Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ ist eine symmetrische, divergenzfreie Größe, i.e. $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ und $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, und generiert Erhaltungsgrößen in Form von Kontinuitätsgleichungen. Wenn Skaleninvarianz vorliegt, ist überdies der Energie-Impuls-Tensor spurfrei, $T^\mu_\mu = 0$. In zwei Dimensionen bedeuten diese Bedingungen an $T_{\mu\nu}$, daß in chiralen Koordinaten $T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0$ und $T_{zz} = T(z)$, $T_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{T}(\bar{z})$ sind, also $T_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = T(z)(dz)^2 + \bar{T}(\bar{z})(d\bar{z})^2$. Das Verhalten chiraler Felder unter einer Transformation $z \mapsto z(1+\varepsilon(z))$ wird dann durch den Kommutator $\delta\phi(\zeta) = [Q_\varepsilon, \phi(\zeta)]$ mit den "Ladungen"

$$Q_\varepsilon = \oint dz\, \varepsilon(z) T(z)$$

gegeben, wobei das Integral längs eines um den Ursprung geschlossenen Weges zu nehmen ist.

Die Operatorproduktentwicklung (2.31) des Energie-Impuls-Tensors mit sich selbst ergibt sich für $|z| > |\zeta|$ zu

$$T(z)T(\zeta) \sim \frac{c/2}{(z-\zeta)^4}\mathbb{1} + \frac{2T(\zeta)}{(z-\zeta)^2} + \frac{1}{(z-\zeta)}\frac{dT(\zeta)}{d\zeta}\,, \tag{2.36}$$

wobei die hier eingeführte Schreibweise $A(z,\zeta) \sin B(z,\zeta)$ bedeutet, daß beide Seiten bis auf Terme übereinstimmen, die für $z = \zeta$ nicht singulär sind. Dieses Ergebnis versetzt uns nun in die Lage, die Kommutatoren der Moden des Energie-Impuls-Tensors zu berechnen.

Proposition -125/3. Virasoro-Algebra. *Seien L_n, $n \in \mathbb{Z}$ die Moden eines Vertexoperators zu einem konformen Zustand. Dann ist der Kommutator gegeben durch*

$$[L_m, L_n] \;=\; (n-m)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}\,. \tag{2.37}$$

Die Zahl c wird auch zentrale Ladung *genannt.* ∎

Genauer handelt es sich bei c um einen Operator, eine *zentrale Erweiterung* der Witt-Algebra, die aber in jeder irreduziblen Darstellung als Zahl angesehen werden kann. Sie resultiert aus

der Tatsache, daß man eigentlich, wegen der Normierungsbedingung an die Zustände, auf einem projektiven Hilbertraum arbeitet. Statt projektive Darstellungen zu betrachten kann man jedoch auch das Zentrum der Lie-Algebra bzw. -Gruppe um ein zusätzliches Element, die zentrale Ladung, erweitern.
Man kann nun die Resultate bezüglich der $\mathfrak{su}(1,1)$-Algebra (2.15) auf diese größere Algebra verallgemeinern. Für den euklidischen Bereich der Theorie kann man $\mathcal{F}$ sogar als direkte Summe von irreduziblen RPA der Virasoro-Algebra (2.37) schreiben, i.e. Darstellungen, die durch *(konforme) Tiefstgewichtszustände* ψ generiert werden. Solche Zustände sind dadurch definiert, daß sie für ein h

$$L_0\psi = h\psi, \quad L_n\psi = 0 \ \ \forall n < 0 \tag{2.38}$$

erfüllen. Den Raum aller dieser Zustände, die (2.38) für ein festes *(konformes) Gewicht* h genügen, werde mit $\mathcal{F}^P(h)$ bezeichnet. Das Operatorprodukt zwischen $T(z)$ und einem Vertexoperator zu einem konformen Tiefstgewichtszustand $\psi \in \mathcal{F}^P(h)$ hat dann nach (2.31) die Entwicklung

$$T(z)V(\psi,\zeta) \sim \frac{h}{(z-\zeta)^2}V(\psi,\zeta) + \frac{1}{(z-\zeta)}\frac{d}{d\zeta}V(\psi,\zeta)\,, \tag{2.39}$$

aus der mit Hilfe von (2.38) und (2.8) der Kommutator

$$[L_m, V(\psi,z)] = z^{-m}\left(z\frac{d}{dz} - (m-1)h\right)V(\psi,z),\ m \in \mathbb{Z} \tag{2.40}$$

berechnet werden kann, was (2.19) auf die ganze Virasoro-Algebra verallgemeinert. Dies impliziert natürlich auch die Verallgemeinerung von Gleichung (2.30) für die Moden von $V(\psi,z)$,

$$[L_m, V_n(\psi)] = (n - m(h-1))\,V_{m+n}(\psi),\ m \in \mathbb{Z},\ \forall n\,. \tag{2.41}$$

Ein Feld $V(\psi,z)$, daß (2.40) beziehungsweise (2.41) erfüllt, heißt *primäres Feld* vom Gewicht $h(\psi)$, der es erzeugende Virasoro-SPA auch heißt *primärer Zustand.*
Damit sind wir nun in der Lage zu definieren, was wir unter einer konformen Feldtheorie im Rahmen dieser Arbeit verstehen wollen.

DEFINITION -238/5. *Eine* (meromorphe) konforme Feldtheorie *ist ein Quadrupel* $(\mathcal{H},\mathcal{F},\mathcal{V},T)$, *bestehend aus einem Hilbertraum* $\mathcal{H}$, *einem dichten Teilraum* $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$, *der mit einer explizit gegebenen Basis versehen ist, einem lokalen System* $\mathcal{V} = \{V(\psi,z),\psi \in \mathcal{F}|\varepsilon_{\psi\psi'} = \pm 1\}$ *von Vertexoperatoren, und einer konformen Struktur* T, *die durch die Virasoro-Algebra der Moden eines spurfreien Energie-Impuls-Tensors* $T(z)$ *gegeben wird.*
Zwei solche konforme Feldtheorien $(\mathcal{H},\mathcal{F},\mathcal{V},T)$ *und* $(\mathcal{H}',\mathcal{F}',\mathcal{V}',T')$ *heißen* äquivalent, *wenn es einen Hilbertraum-Isomorphismus* $U:\mathcal{H}\mapsto\mathcal{H}'$ *gibt, so daß*

$$U(\mathcal{F}) = \mathcal{F}', \quad UV(\psi,z)U^{-1} = V(U\psi,z), \quad UT(z)U^{-1} = T'(z)\,.$$

Bis jetzt haben wir nur chirale Feldtheorien betrachtet. Im allgemeinen Fall hat man als Symmetrie-Algebra eine doppelte Kopie der Virasoro-Algebra mit (meist identischen) zentralen Ladungen c und $\bar{c}$. Alle Felder zerfallen in einen holomorphen und antiholomorphen Anteil mit Gewichten h bzw. $\bar{h}$. Es bedeutet daher keine Einschränkung, nur chirale Algebren zu betrachten, denn der nicht chirale Fall läßt sich immer leicht aus solchen rekonstruieren.
Die volle konforme Kovarianz erlaubt es uns, auch die Vier-Punkt-Funktionen weitgehend zu bestimmen. Allgemein reduziert sich eine n-Punkt-Funktion quasiprimärer Felder Ψ_k vermittels projektiver Invarianz (i.e. Möbius-Transformationen) zu

$$\langle\prod_{i=1}^{N}\Psi_{l_i}(z_i,\bar{z}_i)\rangle = \prod_{i<j}(z_i-z_j)^{\gamma_{ij}}(\bar{z}_i-\bar{z}_j)^{\bar{\gamma}_{ij}}Y(x_{ij}^{kl},\bar{x}_{ij}^{kl})\,,$$

wobei γ_{ij} eine beliebige Lösung von $\sum_{j\neq i}\gamma_{ij} = 2h_i$ ist, und $x_{ij}^{kl} = \frac{(z_i-z_j)(z_k-z_l)}{(z_i-z_l)(z_k-z_j)}$ einen der $(N-3)$ anharmonischen Quotienten bezeichnet (oder auch Kreuzungsverhältnis), von denen Y als ansonsten beliebige Funktion abhängt (analog für $\bar{\gamma}_{ij}$ und $\bar{x}_{ij}^{kl}$. Die Zahl $N-3$ erklärt sich daraus, daß mittels projektiver Invarianz immer drei der Punkte fixiert werden können. Wir definieren daher die Funktionen

$$G_{nm}^{lk}(x,\bar{x}) = \langle \Phi_k(\infty,\infty)\Phi_l(1,1)\Phi_n(x,\bar{x})\Phi_m(0,0)\rangle \tag{2.42}$$

vierer primärer Felder Φ_i, auf die sich letzlich alle Vier-Punkt-Funktionen zurückführen lassen. Die Assoziativität der EXPO übersetzt sich in die sogenannte Kreuzungs-Symmetrie

$$G_{nm}^{lk}(x,\bar{x}) = G_{nl}^{mk}(1-x,1-\bar{x}) = x^{-2h_n}\bar{x}^{-2\bar{h}_n}G_{nk}^{lm}(\frac{1}{x},\frac{1}{\bar{x}})\,.$$

Wenn wir die EXPO explizit einsetzen, erhalten wir die Partialwellen-Zerlegung

$$G_{nm}^{lk}(x,\bar{x}) = \sum_p C_{nm}^p C_{lkp}\mathcal{F}_{nm}^{lk}(p|x)\bar{\mathcal{F}}_{nm}^{lk}(p|\bar{x})\,, \tag{2.43}$$

die in rechts- und linkschiralen Anteil faktorisiert. Die Konstanten C_{ij}^k und C_{ijk} sind die Strukturkonstanten der Operator-Algebra und werden weiter unten definiert. Die analytischen Funktionen $\mathcal{F}_{nm}^{lk}(p|x)$ hängen von fünf konformen Dimensionen ab (sowie der zentralen Ladung) und heißen *konforme Blöcke*, da jede n-Punkt-Funktion aus ihnen aufgebaut ist. Die Kreuzungs-Symmetrie lautet, ausgedrückt in den konformen Blöcken,

$$\sum_p C_{nm}^p C_{lkp}\mathcal{F}_{nm}^{lk}(p|x)\bar{\mathcal{F}}_{nm}^{lk}(p|\bar{x}) = \sum_q C_{nl}^q C_{mkq}\mathcal{F}_{nl}^{mk}(q|1-x)\bar{\mathcal{F}}_{nl}^{mk}(q|1-\bar{x})\,. \tag{2.44}$$

Die Kenntnis der konformen Blöcke $\mathcal{F}(x)$ ergäbe damit ein Gleichungssystem, das die Strukturkonstanten und die konformen Dimensionen bestimmte. Allerdings ist die exakte Form der konformen Blöcke nur für bestimmte Fälle zu ermitteln.

2.6 Normalgeordnete Produkte und W-Algebren

Dieser Abschnitt widmet sich nun schließlich der Definition von $\mathcal{W}$-Algebren als speziellen, chiralen $\mathfrak{su}(1,1)$-invarianten Feldalgebren. Dabei wird sich insbesondere herausstellen, daß im hier betrachteten Fall die EXPO exakt dieselbe Information enthält, wie die Kommutatoren der Fouriermoden, denn der reguläre Teil von ihr ist durch die im singulären Teil auftretenden Felder bereits vollständig bestimmt.

Wie bereits weiter oben bemerkt wurde, können alle Zustände aus quasiprimären erzeugt werden. Über den durch die Vertexoperatoren gegebenen Isomorphismus $\psi \leftrightarrow V_h(\psi)\Psi_0$ zwischen den Zuständen des Vakuumsektors von $\mathcal{H}$ und den Feldern können auch alle Felder aus quasiprimären erzeugt werden. Daher sei von nun an angenommen, daß man in dem lokalen System $\mathcal{V}$ ein Erzeugendensystem von quasiprimären, rein reellen oder rein imaginären Feldern $\phi_i(z) \equiv V(\phi_i, z)$ mit $L_0\phi_i = h(i)\phi_i$ ausgewählt habe. Ihre Moden seien mit $\phi_{i,n}$ bezeichnet. Aus diesem Erzeugendensystem erhält man dann die sogenannten *derivativen Felder*

$$V(L_1^k\phi_i, z) = \left(\frac{d}{dz}\right)^k \phi_i(z)\,.$$

Weiter kann man für quasiprimäre Felder leicht eine explizitere Form der Zwei- und Drei-Punkt-Funktionen (2.18) bzw. (2.25) angeben, indem man die Laurent-Entwicklung der Felder einsetzt und $\mathfrak{su}(1,1)$-Invarianz ausnutzt. Man erhält

$$\langle\phi_i(z)\phi_j(\zeta)\rangle = \frac{d_{ij}}{(z-\zeta)^{h(i)+h(j)}}, \tag{2.45}$$

$$\langle\phi_i(z_i)\phi_j(z_j)\phi_k(z_k)\rangle = \prod_{i'<j'} \frac{1}{(z_{i'}-z_{j'})^{k(i'j')}} C_{ijk}, \tag{2.46}$$

wobei

$$d_{ij} \equiv \langle\Psi_0,\, \phi_{i,-h(i)}\phi_{j,h(j)}\Psi_0\rangle, \tag{2.47}$$

$$C_{ijk} \equiv \langle\Psi_0,\, \phi_{i,-h(i)}\phi_{j,h(i)-h(k)}\phi_{k,h(k)}\Psi_0\rangle = \langle\phi_i(\infty)\phi_j(1)\phi_k(0)\rangle \tag{2.48}$$

und $k(ij) = 2(h(i)+h(j)) - H$, $H = h(i)+h(j)+h(k)$ definiert wurde. Man erkennt unschwer, daß für $\mathfrak{su}(1,1)$-primäre Felder $d_{ij} \propto \delta_{h(i),h(j)}$ ist. Mit dieser Bilinearform kann das Erzeugendensystem zu einer Basis reduziert werden, so daß die Form nicht degeneriert ist. Wir wollen im folgenden immer von dieser Situation ausgehen.
Man nennt die d_{ij} und die über $C_{ijk} = C_{ij}^{k'} d_{k'k}$ gegebenen C_{ij}^k die *Strukturkonstanten* der Operatoralgebra. Die C_{ijk} sind invariant bezüglich zyklischer Vertauschung ihrer Indizes und ändern ihr Vorzeichen um $(-)^{h(i)+h(j)-h(k)}$ bei ungeraden Permutationen, wie man durch komplexes Konjugieren sieht. Dabei wird vorausgesetzt, daß auf dem Raum der Zustände eine Involution der Form $\phi^+ = (-)^{\lfloor h(\phi)\rfloor}\phi$ existiert. Die Zwei- und Drei-Punkt-Funktionen sind also jeweils durch eine explizit bekannte analytische Funktion bis auf eine Konstante bestimmt.
Für ein solches Erzeugendensystem von quasiprimären Feldern kann man nun explizit auch die Felder aus dem regulären Teil der EXPO (2.31) angeben, die hier die Form

$$\phi_i(z)\phi_j(\zeta) = \sum_{r\geq -h(i)-h(j)} (z-\zeta)^r V(\phi_{i,h(i)+r}\phi_{j,h(j)}\Psi_0, \zeta)$$

annimmt. Wir benötigen eine weitere wichtige Definition.

Definition -589/11. *Die* Normalgeordneten Produke *zweier chiraler Felder $\phi(z)$, $\psi(z)$ sind für alle $m \in \mathbb{Z}$ definiert durch*

$$N^{(m)}(\phi,\psi)(z) = \sum_n z^{n-h(\phi)-h(\psi)} N^{(m)}(\phi,\psi)_n, \tag{2.49}$$

$$N^{(m)}(\phi,\psi)_n = \varepsilon_{\phi\psi} \sum_{k=-\infty}^{m-1} \phi_{n-k}\psi_k + \sum_{k=m}^{\infty} \psi_k\phi_{n-k}, \tag{2.50}$$

wobei die unendlichen Summationen als Limites in der schwachen Topologie zu verstehen sind. Dabei ist für ein derivatives Feld $\phi'(z) = (\partial^r\phi)(z)$ die Dimension als $h(\phi') = h(\phi) + r$ gegeben. Felder, die weder derivativ, noch normalgeordnete Produkte (PON[xiv]) sind, heißen einfache Felder. *Die Ableitungen eines primären Feldes und seine normalgeordneten Produkte mit dem Virasorofeld nennt man auch seine* descendanten Felder, *die Menge aller dieser Felder seine* konforme Familie.

Damit ist dann $V(\phi_{i,h(i)+r}\phi_{j,h(j)}\Psi_0, z) = \frac{1}{r!}N^{(h(i)+r)}(\partial^r\phi_i, \phi_j)(z)$, und die EXPO hat nun die Form

$$\phi_i(z)\phi_j(\zeta) = \textit{singuläre Terme} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}(z-\zeta)^r N^{(h(i)+r)}(\phi_j, \partial^r\phi_i). \tag{2.51}$$

Es sei darauf hingewiesen, daß die genaue Definition des PON relativ unwichtig ist. $N^{(m)}$ und $N^{(m')}$ unterscheiden sich in ihren Moden immer nur durch endlich viele lokale Terme, insbesondere ist $N^{(m+1)}(\phi,\psi)_n - N^{(m)}(\phi,\psi)_n = [\phi_{n-m}, \psi_m]$.

[xiv] Productus Operatorum ordinatus Normalis

Nun können aber alle Felder als Linearkombinationen von Ableitungen quasiprimärer Felder geschrieben werden. Dies kann man auch für die PON tun, so daß

$$\mathcal{F} = \coprod_{k\in\mathbb{Z}_+} \coprod_{n\in\mathbb{Z}_+/2} \partial^k \mathcal{F}^Q(n)\,, \tag{2.52}$$

wobei $\mathcal{F}^Q(n)$ der Raum der quasiprimären Felder der Dimension $h = n$ ist. In rein bosonischen Theorien ist $n \in \mathbb{Z}$, in rein fermionischen $n \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$. Insbesondere gilt $\mathcal{F}^Q(n)^+ = \mathcal{F}^Q(n)$. Wir führen drei nützliche Projektoren ein. Bezeichne zunächst $\mathcal{Q}(k,n)$ den Projektor auf $\partial^k\mathcal{F}^Q(n)$. Dann ist der Projektor auf alle Felder der homogenen Dimension n gegeben durch

$$\mathcal{Q}(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor n\rfloor} \mathcal{Q}(k, n-k)\,,$$

und der Projektor auf alle quasiprimären, i.e. nicht derivativen Felder durch

$$\mathcal{P} = \sum_n \mathcal{Q}(0,n)\,.$$

Mit diesen Definitionen ist dann nämlich für zwei beliebige Felder ϕ, ψ die quasiprimäre Projektion $\mathcal{P}\mathcal{Q}(h(\phi) + h(\psi))N^{(m)}(\phi,\psi)$ unabhängig von m, da der Kommutator von ϕ und ψ nur nicht derivative Felder mit Dimensionen $h < h(\phi) + h(\psi)$ involviert. Wir können damit o.B.d.A. die quasiprimäre Projektion $\mathcal{N}$ der PON elegant in der Form

$$\mathcal{N}(\phi,\psi) = \mathcal{P}\mathcal{Q}(h(\phi)+h(\psi))N^{(0)}(\phi,\psi) \tag{2.53}$$

schreiben. Führt man diese Projektion explizit aus, kann die EXPO wie folgt angegeben werden, wobei wir die Abkürzungen $h(ijk) = h(i)+h(j)-h(k)$ und $a^r_{ijk} = \binom{2h(k)+r-1}{r}^{-1}\binom{h(k)+h(i)-h(j)+r-1}{r}$ verwenden.

Proposition -119/2. EXPO und quasiprimäre PON. *Seien ϕ_i, ϕ_j zwei Elemente der quasiprimären Basis der Felder. Dann ist die Operatorproduktentwicklung in quasiprimären Feldern gegeben durch*

$$\begin{aligned}\phi_i(z)\phi_j(\zeta) \quad &= \sum_{\{k|h(ijk)\geq 1\}} (z-\zeta)^{-h(ijk)} C^k_{ij} \sum_{r=0}^{\infty} a^r_{ijk}\frac{1}{r!}(z-\zeta)^r \partial^r\phi_k(\zeta) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{a^r_{ijn'}}{n!r!}(z-\zeta)^{n+r}\partial^r\mathcal{N}(\phi_j,\partial^n\phi_i)(\zeta),\end{aligned} \tag{2.54}$$

wobei $h(n') = h(i)+h(j)+n$ in $a^r_{ijn'}$ als die Dimension der quasiprimären normalgeordneten Produkte einzusetzen ist. Diese Produkte haben dabei die Gestalt

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\phi_j,\partial^n\phi_i) \quad &= \sum_{r=0}^{n}(-)^r\binom{n}{r}\binom{2(h(i)+h(j)+n-1)}{r}^{-1}\binom{2h(i)+n-1}{r} \\ &\quad \times\partial^r N^{(h(i)+n+r)}(\phi_j,\partial^{n-r}\phi_i) \\ &\quad -(-)^n \sum_{\{k|h(ijk)\geq 1\}} C^k_{ij}\binom{h(ijk)+n-1}{n}\binom{2(h(i)+h(j)+n-1)}{n}^{-1}\end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\binom{\times 2h(i)+n-1}{h(ijk)+n}\binom{\sigma(ijk)-1}{h(ijk)-1}^{-1}\frac{\partial^{h(ijk)+n}\phi_k}{(\sigma(ijk)+n)(h(ijk)-1)!} \tag{2.56}$$

mit $\sigma(ijk) = h(i)+h(j)+h(k)-1$. Diese normalgeordneten Produkte sind (anti)kommutativ, d.h. $\mathcal{N}(\phi,\psi) = \varepsilon_{\phi\psi}\mathcal{N}(\psi,\phi)$, aber nicht assoziativ. Desweiteren gilt $\mathcal{N}(\phi,\partial\psi) = -\mathcal{N}(\partial\phi,\psi)$. ■

Daraus ergibt sich unmittelbar ein Struktursatz über lokale chirale Feldalgebren, indem man, wie beim Energie-Impuls-Tensor, aus der EXPO auf die Kommutatoren zwischen den Fouriermoden schließt. Dies zeigt dann auch, daß im Fall lokaler chiraler Algebren die EXPO und die Lie-Algebra der Moden exakt dieselbe Information enthalten. Die Moden für ein quasiprimäres Feld erhält man dabei wie üblich durch Integration $\phi_{i,m} = \frac{1}{2\pi i}\oint dz\, z^{h(i)-m-1}\phi_i(z)$ längs eines im positiven Sinne den Ursprung umfahrenden Kreises. Der folgende Satz ist Grundlage jeder expliziten Konstruktion von $\mathcal{W}$-Algebren [79, 683].

SATZ -851/13. LIE-ALGEBRA CHIRALER FELDALGEBREN. *Sei* $\{\phi_i(z)|i \in I\}$ *ein Erzeugendensystem quasiprimärer Felder für* $\mathcal{F}$. *Bezeichne* $h(i)$ *die Dimension des Feldes* $\phi_i(z)$, *das rein reell sei, falls* $\lfloor h(i)\rfloor \in 2\mathbb{Z}$, *und rein imaginär für* $\lfloor h(i)\rfloor \in 2\mathbb{Z}+1$. *Seien die* Strukturkonstanten *definiert als* $C_{ijk} = \langle\Psi_0,\, \phi_{k,-h(k)}\phi_{i,h(k)-h(j)}\phi_{j,h(j)}\Psi_0\rangle$ *und* $d_{ij} = \langle\Psi_0,\, \phi_{i,-h(i)}\phi_{j,h(j)}\Psi_0\rangle$. *Dann hat die Lie-Algebra der Fouriermoden der linkschiralen Felder die Form*

$$[\phi_{i,m},\, \phi_{j,n}]_{\varepsilon_{ij}} = \sum_{k\in I} C_{ij}^k p_{ijk}(m,n)\phi_{k,m+n} + d_{ij}\delta_{h(i),h(j)}\delta_{n+m,0}\binom{n+h(i)-1}{2h(i)-1}, \tag{2.57}$$

wobei $C_{ij}^{k'} d_{k'k} = C_{ijk}$. *Mit der abkürzenden Notation* $h(ijk) = h(i)+h(j)-h(k)$ *hat man*

$$p_{ijk}(m,n) = \sum_{r,s\in\mathbb{Z}_+} \delta_{r+s,h(ijk)-1} b_{ijk}^r \binom{m+h(i)-1}{r}\binom{n+h(j)-1}{s} \tag{2.58}$$

und

$$b_{ijk}^r = (-)^r \frac{(2h(k)-1)!s!r!}{(h(i)+h(j)+h(k)-2)!}\binom{2h(i)-2-r}{s}\binom{2h(j)-2-s}{r}. \tag{2.59}$$

Die Strukturkonstanten $d_{ij} = C_{ij}^0$ *und* C_{ij}^k *sind reell.* ∎

Wir können nun definieren, was im folgenden unter einer $\mathcal{W}$-Algebra zu verstehen ist. Der zentrale Punkt ist, daß man als Generatoren der Algebra nicht mehr alle quasiprimären Felder nimmt, dafür aber die $\mathcal{N}$-Produkte zur Erzeugung der Algebra zuläßt.

DEFINITION -500/7. $\mathcal{W}$-ALGEBREN. *Eine* (endlich erzeugte) $\mathcal{W}$-Algebra *ist eine meromorphe konforme Feldtheorie* $(\mathcal{H},\mathcal{F},\mathcal{W},T)$ *in der eine ausgezeichnete (endliche) Menge von einfachen quasiprimären Feldern* $\mathcal{B}_\mathcal{W} = \{\phi_i(z)|i \in I\} \cup \{T(z)\}$ *existiert, so daß das lokale System* $\mathcal{W}$ *allein durch die Operationen* $\mathcal{N}$ *und* ∂ *aus* $\mathcal{B}_\mathcal{W}$ *erzeugt wird. Die so generierte Algebra wird mit* $\mathcal{W}(2,h(1),h(2),\ldots)$ *notiert.*

Ist $\mathcal{B}_\mathcal{W}$ ein minimales Erzeugendensystem im obigen Sinne, so ist es bis auf lineare Basiswechsel seines Spans eindeutig bestimmt. Da das lokale System $\mathcal{W}$ per definitionem eine abgeschlossene assoziative Algebra bilden soll, impliziert die obige Definition einer $\mathcal{W}$-Algebra, daß die EXPO assoziativ ist, oder, vollkommen äquivalent dazu, die Lie-Algebra der Fouriermoden die Jakobi-Identitäten erfüllt. Hingegen ist die Voraussetzung, die Menge $\mathcal{B}_\mathcal{W}$ bestehe bis auf $T(z)$ ausschließlich aus primären Feldern, zu scharf, da eine Projektion eines solchen Erzeugendensystems auf die primären Felder nicht für alle zentralen Erweiterungen c möglich zu sein braucht. Dennoch sei im folgenden, wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt, unter einer $\mathcal{W}$-Algebra immer eine solche aus primären Feldern erzeugte verstanden, da nur diese leicht explizit konstruiert werden können. Mit dieser Voraussetzung ist dann immer $d_{ij} = d_{\phi(i),\phi(j)}$ diagonal wählbar für alle $\phi_i \in \mathcal{B}_\mathcal{W}$. Da wir die Felder frei normieren können, definieren wir

$$d_{ij} = \frac{c}{h(i)}\delta_{i,j} \tag{2.60}$$

so daß insbesondere $d_{TT} = c/2$ ist. Diese Wahl hat sich inzwischen in der Literatur weitgehend gegenüber $d_{ij} = \delta_{ij}$ durchgesetzt.

2.7 Darstellungstheorie

Wir wollen nun annehmen, daß sich der Hilbertraum $\mathcal{H}\otimes\bar{\mathcal{H}}$ als Summe von irreduziblen RPA bezüglich der zugrundeliegenden Symmetrie-Algebra schreiben läßt,

$$\mathcal{H}\otimes\bar{\mathcal{H}} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{H}^{(\lambda)}\otimes\bigoplus_{\bar\lambda\in\bar\Lambda}\bar{\mathcal{H}}^{(\bar\lambda)}\,. \tag{2.61}$$

Dabei haben wir hier noch einmal die Trennung in links- und rechts-chiralen Anteil explizit gemacht. Im folgenden interessiert uns hauptsächlich die Darstellungsstruktur bezüglich der Virasoro-Algebra. Ferner wollen wir davon ausgehen, daß $\mathcal{W}$ maximal in dem Sinne ist, daß $\Lambda=\bar\Lambda$ die Menge aller irreduziblen $\mathcal{W}$-RPA bezeichnet, i.e. daß die Theorie *symmetrisch* ist. Wir zerlegen $\mathcal{H}^{(\lambda)}$ in Virasoro-RPA, deren Menge mit N_λ bezeichnet sei,

$$\mathcal{H}\otimes\bar{\mathcal{H}} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\left(\bigoplus_{\nu\in N_\lambda}\mathcal{H}_\nu^{(\lambda)}\otimes\bigoplus_{\nu\in N_\lambda}\bar{\mathcal{H}}_\nu^{(\lambda)}\right)\,. \tag{2.62}$$

Die TÆC heißt *rational*, wenn $|\Lambda|<\infty$ ist, sie heißt *quasirational*, wenn Λ abzählbar ist. Die Cartan-Unteralgebra $\mathcal{C}$ wird durch L_0, die zentrale Erweiterung C und die Null-Moden der Generatoren $\phi_i\in\mathcal{B}_\mathcal{W}$ der $\mathcal{W}$-Algebra gegeben. Wir bezeichnen den SPA von $\mathcal{H}_\nu^{(\lambda)}$ mit $|\mathbf{h}^{(\lambda)}\rangle=|c,h_\nu,w_1^{(\lambda)},w_2^{(\lambda)},\ldots\rangle$ wobei $\mathbf{h}\in\mathcal{C}^*$ der Tiefstgewichts-Vektor (VPA[xv]) sei. Wir definieren dann eine RPA durch

Definition -387/5. *Eine RPA $M_{|\mathbf{h}\rangle}$ einer $\mathcal{W}$-Algebra zum SPA $|\mathbf{h}\rangle=|c,h,w_1,w_2,\ldots\rangle$ erfüllt die folgenden Begingungen:*

$$\begin{aligned}
C|\mathbf{h}\rangle &= c|\mathbf{h}\rangle\,,\\
L_0|\mathbf{h}\rangle &= h|\mathbf{h}\rangle\,,\\
\phi_{i,0}|\mathbf{h}\rangle &= w_i|\mathbf{h}\rangle\ \ \forall\phi_i\in\mathcal{B}_\mathcal{W}\,,\\
L_n|\mathbf{h}\rangle &= 0\ \ \forall n<0\,,\\
\phi_{i,n}|\mathbf{h}\rangle &= 0\ \ \forall\phi_i\in\mathcal{B}_\mathcal{W}\ \textit{und}\ \forall n<0\,,\\
M_{|\mathbf{h}\rangle} &= U(\mathcal{W})|\mathbf{h}\rangle\,,
\end{aligned}$$

wobei $U(\mathcal{W})$ die Universelle Einhüllende der $\mathcal{W}$-Algebra bezeichnet.
Eine RPA $V_{|\mathbf{h}\rangle}$ heißt Verma-Modul*, falls die Sequenz*

$$V_{|\mathbf{h}\rangle}\longrightarrow M_{|\mathbf{h}\rangle}\longrightarrow 0 \tag{2.63}$$

für alle RPA $M_{|\mathbf{h}\rangle}$ exakt ist.

Der Verma-Modul $V_{|\mathbf{h}\rangle}$ besitzt eine natürliche Graduierung

$$V_{|\mathbf{h}\rangle}=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}V^n_{|\mathbf{h}\rangle}\,, \tag{2.64}$$

wobei $V^n_{|\mathbf{h}\rangle}$ der L_0-Eigenraum mit Eigenwert $h+n$ ist. Im Falle einer logarithmischen Theorie verallgemeinert sich dies wie folgt. Der SPA ersetzt sich durch eine Jordanzelle von L_0 (der Dimension $n+1$), die durch $\{|\mathbf{h};0\rangle=|\mathbf{h}\rangle,|\mathbf{h};1\rangle,\ldots,|\mathbf{h};n\rangle\}$ aufgespannt wird. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
L_0|\mathbf{h};m\rangle &= h|\mathbf{h};m\rangle+|\mathbf{h};m-1\rangle\,,\quad m>0\,,\\
L_0|\mathbf{h};0\rangle &= h|\mathbf{h};0\rangle\,.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

[xv] Vektor Ponderis Altissimi

Da ansonsten die wesentlichen Eigenschaften einer RPA erhalten bleiben, macht es Sinn, auch sogenannte *logarithmische RPA* zu betrachten, bei denen dann aber die gesamte Jordanzelle als Basis der $\mathcal{W}$-Familie zu nehmen ist.
Auf $V_{|\mathbf{h}\rangle}$ existiert eine eindeutige kontravariante hermitesche Form $\langle\cdot||\cdot\rangle$ so daß $\langle\mathbf{h}||\mathbf{h}\rangle = 1$ und $\langle\mathbf{h}||(\psi)_n\mathbf{h}\rangle = (-1)^{\lfloor h(\psi)+\frac{1}{2}\rfloor}\langle(\psi)_{-n}\mathbf{h}||\mathbf{h}\rangle$ für alle quasiprimären Felder ψ der $\mathcal{W}$-Algebra ist. Diese Sesquilinearform ist kontravariant bezüglich der (Anti-) Involution $(\psi)_n \mapsto (-1)^{\lfloor h(\psi)+\frac{1}{2}\rfloor}(\psi)_{-n}$ auf quasiprimären Feldern. Darstellungen, in denen die Form $\langle x||x\rangle$ positiv definit ist, bezeichnet man als *unitär*.
Der Verma-Modul $V_{|\mathbf{h}\rangle}$ ist im allgemeinen nicht vollständig reduzibel. Man ist aber besonders an irreduziblen Darstellungen interessiert. Sei $V_{|\mathbf{h}\rangle}$ nicht irreduzibel, besitze aber einen Zustand $\psi|\mathbf{h}\rangle$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} L_0\psi|\mathbf{h}\rangle &= (h+k)\psi|\mathbf{h}\rangle\,, \quad k\in\mathbb{Z}_+\,, \\ L_n\psi|\mathbf{h}\rangle &= 0 \ \ \forall n<0\,, \\ \phi_{i,n}\psi|\mathbf{h}\rangle &= 0 \ \ \forall\phi_i\in\mathcal{B}_{\mathcal{W}} \text{ und } \forall n<0\,. \end{aligned} \tag{2.66}$$

$\psi|\mathbf{h}\rangle$ heißt *$\mathcal{W}$-singulärer Vektor* in $V_{|\mathbf{h}\rangle}$, ψ wird dann auch *Nullfeld* genannt. Offensichtlich existiert dann eine RPA $V_{|\mathbf{h}+\mathbf{k}\rangle}$ mit $\psi|\mathbf{h}\rangle$ als SPA, die sich in $V_{|\mathbf{h}\rangle}$ einbetten läßt, so daß das Bild im Radikal von $\langle\cdot||\cdot\rangle$ liegt. Dabei bezeichnet $|\mathbf{h}+\mathbf{k}\rangle$ den SPA $|c,h+k,w_1',w_2',\ldots\rangle$. Weiter stimmt jede RPA mit einem Faktormodul des Verma-Modul durch den maximalen invarianten Untermodul für ein $h\in\mathcal{C}^*$ überein.
Betrachten wir hierzu den für uns später sehr wichtigen Fall der reinen Virasoro-Algebra, i.e. $\mathcal{W}(2)$ und $|\mathbf{h}\rangle = |c,h\rangle$. Da nach Konstruktion die Räume $V^n_{|\mathbf{h}\rangle}$ endlich dimensional und für verschiedene n orthogonal zueinander sind, können wir die Determinante der auf $V^n_{|\mathbf{h}\rangle}$ eingeschränkten Sesquilinearform definieren. Im Falle der Virasoro-Algebra gab V.G. Kac [643] die explizite Formel

$$\begin{aligned} \det{}_n\langle||\rangle_{c,h} &= K_n \prod_{\substack{r,s\in\mathbb{N}\\ 1\le rs\le n}} (h-h_{r,s}(c))^{p(n-rs)}\,, \\ h_{r,s}(c) &= \tfrac{1}{48}\Big((13-c)(r^2+s^2)+\sqrt{c^2-26c+25}(r^2-s^2)-24rs+2c-2\Big) \end{aligned} \tag{2.67}$$

an, die von B.L. Feigin und D.B. Fuks [317] bewiesen worden ist. Dabei bezeichnen K_n eine von h und c unabhängige Konstante und $p(k)$ die Zahl der Partitionen von k. Die Darstellungen zu $h = h_{r,s}$ heißen *degenerierte Darstellungen*, da sie mindestens einen singulären Vektor besitzen. Den zugehörigen irreduziblen Virasoro-Modul wollen wir mit $\mathcal{H}_{r,s}$ bezeichnen.
Da jeder Untermodul eines Verma-Moduls sich als Summe von Untermodulen schreiben läßt, die ihrerseits Verma-Module sind, genügt es, die Einbettungsstruktur von Verma-Modulen ineinander zu kennen. Ein Verma-Modul zu $h,c\in\mathbb{C}$ besitzt offensichtlich genau dann einen in ihn eingebetteten Untermodul, wenn die Kac-Determinante für (mindestens) ein Paar (r,s) verschwindet. Somit ist entweder $V_{|c,h\rangle}$ irreduzibel oder es liegt der Fall einer degenerierten Darstellung vor. Die Frage, inwieweit ein Verma-Modul $V_{|c,h\rangle}$ selbst in einen anderen eingebettet werden kann, ist dual[xvi] zu der Frage, ob der Verma-Modul $V_{|26-c,-1-h\rangle}$ eingebettete Untermodule besitzt [331]. Von daher erklärt sich die besondere Bedeutung der degenerierten Modelle.

2.8 Degenerierte Modelle

Wir wollen die Theorie der degenerierten Modelle nun mit Hilfe der Freie-Feld-Konstruktion von V.S. Dotsenko und V.A. Fateev [233] betrachten. Wie schon gesagt sind die irreduziblen RPA der

[xvi] dual im Sinne eines Kategorien-Isomorphismus

degenerierten Modelle nicht mit den Verma-Modulen identisch, da es singuläre Vektoren gibt. In diesem Fall wird die Operatoralgebra des Modells durch primäre Felder erzeugt, die zu den SPA mit den konformen Dimensionen

$$h_{r,s}(c) = \frac{1}{4}\left((r\alpha_- + s\alpha_+)^2 - (\alpha_- + \alpha_+)^2\right) \tag{2.68}$$

korrespondieren. Dabei haben wir die zentrale Ladung als $c = 1 - 24\alpha_0^2$ parametrisiert und $\alpha_\pm = \alpha_0 \pm \sqrt{1+\alpha_0^2}$ definiert. Dies ist nichts weiter als eine für uns günstigere Parametrisierung von Gleichung (2.67).

Eine erste wichtige Konsequenz der Degeneriertheit ist, daß die n-Punkt-Funktionen primärer Felder zu degenerierten Darstellungen bestimmte Differentialgleichungen erfüllen, die von der Existenz singulärer Vektoren herrühren (man denke daran, daß die Aktion der Virasoro-Moden sich durch Differentialoperatoren ausdrücken läßt). Im Falle $n = 4$ sind dies Differentialgleichungen für die generalisierten hypergeometrischen Funktionen [233]. Genauer heißt das, daß die chiralen konformen Blöcke $\mathcal{F}(x)$ explizit in Termen generalisierter hypergeometrischer Funktionen angegeben werden können. In den meisten Fällen können diese Funktionen in Laurent-Reihen um $x = 0$ entwickelt werden. Für bestimmte Kombinationen der Parameter (konforme Dimensionen und zentrale Ladung) kann es aber geschehen, daß die chiralen konformen Blöcke logarithmische Divergenzen bei $x = 0$ haben,

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} a_n^{(0)} x^n + \log(x) \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} a_n^{(1)} x^n + \log^2(x) \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} a_n^{(2)} x^n + \ldots$$

Dies geschieht genau dann, wenn die Differentialgleichung, sie habe Grad n, degeneriert ist, i.e. nur $n' < n$ linear unabhängige Lösungen besitzt, die sich als Laurent-Reihen schreiben lassen. In diesem Fall muß die Theorie um Felder erweitert werden, die logarithmische Divergenzen in der EXPO besitzen, da sonst konforme Blöcke und EXPO inkompatibel sind. Im einfachsten Fall gibt es dann zu einem konformen Gewicht h zwei Operatoren Ψ, Ψ' so daß

$$\begin{aligned} \langle\Psi(z)\Psi(\zeta)\rangle = \langle\Psi(z)\Psi'(\zeta)\rangle &= \tfrac{1}{(z-\zeta)^{2h}}\,, \\ \langle\Psi'(z)\Psi'(\zeta)\rangle &= -\tfrac{2}{(z-\zeta)^{2h}}\left(\log(z-\zeta) + \lambda\right)\,, \end{aligned}$$

wobei λ eine erst durch die Strukturkonstanten der Operator-Algebra festzulegende Konstane ist, die durch die immer mögliche Ersetzung $\Psi' \mapsto \Psi' + \lambda'\Psi$ zustande kommt. Es sind genau solche Fälle, die wir als logarithmische Theorien bezeichnen. Die Existenz mehrerer verschiedener Operatoren zu einem konformen Gewicht korrespondiert nämlich gerade zur Existenz einer nicht trivialen Jordanzelle von L_0.

Bis jetzt haben wir keinerlei explizite Konstruktion der Virasoro-Algebra oder überhaupt einer Vertexoperator-Algebra angegeben. Dies wollen wir nun tun. Zugrunde liegt ein freies bosonisches (skalares) Feld ϕ. Die Moden des Stromes $j = \partial\phi$ genügen dann einer Heisenberg-Algebra,

$$[j_m, j_n] = n\delta_{n+m,0}\,. \tag{2.69}$$

Wir erhalten die RPA als Fock-Räume über den SPA $|\alpha, \alpha_0\rangle$ mit

$$j_n|\alpha,\alpha_0\rangle = 0\ \forall n < 0\,,\quad j_0|\alpha,\alpha_0\rangle = \sqrt{2}\alpha|\alpha,\alpha_0\rangle\,. \tag{2.70}$$

Diese Fock-Räume $\mathcal{F}_{\alpha,\alpha_0}$ bekommen die Struktur von Virasoro-Modulen, wenn das Virasoro-Feld definiert wird durch

$$L(z) = \mathcal{N}(j,j)(z) + \sqrt{2}\alpha_0\partial_z j(z)\,, \tag{2.71}$$

wodurch es die zentrale Ladung $c = 1 - 24\alpha_0^2$ besitzt. Die Heisenberg SPA werden zu Virasoro SPA mit den Gewichten $h(\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha\alpha_0$, i.e.

$$L_n|\alpha,\alpha_0\rangle = 0\ \forall n < 0\,,\quad L_0|\alpha,\alpha_0\rangle = h(\alpha)|\alpha,\alpha_0\rangle\,. \tag{2.72}$$

Diese Konstruktion (2.71), bei der das Virasoro-Feld nicht einfach ist, heißt auch *Sugawara-Konstruktion.* Wir können auch chirale primäre Felder mit Gewichten $h(\alpha)$ konstruieren, also Vertexoperatoren, die Fock-Räume mit unterschiedlichen Ladungen α ineinander abbilden, $\psi_\alpha : \mathcal{F}_{\beta,\alpha_0} \longrightarrow \mathcal{F}_{\alpha+\beta,\alpha_0}$. Ihre explizite Form ist durch den normalgeordneten Ausdruck

$$\psi_\alpha(z) = \exp\left(-\sum_{n>0} \sqrt{2}\alpha j_n \frac{z^n}{n}\right) \exp\left(-\sum_{n<0} \sqrt{2}\alpha j_n \frac{z^n}{n}\right) c(\alpha) z^{-\sqrt{2}\alpha j_0} \tag{2.73}$$

gegeben, wobei $c(\alpha)$ mit allen j_n, $n \neq 0$ kommutiert und Grundzustände in Grundzustände abbildet. Wenn $\alpha = \alpha_{r,s} = \frac{1}{2}(1-r)\alpha_- + \frac{1}{2}(1-s)\alpha_+$, dann ist $h(\alpha) = h_{r,s}(c)$ in (2.67) bzw. (2.68). Wichtig sind für uns die sogenannten Schirm-Operatoren $Q_\pm^{(n)} = \oint dz_1 \ldots dz_n \psi_{\alpha_\pm}(z_1)\ldots\psi_{\alpha_\pm}(z_n)$, wobei die Integrationswege geeignet gewählt werden müssen, so daß die radiale Ordnung erhalten bleibt. Da $h(\alpha_\pm) = 1$, haben sie konforme Dimension Null, ändern aber per constructionem die Ladung des Fock-Raumes, auf den sie angewandt werden. Mit Hilfe dieser Operatoren lassen sich nicht triviale n-Punkt-Funktionen und konforme Blöcke konstruieren.

Produkte von Vertexoperatoren sind nach Definition 1 nur für radial geordnete Punkte wohldefiniert, i.e. $\psi_\alpha(z_1)\psi_\beta(z_2)$ ist nur für $|z_1| > |z_2|$ definiert, die andere Hälfte erhält man durch analytische Fortsetzung. Die chiralen konformen Blöcke sind zumeist mehrdeutige Funktionen $\psi_\alpha(z_1)\psi_\beta(z_2) = \varepsilon_{\alpha\beta}\psi_\beta(z_2)\psi_\alpha(z_1)$, wobei $\varepsilon_{\alpha\beta} = \exp(2\pi i\alpha\beta)$ ist.

Viele Anstrengungen sind unternommen worden, die Einbettungsstruktur der Virasoro- und Fock-Raum Verma-Module zu irreduziblen RPA zu klassifizieren [331, 337]. G. Felder konnte zeigen, daß genau die Fock-Räume $\mathcal{F}_{r,s}$ mit Ladungen $\alpha_{r,s}$ eine wohldefinierte Aktion der Schirm-Operatoren zulassen. Die Schirm-Operatoren können dann als nicht triviale Co-Randoperatoren (oder sogenannte BRST-Operatoren) auf dem Cohomologie-Komplex der Fock-Räume angesehen werden, dessen Elemente gerade die Virasoro-Module $\mathcal{H}_{r,s}$ sind. In der Tat sind die sogenannten *geschirmten Vertexoperatoren*

$$V_{(n'n)(m'm)}^{(l'l)}(z) = \psi_{n'n}(z) Q_-^{(r')} Q_+^{(r)} : \mathcal{F}_{m'm} \longrightarrow \mathcal{F}_{l'l}\,, \tag{2.74}$$

wobei $l = m+n-2r-1\,,\ l' = m'+n'-2r'-1$ gesetzt wurde, invariant (bis auf eine Phase) unter der Aktion der Schirm-Ladungen (BRST-invariant), i.e. sie bilden die Cohomologie-Räume ineinander ab. Die Phase zwischen zwei solchen Operatoren $V_{(n'n)(m'm)}^{(l'l)}(z)$, $V_{(p'p)(q'q)}^{(k'k)}(\zeta)$ ist mit $k = q+p-2s-1\,,\ k' = q'+p'-2s'-1$ gegeben durch $\varepsilon = \exp(2\pi i(\alpha_{p,'p}\alpha_{1-r',1-r} + \alpha_{n',n}\alpha_{1-s',1-s} + \alpha_{n',n}\alpha_{p',p} + \alpha_{1-r',1}\alpha_{1-s',1} + \alpha_{1,1-r}\alpha_{1,1-s}))$.

Sei nun $\mathcal{W}$ die maximal erweiterte Symmetrie-Algebra der TÆC, so daß der Hilbertraum sich wie in (2.62) zerlegen läßt,

$$\mathcal{H}\otimes\bar{\mathcal{H}} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\left(\bigoplus_{(n'n)\in N_\lambda} \mathcal{H}_{n'n}^{(\lambda)} \otimes \bigoplus_{(n'n)\in N_\lambda} \bar{\mathcal{H}}_{n'n}^{(\lambda)}\right).$$

Dann können wir lokale Felder der Dimensionen $\Delta = h_{n'n} + \bar{h}_{\bar{n}'\bar{n}}$ aus den geschirmten Vertexoperatoren zusammenbauen,

$$\Phi_{n'n,\bar{n}'\bar{n}}(z,\bar{z}) = \sum_{m',m,l',l} \mathcal{D}_{(n'n)(m'm)}^{(l'l)} V_{(n'n)(m'm)}^{(l'l)}(z) \otimes \sum_{\bar{m}',\bar{m},\bar{l}',\bar{l}} \mathcal{D}_{(\bar{n}'\bar{n})(\bar{m}'\bar{m})}^{(\bar{l}'\bar{l})} V_{(\bar{n}'\bar{n})(\bar{m}'\bar{m})}^{(\bar{l}'\bar{l})}(\bar{z})\,, \tag{2.75}$$

wobei die Koeffizienten $\mathcal{D}_{(n'n)(m'm)}^{(l'l)}$ bis auf die Normierung fixiert sind durch die Forderungen von Lokalität der EXPO und Kreuzungs-Symmetrie der vier-Punkt-Funktionen. Sie sind nur dann von null verschieden, wenn $|n-m|+1 \leq l \leq m+n-1$, $l \equiv m+n-1 \bmod 2$, und anaolog für l'. Die Situation vereinfacht sich enorm, wenn eine chirale Theorie betrachtet wird, da dann die Lokalitäts-Bedingung extrem restriktiv ist. Die EXPO zweier lokaler chiraler Felder enthält nach

Proposition $-143/4$ auf der rechten Seite wieder nur lokale chirale Felder. Darüberhinaus müssen bereits die chiralen Blöcke selbst lokal sein.
Rationale TÆC haben wir dadurch charakterisiert, daß sie nur endlich viele $\mathcal{W}$-RPA besitzen. Dies ist äquivalent dazu, daß es nur endlich viele $\mathcal{W}$-primäre Felder gibt. ($\mathcal{W}$ sei wieder die maximal erweiterte Symmetrie-Algebra.) Eine wesentliche Konsequenz davon ist, daß alle konformen Dimensionen der Felder der Operator-Algebra sowie die zentrale Ladung rationale Zahlen sein müssen [5].
Wir wollen diesen Abschnitt mit einer ersten, groben Klassifikation der degenerierten Modelle beenden, auf die wir immer wieder zurückkommen werden. Wenn wir in Gleichung (2.68) die Abkürzung $k = \alpha_0^2$ einführen, also $h_{r,s} = -k + \frac{1}{4}\Big((2k+1)(r^2+s^2) + 2\sqrt{k(k+1)}(r^2-s^2) - 2rs\Big)$, können wir die folgenden Fälle unterscheiden:

Satz -667/8. *Die degenerierten Darstellungen der Virasoro-Algebra zerfallen genau in die folgenden durch $k, k' = \sqrt{k(k+1)}$ charakterisierten Klassen und Einbettungsstrukturen, wobei Einbettungen von $\mathcal{H}_{r',s'}$ in $\mathcal{H}_{r,s}$ mit $(r,s) \leftarrow (r',s')$ bezeichnet seien:*

(i) $k, k' \in \mathbb{Q}$. *In diesem Fall ist notwendig k von der Form $\frac{(p-q)^2}{4pq}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ coprim, also $c = 1 - 6\frac{(p-q)^2}{pq}$. Darüber hinaus ist $h_{r,s} \in \mathbb{Q}\ \forall r, s \in \mathbb{Z}$. Man unterscheidet drei Varianten:*
• *Die* minimalen Modelle *$q > p > 1$. Es gibt nur endlich viele Virasoro-RPA zu $h_{r,s} = \frac{(pr-qs)^2-(p-q)^2}{4pq}$, $1 \le r \le q-1$, $1 \le s \le p-1$ mit Einbettungsstruktur*

$$\begin{array}{ccccccccc} & \swarrow & (-r,s) & \longleftarrow & (r+2q,s) & \longleftarrow & (-r-2q,s) & \longleftarrow & (r+4q,s) \ \dots \\ (r,s) & & & \times & & \times & & \times & \dots \\ & \nwarrow & (2q-r,s) & \longleftarrow & (r-2q,s) & \longleftarrow & (4q-r,s) & \longleftarrow & (r-4q,s) \ \dots \end{array}$$

die daraus resultiert, daß es unendlich viele singuläre Vektoren gibt.
• *Die* logarithmischen Modelle *$q > p = 1$. Die RPA zu den Gewichten $h_{r,1}$ haben die modifizierte Einbettungsstruktur*

$$(r,1) \longleftarrow (-r,1) \longleftarrow (r-2q,1) \longleftarrow (-r-2q,1) \longleftarrow (r-4q,1) \dots$$

Für alle anderen RPA ist die Einbettungsstruktur vermöge $\mathcal{H}_{r,s+1} \cong \mathcal{H}_{r-qs,1}$ ebenfalls festgelegt.
• *Die* Gauss-schen Modelle *$q = p$, i.e. $c = 1$. Die Einbettungsstruktur ist für alle RPA einfach gegeben durch $(r,s) \longleftarrow (-r,s)$.*

(ii) $k \in \mathbb{Q}$, $k' \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}$. *Dies ergibt alle rationalen c-Werte, die nicht in der obigen diskreten Serie enthalten sind. In diesem Fall sind genau die Gewichte $h_{r,\pm r} \in \mathbb{Q}\ \forall r \in \mathbb{Z}$. Die Einbettungsstruktur ist für alle RPA einfach $(r,s) \longleftarrow (-r,s)$. Solche Theorien sollen* parabolische Modelle *heißen.*

(iii) $k \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}$. *In diesem Fall sind weder c noch die h-Werte rational (letztere bis auf die Ausnahme $h_{1,1} = 0$). Auch hier ist die Einbettungsstruktur $(r,s) \longleftarrow (-r,s)$. Modelle dieser Art sind irrational, i.e. keine TÆCR.*

Zum Beweis sei nur folgendes erwähnt: Die jeweiligen Einbettungsstrukturen wurden von B.L. Feigin und D.B. Fuks [331] bewiesen. Der Beweis der Einteilung in drei Klassen ist einfach. Man beachte zunächst, daß die Polynome in r, s mit den Koeffizienten k bzw. k' linear unabhängig sind. Fall (i) ergibt sich aus der Forderung, daß alle Dimensionen rational sein sollen, i.e. die Koeffizienten müßen beide rational sein. Man setzte $k' = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$. Auflösen nach k liefert, wenn man Rationalität fordert, die diophantiche Gleichung $(2n)^2 + m^2 = l^2$ mit den Pythagoräischen Triplen als Lösungen. Parametrisieren der coprimen Lösungen ergibt c in der diskreten Serie. Fall

(i) ist übrigens äquivalent zu der Forderung, die Vakuumdarstellung besitzte nicht triviale singuläre Vektoren. Fall (ii) erhält man einfach durch die Suche nach Nullstellen der Polynome. Nur $(r^2 - s^2)$ hat unendlich viele Lösungen, die daher rationale h-Werte ergeben, obwohl der Koeffizient k' nicht rational ist. Der dritte Fall deckt gerade die noch übrigen Möglichkeiten ab. Dazu beachte man, daß k and k' algebraisch unabhängige Zahlen über $\mathbb{Q}$ für alle irrationalen k sind. ■

Ein wesentlicher Teil der Arbeit widmet sich der Klassifikation aller rationalen Theorien, die aus degenerierten Modellen konstruiert werden können. Bekannt sind bis jetzt zwei Typen: Die minimalen Modelle und die Theorien mit $c = 1$. Für diese Fälle werden wir aber auch alle Möglichkeiten erweiterter Symmetrie-Algebren angeben. Neu hinzu kommen zwei weitere Typen, die logarithmischen Modelle und für $k \in \mathbb{N}/4$ parabolische Modelle.

Comes
Modulare Invarianz

Modulare Invarianz ist vielleicht eine der schönsten Eigenschaften von TÆC und sicher die vom Standpunkt des Mathematikers interessanteste. Spielt doch gerade die Modul-Gruppe $\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ in der reinen Mathematik eine überaus große Rolle. In der TÆC tritt die modulare Invarianz auf, wenn man als Anschauungsraum nicht die kompaktifizierte komplexe Ebene (i.e. S^2), sondern einen Torus wählt. Allgemeiner kann man natürlich eine TÆC auf beliebigen kompakten Riemannschen Flächen betrachten. Die dann relevante Gruppe wäre die Fuchs-Gruppe zum Geschlecht g der Fläche. Interessanterweise zeigt sich, daß viele Strukturen, die aus der konformen Invarianz (insbesondere die unter der kleinen konformen Gruppe, i.e. den Möbius-Transformationen) folgen, Analoga haben, die sich aus der modularen Invarianz ergeben. Dies liegt sicher auch daran, daß die Modul-Gruppe die $\mathbb{Z}$-Untergruppe der Möbius-Gruppe darstellt. Doch diese Ähnlichkeit darf nicht darüber hinwegtäuschen, daß die Modul-Gruppe nicht auf dem Anschauungsraum operiert, sondern vielmehr TÆC zu verschiedenen Anschauungsräumen (i.e. modular äquivalenten Tori) ineinander abbildet.

Wir wollen im folgenden mit $\tau \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\tau > 0$, den modularen Parameter des Torus bezeichenen. Γ wird durch die zwei Elemente $T = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ und $S = \left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ frei erzeugt mit den Relationen $S^2 = (ST)^3 = \mathbb{1}$. Die Operation auf der oberen Halbebene ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T:\tau &\longrightarrow \tau+1\,,\\ S:\tau &\longrightarrow -\tfrac{1}{\tau}\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Modulare Kovarianz bedeutet, daß die n-Punkt-Korrelationsfunktionen der TÆC auf dem Torus Darstellungsräume von Γ aufspannen. Uns werden besonders die 0-Punkt-Funktionen interessieren, die auch als Charaktere der Theorie bezeichnet werden.

3.1 Zustandssumme und Charaktere

Es ist keine Willkür, eine TÆC auf einen Torus zu setzen. Dies wird zum Beispiel durch statistische Systeme in einem endlichen Gebiet mit periodischen Randbedingungen motiviert. Ist das Gebiet ein Parallelogramm, erhält man durch die Randbedingungen einen Torus. Die Zustandssumme einer (statistischen) Quantenfeldtheorie ist durch

$$Z = \mathrm{tr} e^{-\beta H}$$

gegeben, wobei H der Hamilton-Operator sei. In einer TÆC ist H gerade durch $L_0 + \bar{L}_0$ gegeben. Mit der üblichen Notion $q = e^{2\pi i\tau}$, $\bar{q} = e^{2\pi i\bar{\tau}}$ schreibt sich die Zustandssumme einer TÆC in der Form [167]

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = (q\bar{q})^{\frac{c}{24}} \mathrm{tr}(q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0}) . \tag{3.2}$$

Das erstaunliche Resultat von J.L. Cardy [167], das dann von W. Nahm mathematisch rigoros bewiesen wurde [863], besagt, daß die konforme Invarianz einer TÆQ auf S^2 bereits zwingend die modulare Invarianz der Zustandssumme der TÆQ auf dem Torus impliziert. Der Beweis gilt zwar strikt nur für Theorien mit diagonalisierbarem L_0. Das Resultat sollte aber auch für logarithmische Theorien gelten, wenn man die Jordanzellen als ganzes zur Basis der (verallgemeinerten) RPA wählt. Wir wollen annehmen die Theorie sei (quasi-) rational, und der Hilbertraum zerlege sich gemäß (2.62). Wir definieren zunächst

Definition 0. *Sei $\mathcal{W}$ eine chirale Symmetrie-Algebra einer TÆC. Der Hibertraum sei zerlegt in $\mathcal{W}$-RPA, $\mathcal{H} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{H}_\lambda \otimes \bar{\mathcal{H}}_\lambda$, wobei auch verallgemeinerte RPA zu Jordanzellen möglich seien. Der* (Virasoro-) Charakter *der Darstellung $\mathcal{H}_\lambda$ ist definiert als*

$$\chi_\lambda^{\mathcal{W}}(\tau) = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_\lambda} \left(q^{L_0 - \frac{c}{24}} \right) . \tag{3.3}$$

Wir wollen ein Beispiel geben. Der Virasoro-Charakter über einen Verma-Modul der Virasoro-Algebra ist einfach gegeben als $\hat{\chi}^{Vir}_{|h,c\rangle} = q^{h-c/24} \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = q^{(1-c)/24} \eta(\tau)^{-1} q^h$. Aus Satz −667/8 können wird damit die Charaktere der irreduziblen degenerierten RPA ablesen.

Proposition -22/5. *Die Charaktere der minimalen Modelle sind gegeben durch*

$$\chi^{Vir}_{|h_{r,s}, c_{p,q}\rangle}(q) \equiv \chi_{r,s}(q) = \frac{q^{\frac{1-c}{24}}}{\eta(\tau)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(q^{h_{r+2qk,s}} - q^{h_{r+2qk,-s}} \right) . \tag{3.4}$$

Diese Charaktere heißen auch Rocha-Caridi-Charaktere *[937]. Alle anderen degenerierten irreduziblen RPA haben Charaktere*

$$\chi^{Vir}_{|h_{r,s}, c\rangle}(q) \equiv \chi_{r,s}(q) = \frac{q^{\frac{1-c}{24}}}{\eta(\tau)} \left(q^{h_{r,s}} - q^{h_{r,-s}} \right) . \tag{3.5}$$

Für nicht degenerierte irreduzible RPA ist $\chi^{Vir}_{|h,c\rangle}(q) = \hat{\chi}^{Vir}_{|h,c\rangle}$. ■

Eine Konsequenz der modularen Invarianz der Zustandssumme ist, daß die Charaktere eine unitäre Darstellung von Γ aufspannen. Da die Charaktere offensichtlich als Potenzreihen mit ganzen Koeffizienten (den Dimensionen der L_0-Eigenräume) gegeben sind, liegt es nahe, daß es eine Kongruenz-Untergruppe von Γ gibt, die auf diesem Darstellungsraum trivial operiert. Gemäß einer tiefgehenden Vermutung von Grothendieck sollten modulare Formen zu Nicht-Kongruenz-Untergruppen in ihrer Fourier-Entwicklung unendlich große Nenner aufweisen. Wir werden daher im folgenden immer annehmen, daß die Charaktere modulare Formen zu einer Kongruenz-Untergruppe sind. Dies bleibt auch dann richtig, wenn wir logarithmische Theorien betrachten, falls wir die Fourier-Entwicklung eines Charakters zu einer Darstellung mit Gewicht h in $q^h\mathbb{Z}[[q]][\log(q)]$ gestatten. In jedem Fall haben wir eine Zerlegung der Zustandssumme,

$$Z(\tau,\bar{\tau}) = \sum_{\lambda\lambda'} \mathcal{N}_{\lambda\lambda'}\chi_\lambda^{\mathcal{W}}(\tau)\chi_{\lambda'}^{\mathcal{W}*}(\bar{\tau})\,, \tag{3.6}$$

wobei die symmetrische Matrix $\mathcal{N}_{\lambda\lambda'}$ nicht negative ganze Zahlen als Einträge hat, die von der Zerlegung des Hilbertraumes in RPA stammen. Damit können wir sehr elegant definieren, was eine maximal erweiterte Symmetrie-Algebra ist. $\mathcal{W}$ ist genau dann maximal erweitert, wenn $\mathcal{N}_{\lambda\lambda'}$ diagonal ist. Wenn nicht ausdrücklich anders angegeben, wollen wir unter $\mathcal{W}$ immer die maximale Symmetrie-Algebra verstehen. Weiter bezeichne $\lambda = 0$ immer die Vakuum-RPA $|\mathbf{0}\rangle$.

3.2 Fusionsalgebra

Wir haben schon gesehen, daß die chiralen Vertexoperatoren als *Intertwiner* zwischen den verschiedenen RPA $\mathcal{H}_\lambda$ agieren, i.e.

$$\left(V_{(\lambda)(\mu)}^{(\nu)}\right)_\xi(z) : \mathcal{H}_\lambda \oplus \mathcal{H}_\mu \oplus \mathcal{H}_\nu^* \longrightarrow \mathbb{C}\,, \tag{3.7}$$

wobei $\mathcal{H}_\nu^*$ der Dualraum zu $\mathcal{H}_\nu$ ist. Da es mehr als einen solchen Intertwiner geben mag, seien die verschiedenen möglichen durch den Index $1 \le \xi \le N_{\lambda\mu}^\nu$ gekennzeichnet. Sie spannen offensichtlich einen Vektorraum $\mathcal{V}_{\lambda\mu}^\nu$ der Dimension $N_{\lambda\mu}^\nu$ auf. Die Vertexoperator-Algebra $\mathcal{V}$ läßt sich dann in solche Vektorräume aufspalten. Die Zahlen $N_{\lambda\mu}^\nu$ heißen auch *Fusionsregeln.* Für rationale Theorien sind natürlich die $N_{\lambda\mu}^\nu$ immer endlich. Eine quasirationale Theorie heißt *semirational*, wenn für alle $\lambda,\mu,\nu \in \Lambda$ immer $N_{\lambda\mu}^\nu < \infty$ ist und für fast alle ν sogar verschwindet. Dies garantiert, daß in einer EXPO auf der rechten Seite nur Felder aus endlich vielen $\mathcal{W}$-Familien auftreten können.
Sei $|\Lambda| = r+1$. Wir betrachten formal eine Algebra $\mathcal{A}$ über $\mathbb{C}$ mit einer Basis $\Xi = \{\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_r\}$, so daß in dieser Basis die Strukturkonstanten gerade durch die Zahlen $N_{\lambda\mu}^\nu$ gegeben sind,

$$\phi_\lambda \star \phi_\mu = \sum_{\nu=0}^{r} N_{\lambda\mu}^\nu \phi_\nu\,. \tag{3.8}$$

Die Algebra $\mathcal{A}$ heißt auch die zum (links-) chiralen Teil der TÆC assoziierte *Fusions-Algebra.* Die Vektoren ϕ_λ stehen offensichtlich in eins-zu-eins Korrespondenz mit den RPA $\mathcal{H}_\lambda$ und definieren das über die Intertwiner vermittelte *Fusions-Produkt* zwischen RPA. Analog sei eine Algebra $\bar{\mathcal{A}}$ der Fusions-Produkte des rechts-chiralen Teils der TÆC definiert. Diese Definition macht auch für die im obigen Sinne definierten semirationalen TÆC noch Sinn, da die unendliche Summe nur endlich viele nicht verschwindende Terme besitzt.
Aus den im vorhergehenden Kapitel dargestellten Eigenschaften chiraler Vertexoperatoren folgen unmittelbar einige wichtige Eigenschaften von Fusions-Algebren, die wir hier kurz zusammenfaßen:

PROPOSITION -68/7. *Sei $\mathcal{A}$ eine $r+1$-dimensionale Fusionsalgebra zu einer (semi-) rationalen TÆC mit $r+1$ RPA. Dann gilt:*
• *$\mathcal{A}$ ist commutativ, i.e. $N_{ij}^k = N_{ji}^k$. Dies folgt aus der offensichtlichen Existenz eines Isomorphismus zwischen $\mathcal{V}_{ij}^k$ und $\mathcal{V}_{ji}^k$.*
• *$\mathcal{A}$ ist assoziativ, i.e.*

$$\sum_m N_{ij}^m N_{km}^l = \sum_m N_{ik}^m N_{jm}^l\,.$$

Dies folgt aus der Assoziativität der EXPO oder auch der Kreuzungs-Symmetrie der chiralen konformen Blöcke.
• *$\mathcal{A}$ besitzt ein Eins-Element: Es gibt einen Vektor $\phi_0 \in \Xi$, so daß $N_{0j}^k = \delta_j^k \ \forall j,k \in \Lambda$. Der Vektor ϕ_0 korrespondiert zur Vakuum-RPA $\mathcal{H}_0$.*
• *Die* Ladungs-Konjugation*: Es gibt eine (möglicherweise triviale) Involution in Λ, $C: i \mapsto \hat{\imath}$, also $\hat{\hat{\imath}} = i$, unter der $\mathcal{A}$ invariant ist, i.e. $N_{ij}^k = N_{\hat{\imath}\hat{\jmath}}^{\hat{k}}$ und $N_{ij}^0 = \delta_{i\hat{\jmath}}$. Die Matrix $C_{ij} \equiv N_{ij}^0$ ist die "Metrik" auf $\mathcal{A}$ (zieht Indizes herauf und herunter). Aus Kommutativität und Assoziativität folgt, daß die N_{ijk} total symmetrisch in ihren Indizes sind.*
• *Alle $N_{ij}^k \in \mathbb{Z}_+$, da die Dimensionen der Vektorräume $\mathcal{V}_{ij}^k$ nicht-negative ganze Zahlen sind.* ■

Die Vektoren ϕ_i werden oft auch als Felder bezeichnet, da die Fusions-Algebra eine ganz ähnliche Struktur wie die EXPO bzw. die Lie-Algebra der Fourier-Moden der Felder aufweist. Genauer stehen die Vektoren für die ganzen $\mathcal{W}$-Familien der Felder. Das Feld $\phi_{\hat{\imath}}$ wird als das zu ϕ_i *konjugierte Feld* bezeichnet. Eine TÆC bzw. eine Fusions-Algebra $\mathcal{A}$ mit $\hat{\imath} = i \ \forall i \in \Lambda$ heißt *selbstkonjugiert.*
Eine besondere Rolle bei der Untersuchung von Fusions-Algebren spielt die *reguläre Darstellung* von $\mathcal{A}$, die jedem Feld ϕ_i die Matrix N_i mit den Elementen $(N_i)_j^k \equiv N_{ij}^k$ zuordnet. Aus der Theorie kommutativer und assoziativer Algebren folgt dann unmittelbar, daß alle Matrizen N_i gleichzeitig diagonalisiert werden können, i.e. sie haben alle den gleichen Satz von $r+1$ nicht verschwindender Eigenvektoren. Wir wollen diese Matrix, die die N_i diagonalisiert, völlig ohne Hintergedanken S nennen. Wenn $\mathcal{A}$ selbskonjugiert ist, sind alle N_i hermitesch und S orthogonal. Der j-te Eigenwert von N_i sei mit $\lambda_i(j)$ bezeichnet. Das Spektrum von $\mathcal{A}$, also die Menge $\{\lambda_i(j)\}$, enthält die gesamte Information über $\mathcal{A}$. Als Lösungen der algebraischen Gleichungen $\det(N_i - \lambda_i(j)\mathbb{1}) = 0$ vom Grade $r+1$ mit ganzzahligen Koeffizienten und mit 1 als Koeffizient der höchsten Potenz sind die $\lambda_i(j)$ algebraische Zahlen. Die irreduziblen Darstellungen von $\mathcal{A}$ sind alle eindimensional und werden durch die $\lambda_i(j)$ gegeben, i.e.

$$\lambda_i(l)\lambda_j(l) = \sum_{k=0}^{r} N_{ij}^k \lambda_k(l)\,.$$

Daher ist $\lambda_{\hat{\imath}}(l) = \lambda_i(l)^*$ so daß selbstkonjugierte Fusions-Algebren ein reelles Spektrum haben.
Es sei noch kurz bemerkt, daß verschiedene Fusions-Algebren dieselbe algebraische Struktur beschreiben können. Wir sagen, daß zwei Fusions-Algebren $\mathcal{A}^{(1)}, \mathcal{A}^{(2)}$ *isomorph* sind, wenn es eine Permutation π von Λ gibt (trivialerweise $\Lambda^{(1)} = \Lambda^{(2)} \equiv \Lambda$), so daß $\phi_{\pi(i)}^{(1)} = \phi_i^{(2)} \ \forall i \in \Lambda$ mit $\pi(0) = 0$ ist, π mit C kommitiert, und $N^{(1)}{}_{\pi(i)\pi(j)}^{\pi(k)} = N^{(2)}{}_{ij}^{k} \ \forall i,j,k \in \Lambda$ gilt. Die Fusions-Algebra ist also nur bis auf solche Isomorphien eindeutig durch die TÆC bestimmt.

3.3 Verlinde-Formel

Eines der wichtigsten Resultate ist die Entdeckung E. Verlindes [1019], daß die Matrix S, die die Fusions-Matrizen diagonalisiert, mit der Darstellung der S-Matrix der Modul-Gruppe auf den Charakteren der RPA übereinstimmt. Dies drückt sich durch seine folgende Formel aus:

Satz -46/3. *Gegeben eine TÆCR, deren maximale Symmetrie-Algebra $\mathcal{W}$ mit einer Menge Λ von $\mathcal{W}$-RPA und deren Virasoro-Charaktere $\chi_i^{\mathcal{W}}, i \in \Lambda$. Die S-Transformation $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ der Modul-Gruppe sei auf den Charakteren durch die unitäre Matrix S_{ij} mit $\chi_i^{\mathcal{W}}(-\frac{1}{\tau}) = \sum_j S_{ij}\chi_j^{\mathcal{W}}(\tau)$ gegeben. Dann diagonalisiert S die Fusions-Matrizen, und es gilt (wenn $i=0$ die Vakuum-RPA bezeichne)*

$$N_{ij}^k = \sum_l \frac{S_{il}S_{jl}(S^*)_{lk}}{S_{0l}}\,. \tag{3.9}$$

Weiter gilt, daß $S^2 = C$ ist, i.e. S ist symmetrisch. ■

Strikt bewiesen wurde dieser Satz von G. Moore und N. Seiberg [827]. Am Rande sei eine weitere Konsequenz des Satzes von E. Verlinde erwähnt. Die Eigenwerte $\lambda_i(j)$ sind immer als Linearkombinationen von Einheitswurzeln gegeben, sind also algebraische Zahlen über einem zyklotomischen Körper.

Die unitäre Darstellung der Modul-Gruppe durch die Charaktere liefert auch eine entsprechende Matrix T_{ij} mit $\chi_i(\tau+1) = T_{ij}\chi_j(\tau)$ und $(ST)^3 = C$. Wenn die TÆCR nicht logarithmisch ist, können wir T explizit angeben, $T_{ij} = \delta_{ij}\exp(2\pi i(h(i) - \frac{c}{24}))$.

Die Darstellung von S und T auf dem Raum der Charaktere steht in äußerst engem Zusammenhang mit den Monodromie-Matrizen der chiralen Konformen Blöcke. Genauer gilt [811], daß die Piccard-Abbildung $x = (\vartheta_3(\tau)/\vartheta_4(\tau))^4$ Vier-Punkt-Korrelationsfunktionen $\langle\phi_k(\infty)\phi_l(1)\phi_i(x)\phi_j(0)\rangle$ eines primären Feldes $\phi_i(x)$ und Charaktere $\chi_i(\tau)$ in Beziehung setzt, so daß die Monodromie-Matrix für $x(-1/\tau) = x/(x-1)$ bis auf Normierungskonstanten, die noch von j,k,l abhängen, durch S gegeben ist. Für die T-Matrix gilt eine ähnliche Beziehung vermöge $x(\tau+1) = 1/x$. In diesem Zusammenhang kann man aus den Fuchs-Bedingungen an die Differential-Gleichungen der konformen Blöcke Konsistenzbedingungen für die Fusions-Algebra ableiten. Bezeichne $n \leq r+1$ die Anzahl linear unabhängiger Charaktere. Dann muß zwischen c und den $h(i)$ die Beziehung

$$c = \frac{24}{n}\sum_{i=0}^{n-1} h(i) - 2(n-1) + 4l \tag{3.10}$$

gelten, wobei $l \in \mathbb{Z}_+ - \{1\}$ ist. Ferner müssen für alle $i,j,k,l \in \Lambda$ die Ausdrücke

$$R_{ijk}^l = \frac{N_{ijk}^l(N_{ijk}^l - 1)}{2} + N_{ijk}^l(h(i)+h(j)+h(k)+h(l)) - \sum_m h(m)(N_{ij}^m N_{km}^l + N_{ik}^m N_{jm}^l + N_{il}^m N_{kj}^m) \tag{3.11}$$

aus $\mathbb{Z}_+$ sein, wobei $N_{ijk}^l = \sum_m N_{ij}^m N_{km}^l$ ist. Dies zeigt weiter, daß die "konformen" Daten wie zentrale Ladung und die Gewichte in enger Beziehung zu den "modularen" Daten wie Fusions-Matrizen stehen. Wir kommen auf diesen Punkt noch zurück.

3.4 Quanten-Dimensionen und Asymptotik

Es sei noch kurz der Begriff der *Quantendimension* eingeführt. Dies ist ein regularisiertes Maß für die Größe einer RPA. Wäre $\mathcal{H}_i$ endlich dimensional, so gäbe $\chi_i(0)$ genau die Anzahl seiner Dimension an, da für $\tau = 0$ der Charakter gerade die Zustände abzählt. Bezeichne $\chi_{min}(\tau)$ den Charakter zu der RPA mit dem kleinsten Gewicht, i.e. $h_{min} \leq h(i)\,\forall i \in \Lambda$. Dann ist die regularisierte Dimension einer RPA definiert als

$$d_i \equiv \lim_{\tau\to 0}\frac{\chi_i(\tau)}{\chi_{min}(\tau)}\,. \tag{3.12}$$

Sie läßt sich leicht mit Hilfe der modularen Transformation S ausrechnen,

$$d_i = \lim_{\tau\to 0}\frac{\sum_j S_i^j\chi_j(-1/\tau)}{\sum_k S_{min}^k\chi_k(-1/\tau)} = \frac{S_{min}^i}{S_{min}^{min}} = \lambda_i(min)\,. \tag{3.13}$$

Dies gilt auch für nicht-unitäre Theorien, obwohl dort Gewichte $h < 0$ auftreten können, da wir die Quantendimension an der RPA mit dem kleinsten konformen Gewicht statt an der Vakuum-RPA normiert haben.

Wir wollen an dieser Stelle kurz darauf eingehen, inwiefern Nicht-Unitarität in die modularen Eigenschaften eingeht. Dazu führen wir die sogenannte *effektive zentrale Ladung* ein,

$$c_{eff} = c - 24h_{min}\,, \tag{3.14}$$

die offenbar für unitäre Theorien mit der gewöhnlichen zentralen Ladung übereinstimmt. Die efektive zentrale Ladung gestattet es, nicht-unitäre Theorien mit unitären zu vergleichen. Die gewöhnliche zentrale Ladung c ist ja nichts anderes als der mittlere Erwartungswert des durch die Randbedingungen auftretenden Beitrages des Casimir-Effektes zur freien Energie: Aus der modularen Invarianz der Zustandssumme (3.2), i.e. $Z(\tau,\bar\tau) = Z(-\frac{1}{\tau}, -\frac{1}{\bar\tau})$, findet man nämlich

$$\frac{\partial}{\partial\tau} Z(\tau,\bar\tau=\tau) = \frac{1}{\tau^2}\left(\frac{\partial}{\partial\tau'} Z(\tau',\bar\tau'=\tau')\right)\Big|_{\tau'=-\frac{1}{\tau}} .$$

Die Definition der freien Energie (mit einem per conventionem gesetzten Faktor 12),

$$F(\tau) = -\frac{12}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\tau}\log Z(\tau,\bar\tau=\tau)$$

ergibt also einmal $F(\tau) = c - 12\langle L_0 + \bar L_0\rangle_\tau$, was wegen modularer Invarianz mit $F(-\frac{1}{\tau}) = \frac{1}{\tau^2}\left(c - 12\langle L_0 + \bar L_0\rangle_{-\frac{1}{\tau}}\right)$ übereinstimmen muß. Damit läßt sich ein Ausdruck für die (gewöhnliche) zentrale Ladung in Abhängigkeit von der Energie $L_0 + \bar L_0$ ableiten (man beachte, daß die Energie nur bis auf eine beliebige Konstante definiert ist),

$$c = 12\frac{\tau\langle L_0 + \bar L_0\rangle_\tau - \frac{1}{\tau}\langle L_0 + \bar L_0\rangle_{-\frac{1}{\tau}}}{\tau - \frac{1}{\tau}} ,$$

der sich am Fixpunkt der S-Transformation, $\tau = i$, sehr vereinfacht. Mit der Abkürzung $\Delta_n = h_n + \bar h_n$ erhalten wir die Entwicklung

$$c = 12\frac{\sum_n \Delta_n \exp(-2\pi\Delta_n)}{\sum_n \exp(-2\pi\Delta_n)} . \tag{3.15}$$

Es wird dabei über die Gewichte aller Zustände summiert, also sowohl über die primären Felder als auch über deren $\mathcal{W}$-descendanten Familien.

Betrachten wir nun eine nicht-unitäre Theorie. Dann treten in der Entwicklung (3.15) positive Exponenten auf, da der Zustand tiefster Energie nicht mit dem Vakuum identisch ist. Da dies aber die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit verletzen würde, macht es Sinn, in einer Redefinition der Energie diejenige des Grundzustandes zu subtrahieren, $(L_0 + \bar L_0)_{\mathit{eff}} = L_0 + \bar L_0 - 12\Delta_{min}$. Wir müssen dann aber auch die zentrale Ladung so umdefinieren, daß sich die Charaktere der Theorie nicht ändern,

$$c_{\mathit{eff}} = 12\frac{\sum_n (\Delta_n - \Delta_{min})\exp(-2\pi(\Delta_n - \Delta_{min}))}{\sum_n \exp(-2\pi(\Delta_n - \Delta_{min}))} . \tag{3.16}$$

Diese effektive zentrale Ladung mißt den Beitrag des Casimir-Effektes zur freien Energie relativ zum Zustand tiefster Energie. Damit ist c_{eff} eine physikalische Observable, die die Wahrscheinlichkeit erhält und die sowohl für unitäre wie für nicht-unitäre Theorien gültig ist. Dieser Umstand wird in der Literatur oft übersehen, wenn Phänomene der statistischen Physik oder Festkörperphysik mit TÆC beschrieben werden, deren zentrale Ladung dann berechnet wird. Im allgemeinen kann so nur die effektive zentrale Ladung abgeleitet werden, da nur sie über eine Observable gemessen werden kann. Per constructionem ist $c_{\mathit{eff}} > 0$. Im üblichen Fall maximal erweiterter Symmetrie-Algebren betrachtet man symmetrische Theorien mit $\bar h = h$ korrespondierend zu diagonalen Zustandssummen. Dann ist $\Delta_{min} = 2h_{min}$.

Die effektive zentrale Ladung ist auch die richtige Größe, um TÆC in Typen einzuteilen, die vollständig klassifiziert werden können. Zum Beispiel kann man für sie folgende Abschätzung angeben [269]:

Proposition -232/11. *Für jede Algebra $\mathcal{W}(h(\phi_1),\ldots,h(\phi_k),h(\psi_1),\ldots,h(\psi_l))$, die von k bosonischen und l fermionischen Feldern erzeugt wird, und für jedes c, für das $\mathcal{W}$ eine (semi-) rationale Theorie darstellt, gilt*

$$0 < c_{\mathit{eff}} < k + \frac{l}{2} \tag{3.17}$$

oder es ist $c = h = 0$.

Der Beweis basiert auf dem Verhalten der Charaktere im Unendlichen. Neben $q = \exp(2\pi i\tau)$ sei $\hat{q} = \exp(-2\pi i\frac{1}{\tau})$ eingeführt. Wir betrachten den Limes $\tau \to i\infty$, i.e. $q \to 0$ und $\hat{q} \to 1$. Damit gilt für einen Charakter zu einer RPA über $|\mathbf{h}\rangle$

$$\chi^{\mathcal{W}}_{|\mathbf{h}\rangle}(-\frac{1}{\tau}) = \hat{q}^{h-\frac{c}{24}}\sum_{n=0}^{\infty} c_n\hat{q}^n = (1+o(1))\sum_{n=0}^{\infty} c_n\hat{q}^n\,, \quad \tau \to i\infty$$

mit $c_n \in \mathbb{Z}_+$. c_n ist die Anzahl der linear unabhängigen Zustände im $\mathcal{W}$-Algebra Verma-Modul über $|\mathbf{h}\rangle$ auf dem Level n. Da diese Reihe im allgemeinen divergent ist, müssen wir eine Abschätzung für c_n angeben. Da alle Zustände des Moduls durch Anwenden der Moden der Felder ϕ_i und ψ_j in lexikographischer Ordnung auf den SPA $|\mathbf{h}\rangle$ erzeugt werden können, ist eine obere Schranke für c_n gegeben durch

$$1 \le c_n \le (\underbrace{p * p * \ldots * p}_{k}) * (\underbrace{p' * p' * \ldots * p'}_{l})(n)\,.$$

Dabei bezeichnen $p(n)$ die Anzahl von Partitionen von n, $p'(n)$ die Anzahl von Partitionen von n aus nur verschiedenen Zahlen und '$*$' die diskrete Faltung. Die untere Schranke folgt aus der Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra und ist wahr für fast alle n außer im trivialen Fall $c = h = 0$. Natürlich ist diese Abschätzung sehr grob, da ja sämtliche Nullfelder mitgezählt wurden. Die Partitionen haben generierende Funktionen, die mit der Dedekindschen η-Funktion[xvii] in Beziehung stehen, die definiert ist als $\eta(\tau) = q^{-\frac{1}{24}}\prod_{n\in\mathbb{N}}(1-q^n)$. Es gilt

$$\begin{aligned} P(q) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \frac{1}{\prod_{n\in\mathbb{N}}(1-q^n)} = \frac{q^{\frac{1}{24}}}{\eta(\tau)}\,, \\ P'(q) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} p'(n)q^n = \prod_{n\in\mathbb{N}-\frac{1}{2}}(1+q^n) = q^{\frac{1}{48}}\frac{\eta^2(\tau)}{\eta(\frac{\tau}{2})\eta(2\tau)}\,. \end{aligned}$$

Die η-Funktion hat ein sehr schönes Transformationsverhalten unter der Modul-Gruppe (sie ist eine Modul-Form von Gewicht $\frac{1}{2}$), insbesondere gilt

$$\eta(-\frac{1}{\tau}) = \sqrt{-i\tau}\,\eta(\tau)\,.$$

Damit können wir die Abschätzung weiter ausrechnen, nämlich

$$\begin{aligned} \chi^{\mathcal{W}}_{|\mathbf{h}\rangle}(\frac{1}{\tau}) &\le (1+o(1))\sum_{n=0}^{\infty}(\underbrace{p * p * \ldots * p}_{k}) * (\underbrace{p' * p' * \ldots * p'}_{l})(n)\hat{q}^n \\ &= (1+o(1))\,(P(\hat{q}))^k\,(P'(\hat{q}))^l \\ &= (1+o(1))\left(b|\tau|^{-\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{24}}P(q)\right)^k\left(b'|\tau|^{-\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{48}}P'(q)\right)^l \\ &= (b^* + o(1))|\tau|^{-\frac{k+\frac{l}{2}}{2}}q^{-\frac{k+\frac{l}{2}}{24}}\,, \end{aligned}$$

[xvii] oft auch Eulersche η-Funktion genannt

wobei b, b' und b^* gewisse Konstanten sind und $P(q)^k, P'(q)^l$ in b^* absorbiert wurde. Den zweiten Schritt erhält man leicht aus dem Verhalten von $\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}}P^{-1}(q)$ unter modularen Transformationen, könnte ihn aber ebenso gut aus dem Transformationsverhalten von $P(q), P'(q)$ direkt ableiten, siehe dazu [7].
Auf der anderen Seite können wir auch die S-Transformation auf den Charakter selbst anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\chi^{\mathcal{W}}_{|\mathbf{h}\rangle}(-\frac{1}{\tau}) &= (1+o(1))\sum_{\mathbf{h}'\in\Lambda} S_{\mathbf{h}'\mathbf{h}}q^{h'-\frac{c}{24}} \\ &= (1+o(1))S_{\mathbf{h}_{min}\mathbf{h}}q^{h_{min}-\frac{c}{24}}\,.\end{aligned}$$

Schlielich erhalten wir

$$O(1) < (1+o(1))S_{\mathbf{h}_{min}\mathbf{h}}q^{h_{min}-\frac{c}{24}} \leq (b^*+o(1))|\tau|^{-\frac{k+\frac{l}{2}}{2}}q^{-\frac{k+\frac{l}{2}}{24}}\,.$$

Dies kann nur wahr sein, wenn $0 < c - 24h_{min} < k + \frac{l}{2}$ ist. ■
Damit ist eine obere Grenze für die Abhängigkeit der effektiven zentralen Ladung gewonnen. Unter bestimmten Umständen können wir diese Schranke verbessern. Bezeichne $\mathcal{W}_{min} \subset \mathcal{W}$ die kleinste Unteralgebra von $\mathcal{W}$, die keine weiteren Nullzustände liefert, i.e. jeder $\mathcal{W}'$-Nullzustand ist auch ein $\mathcal{W}$-Nullzustand und die zusätzlichen Generatoren in $\mathcal{W}$ sind keine einfachen Felder. Sie habe k' bosonische Generatoren und l' fermionische. Dann gilt $0 < c_{eff} < k' + \frac{l'}{2}$. Wenn $\mathcal{W}'$ die Virasoro-Algebra ist, ist also $c_{eff} < 1$, und wir können die Ergebnisse über die degenerierten Modelle verwenden.

3.5 Modulare Differentialgleichung

Die modulare Invarianz der Zustandssumme erzwingt, daß die Charaktere Modul-Formen vom Gewicht 0 sein müssen. Wir wollen dazu kurz eine allgemeine Betrachtung anstellen:
Angenommen, unsere TÆC habe n Charaktere $\chi_i(\tau), i = 1,\ldots,n$, wobei weiter vorausgesetzt sei, daß $\chi_i \not\equiv \chi_j$ für $i \neq j$ (man beachte, daß wir explizit nicht ausschließen, daß $h(i) = h(j)$ im Unterschied zu [811]). Wir wollen eine Gleichung ableiten, die erfüllt sein muß, wenn diese Charaktere eine Darstellung der Modul-Gruppe PSL(2,$\mathbb{Z}$) formen. Trivialerweise erfüllen sie die folgende Gleichung:

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \chi_1 & \cdots & \chi_n & f \\ D\chi_1 & \cdots & D\chi_n & Df \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ D^n\chi_1 & \cdots & D^n\chi_n & D^nf \end{pmatrix} = 0\,, \tag{3.18}$$

falls $f = \chi_i$ und D eine Derivation ist. Enwickeln wir dies nach der letzten Spalte, erhalten wir

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^iV_iD^if = 0 \tag{3.19}$$

wobei die V_i die Unterdeterminanten sind, die man durch Streichen der i-ten Zeile und der letzten Spalte erhält,

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \chi_1 & \cdots & \chi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{i-1}\chi_1 & \cdots & D^{i-1}\chi_n \\ D^{i+1}\chi_1 & \cdots & D^{i+1}\chi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D^n\chi_1 & \cdots & D^n\chi_n \end{pmatrix} = V_i\,. \tag{3.20}$$

Man wählt nun die modular kovariante Derivation cod,

$$\mathrm{cod}_{(s)} = \frac{1}{2\pi i}\partial_\tau - \frac{1}{12}sG_2(\tau)\,, \tag{3.21}$$

die das Gewicht einer Modul-Form um 2 erhöht. Hier bezeichnet G_2 die zweite Eisenstein-Reihe. Dann ist D^i nichts anderes als

$$D^i = \mathrm{cod}_{(2i-2)}\ldots\mathrm{cod}_{(2)}\mathrm{cod}_{(0)}\,. \tag{3.22}$$

Die V_i sind dann Modul-Funktionen vom Gewicht $n(n+1)-2i$. Weiter sei angenommen, die Charaktere seien gegeben als Produkt aus negativen Potenzen der η-Funktion und Modul-Formen, i.e.

$$\begin{aligned}
\chi_j(q) &= \eta(q)^{-m}\eta(q)^m\chi_j(q) && (3.23)\\
&= \eta(q)^{-m}q^{h_j-c/24+m/24}\sum_{l=0}^{\infty}p_j(l)q^l && (3.24)\\
&= \eta(q)^{-m}\Lambda_j(q) && (3.25)
\end{aligned}$$

wo die $p_j(l)$ bestimmte festgelegte ganze Zahlen sind. Dies wird durch die gewünschte Asymptotik der Charaktere im Unendlichen motiviert. Um nun zu erreichen, daß die Λ_j Modul-Formen über $\Gamma(n+1)$ sind, muß gelten, daß $(n+1)(h(j)-c/24+m/24)$ eine nicht-negative ganze Zahl für $j=1,\ldots,n$ ist. Natürlich wählt man m so klein wie möglich.
Für eine TÆCR erhält man sogar ein noch strengeres Resultat. Sei

$$\gamma \equiv \sum_{i=1}^{n} h(i) - nc/24\,. \tag{3.26}$$

Für TÆCR ist $d=12\gamma$ eine positive gerade ganze Zahl, so daß die V_i geschrieben werden können als $\eta^{2d}W_i$ mit einer geraden ganzzahligen Potenz von η-Funktionen. Somit sind die V_i nicht echte Modul-Funktionen, sondern sind Elemente in dem Ring $\mathbb{C}[G_4,G_6,\eta]$, wo die Potenz von η gegeben ist durch $2d$. Die $W-i$ sind Modul-Formen über der ganzen PSL(2,$\mathbb{Z}$), und können daher als Polynome in den Eisenstein-Reihen G_4 und G_6 geschrieben werden. Dividiert man den gemeinsamen Faktor von η-Potenzen aus, verbleiben Modul-Funktionen vom Gewicht $n(n+1)-d-2k=n(n+1)-12\gamma-2k$. Schließlich bemerkt man, daß γ nur modulo 1 bestimmt werden muß, da $\eta^{24}=\Delta$ eine Modul-Funktion ist, die sich durch G_4 und G_6 ausdrücken läßt.
Dies alles kann man nun kombinieren, um für eine gegebene TÆCR eine sogenannte modulare Differentialgleichung aufzustellen, die vom Grade n ist und aus deren n linear unabhängigen Lösungen sich die Charaktere der Theorie linear kombinieren lassen. Dabei macht man sich zunutze, daß sich die W_i immer als Linearkombinationen in Monomen von G_4 und G_6 schreiben lassen. Sei genauer Φ_n eine Modul-Funktion vom Gewicht $n\in 2\mathbb{N}, n>2$, dann kann Φ_n immer geschrieben werden als

$$\Phi_n = \sum_{\substack{k,l\in\mathbb{Z}_+\\ 4k+6l=n}} a_{n,l}(G_4)^k(G_6)^l\,. \tag{3.27}$$

Die konstante Funktion $\Phi_0 \equiv a_{0,0}$ ist natürlich auch eine Modul-Funktion (vom Gewicht 0), hingegen gibt es keine Modul-Funktion vom Gewicht 2.
Die modulare Differentialgleichung nimmt dann die einfache Form

$$\sum_{k=0}^{n}\Phi_{n(n+1)-d-2k}D^k\chi_i = 0\,,\quad 1\leq i\leq n \tag{3.28}$$

an. Am besten löst man diese Gleichung über Potenzreihen, i.e. man setzt die χ_i in der Form

$$\chi_i = q^{h(i)-c/24} \sum_{n\in\mathbb{N}} b_{i,n} q^n \tag{3.29}$$

an. Wenn allerdings für ein Paar $i \neq j$ die Charaktere das gleiche Gewicht $h(i) = h(j)$ haben, weist die modulare Differentialgleichung degenerierte Lösungen auf, und man muß man analog zum Fall der chiralen konformen Blöcke logarithmische Lösungen hinzunehmen, i.e. für den entsprechenden h-Wert den Ansatz

$$\chi_i = \log(q) q^{h(i)-c/24} \sum_{n\in\mathbb{N}} b_{i,n} q^n \tag{3.30}$$

hinzufügen. Unter $\log(q)$ verstehen wir dabei immer denjenigen Zweig, der mit τ identisch ist.
Der oben gemachte Ansatz für die Charaktere läßt sich mathematisch weiter begründen. Die Asymptotik der Charaktere für $q \to 1$ sollte nämlich einer Landau-Singularität entsprechen und vom Grade m sein, wenn $m - 1 < c_{\mathit{eff}} \leq m$ ist. Ein rigoroser Beweis ist uns allerdings nicht bekannt, außer im Fall $c_{\mathit{eff}} \leq 1$, wo in der Tat $m = 1$ ist [263]. (Der Einfachheit halber haben wir diese Betrachtung nur für den bosonischen Fall durchgeführt, für den fermionischen macht man sich zunutze, daß die Asymptotik im wesentlichen durch einen Quotienten von η-Funktionen ausgedrückt werden kann.) Wir können aber für den uns interessierenden Fall feststellen:

Proposition -350/13. *Eine TÆCR habe $c_{\mathit{eff}} \leq 1$. Dann sind ihre Charaktere χ_i entweder gegeben als $\Lambda_i(\tau)/\eta(\tau)$ mit $\Lambda_i(\tau)$ Modul-Formen vom Gewicht $\frac{1}{2}$, wenn die Lösung der modularen Differentialgleichung nicht degeneriert ist, oder als $(a_i + b_i\tau)\Lambda'_i(\tau)/\eta(\tau)$ mit $\Lambda'_i(\tau)$ Modul-Formen vom Gewicht $\frac{3}{2}$ im logarithmischen Fall.* ∎

3.6 Theta-Funktionen

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir festgesellt, daß die Charaktere einer Theorie mit $c_{\mathit{eff}} \leq 1$ 1-singuläre Modul-Formen sein müssen. Beschränken wir uns zunächst auf den regulären Fall. Wir führen die sogenannten *elliptischen Funktionen* oder auch *Jacobi-Riemann Θ-Funktionen* ein, die sämtliche Modul-Formen vom Gewicht $\frac{1}{2}$ sind. Es gibt zwei Sorten, die gewöhnlichen und die alternierenden Θ-Reihen,

$$\Theta_{\lambda,k}(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{(2kn+\lambda)^2/4k}, \quad \lambda \in \mathbb{Z}_+/2,\ k \in \mathbb{N}/2, \tag{3.31}$$

$$\widetilde{\Theta}_{\lambda,k}(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{(2kn+\lambda)^2/4k}, \quad \lambda \in \mathbb{Z}_+/2,\ k \in \mathbb{N}/2. \tag{3.32}$$

Wir nennen λ den *Index* und k den *Modulus* der Funktion. Die Θ-Funktionen genügen den Relationen $\Theta_{\lambda,k} = \Theta_{-\lambda,k} = \Theta_{\lambda+2k,k}$, und $\Theta_{k,k}$ hat, betrachtet als Potenzreihe in q, nur gerade ganzzahlige Koeffizienten. Die modularen Transformationseigenschaften sind dann (inklusive derjenigen der η-Funktion)

$$\begin{aligned}
\Theta_{\lambda,k}(-\tfrac{1}{\tau}) &= \sqrt{\tfrac{-i\tau}{2k}} \sum_{\lambda'=0}^{2k-1} e^{i\pi\frac{\lambda\lambda'}{k}} \begin{cases} \Theta_{\lambda',k}(\tau) & \text{if } \lambda \in \mathbb{Z} \\ \widetilde{\Theta}_{\lambda',k}(\tau) & \text{if } \lambda \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2} \end{cases}, \\
\widetilde{\Theta}_{\lambda,k}(-\tfrac{1}{\tau}) &= \sqrt{\tfrac{-i\tau}{2k}} \sum_{\lambda'=0}^{2k-1} e^{i\pi\frac{\lambda(\lambda'+\frac{1}{2})}{k}} \begin{cases} \Theta_{\lambda'+\frac{1}{2},k}(\tau) & \text{if } \lambda \in \mathbb{Z} \\ \widetilde{\Theta}_{\lambda'+\frac{1}{2},k}(\tau) & \text{if } \lambda \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2} \end{cases}, \\
\Theta_{\lambda,k}(\tau+1) &= e^{i\pi\frac{\lambda^2}{2k}} \begin{cases} \Theta_{\lambda,k}(\tau) & \text{if } \lambda - k \in \mathbb{Z} \\ \widetilde{\Theta}_{\lambda,k}(\tau) & \text{if } \lambda - k \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2} \end{cases},
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Theta}_{\lambda,k}(\tau+1) &= e^{i\pi\frac{\lambda^2}{2k}} \begin{cases} \widetilde{\Theta}_{\lambda,k}(\tau) & \text{if } \lambda-k\in\mathbb{Z} \\ \Theta_{\lambda,k}(\tau) & \text{if } \lambda-k\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2} \end{cases}, \\
\eta(-\tfrac{1}{\tau}) &= \sqrt{-i\tau}\,\eta(\tau), \\
\eta(\tau+1) &= e^{\pi i/12}\,\eta(\tau).
\end{aligned}
$$

Die Funktionen $\chi_{\lambda,k} = \Theta_{\lambda,k}(\tau)/\eta(\tau)$ sind damit Modul-Formen vom Gewicht 0 zu einem $\Gamma(N) \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, e.g. N ist das kleinste gemeinsame Vielfache von $4k$ und 24, falls $\lambda - k \in \mathbb{Z}$ ist. E. Kiritsis [709] bemerkte als erster, daß das Serre-Stark-Theorem die Vollständigkeit der Menge $\{\chi_{\lambda,k} | k \in \mathbb{N}/2,\ 0 \leq \lambda \in \mathbb{Z}/2 \leq k\}$ als Erzeugendensystem von 1-singulären Modul-Formen impliziert.
Wir haben bis jetzt angenommen, daß die Modul-Formen homogenes Gewicht 0 besitzen. Bei logarithmischen Theorien sind die Charaktere jedoch Funktionen aus dem Ring $\mathbb{Z}[[q]][\log q]$. Wir wissen aber, daß diese Funktionen lediglich degenerierte Lösungen der modularen Differentialgleichung sind, die für $c_{\mathit{eff}} \leq 1$ ansonsten nur die oben eingeführten 1-singulären Modul-Formen liefert. Wie bei der Analyse degenerierter Lösungen von Differentialgleichungen üblich können wir die zusätzliche, linear unabhängige Lösung formal aus der Ableitung der gewöhnlichen Lösung nach ihrem Parameter gewinnen, i.e.

$$
(\partial\Theta)_{\lambda,k}(\tau) \propto \frac{\partial}{\partial\lambda}\Theta_{\lambda,k}(\tau) = \frac{2\pi i\tau}{k}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(2kn+\lambda)q^{(2kn+\lambda)^2/4k}.
$$

Bis hierher geht die modulare Kovarianz nicht ein, und daher kann τ ohne weiteres als "Proportionalitätsfaktor" auftreten. Um nun auch das korrekte modulare Verhalten zu erhalten, betrachten wir die Modul-Transformationen der sogenannten *affinen* Θ-Funktionen

$$
(\partial\Theta)_{\lambda,k}(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(2kn+\lambda)q^{(2kn+\lambda)^2/4k}, \tag{3.34}
$$

die auch in den Charakterformeln für die affine $\widehat{\mathfrak{su}(2)}$-Algebra eine wichtige Rolle spielen [659, 151]. Im Gegegensatz zu den Θ-Funktionen sind sie ungerade, i.e. $(\partial\Theta)_{-\lambda,k} = -(\partial\Theta)_{\lambda,k}$. Ferner ist per definitionem $(\partial\Theta)_{0,k} = (\partial\Theta)_{k,k} \equiv 0$. Die affinen Θ-Funktionen transformieren sich wie folgt:

$$
\begin{aligned}
(\partial\Theta)_{\lambda,k}(-\tfrac{1}{\tau}) &= (-i\tau)\sqrt{\tfrac{-i\tau}{2k}}\sum_{\lambda'=1}^{2k-1} e^{i\pi\frac{\lambda\lambda'}{k}}(\partial\Theta)_{\lambda',k}(\tau), \\
(\partial\Theta)_{\lambda,k}(\tau+1) &= e^{i\pi\frac{\lambda^2}{2k}}(\partial\Theta)_{\lambda,k}(\tau),
\end{aligned} \tag{3.35}
$$

sind also unter S keine Modul-Formen vom Gewicht 0 mehr[xviii]. Wir können dennoch eine abgeschlossene endlich dimensionale Darstellung der Modul-Gruppe erhalten, wenn wir die Funktionen

$$
(\nabla\Theta)_{\lambda,k}(\tau) = \frac{\log q}{2\pi i}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(2kn+\lambda)q^{(2kn+\lambda)^2/4k} \tag{3.36}
$$

hinzunehmen. Man erkennt unschwer, daß dann unter S diese beiden Funktionen gerade ineinander übergehen: $(\nabla\Theta)_{\lambda,k}$ wird unter T in die Linearkombination $(\nabla\Theta)_{\lambda,k} + (\partial\Theta)_{\lambda,k}$ abgebildet. Die Linerakombination $(\partial\Theta)_{\lambda,k}(\tau)(\nabla\Theta)^*_{\lambda,k}(\bar\tau) - (\nabla\Theta)_{\lambda,k}(\tau)(\partial\Theta)^*_{\lambda,k}(\bar\tau) = (\tau-\bar\tau)|(\partial\Theta)_{\lambda,k}|^2$ ist daher modul-kovariant. Natürlich könnte die modulare Differentialgleichung auch von höherem Grad degeneriert sein, und man müßte die entsprechenden Verallgemeinerungen $(\partial^n\Theta)_{\lambda,k}$ und $(\nabla^n\Theta)_{\lambda,k}$ betrachten (der Ausdruck $(\tau-\bar\tau)^n$ ist für jedes $n \in \mathbb{Z}_+$ modul-kovariant vom Gewicht $-2n$). Allerdings ergäbe deren asymptotisches Verhalten $c_{\mathit{eff}} > 1$: Eine k-fache Ableitung trägt in der Asymptotik $q \to 1$ eine zusätzliche Divergenz der Ordnung $\sum_n O(n^k)$ bei. Eine Landau-Singularität

[xviii] In den Charakterformeln der affinen $\widehat{\mathfrak{su}(2)}$-Algebra tritt daher die η-Funktion zur dritten Potenz im Nenner auf.

vom Grade eins können wir also höchstens noch für $k = 1$ erhalten (und dann auch nur, wenn genügend Koeffizienten der "abgeleiteten" Θ-Reihen negativ sind).
Zum Abschluß wollen wir noch einen Prototypen einer modular invarianten Zustandssumme angeben, auf den wir immer wieder zurückgreifen werden, die Zustandssumme des *Gauss-Modells*, i.e. die Zustandssumme $Z(R)$ einer U(1)-Theorie der Abbildungen des Einheitskreises $S^1 \to S^1$ auf einen Kreis mit Radius R. Betrachten wir also ein freies skalares Feld $\varphi(z)$ kompaktifiziert auf einem Kreis mit Radius R (siehe auch Abschnitt II.8 über Freie-Feld-Konstruktion in dieser Arbeit). Die Zustandssumme eines solchen Feldes ist bekanntermaßen

$$Z(R) = |\eta(\tau)|^{-2} \sum_{(p,\bar{p})\in\Gamma_R} q^{\frac{1}{2}p^2}\bar{q}^{\frac{1}{2}\bar{p}^2} , \tag{3.37}$$

wobei die Summation der "Impulse" sich über das Gitter

$$\Gamma_R = \left\{ (p,\bar{p}) = \left(\frac{n}{R} + \tfrac{1}{2}mR, \frac{n}{R} - \tfrac{1}{2}mR \right) \middle| n,m \in \mathbb{Z} \right\} \tag{3.38}$$

erstreckt. Γ_R ist ein selbst-duales Gitter, wenn wir eine Lorentzsche Metrik einführen. Genau diese Eigenschaft von Γ_R garantiert, daß $Z(R)$ modular invariant ist. Das Spektrum läßt sich mit Hilfe des Feldes $\phi(z,\bar{z}) = \varphi(z) + \bar{\varphi}(\bar{z})$ beschreiben. Man hat die normierten Vertexoperatoren

$$\begin{aligned} V^+_{nm}(z,\bar{z}) &= \sqrt{2}\cos[p\varphi(z) + \bar{p}\bar{\varphi}(\bar{z})] , \\ V^-_{nm}(z,\bar{z}) &= \sqrt{2}\sin[p\varphi(z) + \bar{p}\bar{\varphi}(\bar{z})] , \end{aligned}$$

wobei $(p,\bar{p})$ über Gleichung (3.38) mit (m,n) in Beziehung steht. Die Kombinationen $V^+_{nm} \pm iV^-_{nm}$ erzeugen Zustände mit Impuls $\pm\frac{1}{2}(p+\bar{p})$ und Windungszahl $\pm(p-\bar{p})$. Die erlaubten Werte für die Impulse $p,\bar{p}$ folgen aus den Lokalitätseigenschaften, i.e. V_{nm} muß invariant sein unter einem Shift von $2\pi R$ in $\phi(z,\bar{z})$, und $\phi(z,\bar{z})$ muß in Anwesenheit eines Vertexoperators in Korrelatoren eine einwertige Funktion (modulo $2\pi R$) ergeben. Falls $p^2 = \frac{1}{2}k^2$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ist, gibt es weitere primäre Felder der Form $f(\partial\varphi, \partial^2\varphi, \ldots)V_{nm}$, wobei die Polynome f durch die Schur-Polynome gegeben sind. Analoges gilt für $\bar{p}$. Insbesondere existieren immer die (1,0) und (0,1) konformen Felder $\partial\varphi$ und $\overline{\partial\varphi}$, die zu den erhaltenen recht- und links-chiralen Impulsen integriert werden können. Diese chiralen Ströme erzeugen die U(1)×U(1)-Symmerie. Die volle Symmetrie ist aber sogar O(2)×O(2) wegen der diskreten $\mathbb{Z}_2$-Symmetrien $(\varphi,\bar{\varphi}) \to (-\varphi,-\bar{\varphi})$ und $(\varphi,\bar{\varphi}) \to (\bar{\varphi},\varphi)$. Die Vertexoperatoren V_{nm} sind genau die primären Felder der U(1)-Strom-Algebra. V_{n0} und V_{0m} heißen üblicherweise auch elektrisch bzw. magnetisch.
Für bestimmte Werte des Radius R läßt sich $Z(R)$ als Bilinearform in den Θ-Funktionen (dividiert durch $\eta\bar{\eta}$) schreiben. Aus der expliziten Form

$$Z(R) = \frac{1}{\eta(\tau)\eta(\bar{\tau})} \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \left(q^{\frac{1}{8R^2}(n+2mR^2)^2} \bar{q}^{\frac{1}{8R^2}(n-2mR^2)^2} \right)$$

ersieht man, daß die Zustandssumme für $2R^2 \in \mathbb{N}$ diagonal in den elliptischen Funktionen zum Modulus $2R^2$ wird, nämlich

$$Z(R) = \frac{1}{\eta(\tau)\eta(\bar{\tau})} \sum_{1\leq n\leq 4R^2} \left| \Theta_{n,2R^2} \right|^2 . \tag{3.39}$$

Allgemeiner gilt, wenn $2R^2 = \frac{P}{Q} \in \mathbb{Q}$ mit P,Q coprim, daß die Zustandssumme durch den im allgemeinen nicht diagonalen Ausdruck

$$Z(R) = \frac{1}{\eta(\tau)\eta(\bar{\tau})} \sum_{n \bmod 2PQ} \Theta_{n,PQ}(\tau)\Theta_{n',PQ}(\bar{\tau}) \tag{3.40}$$

gegeben ist, wobei n' die Form $n' = QN + PM \bmod 2PQ$ hat, wenn n als $n = QN - PM \bmod 2PQ$ mit zwei ganzen Zahlen N, M geschrieben wird[xix]. Der ganzzahlige Fall $Q = 1$ ist dann ein Spezialfall dieser allgemeinen Zerlegung.
Anstelle der gebräuchlichen Notation $Z(R)$ werden wir meist die für uns nützlichere Notation $Z[2R^2]$ verwenden. In dieser Notation nimmt auch die Dualitäts-Eigenschaft der Gauss-Zustandssumme eine besonders einfache Form an, denn aus (3.37) und (3.38) entnimmt man unmittelbar, daß für alle $x \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$Z[x] = Z[1/x]\,. \tag{3.41}$$

[xix] Da $(P, Q) = 1$, kann jede Zahl n so dargestellt werden.

E.V.G.A.

Staunen

Bäume und Gras
grüne Augenweide

Tagsüber die Stimmen
von Laub und Fontäne
nachts Grillengesang

Machen wir uns
mit den Sternen
vertraut

Wir Stäubchen
staunen
Spiel oder Traum

So unfaßbar einfach
ist alles
so vielstimmig
spricht das
Märchen Leben
uns an

Rose Ausländer

Thema Primum c = 1 - 24k

Wir haben im Præludium zwei grundsätzliche Feststellungen machen können. Wir haben *alle* möglichen Strukturen degenerierter irreduzibler RPA der Virasoro-Algebra analysieren, und außerdem aus den modularen Eigenschaften der Charaktere ein Erzeugendensystem von Modul-Formen ableiten können, aus denen sich *alle* möglichen Charaktere von Theorien mit $c_{eff} \leq 1$ linear kombinieren lassen. In der Fuge werden wir nun weiterhin mit zwei Strategien arbeiten. Zunächst werden wir jeweils einen speziellen Fall degenerierter Modelle der Virasoro-Algebra untersuchen, die maximal erweiterte Symmetrie-Algebra konstruieren und deren irreduziblen RPA studieren. Anschließend widmen wir uns den modularen Eigenschaften der Charaktere und Zustandssummen. Beides zusammen wird uns dann in die Lage versetzen, alle TÆCR mit $c_{eff} \leq 1$ klassifizieren zu können.
Als erstes betrachten wir den Fall (ii) aus Satz $-667/8$, die sogenannten parabolischen Modelle. Ausgehend von einigen explizit konstruierten $\mathcal{W}$-Algebren werden wir die Existenz einer ganzen – durch die Beispiele nahegelegten – Serie beweisen und die Strukturkonstanten dieser $\mathcal{W}$-Algebren allgemein berechnen. Die Darstellungstheorie dieser $\mathcal{W}$-Algebren führt uns dann zu neuen rationalen Modellen und Fusionsalgebren. Mit den Charakteren bzw. der Zustandssumme können wir dann die Klassifikation aller regulären Theorien mit $c_{eff} = 1$ vervollständigen. Am Rande sei erwähnt, daß wir all diese Resultate auf den Fall der $N = 1$ supersymmetrischen TÆC verallgemeinern können [367].
Vielleicht das interessanteste, mit Sicherheit jedoch das "schönste" Resultat, ist die Struktur des Modul-Raumes dieser TÆCR. Wir werden sehen, daß dieser Raum der nicht unitären regulären $c_{eff} = 1$ Theorien ein Multi-Fraktal ist, der eine Ebene dicht ausfüllt und verblüffende arithmetische Eigenschaften hat. Dieses Ergebnis ist insofern interessant, als man eigentlich gehofft hatte, Modul-Räume von TÆCR seien immer algebraische Varietäten, auf denen kontinuierliche Deformationen

(die marginalen Perturbationen) operieren. Da der von uns betrachtete Modul-Raum einige nicht triviale Eigenschaften hat, die für den fraktionalen Quanten-Hall-Effekt bedeutsam sein könnten, widmen wir ihm ein eigenes Kapitel.

4.1 W-Algebren und degenerierte nicht minimale Modelle

Als wir 1990 durch den Zugang über die Lie-Algebra der Moden chiraler Felder zahlreiche $\mathcal{W}$-Algebren mit einem zusätzlichen Generator konstruiert hatten [79] (siehe aber auch [281, 271]), stießen wir bei den Algebren, die nur für endlich viele diskrete c-Werte existieren, auf zwei "Serien", die sich in der Form $\mathcal{W}(2,\delta)$ mit $c = 1-8\delta$ und $c = 1-3\delta$ parametrisieren lassen. Überraschend war, daß im Gegensatz zu den meisten anderen diskreten Fällen c nicht aus der Serie minimaler Modelle stammt (das wäre sonst Fall (i) aus Satz −667/8), daß aber andererseits das zusätzliche chirale primäre Feld die Dimension $\delta = h_{2,2}$ oder $\delta = h_{3,3}$ hat, also zu einer degenerierten Virasoro-RPA gehört. Um den Stellenwert auch expliziter Konstruktion von Beispielen für eine Klassifikation zu demonstrieren, seien diese Beispiele hier aufgelistet:

Table IV.1 Zwei Sätze von $\mathcal{W}$−Algebren mit rationalen c−Werten, die nicht in der diskreten Serie minimaler Modelle enthalten sind.

Die Serie $\mathcal{W}(2,\delta)$ mit $c=1-8\delta$:		
$\mathcal{W}(2,\frac{3}{2})$	$(c = -11)$	$(C_{WW}^{W})^2 = 0$
$\mathcal{W}(2,3)$	$(c = -23)$	$(C_{WW}^{W})^2 = 0$
$\mathcal{W}(2,\frac{9}{2})$	$c = -35$	$(C_{WW}^{W})^2 = 0$
$\mathcal{W}(2,6)$	$(c = -47)$	$(C_{WW}^{W})^2 = 0$
$\mathcal{W}(2,\frac{15}{2})$	$c = -59$	$(C_{WW}^{W})^2 = 0$
$\mathcal{W}(2,9)$	$c = -71$	$(C_{WW}^{W})^2 = 0$
Die Serie $\mathcal{W}(2,\delta)$ mit $c=1-3\delta$:		
$\mathcal{W}(2,2)$	$(c = -5)$	$((C_{WW}^{W})^2 = \frac{722}{33})$
$\mathcal{W}(2,4)$	$(c = -11)$	$(C_{WW}^{W})^2 = -\frac{57434}{253}$
$\mathcal{W}(2,6)$	$(c = -17)$	$(C_{WW}^{W})^2 = \frac{95922436000}{43340157}$
$\mathcal{W}(2,8)$	$c = -23$	$(C_{WW}^{W})^2 = -\frac{127081705690919}{5974374591}$
$\mathcal{W}(2,10)$	$c = -29$	$(C_{WW}^{W})^2 = -\frac{1865959562738287104}{9178198719145}$

Die c-Werte in Klammern gehören zu $\mathcal{W}$-Algebren, die generisch, i.e. für alle c-Werte bis auf endlich viele Ausnahmen, existieren. In der letzten Spalte der Tabelle haben wir das Quadrat der Selbstkopplungs-Strukturkonstanten C_{WW}^{W} des zusätzlichen primären Feldes W mit Dimension δ aufgeführt. Für δ halbzahlig oder ganzzahlig ungerade verschwindet diese Strukturkonstante aus Symmetriegründen. Der Wert für die $\mathcal{W}(2,2)$-Algebra steht in Klammern, da diese Algebra für jede zentrale Ladung c und für jede unabhängig wählbar Selbstkopplug existiert, da sie immer linear in zwei miteinander kommutierende Virasoro-Algebren transformiert werden kann. Der hier gegebene Wert der Selbstkopplung wird später klar.
Die generisch existierenden $\mathcal{W}$-Algebren können wir wie folgt identifizieren: $\mathcal{W}(2,\frac{3}{2})$ ist nichts anderes als die Super-Virasoro-Algebra, und $\mathcal{W}(2,2)$ ist die direkte Summe von zwei Virasoro-Algebren. Letztere, sowie $\mathcal{W}(2,3)$, $\mathcal{W}(2,4)$ und $\mathcal{W}(2,6)$ können als die "Casimir-Algebren" der affinen Kac-Moody-Algebren, oder genauer als die Affinisierung der Casimir-Algebren, die zu den semi-simplen Lie-Algebren $A_1 \oplus A_1$, A_2, B_2 oder C_2, und G_2 gehören, betrachtet werden. Die affinen Casimir-Algebren bilden eine große Klasse generisch existierender $\mathcal{W}$-Algebren. Bezeichne $\mathfrak{g}$ eine

Lie-Algebra, $\hat{\mathfrak{g}}$ ihre unendlich dimensionale Kac-Moody-Algebra und $\mathcal{C}(\mathfrak{g})$ ihre Casimir Algebra mit Exponenten $e_1, \ldots, e_{\mathrm{rank}\,\mathfrak{g}}$. Dann existiert generisch eine Algebra $\mathcal{W}(\mathfrak{g})$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \to & \hat{\mathfrak{g}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}(\mathfrak{g}) & \to & \mathcal{W}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

kommutiert. Diese Algebra ist $\mathcal{W}(\mathfrak{g}) = \mathcal{W}(e_1+1, \ldots, e_{\mathrm{rank}\,\mathfrak{g}}+1)$.
Wir betrachten nun Fall (ii) aus Satz $-667/8$. Sei k ganz- oder halbzahlig gewählt. Dann sind alle Gewichte

$$h_{r,r} = (r^2-1)k\,, \quad h_{r,-r} = (r^2-1)k + r^2 \tag{4.1}$$

ebenfalls ganz oder halbzahlig. Darüber hinaus sind auch alle Phasen $\varepsilon_{\alpha_{r,r}\alpha_{s,s}} = \pm 1$. Wenn man nur ungerade r zuläßt, kann auch $k \in \mathbb{Z}_+/4$ gewählt werden. Damit sind alle Voraussetzungen erfüllt, ein lokales System chiraler Vertexoperatoren zu konstruieren. In der Tat [367] stellt der "diagonale" Satz $\{V^{(l,l)}_{(n,n)(m,m)} \,|\, n,m,l \in \mathbb{Z}_+,\ l \equiv n+m-1 \mod 2\}$ von BRST-invarianten geschirmten Vertexoperatoren ein lokales System dar, i.e. alle Operatoren sind lokal zueinander. Dies folgt nach den Ausführungen aus dem Dux des Præludium (siehe besonders Abschnitt II.8), da die Phasen, die bei einem Umordnen der Schirm-Ladungen auftreten, sich genau dann wegheben, wenn die Zahl der umgeordneten Q_+ Ladungen der Zahl der umgeordneten Q_- Ladungen entspricht, $Q_-^{(r)}Q_+^{(r)}\psi_{\alpha_{n,n}}(z) = e^{4\pi i r\alpha_{n,n}\alpha_0}\psi_{\alpha_{n,n}}(z)Q_-^{(r)}Q_+^{(r)}$ und $4\alpha_{n,n}\alpha_0 = 4(1-n)\alpha_0^2 \in \mathbb{Z}$ für $\alpha_0^2 = k \in \mathbb{Z}_+/4$. Von nun an betrachten wir den speziellen Fall der "diagonalen" Operatoren, i.e. $n' = \pm n$ in $\alpha_{n,n'}$. Wir führen folgende abkürzende Notation ein: $V^l_{n,m}(z) \equiv V^{(l,l)}_{(n,n)(m,m)}(z)$ für die "digonalen" BRST-invarianten geschirmten Vertexoperatoren (2.74) und $\mathcal{D}^l_{n,m} \equiv \mathcal{D}^{(l,l)}_{(n,n)(m,m)}$ für deren Koeffizienten in den chiral konformen Blöcken $W^{(n)} \equiv \Phi_{n,n,1,1}$ gemäß Gleichung (2.75).
In der Tat müssen die chiralen konformen Blöcke aus den Operatoren des oben definierten lokalen Systems zusammengesetzt werden, da sie sonst keine chiralen lokalen Felder darstellen können. Lokalität schränkt auch die Fusions-Regeln der chiralen Algebra stark ein, da chirale lokale Operatoren Zustände so aufeinander abbilden, daß die Tiefstgewichte nur um ganze oder halbzahlige Werte differieren [467]. Damit ist auch garantiert, daß die EXPO von zwei solchen lokalen Feldern, die auf einem Tiefstgewichts-Modul operieren, ebenfalls nur auf Tiefstgewichts-Modulen operierende lokale Felder ergibt. Das impliziert mit den bekannten Virasoro-Auswahlregeln [37, 337]

Proposition 1/2. *Der Satz lokaler chiraler Blöcke*

$$\left\{ W^{(n)}(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}_+} \sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}/(n+m)\mathbb{Z} \\ l+n+m\,\equiv\,1 \bmod 2}} \mathcal{D}^l_{n,m} V^l_{n,m}(z) \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}_+ \right\} \tag{4.2}$$

stellt eine abgeschlossene Vertexoperator-Algebra dar. Ihre Fusions-Regeln lauten

$$\left[W^{(n)}\right] \times \left[W^{(m)}\right] = \sum_{\substack{|n-m|+1\,\leq\, l\,\leq\, m+n+1 \\ l+m+n+1\,\equiv\,1 \bmod 2}} N^l_{n,m} \left[W^{(l)}\right]\,, \tag{4.3}$$

wobei die Fusions-Koeffizienten $N^l_{n,m}$ nicht negative ganze Zahlen sind. Darüberhinaus stellt die Teilmenge mit n ungerade eine abgeschlossene Unteralgebra dar, die wir im folgenden als den ungeraden Sektor *der Algebra bezeichnen wollen.* ∎

Wir machen die wichtige Feststellung, daß lediglich ganzahliges oder halbzahliges k (oder viertelzahliges für die Unteralgebra des ungeraden Sektors) zu einem nicht trivialen System lokaler chiraler Vertexoperatoren führt. Nur in diesen Fällen werden wir eine Chance haben, die abzählbar unendlich vielen degenerierten Virasoro-RPA in endlich viele $\mathcal{W}$-RPA zusammenfassen zu können und somit eine TÆCR zu erhalten. Man könnte beispielsweise daran denken, auch für andere rationale Zahlen k in (4.2) die Teilmenge der dann immer noch zueinander lokalen Vertexoperatoren zu betrachten. Aber in diesen Fällen kann es geschehen, daß e.g. zwei Operatoren $W^{(n)}$ und $W^{(m)}$ halb- oder ganzzahliger Dimension zwar lokal relativ zueinander sind, daß aber einer der beiden, es sei o.B.d.A. $W^{(n)}$, nicht lokal zu sich selber ist. Dann kann aber die konforme Familie dieses Operators zur rechten Seite der EXPO des anderen Operators $W^{(m)}$ mit sich beitragen. Das einfache Feld $W^{(n)}$ erscheint dann zwar nicht selbst in der EXPO, wohl aber seine PON, e.g. $\mathcal{N}(W^{(n)}, W^{(n)})$, was als die chirale Projektion des PON des rechts-links-symmetrischen Feldes $W^{(n)}(z) \oplus W^{(n)}(\bar{z})$ mit sich aufzufassen ist. Die Konsequenz ist, daß keine abgeschloßene lokale chirale Algebra größer als die Virasoro-Algebra definiert werden kann. Wir werden dies später noch genauer aus den modularen Eigenschaften ersehen und dort zeigen, daß $k \in \mathbb{Z}_+/4$ die einzigen Möglichkeiten sind, TÆCR aus parabolischen Modellen zu erhalten.

Wir haben nun zwar ein lokales System chiraler Felder, müssen aber noch zeigen, daß es eine $\mathcal{W}$-Algebra ist, i.e. vollständig durch die PON der (Ableitungen der) endlich vielen einfachen primären Felder generiert wird. Aus den Fusions-Regeln (4.3) ersehen wir, daß das zweimalige Anwenden eines Feldes auf einen SPA uns zu anderen SPA führt, die zu anderen lokalen chiralen Feldern korrespondieren. In der Tat können wir das ganze lokale System durch die wiederholte Anwendung von $W^{(2)}$ erzeugen, den ungeraden Sektor analog durch $W^{(3)}$ allein. Wenn wir nun den Kommutator der Moden zweier solcher Operatoren betrachten, haben wir anstelle der Label der Fock-Raum-Ladungen die konformen Dimensionen der Felder auf der rechten Seite, die die Truncierung der Terme liefert. Wir schreiben die Beiträge der rechten Seite symbolisch zusammengefasst in konforme Familien und finden

$$\left[W_m^{(2)}, W_n^{(2)}\right] = \left[W_{m+n}^{(1)}\right] + \left[W_{m+n}^{(3)}\right] ,$$

wobei $W^{(1)}$ natürlich der Operator der Identität ist, die zugehörige konforme Familie also gerade die des Virasoro-Feldes. Für die Dimensionen gilt aber $h_{3,3} = 8k > 2h_{2,2} - 1 = 2(3k) - 1$ mit $k = (1-c)/24$. Also kann kein Feld der konformen Familie $\left[W^{(3)}\right]$ im Kommutator von $W^{(2)}$ mit sich selbst auftreten. Damit folgt, daß die Moden von $W^{(2)}$ zusammen mit dem Virasoro-Feld eine Lie-Algebra-Struktur bilden, die in ihrer Einhüllenden (genauer deren Abschluß) schließt und somit eine $\mathcal{W}(2, 3k)$-Algebra erzeugt. Dieselbe Argumentation wendet man auf den ungeraden Sektor an, wodurch man $W^{(5)}$ von der rechten Seite des Kommutators von $W^{(3)}$ mit sich selbst eliminieren kann und eine $\mathcal{W}(2, 8k)$-Algebra erhält.

Die Assoziativität der EXPO ist äquivalent zu den Jakobi-Identitäten der Lie-Algebra der Moden. In [79] haben wir gezeigt, daß bereits die Jacobi-Identitäten zwischen drei einfachen Feldern hinreichend sind und ferner das Verschwinden der Koeffizienten vor den primären Feldern auf der rechten Seite. In unserem Fall reduziert sich die Konsistenz auf eine einzige Bedingung. Das einfache Feld habe Dimension δ. Dann können Felder bis zur Dimension $3\delta - 2$ auf der rechten Seite der Jacobi-Identität auftreten. Vergleiche mit den Fusions-Regeln zeigen uns, daß für die ungeraden Sektoren $3h_{3,3} - 2 = 24k - 2 < h_{5,5} = 24k$ ist, also wirklich keine weiteren primären Felder zur Identität beitragen. Im andern Fall haben wir $3h_{2,2} - 2 = 9k - 2 \geq h_{3,3} = 8k$ for $k \geq 2$, so daß das Feld $W^{(3)}$ in der Identität auftreten könnte. Allerdings muß sein Koeffizient verschwinden, da die Selbstkopplung von $W^{(2)}$ gemäß der Fusions-Regeln verschwindet. Dies bedeutet wiederum, daß kein Feld auf der rechten Seite auftreten kann, dessen Entwicklung in Moden Monome mit mehr als einem Mode von $W^{(2)}$ involviert. Doch das zusammengesetzte primäre Feld $W^{(3)}$, das nichts anderes ist als die primäre Projektion von $\mathcal{N}(W^{(2)}, \partial^{2k} W^{(2)})$, hat zwangsläufig quadratische Terme von Moden des $W^{(2)}$-Feldes in seiner Moden-Entwicklung. Wenn wir die Definition von $\mathcal{W}$-Algebren dahingehend abschwächen, daß als Generatoren auch nicht-einfache Felder zugelassen sind, können wir allerdings auch eine $\mathcal{W}(2, 3k, 8k)$ konstruieren, wobei $W^{(3)}$ wie oben gegeben ist. Dies bleibt auch für den Fall gültig, daß $h_{2,2}$ halbzahlig ist. Dann ist nämlich $2k$ ungerade, und $W^{(3)}$ ist weiterhin durch den obigen Ausdruck gegeben.

Proposition -3/5. *Sei $k \in \mathbb{N}/2$. Dann existieren für $c = 1 - 24k$ $\mathcal{W}$-Algebren $\mathcal{W}(2, 3k)$, $\mathcal{W}(2, 8k)$ und, wenn nicht-einfache Felder als Generatoren zugelassen sind, $\mathcal{W}(2, 3k, 8k)$. Wenn $k \in \mathbb{Z}_+ + \frac{1}{4}$ ist, existiert für $c = 1 - 24k$ nur noch eine $\mathcal{W}(2, 8k)$-Algebra.* ■

Eine $\mathcal{W}$-Algebra ist vollständig duch den Satz von Dimensionen der Generatoren und einer konsistenten Wahl aller freien Parameter bestimmt. Die Dimension des zusätzlichen chiralen primären Feldes und die zentrale Ladung c sind in unserem Fall bereits fixiert. Der einzige noch freie Parameter ist die Selbstkopplungs-Konstante des primären Feldes. Für die $\mathcal{W}(2, 3k)$-Algebren verschwindet sie aufgrund von Symmetrie-Eigenschaften, aber für die $\mathcal{W}(2, 8k)$-Algebren möchte man sie gerne ebenfalls durch die Zahl k ausdrücken, die auch die zentrale Ladung $c = 1 - 24k$ und die Dimension $\delta = 8k$ parametrisiert.

4.2 Strukturkonstanten

Wir kommen nun zur Berechnung der Strukturkonstanten. Alle Strukturkonstanten quasiprimärer Felder können aufgrund der $\mathfrak{su}(1,1)$-Invarianz auf die zentrale Ladung c und die Strukturkonstanten zwischen drei primären Feldern zurückgeführt werden [79, 859]. In unserem Fall müssen wir daher lediglich C_{WW}^{W}, die Selbstkopplung des zusätzlichen primären Feldes bei der $\mathcal{W}(2, 8k)$-Algebra, bestimmen. Diese kann aus den Strukturkonstanten der Dotsenko-Fateev-Modelle (siehe Abschnitt II.8) abgeleitet werden. Damit zeigen wir gleichzeitig, daß unsere Serien von $\mathcal{W}$-Algebren eine Freie-Feld-Darstellung besitzen. Das Quadrat von C_{WW}^{W} ist normalerweise durch die einzige nicht trivialerweise erfüllte Jacobi-Identität bestimmt, in der das Feld W dreimal auftritt.
In unserer Komposition (2.75) der lokalen Felder haben wir explizit im Ansatz auch nicht symmetrische und chirale Theorien berücksichtigt. Geht man von einer symmetrischen Theorie aus, so hat man folgende einfachere Komposition,

$$\Phi_{n'n,\bar{n}'\bar{n}}(z, \bar{z}) = \sum_{m',m,l',l} D_{(n'n)(m'm)}^{(l'l)} V_{(n'n)(m'm)}^{(l'l)}(z) \otimes V_{(n'n)(m'm)}^{(l'l)}(\bar{z}) \,. \tag{4.4}$$

Der Fall symmetrischer Theorien ist in der Literatur weit eingehender behandelt worden. Um Resultate für symmetrische Theorien auf den Fall chiraler Theorien übertragen zu können, machen wir uns klar, daß die Quadrate unserer $\mathcal{D}_{n,m}^{l}$ gerade gleich den Koeffizienten $D_{(nn)(mm)}^{(ll)}$ in (4.4) sein müssen (natürlich nur bis auf die Normierung).
Die BRST-invarianten Vertexoperatoren sind im allgemeinen nicht lokal und ihre Korrelationsfunktionen daher nicht einwertig. Vielmehr definieren die Vertexoperatoren eine Darstellung der Zopf-Gruppe über Zopf-Matrizen R,

$$V_{(m'm)(b'b)}^{(a'a)}(z) V_{(n'n)(c'c)}^{(b'b)}(\zeta) = \sum_{(d'd)} R\left((a'a), (m'm)(n'n)(c'c)\right)_{(b'b)(d'd)} V_{(n'n)(d'd)}^{(a'a)}(\zeta) V_{(m'm)(c'c)}^{(d'd)}(z) \,. \tag{4.5}$$

G. Felder, J. Fröhlich und G. Keller [347] konnten nun für symmetrische Theorien einen geschlossenen Ausdruck für die Konstanten $D_{(n'n)(m'm)}^{(l'l)}$ ableiten, indem sie Rekursions-Relationen in Termen von Zopf-Matrixelementen aus der Lokalitätsbedingung ableiteten. Letztere sind nämlich einfach proportional zu den (Quanten-) $6j$-Symbolen der Quantengruppe $\mathrm{U}_q(\mathrm{SU}(2))$. Übersetzt auf unseren Fall chiraler Felder erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{D}_{n,m}^{l}\right)^2 &= c \cdot \frac{h_{l,l}}{h_{n,n} h_{m,m}} D_{(nn)(mm)}^{(ll)} = c \cdot \frac{h_{l,l}}{h_{n,n} h_{m,m}} \frac{N_{(ll)(ll)}^{(1,1)}}{N_{(nn)(nn)}^{(1,1)} N_{(mm)(mm)}^{(1,1)}} \Delta_{n,m}^{l}(x) \Delta_{n,m}^{l}(x') \,, \\ \Delta_{n,m}^{l}(x) &= (-1)^{\frac{1}{2}(n+m-l-1)} \left(\frac{[n]_x [m]_x [l]_x}{[1]_x}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\times \prod_{j=(l+n-m+1)/2}^{n-1} [j]_x \prod_{j=(m+n-l+1)/2}^{n-1} [j]_x \prod_{j=(l+m-n+1)/2}^{(l+m+n-1)/2} \frac{1}{[j]_x},$$

wobei die Klammersymbole[xx] definiert sind als $[j]_x = x^{j/2} - x^{-j/2}$ mit $x = \exp(2\pi i\alpha_+^2)$ und $x' = \exp(2\pi i\alpha_-^2)$. Der Vorfaktor $c \cdot h_{l,l}h_{n,n}^{-1}h_{m,m}^{-1}$ berücksichtigt unsere Wahl der Normierung der Zwei-Punkt-Funktionen, die nach (2.60) für chirale einfache primäre Felder den Wert

$$\langle 0|W^{(n)}_{-h_{n,n}} W^{(m)}_{h_{m,m}}|0\rangle = \frac{c}{h_{n,n}}\delta_{n,m}$$

annimmt. Die allgemeinen Normierungs-Konstanten $N^{(l'l)}_{(n'n)(m'm)} = \langle h_{l'l}|V^{(l'l)}_{(n'n)(m'm)}(1)|h_{m'm}\rangle$ können aus der Freie-Feld-Darstellung durch ausintegrieren der Schirm-Ladungen gewonnen werden. Sie sind als Fuchs'sche Integrale gegeben [233], die sich explizit ausrechnen lassen, und lauten dann

$$\begin{aligned}
N^{(l'l)}_{(n'n)(m'm)} &= (-1)^{\frac{1}{2}((2n'-1)r+(2n-1)r')}\alpha_+^{4rr'} \prod_{j'=1}^{r'} \frac{[m'-j']_{x'}[j']_{x'}}{[1]_{x'}} \prod_{j=1}^{r} \frac{[m-j]_x[j]_x}{[1]_x} \\
&\times \prod_{j'=1}^{r'} \frac{\Gamma(j'\alpha_-^2)\Gamma(m+(j'-m')\alpha_-^2)\Gamma(n+(j'-n')\alpha_-^2)}{\Gamma(\alpha_-^2)\Gamma(m+n-2r+(r'-m'-n'+j')\alpha_-^2)} \\
&\times \prod_{j=1}^{r} \frac{\Gamma(j\alpha_+^2-r')\Gamma(m'-r'+(j-m)\alpha_+^2)\Gamma(n'-r'+(j-n)\alpha_+^2)}{\Gamma(\alpha_+^2)\Gamma(m'-r'+n'+(r-m-n+j)\alpha_+^2)},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

wobei $l = n+m-2r-1$ und entsprechend für l'. Die Strukturkonstanten der EXPO oder, äquivalent dazu, diejenigen der Lie-Algebra der Fourier-Moden der chiralen lokalen Felder sind dann gegeben durch

$$C^l_{n,m} = \mathcal{D}^l_{n,m} N^{(ll)}_{(nn)(mm)}\,. \tag{4.8}$$

Damit ergibt sich für unseren Fall der $\mathcal{W}(2,8k)$-Algebren, daß sich das Quadrat der Selbstkopplung des zusätzlichen einfachen primären Feldes $W = W^{(3)}$ mit Dimension $\delta = 8k$ als

$$\left(C^W_{WW}\right)^2 = \frac{c}{\delta} D^{(3,3)}_{(3,3)(3,3)} \left(N^{(3,3)}_{(3,3)(3,3)}\right)^2$$

liest. Man beachte, daß lediglich das Quadrat der Strukturkonstante durch Gleichung (4.6) bestimmt ist. Da $N^{(2,2)}_{(2,2)(2,2)} = 0$ gemäß den Fusions-Regeln, verschwindet die Selbstkopplung von $W^{(2)}$, wie wir es auch aufgrund der Symmetrien der EXPO-Koeffizienten erwarteten. Wenn wir die Klammersymbole in der Form $[j]_x = 2i\sin(j\pi\alpha_+^2)$ und $[j]_{x'} = 2i\sin(j\pi\alpha_-^2)$ ausdrücken und weiterhin die Gamma-Funktionen auf Terme der Gestalt $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$ zurückführen, so können wir den gewünschten geschlossenen, nur von k abhängenden Ausdruck für die Selbstkopplung angeben:

Proposition -25/7. *Sei $c = 1 - 24k, k \in \mathbb{Z}_+/2$ und $\mathcal{W}$ eine für diese zentrale Ladung existierende $\mathcal{W}$-Algebra. Wenn $\mathcal{W}(2,8k) \subset \mathcal{W}$ eine Unteralgebra von $\mathcal{W}$ ist, dann ist die Selbstkopplung des*

[xx] Unsere Notation weicht leicht von der in der Literatur zu Quantengruppen üblichen Definition der sogenannten q-Symbole ab.

Feldes W der Dimension $8k$ gegeben durch

$$\left(C_{WW}^{W}\right)^2 = \begin{cases} \dfrac{(1-24k)}{8k}\dfrac{\prod_{j=1}^{8k}\left(j^2-64(k^2+k)\right)^2\prod_{j=1}^{2k}\left(j^2-4(k^2+k)\right)^3}{\prod_{j=1}^{6k}\left(j^2-36(k^2+k)\right)\prod_{j=1}^{4k}\left(j^2-16(k^2+k)\right)^4} \\ \qquad\qquad \textit{wenn } k\in\mathbb{Z}_+/2\,, \\ \dfrac{(1-24k)}{8k}\dfrac{\prod_{j=1}^{8k}\left(j^2-64(k^2+k)\right)^2\prod_{j=1}^{2k+1/2}\left((j-\frac{1}{2})^2-4(k^2+k)\right)^3}{\prod_{j=1}^{6k+1/2}\left((j-\frac{1}{2})^2-36(k^2+k)\right)\prod_{j=1}^{4k}\left(j^2-16(k^2+k)\right)^4}\dfrac{3}{4(k^2+k)} \\ \qquad\qquad \textit{wenn } k\in\mathbb{Z}_+ + \frac{1}{4}\,. \blacksquare \end{cases} \tag{4.9}$$

Dieses Resultat stimmt mit den expliziten Werten der Beispiele aus Tabelle IV.1 überein. Der dort angegebene Wert für die Algebra $\mathcal{W}(2,2)$ wurde mit (4.9) berechnet. Obwohl diese Algebra für jede zentrale Erweiterung und unabhängig dazu für jede Selbstkopplung existiert, hat sie bei $c=-5$ nur für diesen Wert der Strukturkonstante eine Realisierung als Dotsenko-Fateev-Model. Andere Werte erhielte man, wenn man das Virasoro-Feld (2.71) deformierte.

An dieser Stelle wollen wir eine Bemerkung einschieben. Die in (2.74) definierten geschirmten Vertexoperatoren $V_{(n'n)(m'm)}^{(l'l)}(z)$ tragen eine Darstellung der Zopf-Gruppe, die durch die Zopf-Matrizen (4.5) vermittelt wird. Gleichung (4.5) ist gültig für $|\zeta|>|z|$. Die Reihenfolge der Integrationsvariablen von den Schirm-Ladungen sowie die Wahl der Integrationswege gehen wesentlich in die Berechnung der Zopf-Matrizen ein [347]. In unserem speziellen Fall, wo $n'=n$ etc., ist die Zahl positiver und negativer Schirm-Ladungen immer gleich. Wir können daher modifizierte Vertexoperatoren $\mathcal{V}_{n,m}^{l}=\psi_{n,n}(\widetilde{Q})^{(r)}:\mathcal{F}_{m,m}\to\mathcal{F}_{n,n}$ mit $\widetilde{Q}=Q_-Q_+$ einführen, i.e. wir verändern die Reihenfolge der Schirm-Ladungen und entsprechend auch ihre Integrationswege: Angewandt auf einen Vertexoperator, der bei z lokalisiert sei, ist der neue Schirm-Operator gegeben durch $\widetilde{Q}=\oint_z du\int_z^u du'\psi_{\alpha_-}(u')\psi_{\alpha_+}(u)$, wo die innere Integration über u' der äußeren über u entlang demselben Weg folgt, der bei z startet und den Ursprung umschließt. Unsere modifizierten Vertexoperatoren haben dann formal die Gestalt von Felder einer *thermalen Theorie*, i.e. einer Theorie mit $(n'=1,n),(m'=1,m)$ etc., allerdings trägt jede effektive Schirmung $\widetilde{Q}$ mit einer Doppelintegration bei. Bekanntermaßen [347] lassen sich die Zopf-Matrizen fast vollständig in einen links- und rechtsthermalen Teil faktorisieren,

$$\begin{aligned} R\left((j'j),(k'k),(n'n),(m'm)\right)_{(l'l)(i'i)} &= (-1)^{-\frac{1}{2}((k'-1)(n-1)+(k-1)(n'-1))} \\ &\times\ (-1)^{\frac{1}{2}((j-l+m-i)(k'+n')+(j'-l'+m'-i')(k+n))} \\ &\times\ r(j,k,n,m|x)_{li}\cdot r(j',k',n',m'|x')_{l'i'}\,. \end{aligned}$$

Die Matrixelemente, die unsere "diagonalen" Operatoren miteinander verbinden, sind unabhängig von den nicht-diagonalen Matrixelementen. Die r-Matrizen sind durch die Rekursionsbeziehungen

$$\begin{aligned} r(j,k+1,n,m|x)_{li} &= \sum_{i_1\geq 1} r(j,2,n,m|x)_{l_1 i}\cdot r(l_1,k,n,m|x)_{li_1} \\ r(j,k,n+1,m|x)_{li} &= \sum_{i_1\geq 1} r(j,k,2,m|x)_{li_1}\cdot r(l_1,k,n,m|x)_{l_1 i}\,, \end{aligned}$$

wobei jede Wahl von l_1, die die Fusions-Regeln respektiert, möglich ist, und die Basismatrizen

$$\begin{aligned} r(j,1,n,m|x)_{li} &= r(j,k,1,m|x)_{li} \;=\; 1\,, \\ r(l\pm 2,2,2,l|x)_{l\pm 1,l\pm 1} &= x^{\frac{1}{4}}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(l,2,2,l|x)_{l\pm1,l\pm1} &= \mp x^{\frac{1}{4}\mp\frac{l}{2}}\frac{[1]_x}{[l]_x}\,, \\ r(l,2,2,l|x)_{l\pm1,l\mp1} &= x^{\frac{1}{4}}\frac{[l\pm1]_x}{[l]_x} \end{aligned}$$

bestimmt. Wenn wir nun mit den modifizierten Vertexoperatoren arbeiten, vereinfachen sich die (thermalen) Zopf-Matrizen $r(j,k,n,m|x)$ extrem im Limes $x \to 1$, da die effektive Phase, die beim Deformieren der Integrationswege der effektiven Schirm-Ladung $\widetilde{Q}$ auftritt, in unserem Fall schlicht $\alpha_+^2 + \alpha_-^2 = 2k+1 \in \mathbb{Z}_+/2$ ist. In diesem Limes geht $[m]_x/[n]_x \to m/n$ über, so daß die Matrixelemente und die $\mathcal{D}^l_{n,m}$-Koeffizienten einfache rationale Zahlen werden. Andererseits vereinfacht sich auch das Verhalten der Normierungsintegrale unter analytischer Fortsetzung, wenn sie mit den modifizierten Vertexoperatoren berechnet werden, da diese triviale Monodromie-Eigenschaften besitzen. Diese Effekte heben sich in (4.8) gerade wieder weg, so daß die Strukturkonstanten unverändert bleiben, wie es ja auch sein sollte. Diese Bemerkung zeigt aber die spezielle Rolle der Werte $k \in \mathbb{Z}_+/4$ für die Hintergrundsladung auf: Für genau diese Werte formen die modifizierten geschirmten Vertexoperatoren eine sehr einfache Darstellung der Zopf-Gruppe und besitzen triviale Monodromie.

4.3 Darstellungen, Charaktere & Fusions-Algebra

Wir wollen nun die Darstellungstheorie unserer $\mathcal{W}$-Algebren diskutieren. Wir werden zeigen, daß es nur endlich viele irreduzible $\mathcal{W}$-RPA gibt, daß also diese TÆC rational sind. Es zeigt sich, daß die Kenntnis des Vakuum-Charakters bereits hinreichend ist, die Rationalität der Theorien zu beweisen.

Wir werden zunächst den Fall der bosonischen $\mathcal{W}(2,3k)$-Algebren, i.e. $k \in \mathbb{N}$ sehr detailliert behandeln, die anderen Fälle dann aber nur noch kurz skizzieren, da die entsprechenden Verallgemeinerungen trivial sind.

Das Hauptresultat der vorhergehenden beiden Abschnitte zusammen mit Satz $-667/8$ ist, daß für $c \in \mathbb{Q}$ aber c kein Element der diskreten Serie, nur die parabolischen degenerierten Modelle noch rationale TÆC sein können (Fall (ii)). Notwendige Bedingung dafür ist die Existenz zusätzlicher chiraler lokaler Felder, um die wir die Symmetrie-Algebra erweitern können. Die konformen Familien zu den Gewichten $h_{n,n} = (n^2-1)\frac{1-c}{24}$ und $h_{n,-n} = (n^2-1)\frac{1-c}{24}+n^2$ haben genau für $c = 1-24k\,,\ k \in \mathbb{N}/2$ sämtliche ganz- oder halbzahlige Dimensionen.

Sei nun $c = 1-24k$ mit $k \in \mathbb{N}/2$ fest gewählt. Die $\mathcal{W}$-Algebra, die durch den unendlichen Satz Virasoro-primärer Felder zu den Gewichten $h_{n,n}$ erzeugt wird, enthält die $\mathcal{W}(2,3k)$-Algebra als endlich erzeugte Unteralgebra. Daher müssen alle primären Felder mit höherem Spin zusammengesetzte Felder sein. Dies folgt aus dem Isomorphismus (Lemma $-91/5$) zwischen dem Hilbert-Raum der Vakuum-Darstellung der $\mathcal{W}(2,3k)$-Algebra, generiert durch die Moden der beiden einfachen Felder, und dem Raum aller quasiprimären Felder, der aus den normalgeordneten Produkten von (Ableitungen von) den einfachen Feldern aufgespannt wird. Wie wir im vorletzten Abschnitt erläutert haben, sind die anderen primären Felder dann als primäre Projektionen von PON gemäß der Fusions-Regeln gegeben. Zum Beispiel erfüllt das Feld $W = W^{(2)}$ die Fusions-Regel

$$[W^{(2)}] \times [W^{(2)}] = [\mathbb{1}] + [W^{(3)}]\,,$$

wobei die Gewichte $h_{2,2} = 3k$ und $h_{3,3} = 8k$ sind. Das bedeutet, daß die konforme Familie $[W^{(3)}]$ nicht im Kommutator (bzw. im singulären Teil der EXPO) von W mit sich selbst auftritt, obwohl die primäre Projektion von $\mathcal{N}(W,\partial^{2k}W)$ proportional zu $W^{(3)}$ ist.

Wir erinnern uns, daß alle diese primären Felder zu degenerierten konformen Familien gehören müssen, die durch singuläre Vektoren erzeugt werden. Wir erhalten daher den $\mathcal{W}$-Algebra-Charakter der Vakuum-Darstellung durch Aufsummieren all der Virasoro-Charaktere der RPA zu $|c, h_{n,n}\rangle$. Letztere sind nach Proposition −22/5 gegeben durch

$$\chi^{Vir}_{|c,h_{n,n},c\rangle}(q) \equiv \chi_{n,n}(q) = \frac{q^{\frac{1-c}{24}}}{\eta(\tau)}\left(q^{h_{n,n}} - q^{h_{n,-n}}\right) = \frac{1}{\eta(\tau)}\left(q^{n^2 k} - q^{n^2(k+1)}\right), \qquad (4.10)$$

da nach B.L. Feigin und D.B. Fuks [331] jede Virasoro-RPA zum Level $h_{n,n}$ genau einen Nullvektor bei Level $h_{n,-n} = h_{n,n} + n^2$ besitzt (siehe Satz −667/8). Damit folgt, daß der $\mathcal{W}$-Algebra-Charakter geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned}\chi_0^{\mathcal{W}}(\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \chi_{h_{n,n}}(\tau) \\ &= \frac{1}{2\eta(\tau)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(q^{n^2 k} - q^{n^2(k+1)}\right) \\ &= \frac{1}{2\eta(\tau)} \left(\Theta_{0,k}(\tau) - \Theta_{0,k+1}(\tau)\right).\end{aligned} \qquad (4.11)$$

Die elliptischen Funktionen $\Theta_{\lambda,k}$ wurden in Abschnitt III.6 eingeführt, siehe besonders Gleichungen (3.31) und (3.33). Es ist überraschend, daß der $\mathcal{W}$-Charakter sich durch Funktionen mit einem wohlbekanntem Verhalten unter Modul-Transformationen ausdrücken läßt. Mehr noch, die elliptischen Funktionen (geteilt durch η) spannen endlich dimensionale Darstellungen der Modul-Gruppe auf. Schon damit ist eigentlich klar, daß es nur endlich viele $\mathcal{W}$-RPA gibt. Man beachte aber, daß im Gegensatz zu allen bisher bekannten Fällen (e.g. minimale Modelle, Theorien mit $c = 1$ oder WZWN Modelle) elliptische Funktionen mit verschiedenen Moduli involviert sind.
Wir wollen nun die Charaktere der anderen Darstellungen identifizieren, die durch die Paare (λ, k), $0 \le \lambda \le k$ und $(\lambda, k+1)$, $0 \le \lambda \le k+1$ numeriert werden. Offensichtlich können wir mit der Abkürzung $\Lambda_{\lambda,k} \equiv \Theta_{\lambda,k}/\eta$ schreiben

$$\begin{aligned}\Lambda_{\lambda,k}(\tau) &= \frac{q^{(1-c)/24}}{\eta(\tau)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{h_{n+\frac{\lambda}{2k},n+\frac{\lambda}{2k}}} \\ \Lambda_{\lambda,k+1}(\tau) &= \frac{q^{(1-c)/24}}{\eta(\tau)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{h_{n+\frac{\lambda}{2k+2},-n-\frac{\lambda}{2k+2}}}.\end{aligned} \qquad (4.12)$$

Dabei haben wir die beitragenden Tiefstgewichte durch Formel (2.68) ausgedrückt, mußten dafür aber im allgemeinen rationale nicht ganzzahlige Indizes verwenden (außer für $\lambda = 0$, was zur Vakuum-Darstellung korrespondiert). Da es aber nach Satz −667/8 dann keine Nullzustände in den Virasoro-Tiefstgewichts-Modulen gibt, können wir die Charaktere der $\mathcal{W}(2, 3k)$-Algebren weitgehend wie folgt identifizieren: Die Darstellungen zum SPA $|h_{\frac{\lambda}{2k},\frac{\lambda}{2k}}\rangle$, $1 \le \lambda < k$ und $|h_{\frac{\lambda}{2k+2},-\frac{\lambda}{2k+2}}\rangle$, $1 \le \lambda < k+1$ sind gegeben durch $\chi_\lambda^{\mathcal{W}}(\tau) = \Lambda_{\lambda,k}(\tau)$, $1 \le \lambda < k$ bzw. $\chi_{-\lambda}^{\mathcal{W}}(\tau) = \Lambda_{\lambda,k+1}(\tau)$, $1 \le \lambda < k+1$ sowie $\chi_k^{\mathcal{W}}(\tau) = \frac{1}{2}\Lambda_{k,k}(\tau)$, $\chi_{-k-1}^{\mathcal{W}}(\tau) = \frac{1}{2}\Lambda_{k+1,k+1}(\tau)$, wobei der Faktor 1/2 in den beiden letzten Charakteren eine unphysikalische Doppelzählung der Zustände vermeidet. Wir benötigen nun aber noch einen weiteren Charakter, den wir als $\chi_{k+1}^{\mathcal{W}}(\tau) = \frac{1}{2}(\Lambda_{0,k}(\tau) + \Lambda_{0,k+1}(\tau))$ identifizieren können. Dies sieht man wie folgt: Es ist klar, daß eine zweite Linearkombination aus $\Lambda_{0,k}$ und $\Lambda_{0,k+1}$ neben derjenigen des Vakuum-Charakters existieren muß. Andere von den Λ-Funktionen können wir nicht miteinander kombinieren, da sich ihre q-Potenzen nicht um ganze Zahlen unterscheiden. Da wir annehmen, der Charakter involviere keine entarteten Multiplizitäten der korrespondierenden RPA, fordern wir, daß seine q-Entwicklung mit dem führenden Koeffizienten eins beginnt. Dies schränkt die Möglichkeiten auf den Ansatz $\chi_{k+1}^{\mathcal{W}} = \mu\Lambda_{0,k} \pm (1-\mu)\Lambda_{0,k+1}$ ein. Die Forderung nach nur ganzzahligen Koeffizienten beschränkt weiter μ auf die Menge $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Die Lösungen $\mu = 0$ oder $\mu = 1$ ergäben wieder eine unphysikalische Doppelzählung der Zustände mit Gewicht größer als null.

Es bleibt allein die Lösung $\mu = \frac{1}{2}$. Physikalisch bedeutet dies, daß einerseits die Vakuum-RPA auf den BRST-invarianten Unterräumen lebt, die nach Ausdividieren der durch Nullzustände erzeugten Module verbleiben und daß andererseits die RPA mit dem Tiefstgewicht $h_{min} = -k < 0 = h_{vac}$ auf der direkten Summe der ganzen Verma-Module (zusammen mit den durch die singulären Vektoren erzeugten) lebt. Da $h_{min} < h_{vac}$ ist, sind die Theorien nicht unitär.
Mit den bis jetzt gefundenen Charakteren erhalten wir allerdings eine S-Matrix, die weder symmetrisch noch unitär ist. Dies rührt von versteckten Multiplizitäten der RPA zu den Zuständen $|h_{\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}}\rangle$ her, wie man sofort auch aus der modul-invarianten Zustandssumme

$$\begin{aligned} Z(\tau,\bar\tau) &= \frac{1}{2}\sum_{\lambda=0}^{2k-1}|\Lambda_{\lambda,k}|^2 + \frac{1}{2}\sum_{\lambda'=0}^{2k}|\Lambda_{\lambda',k+1}|^2 \\ &= \sum_{\lambda=0}^{k-1}\left|\chi_\lambda^{\mathcal{W}}\right|^2 + \sum_{\lambda'=0}^{k}\left|\chi_{-\lambda'}^{\mathcal{W}}\right|^2 + 2\left|\chi_k^{\mathcal{W}}\right|^2 + 2\left|\chi_{-k-1}^{\mathcal{W}}\right|^2 \end{aligned} \tag{4.13}$$

ersieht, an der man die Multiplizitäten direkt ablesen kann. Der Grund für die entarteten Multiplizitäten liegt in der erweiterten Cartan-Unteralgebra. In der Tat finden wir in den explizit konstruierten Beispielen [269, 277, 281] von $\mathcal{W}$-Algebren genau für diese RPA einen nicht verschwindenden W_0-Eigenwert. Genauer gesagt kann nur der Wert w^2 gegeben durch $W_0W_0|h,w\rangle = w^2|h,w\rangle$ berechnet werden, indem man $\mathcal{N}(W,W)$ in Termen von (normalgeordneten Produkten von) dem Virasoro-Feld ausdrückt, da die Selbstkopplung des W-Feldes in den $\mathcal{W}(2,3k)$-Algebren immer null ist. Damit erhält man w^2 als eine Funktion in h und c, wenn der Mode $\mathcal{N}(W,W)_0$ auf den SPA angewandt wird. Natürlich hat man dann für $w^2 \neq 0$ zwei RPA zu den Zuständen $|c,h,\pm\sqrt{w^2}\rangle$.
Um nun die $\mathcal{W}$-Fusions-Algebra zu bestimmen, können wir entweder die Verlinde-Formel [1019] gemäß Satz $-46/3$, aber in der modifizierten Form

$$N_{ij}^k = \frac{n_i n_j}{n_k}\sum_m \frac{S_{im}S_{jm}(S^{-1})_{mk}}{S_{0m}} \tag{4.14}$$

verwenden, die für generalisierte diagonale modul-invariante Zustandssummen

$$Z(\tau,\bar\tau) = \sum_m n_m\,|\chi_m|^2\,, \quad n_m \in \mathbb{Z}_+ \tag{4.15}$$

gültig ist. Oder wir müssen die S-Matrix erweitern und die Anzahl der Charaktere vergrößern, um die entarteten Multiplizitäten zu entfernen [811]. Letztere Methode bedeutet in unserem Fall, wo zwei Darstellungen mit Multiplizität 2 auftreten, daß wir eine Verdopplung der Charaktere $\chi_{k,+}^{\mathcal{W}} = \chi_{k,-}^{\mathcal{W}} \equiv \chi_k^{\mathcal{W}}$ und $\chi_{-k-1,+}^{\mathcal{W}} = \chi_{-k-1,-}^{\mathcal{W}} \equiv \chi_{-k-1}^{\mathcal{W}}$ haben. Formulieren wir zunächst unsere Ergebnisse über die Darstellungstheorie, und legen wir damit gleichzeitig unsere Notation fest:

Proposition -21/4. *Sei $k \in \mathbb{N}$. Sei ferner $\varepsilon \in \{0,1\}$. Dann hat die $\mathcal{W}(2,3k)$-Algebra bei $c = 1-24k$ die folgenden durch $|c,h,w\rangle$ erzeugten RPA und Charaktere: $|c,h_{\lambda/2(k+\varepsilon),(-)^\varepsilon\lambda/2(k+\varepsilon)},0\rangle, 1 \le \lambda < k+\varepsilon$ mit Charakteren $\chi_{(-)^\varepsilon\lambda}^{\mathcal{W}} = \Lambda_{\lambda,k+\varepsilon}$, die Vakuum-Darstellung $|c,h_{1,1}=0,0\rangle$ und die Darstellung zur niedrigsten Energie $|c,h_{0,0}=-k,0\rangle$ mit Charakteren $\chi_0^{\mathcal{W}} = \frac{1}{2}(\Lambda_{0,k}-\Lambda_{0,k+1})$ und $\chi_{k+1}^{\mathcal{W}} = \frac{1}{2}(\Lambda_{0,k}+\Lambda_{0,k+1})$ sowie die entarteten Darstellungen $|c,h_{1/2,(-)^\varepsilon 1/2},\pm w\rangle$, $w \neq 0$, mit Charakteren $\chi_{(-)^\varepsilon(k+\varepsilon),\pm}^{\mathcal{W}} = \Lambda_{k+\varepsilon,k+\varepsilon}$.* ■

Wir müssen also die S-Matrix um zwei Zeilen und Spalten erweitern. Die Forderungen, daß S symmetrisch, unitär und höchstens von Ordnung vier ist, i.e.

$$S = S^t\,, \quad SS^+ = \mathbb{1}\,, \quad S^2 = C\,,$$

mit C die Matrix der Ladungskonjugation, legen S bereits auf drei Konstanten fest. Da weiter alle N_{ij}^k nicht negative ganze Zahlen sein sollen, legt die Verlinde-Formel diese Konstanten eindeutig fest. Dies führt zu den folgenden S- und T-Matrizen:

PROPOSITION -44/5. *Die Voraussetzungen seien wie zuvor. Definiere die Funktionen* $\mathcal{C}_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\cos(\pi\frac{x}{\alpha})$. *Dann ist* S *is gegeben durch*

$$
\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
\frac{1}{2}(\mathcal{C}_k(0)+\mathcal{C}_{k+1}(0)) & \mathcal{C}_k(0) & \cdots & \mathcal{C}_k(0) & \frac{1}{2}\mathcal{C}_k(0) & \frac{1}{2}\mathcal{C}_k(0) & \frac{1}{2}(\mathcal{C}_k(0)-\mathcal{C}_{k+1}(0)) & -\mathcal{C}_{k+1}(0) & \cdots & -\mathcal{C}_{k+1}(0) & -\frac{1}{2}\mathcal{C}_{k+1}(0) & -\frac{1}{2}\mathcal{C}_{k+1}(0) \\
\mathcal{C}_k(0) & 2\mathcal{C}_k(1) & \cdots & 2\mathcal{C}_k(k-1) & \mathcal{C}_k(k) & \mathcal{C}_k(k) & \mathcal{C}_k(0) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathcal{C}_k(0) & 2\mathcal{C}_k(k-1) & \cdots & 2\mathcal{C}_k((k-1)^2) & \mathcal{C}_k(k(k-1)) & \mathcal{C}_k(k(k-1)) & \mathcal{C}_k(0) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2}\mathcal{C}_k(0) & \mathcal{C}_k(k) & \cdots & \mathcal{C}_k(k(k-1)) & A & \mathcal{C}_k(k^2)-A & \frac{1}{2}\mathcal{C}_k(0) & 0 & \cdots & 0 & C & -C \\
\frac{1}{2}\mathcal{C}_k(0) & \mathcal{C}_k(k) & \cdots & \mathcal{C}_k(k(k-1)) & \mathcal{C}_k(k^2)-A & A & \frac{1}{2}\mathcal{C}_k(0) & 0 & \cdots & 0 & -C & C \\
\frac{1}{2}(\mathcal{C}_k(0)-\mathcal{C}_{k+1}(0)) & \mathcal{C}_k(0) & \cdots & \mathcal{C}_k(0) & \frac{1}{2}\mathcal{C}_k(0) & \frac{1}{2}\mathcal{C}_k(0) & \frac{1}{2}(\mathcal{C}_k(0)+\mathcal{C}_{k+1}(0)) & \mathcal{C}_{k+1}(0) & \cdots & \mathcal{C}_{k+1}(0) & \frac{1}{2}\mathcal{C}_{k+1}(0) & \frac{1}{2}\mathcal{C}_{k+1}(0) \\
-\mathcal{C}_{k+1}(0) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \mathcal{C}_{k+1}(0) & 2\mathcal{C}_{k+1}(1) & \cdots & 2\mathcal{C}_{k+1}(k) & \mathcal{C}_{k+1}(k+1) & \mathcal{C}_{k+1}(k+1) \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
-\mathcal{C}_{k+1}(0) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \mathcal{C}_{k+1}(0) & 2\mathcal{C}_{k+1}(k) & \cdots & 2\mathcal{C}_{k+1}(k^2) & \mathcal{C}_{k+1}(k(k+1)) & \mathcal{C}_{k+1}(k(k+1)) \\
-\frac{1}{2}\mathcal{C}_{k+1}(0) & 0 & \cdots & 0 & C & -C & \frac{1}{2}\mathcal{C}_{k+1}(0) & \mathcal{C}_{k+1}(k+1) & \cdots & \mathcal{C}_{k+1}(k(k+1)) & B & \mathcal{C}_{k+1}((k+1)^2)-B \\
-\frac{1}{2}\mathcal{C}_{k+1}(0) & 0 & \cdots & 0 & -C & C & \frac{1}{2}\mathcal{C}_{k+1}(0) & \mathcal{C}_{k+1}(k+1) & \cdots & \mathcal{C}_{k+1}(k(k+1)) & \mathcal{C}_{k+1}((k+1)^2)-B & B
\end{array}\right) . \tag{4.16}
$$

Die drei freien Parameter A, B, C *sind gegeben durch*

$$
\begin{aligned}
C &= (i)^k \frac{1}{\sqrt{8}}, \\
A &= (-1)^k \left(\frac{1}{2\sqrt{2k}} \pm C\right), \\
B &= (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2\sqrt{2k+2}} \pm C\right).
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

Schließlich ist die diagonale T*-Matrix gegeben durch*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{diag}\Big(&\exp(\pi i(-\frac{1}{12})), \exp(\pi i(\frac{1}{2k}-\frac{1}{12})), \ldots, \exp(\pi i(\frac{k}{2k}-\frac{1}{12})), \exp(\pi i(\frac{k}{2k}-\frac{1}{12})), \\
&\exp(\pi i(-\frac{1}{12})), \exp(\pi i(\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{12})), \ldots, \exp(\pi i(\frac{k+1}{2k+2}-\frac{1}{12})), \exp(\pi i(\frac{k+1}{2k+2}-\frac{1}{12}))\Big).
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

Man beachte, daß $\frac{1}{\sqrt{2k}}(-1)^k - A_\pm = (-1)^k(\frac{1}{2\sqrt{2k}} \mp C) = A_\mp$ und entsprechend für B. Das bedeutet, daß die zwei Lösungen für A und B lediglich durch Vertauschen der entarteten Darstellungen ineinander übergehen.

Der Beweis der Proposition ist trivial bis auf die Bestimmung der Konstanten $A, B, C \in \mathbb{C}$. Zunächst berechnet man mit der Verlinde-Formel einige Strukturkonstanten der Fusions-Algebra, $N_{\alpha\beta}^{\gamma}$, zum Beispiel

$$
\begin{aligned}
N_{k,+;k,+}^{-j} &= \frac{1}{2} - (-1)^j 4C^2, & N_{k,+;k,-}^{-j} &= \frac{1}{2} + (-1)^j 4C^2, \\
N_{k,+;-j}^{k,+} &= \frac{1}{2} - (-1)^j 4|C|^2, & N_{k,+;-j}^{k,-} &= \frac{1}{2} + (-1)^j 4|C|^2,
\end{aligned}
$$

wobei $-k \leq -j \leq -1$. Da all diese Zahlen nicht negative ganze sein sollen, sind nur die Lösungen 0 oder 1 möglich. Damit erhalten wir $|C|^2 = \pm C^2$, i.e. C rein reel oder rein imaginär. Darüber hinaus ist der Absolutbetrag fixiert auf $|C| = \frac{1}{\sqrt{8}}$. Wir machen den Ansatz $C = (i)^{\alpha_C}\frac{1}{\sqrt{8}}$ und betrachten damit die Strukturkonstanten

$$N_{k,+;k,-}^{-k-1,+} = N_{k,+;k,-}^{-k-1,-} = \frac{1}{4} + (-1)^{k+1} 2C^2 .$$

Mit den Strukturkonstanten von oben erhalten wir 0 als einzige mögliche Lösung und damit $\alpha_C \equiv k \bmod 2$. Im folgenden setzen wir o.B.d.A. $C = (i)^k \frac{1}{\sqrt{8}}$. Als nächstes betrachten wir noch die Konstanten

$$\begin{aligned}
N_{k,+;k,-}^{j} &= \frac{1}{2} + (-1)^j \left(4A^2 - \frac{4}{\sqrt{2k}}(-1)^k A + \frac{1}{2k}\right), \\
N_{k,+;k,+}^{j} &= \frac{1}{2} - (-1)^j \left(4A^2 - \frac{4}{\sqrt{2k}}(-1)^k A + \frac{1}{2k}\right), \\
N_{-k-1,+;-k-1,+}^{-j'} &= \frac{1}{2} - (-1)^{j'} \left(4B^2 - \frac{4}{\sqrt{2k+2}}(-1)^{k+1} B + \frac{1}{2k+2}\right), \\
N_{-k-1,+;-k-1,-}^{-j'} &= \frac{1}{2} + (-1)^{j'} \left(4B^2 - \frac{4}{\sqrt{2k+2}}(-1)^{k+1} B + \frac{1}{2k+2}\right),
\end{aligned}$$

wobei $1 \leq j \leq k-1$ und $-k \leq -j' \leq 1$. Auch diese Paare von Gleichungen lassen sich nur lösen, wenn je eine verschwindet und die andere den Wert eins annimmt. Damit können wir die quadratischen Gleichungen lösen und erhalten den Ansatz

$$\begin{aligned}
A &= (-1)^k \left(\frac{1}{2\sqrt{2k}} + (i)^{\alpha_A}\frac{1}{\sqrt{8}}\right), \\
B &= (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2\sqrt{2k+2}} + (i)^{\alpha_B}\frac{1}{\sqrt{8}}\right).
\end{aligned}$$

Um die noch freien Potenzen α_A und α_B zu bestimmen, betrachten wir schließlich die Konstanten

$$\begin{aligned}
N_{k,-;-k-1,+}^{k,+} &= \frac{1}{4} - (-1)^k 2\left((A-A^*)C + |C|^2\right), \\
N_{k,-;-k-1,-}^{k,+} &= \frac{1}{4} + (-1)^k 2\left((A-A^*)C - |C|^2\right), \\
N_{k,+;-k-1,-}^{-k-1,+} &= \frac{1}{4} + (-1)^{k+1} 2\left((B-B^*)C + |C|^2\right), \\
N_{k,-;-k-1,-}^{-k-1,+} &= \frac{1}{4} - (-1)^{k+1} 2\left((B-B^*)C - |C|^2\right).
\end{aligned}$$

Alles zusammengenommen ergibt sich, daß, daß $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B = 0$, wenn C reel ist, oder $\operatorname{Im} A = -\operatorname{Im} B = \frac{1}{\sqrt{8}}$, wenn C imaginär ist. Damit können wir also $\alpha_A = \alpha_B = k$ wählen und erhalten (4.17). Man überzeugt sich durch Inspektion, daß damit auch alle anderen Fusionskonstanten $\in \mathbb{Z}_+$ sind. ∎

Wir erhalten damit auch gleich explizit die Fusions-Algebra, die insofern interessant ist, als Koeffizienten größer als eins auftreten – im Gegensatz zu den minimalen Modellen. Wir geben die Fusions-Algebra hier an, da wir sie noch zur Bestimmung der Automorphismen benötigen, die zu nicht diagonalen Zustandssummen führen, jedoch nur die nicht offensichtlich voneinander abhängigen Konstanten. Die anderen erhält man durch eine der folgenden Formeln: Sei $\varepsilon = k \bmod 2$. Dann haben wir $S^{2(1+\varepsilon)} = C^{1+\varepsilon} = \mathbb{1}$. Die Ladungskonjugation, notiert mit $C : \phi_\alpha \longmapsto \phi_{\bar{\alpha}}$, ist also trivial für gerades k. Nichtsdestotrotz notieren wir mit $E : \phi_\alpha \longmapsto \phi_{\widehat{\alpha}}$ das Vertauschen der entarteten Darstellungen, i.e. $\widehat{(k,\pm)} = (k,\mp)$, entsprechend für $(-k-1,\pm)$ und $\widehat{\alpha} = \alpha$ sonst. Wenn wir die Konjugationsmatrix verwenden, um Indizes herauf- oder herunterzuziehen, erhalten wir die

Symmetrien

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta}^{\gamma} &= N_{\bar\alpha\bar\beta}^{\bar\gamma} = N_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}^{\widehat{\gamma}}\,, \\ N_{\alpha\beta}^{\gamma} &= N_{\alpha\bar\gamma}^{\bar\beta} = N_{\bar\gamma\beta}^{\bar\alpha}\,, \\ N_{\alpha\beta}^{\gamma} &= N_{\beta\alpha}^{\gamma}\,. \end{aligned}$$

Mit diesen Relationen und den in der folgenden Proposition angegebenen Fusions-Zahlen kann man leicht alle $N_{\alpha\beta}^{\gamma}$ erhalten.

PROPOSITION -117/11. *Die Voraussetzungen seien wie zuvor. Im folgenden sind alle Summen von Indizes in Kronecker-Symbolen für positive Zahlen modulo $2k$, für negative modulo $2k+2$ zu nehmen. Ferner ist immer $j, j', j'' \in \{1, \ldots, k-1\}$ und $-j, -j', -j'' \in \{-1, \ldots, -k\}$. Die entarteten Darstellungen werden nur durch E unterschieden. Die Wahl einer der entarteten Darstellungen ist nur dann nicht beliebig, wenn sie in zwei oder drei Indizes auftritt. Dann zeigt der Hut ($\widehat{\ }$) an, wo die relativ andere Wahl zu nehmen ist. Schließlich sei der Übersichtlichkeit halber $N(\alpha,\beta;\gamma)$ anstelle von $N_{\alpha\beta}^{\gamma}$ geschrieben. Die Fusions-Algebra der $\mathcal{W}(2,3k)$ lautet dann:*

$$\begin{array}{rcl rcl}
N(\alpha,\beta;0) &=& \delta_{\alpha+\bar\beta,0} \;=\; C_{\alpha\beta} & & & \\
N(j,j';j'') &=& \multicolumn{4}{l}{2+\delta_{j+j'-j'',0}+\delta_{j'+j''-j,0}+\delta_{j''+j-j',0}+\delta_{j+j'+j'',0}} \\
N(j,k;j'') &=& \multicolumn{4}{l}{\tfrac12(2+\delta_{j+k-j'',0}+\delta_{k+j''-j,0}+\delta_{j''+j-k,0}+\delta_{j+k+j'',0})} \\
N(j,k+1;j'') &=& 2+\delta_{j-j'',0} & N(j,-j';j'') &=& 2 \\
N(j,-k-1;j'') &=& 1 & N(k,k;j'') &=& \tfrac12(1+(-1)^{j''+k}) \\
N(k,\widehat{k};j'') &=& \tfrac12(1-(-1)^{j''+k}) & N(k,k+1;j'') &=& 1 \\
N(k,-j';j'') &=& 1 & N(k,-k-1;j'') &=& \tfrac12(1+(-1)^{j''}) \\
N(k,\widehat{-k-}1;j'') &=& \tfrac12(1-(-1)^{j''}) & N(k+1,k+1;j'') &=& 2 \\
N(k+1,-j';j'') &=& 2 & N(k+1,-k-1;j'') &=& 1 \\
N(-j,-j';j'') &=& 2 & N(-j,-k-1,+;j'') &=& 1 \\
N(-k-1,-k-1;j'') &=& \tfrac12(1+(-1)^{j''+k}) & N(-k-1,\widehat{-k-}1;j'') &=& \tfrac12(1-(-1)^{j''+k}) \\
N(k,k;k) &=& \tfrac12(1+(-1)^{k} & N(k,\widehat{k};k) &=& 0 \\
N(k,k+1;k) &=& 1 & N(k,-j';k) &=& \tfrac12(1-(-1)^{j'}) \\
N(k,-k-1;k) &=& \tfrac12(1+(-1)^{k}) & N(k,\widehat{-k-}1;k) &=& 0 \\
N(\widehat{k},\widehat{k};k) &=& \tfrac12(1-(-1)^{k}) & N(\widehat{k},k+1;k) &=& 1 \\
N(\widehat{k},-j';k) &=& \tfrac12(1+(-1)^{j'}) & N(\widehat{k},-k-1;k) &=& \tfrac12(1-(-1)^{k}) \\
N(\widehat{k},\widehat{-k-}1;k) &=& 0 & N(k+1,k+1;k) &=& 0 \\
N(k+1,-j';k) &=& 1 & N(k+1,-k-1;k) &=& \tfrac12(1+(-1)^{k}) \\
N(k+1,\widehat{-k-}1;k) &=& \tfrac12(1-(-1)^{k}) & N(-j,-j';k) &=& 1 \\
N(-j,-k-1,+;k) &=& \tfrac12(1+(-1)^{j+k}) & N(-j,\widehat{-k-}1;k) &=& \tfrac12(1-(-1)^{j+k}) \\
N(-k-1,-k-1;k) &=& 0 & N(-k-1,\widehat{-k-}1;k) &=& 0 \\
N(\widehat{-k-}1,\widehat{-k-}1;k) &=& 1 & N(k+1,k+1;k+1) &=& 2 \\
N(k+1,-j';k+1) &=& 2 & N(k+1,-k-1;k+1) &=& 1 \\
N(-j,-j';k+1) &=& 2-\delta_{j-j',0} & N(-j,-k-1;k+1) &=& 1 \\
N(-k-1,-k-1;k+1) &=& 0 & N(-k-1,\widehat{-k-}1;k+1) &=& 0 \\
N(-j,-j';-j'') &=& \multicolumn{4}{l}{2-\delta_{j+j'-j'',0}-\delta_{j'+j''-j,0}-\delta_{j''+j-j',0}-\delta_{j+j'+j'',0}} \\
N(-j,-k-1;-j'') &=& \multicolumn{4}{l}{\tfrac12(2-\delta_{j+(k+1)-j'',0}-\delta_{(k+1)+j''-j,0}-\delta_{j''+(k+1)-j',0}-\delta_{j+(k+1)+j'',0})} \\
N(-k-1,-k-1;-j'') &=& \tfrac12(1-(-1)^{j''+k}) & N(-k-1,\widehat{-k-}1;-j'') &=& \tfrac12(1+(-1)^{j''+k}) \\
N(-k-1,-k-1;-k-1) &=& \tfrac12(1+(-1)^{k}) & N(-k-1,\widehat{-k-}1;-k-1) &=& 0 \\
N(\widehat{-k-}1,\widehat{-k-}1;-k-1) &=& \tfrac12(1-(-1)^{k}) & & & \blacksquare
\end{array}$$

Wir haben nun alle wesentlichen Daten der $\mathcal{W}(2,3k)$-Algebren erarbeitet. Die in Proposition $-21/4$ angegebenen Charaktere diagonalisieren die modul-invariante Zustandssumme, obwohl diese sozusagen maximal nicht diagonal ist, ausgedrückt in Virasoro-Charakteren. Damit stellen die $\mathcal{W}(2,3k)$-Algebren sehr gute Beispiele dar, wie die Erweiterung der Symmetrie-Algebra die Zustandssumme "diagonaler" machen und rationale Modelle liefern kann, die in unserem Fall darüber hinaus auch nicht mit minimalen Modellen oder Coset-Konstruktionen in Beziehung stehen.

Von den Gleichungen (3.33) lernen wir, daß für $k,\lambda\in\mathbb{Z}$ die Funktionen $\Lambda_{\lambda+\frac{1}{2},k}$ und $\Lambda_{\lambda+\frac{1}{2},k+1}$ einen Raum invariant unter T^2 und S^2 aufspannen. Diese Funktionen sind die Charaktere der irreduziblen RPA der sogenannten *getwisteten* $\mathcal{W}(2,3k)$-Algebra, die man erhält, wenn man halbzahlige Fourier-Moden benutzt, also antiperiodische Randbedingungen einführt. Im getwisteten Sektor der bosonischen $\mathcal{W}(2,3k)$-Algebren sind Linearkombinationen unter diesen Funktionen weder notwendig noch möglich. Damit haben wir konsequenterweise

Proposition -187/13. *Die Voraussetzungen seien wie zuvor. Dann besitzt die $\mathcal{W}(2,3k)$-Algebra im getwisteten Sektor RPA zu den folgenden SPA nebst Charakteren:* $|h_{\frac{2\lambda+1}{4k},\frac{2\lambda+1}{4k}}\rangle$ *mit den Charakteren* $\chi^{\mathcal{W}}_{\lambda+\frac{1}{2}}(\tau)=\Lambda_{\lambda+\frac{1}{2},k}(\tau)$, $0\le\lambda<k$, *und* $|h_{\frac{2\lambda+1}{4k+4},-\frac{2\lambda+1}{4k+4}}\rangle$ *mit den Charakteren* $\chi^{\mathcal{W}}_{-\lambda-\frac{1}{2}}(\tau)=\Lambda_{\lambda+\frac{1}{2},k+1}(\tau)$, $0\le\lambda<k+1$. ∎

In der Tat konnten wir für einige explizit konstruierte $\mathcal{W}$-Algebren als Beispiele exakt diese Darstellungen des getwisteten Sektors berechnen [269].

Wir wollen nun kurz die fermionischen $\mathcal{W}(2,3k)$-Algebren diskutieren. Hier ist $c=1-24\frac{k}{2}$, wieder mit $k\in\mathbb{N}$. Die Vakuum-Darstellung gehört zum Neveu-Schwarz-Sektor (NS-Sektor), i.e. der Sektor mit antiperiodischen Randbedingungen und halbzahligen Moden. Für diesen Sektor finden wir, daß alle Charaktere in Termen der Funktionen $\Lambda_{\lambda,\frac{k}{2}}(\tau)$ und $\Lambda_{\lambda,\frac{k}{2}+1}(\tau)$ mit $\lambda\in\mathbb{Z}$ ausgedrückt werden können. Umgekehrt haben wir für den Ramond-Sektor (R-Sektor), i.e. der Sektor periodischer Randbedingungen und ganzzahliger Moden, $\lambda\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$. Unter Berücksichtigung der modularen Eigenschaften (3.33) sieht man leicht, daß der Neveu-Schwarz-Sektor unter den Transformationen S und T^2 invariant ist, während der Ramond-Sektor invariant ist unter T und ST^2S. Die Transformation TST führt die Sektoren ineinander über. Insbesondere erhalten wir für den NS-Sektor

$$\Lambda_{\lambda,\frac{k}{2}}(-\tfrac{1}{\tau})=\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{\lambda'=0}^{k-1}e^{2i\pi\frac{\lambda\lambda'}{k}}\Lambda_{\lambda',\frac{k}{2}}(\tau)\,. \tag{4.19}$$

Damit ist die S-Matrix der fermionischen $\mathcal{W}(2,3k)$-Algebren wie folgt gegeben: Man nehme die S-Matrix für den bosonischen Fall, (4.16), substituiere k durch $\frac{k}{2}$ und streiche sowohl die $(k,+)$- und $(k,-)$-Zeilen und -Spalten, als auch diejenigen zu $(-k-1,+)$ und $(-k-1,-)$. Es treten also insbesondere keine entarteten Darstellugen im NS-Sektor auf.
Für den R-Sektor ist die Situation nicht so einfach. Die entsprechende Transformation wäre die Matrix $\widetilde{S}=ST^2S$. Benutzt man wieder (3.33) und eliminiert eine Summation durch eine Gauss-Summe, erhält man

$$\Lambda_{\lambda+\frac{1}{2},\frac{k}{2}}(-\tfrac{\tau}{1-2\tau})=\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{\lambda'=0}^{k-1}e^{-i\pi\frac{(\lambda+\lambda'+1)^2}{2k}}\frac{1+(-i)^{2(\lambda+\lambda'+1)+k}}{1+(-i)}\Lambda_{\lambda'+\frac{1}{2},\frac{k}{2}}(\tau)\,. \tag{4.20}$$

Man mag nun dieselbe Prozedur wie für den bosonischen Fall mit $\widetilde{S}$ durchführen und die Entartungen eliminieren, aber es ist nicht klar, ob ST^2S anstelle von S für das Berechnen von Fusions-Konstanten mittels Verlinde-Formel verwendet werden sollte, ebenso unklar ist, was die Identität der Fusions-Algebra ersetzen sollte. Eine korrekte Verallgemeinerung der Verlinde-Formel für fermionische $\mathcal{W}$-Algebren findet man in [283].

Wir wollen schließlich auch die $\mathcal{W}(2,8k)$-Algebren kurz betrachten, die für alle $k\in\mathbb{N}/4$ existieren. Im ersten Abschnitt haben wir bereits erklärt, daß sie gerade den ungeraden Sektor der $\mathcal{W}(2,3k)$-Algebren darstellen[xxi]. Der Vakuum-Charakter für den ungeraden Sektor lautet

$$\chi^{\mathcal{W}}_{0,odd}(\tau)\;=\;\frac{q^{(1-c)/24}}{\eta(\tau)}\sum_{\substack{r\in\mathbb{N}\\ r\equiv 1 \bmod 2}}\left(q^{h_{r,r}}-q^{h_{r,-r}}\right)$$

[xxi] Man beachte, daß es keine Algebra für $k\in\mathbb{N}+\frac{1}{4}$ gibt, die aus einem ungeraden und geraden Sektor zusammengesetzt ist, da letzterer die Lokalität verletzte.

$$= \frac{1}{2\eta(\tau)} \left(\Theta_{4k,4k}(\tau) - \Theta_{4k+4,4k+4}(\tau)\right). \tag{4.21}$$

Die Modul-Transformationen involvieren die anderen Funktionen $\Theta_{\lambda+4k+4\varepsilon,4k+4\varepsilon}$, wobei wieder $\varepsilon \in \{0,1\}$. Für $0 \leq \lambda \leq 4k+4\varepsilon$ ist dies ein vollständiger Satz linear unabhängiger Θ-Funktionen. Das Umschreiben der Summe zu einer nur über ungerade Zahlen zeigt, daß wir den Level λ mit 2 zu multiplizieren haben, daß also die Tiefstgewichte parametrisiert sind als $h_{\frac{2\lambda}{2(4k+4\varepsilon)},(-1)^\varepsilon\frac{2\lambda}{2(4k+4\varepsilon)}}$, da

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\eta(\tau)}\Theta_{\lambda+4k+4\varepsilon,4k+4\varepsilon}(\tau) &= \frac{1}{\eta(\tau)}\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{[2(4k+4\varepsilon)n+(\lambda+4k+4\varepsilon)]^2}{4(4k+4\varepsilon)}} \\
&= \frac{1}{\eta(\tau)}\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{[(2n+1)+\frac{2\lambda}{2(4k+4\varepsilon)}]^2(k+\varepsilon)} \\
&= \frac{q^{(1-c)/24}}{\eta(\tau)} \sum_{r\in(2\mathbb{Z}+1)+\frac{2\lambda}{2(4k+4\varepsilon)}} q^{(r^2-1)k+r^2\varepsilon}\,.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Wie im Fall der bosonischen Algebren sind einige Charaktere durch Linearkombinationen von elliptischen Funktionen mit verschiedenen Moduli gegeben. Wir haben die folgende Struktur:

Proposition -114/7. *Sei $k \in \mathbb{N}/4$ und $c = 1-24k$. Sei weiter $\varepsilon \in \{0,1\}$. Dann existiert eine TÆCR mit erweiterter Symmetrie-Algebra $\mathcal{W}(2,8k)$. Sie besitzt Darstellungen zu den SPA $|c,\lambda/4(k+\varepsilon),(-)^\varepsilon\lambda/4(k+\varepsilon),w\rangle$ mit $1 \leq \lambda < (4k+\varepsilon)$, deren Charaktere $\chi^{\mathcal{W}}_{(-)^\varepsilon\lambda} = \Lambda_{\lambda+4(k+\varepsilon),4(k+\varepsilon)}$ lauten. Weiter existieren noch die Vakuum-RPA $|c,h_{1,1}=0,0\rangle$ mit $\chi^{\mathcal{W}}_0 = \frac{1}{2}(\Lambda_{4k,4k}-\Lambda_{4k+4,4k+4})$, die RPA zur tiefsten Energie $|c,h_{0,0}=-k,w\rangle$ mit $\chi^{\mathcal{W}}_{4k+1} = \frac{1}{2}(\Lambda_{4k,4k}+\Lambda_{4k+4,4k+4})$, eine weitere RPA mit $h=0$, $|c,h_{1,1}=0,w\neq 0\rangle$ mit $\chi^{\mathcal{W}}_{4k+2} = \frac{1}{2}(\Lambda_{0,4k}+\Lambda_{0,4k+4})$ und schließlich eine RPA, die auf $|W^{(2)}\rangle$ aufbaut, $|c,h_{2,2}=3k,w\rangle$ mit $\chi^{\mathcal{W}}_{4k} = \frac{1}{2}(\Lambda_{0,4k}-\Lambda_{0,4k+4})$. Außer im Fall der Vakuum-Darstellung ist der W_0-Eigenwert w immer von null verschieden.*

Man beachte, daß bei den ungeraden Sektoren keine entarteten Darstellungen mehr auftreten, alle RPA haben die Multiplizität eins. Dies liegt daran, daß sich der W_0-Eigenwert eindeutig als Funktion in h,c ausdrücken läßt, da die Selbstkopplung C_{WW}^{W} nach (4.9) nicht verschwindet. Dazu betrachen wir wieder die Nullmoden von $\mathcal{N}(W,\partial^n W)$, $n=0,2$, angewandt auf das Vakuum. Das Lösen der resultierenden quadratischen Gleichungen ergibt dann w. Auf den ersten Blick mag es überraschen, daß wir zwei Darstellungen mit $h=0$ haben, von denen aber nur eine (diejenige mit $w=0$) die Vakuum-Darstellung ist. Dies widerspricht auch nicht der Forderung, daß die Darstellung zum Zustand niedrigster Energie nicht entartet sei, da die Theorie nicht unitär ist.
Schließlich bemerken wir noch, daß das allgemeine Additions-Gesetz der Jacobi-Riemann Θ-Funktionen mit Moduli, die eine Quadrat enthalten,

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \Lambda_{n\lambda+\nu,n^2k}(\tau) = \Lambda_{\lambda,k}(\tau)\,, \quad k \in \mathbb{Z}_+/2\,, \tag{4.23}$$

impliziert, daß die ganze $\mathcal{W}(2,3k)$-Algebra aus ihrem ungeraden Sektor $\mathcal{W}(2,8k)$ konstruiert werden kann: In der Tat erhält man die Darstellung zum SPA $|h(\lambda)\rangle$ der ganzen Algebra, indem man den ungeraden Sektor sowohl auf diesen SPA als auch auf den Zustand $(\Phi_{2,2})_0|h(\lambda)\rangle$ anwendet. Für die Charaktere haben wir dann die Beziehung $\Lambda_{2\lambda,4k}(\tau)+\Lambda_{2\lambda+1,4k}(\tau) = \Lambda_{\lambda,k}(\tau)$. Genauer zeigt dies, daß die $\mathcal{W}(2,8k)$-Algebren gerade die $\mathbb{Z}_2$-Orbifolds der $\mathcal{W}(2,3k)$-Algebren sind. Es ist bemerkenswert, daß die Symmetrie-Algebra der $\mathbb{Z}_2$-Orbifold-Theorie wieder nur einen zusätzlichen Generator besitzt. Typischerweise enthalten die $\mathcal{W}$-Algebren zu $\mathbb{Z}_2$-Orbifolds mehr Generatoren als diejenigen der zugrundeliegenden Theorien. Zum Beispiel ist der bosonische Sektor der $\mathcal{W}(2,\frac{3}{2})$-Algebra durch die $\mathcal{W}(2,4,6)$-Algebra gegeben.

4.4 Klassifikation der Theorien mit effektivem c = 1

Wir sind nun in der glücklichen Lage, alle regulären rationalen Theorien mit zentraler Ladung $c_{eff} = 1$ klassifizieren zu können. Wesentlich dafür ist unsere Proposition −350/13 und das Serre-Stark-Theorem. Beides zusammen garantiert, daß sich alle Charaktere durch Funktionen des Typs $\Lambda_{\lambda,k} = \Theta_{\lambda,k}/\eta$ ausdrücken lassen[xxii].
Zunächst stellen wir fest, daß in der Tat für all unsere Theorien $c_{eff} = c - 24h_{min} = 1 - 24k - 24h_{0,0} = 1$ ist. Der Fall $k = 0$ ist bereits ausführlich in der Literatur behandelt worden [457, 211, 709]. Es sind dies die Gauss-Modelle (Fall (i) in Satz −667/8), deren Zustandssummen generisch gerade durch $Z(R)$ in (3.37) gegeben sind. Die unmittelbare Folgerung des Serre-Stark-Theorems ist nun gerade

LEMMA -161/8. *Jede reguläre TÆCR mit $c_{eff} \leq 1$ hat eine Zustandssumme, die sich als endliche Linearkombination über $\mathbb{Q}$ in rationalen U(1)-Zustandssummen schreiben läßt, i.e.*

$$Z = \sum_{n=1}^{N} a_n Z[k_n], \quad a_n, k_n \in \mathbb{Q}\,. \blacksquare \tag{4.24}$$

Natürlich ist jede solche endliche Summe (4.24), auch mit beliebigen Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$, modulinvariant und korrespondiert zu einer endlich dimensionalen Darstellung der Modul-Gruppe. Die Koeffizienten a_n sind aber dadurch stark eingeschränkt, daß die Zustandssumme *physikalisch relevant* sein soll. Eine Zustandssumme Z heißt *physikalisch relevant*, wenn sie die folgenden vier Bedingungen erfüllt:
(a) Die Potenzreihen der Charaktere in q haben nur nicht negative ganze Zahlen als Koeffizienten;
(b) Die Potenzen der Charakter-Entwicklung in q haben immer ganzzahlige Differenz[xxiii];
(c) der erste nicht verschwindende Koeffizient ist gleich eins;
(d) der Vakuum-Charakter enthält keine Ströme (sonst wäre er kein Virasoro-Charakter), i.e. er hat das Aussehen $\chi_{vak} = \frac{q^{(1-c)/24}}{\eta(\tau)}(1 - q + \ldots)$.
Man kann aus diesen Bedingungen nun tatsächlich alle möglichen Zustandssummen explizit ableiten, die physikalsich relevant sind. Dazu eine Bemerkung: In Abschnitt III.6 haben wir gesehen, daß genau für $k \in \mathbb{Q}$ in der Zustandssumme $Z[k]$ (3.37) zusätzliche primäre Felder auftreten können. Genau dann ließ sich $Z[k]$ auch in endlich viele "Charaktere", i.e. Modul-Formen vom Typ unserer $\Lambda_{l,n}$ mit Gewicht null, zerlegen. Da aber nach Proposition −232/11 die Virasoro-Algebra zu klein ist, um eine TÆCR mit $c_{eff} = 1$ zu formen, muß es möglich sein, die Symmetrie-Algebra zu erweitern. P. Ginsparg [457] hat in der Tat für alle rationalen Modelle mit $c = 1$ die zusätzlichen diskreten Symmetrien angeben können, die über das sogenannten "Ausmodulieren" zu rationalen Theorien führen. Es sind dies gerade die diskreten Untergruppen von SO(3) bzw. SU(2), für die es eine A-D-E-Klassifikation gibt. Wir betrachten dazu die Kac-Moody-Algebra $\widehat{\mathfrak{su}(2)}$, die von drei Strömen $j_n^a, a \in \{-, 0, +\}$ generiert wird[xxiv]. Das Virasoro-Feld ist dann gemäß Sugawara-Konstruktion (2.71) gegeben durch $L(z) = \mathcal{N}(j^a, j_a)(z)$. Im allgemeinen ist also das Virasoro-Feld nicht einfach. Die Symmetrie-Algebra ist dann streng genommen $\mathcal{W}(1^3)$ bzw. deren $\mathbb{Z}_2$-Orbifold $\mathcal{W}(2,4)$ (i.e. der gerader Sektor von $\mathcal{W}(1^3)$). Zusätzliche diskrete Symmetrien können aber die Ströme eliminieren:

SATZ -375/17. *Es existieren die folgenden Virasoro-TÆCR mit $c = 1$, gegeben durch ihre Zustandssummen und ihre maximal erweiterten Symmetrie-Algebren:*

[xxii] Dabei setzten wir, wie in Abschnitt III.1 erläutert, voraus, daß die Charaktere einer TÆCR einen Darstellungsraum von Γ aufspannen, so daß es eine Kongruenz-Untergruppe von Γ gibt, die trivial auf ihm operiert.
[xxiii] Für fermionische Theorien darf die Differenz auch halbzahlig sein.
[xxiv] In einer Realisierung durch ein freies Feld $\varphi(z)$ wäre dann $j^0(z) = -i\partial\varphi(z)$ und $j^{\pm}(z) = \exp(\pm i\sqrt{2}\varphi(z))$.

(A_n) *Bezeichne C_n die zyklische Gruppe, und $\mathcal{C}_{2n} = C_n \times \mathbb{Z}_2 \subset SU(2)$. Dann existieren die TÆCR mit $Z_{\mathrm{SU}(2)/\mathcal{C}_{2n}} = Z[n^2]$ und Algebra $\mathcal{W}(1^{\otimes 3}, 2, n^2)$.*

(D_n) *Bezeichne D_n die Dieder-Gruppe, und $\mathcal{D}_n = D_n \times \mathbb{Z}_2 \subset SU(2)$. Dann existieren die TÆCR mit $Z_{\mathrm{SU}(2)/\mathcal{D}_n} = \frac{1}{2}(Z[n^2] + 2Z[4] - Z[1])$ und Algebra $\mathcal{W}(2, 4, n^2)$.*

(E_n) *Bezeichnen T, O, I die Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaeder-Gruppe[xxv], und entsprechend $\mathcal{T}, \mathcal{O}, \mathcal{I}$ die binären Pendants zu SU(2). Dann existieren die exzeptionellen TÆCR mit Zustandssummen $Z_{\mathrm{SU}(2)/\mathcal{T}} = \frac{1}{2}(2Z[9] + Z[4] - Z[1])$, $Z_{\mathrm{SU}(2)/\mathcal{O}} = \frac{1}{2}(Z[16] + Z[9] + Z[4] - Z[1])$ und $Z_{\mathrm{SU}(2)/\mathcal{I}} = \frac{1}{2}(Z[25] + Z[9] + Z[4] - Z[1])$. Deren Algebren sind $\mathcal{W}(2, 9, 16)$, $\mathcal{W}(2, 16)$ und $\mathcal{W}(2, 36)$.* ■

Man beachte, daß im obigen Satz keine nicht diagonale Zustandssummen möglich sind, da $n^2 = pq$ immer $(p, q) \neq 1$ impliziert. Ferner lassen sich zu den Zustandssummen $Z_{orb}[n] = (Z[n] + 2Z[4] - Z[1])/2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ Virasoro-TÆCR zum Beispiel aus dem affinen Coset $(\widehat{\mathrm{SO}(n)}_1 \times \widehat{\mathrm{SO}(n)}_1)/\widehat{\mathrm{SO}(n)}_2$ konstruieren, die dann die chiralen Algebren $\mathcal{W}(2, 4, n)$ besitzen. Verwendet man stattdessen in den Cosets die symplektischen Gruppen $\widehat{\mathrm{SP}(n)}_k$, erhält man auch noch chirale Algebren für $n \in \mathbb{Z}_+ + \frac{1}{2}$. E. Kiritsis [709] konnte zeigen, daß die Klassifikation durch Satz $-375/17$ vollständig ist. Sein Beweis setzt aber Unitarität nicht wesentlich voraus und bleibt auch für nicht unitäre Theorien weitgehend gültig, wenn man nur sorgfältig zwischen der Vakuum-RPA und der RPA minimaler Energie unterscheidet. In der Tat stieß E. Kiritsis auf eine weitere mögliche Zustandssumme, die aber zu keiner unitären Theorie gehören kann,

$$Z_{neu}[x_1, x_2] = \frac{1}{2}(Z[x_1] + Z[x_2])\,. \tag{4.25}$$

Eine notwendige Bedingung dafür, daß es eine Virasoro-TÆCR mit obiger Zustandssumme gibt, ist $x_i = P_i/Q_i$, $i = 1, 2$. Damit erhalten wir nach (3.40) die folgenden zwei Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} Z \;=\; & (\eta\bar\eta)^{-1}\left(\sum_{n=1}^{P_1Q_1-1}\Theta_{n,P_1Q_1}\bar\Theta_{n',P_1Q_1} + \sum_{m=1}^{P_2Q_2-1}\Theta_{m,P_2Q_2}\bar\Theta_{m',P_2Q_2}\right. \\ & + \left|\frac{\Theta_{0,P_1Q_1}+\Theta_{0,P_2Q_2}}{2}\right|^2 + \left|\frac{\Theta_{0,P_1Q_1}-\Theta_{0,P_2Q_2}}{2}\right|^2 \\ & + \left.\left\{\begin{array}{l} 2\left|\dfrac{\Theta_{P_1Q_1,P_1Q_1}}{2}\right|^2 + 2\left|\dfrac{\Theta_{P_2Q_2,P_2Q_2}}{2}\right|^2 \\ \left|\dfrac{\Theta_{P_1Q_1,P_1Q_1}+\Theta_{P_2Q_2,P_2Q_2}}{2}\right|^2 + \left|\dfrac{\Theta_{P_1Q_1,P_1Q_1}-\Theta_{P_2Q_2,P_2Q_2}}{2}\right|^2 \end{array}\right.\right)\,. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Es ist klar, daß nur die beiden Linearkombinationen mit einem negativen Summanden Virasoro-Charaktere sein könnten, da letztere in der Zustandssumme einen Beitrag $(\eta\bar\eta)^{-1}q^{h-c/24}(1 - q + \ldots)\bar q^{\bar h-c/24}(1 - \bar q + \ldots)$ liefern müssen. Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} & \frac{\Theta_{0,P_1Q_1}-\Theta_{0,P_2Q_2}}{2} &= q^{P_1Q_1} - q^{P_2Q_2} + q^{4P_1Q_1} + \ldots, \\ &\text{(ii)} & \frac{\Theta_{P_1Q_1,P_1Q_1}-\Theta_{P_2Q_2,P_2Q_2}}{2} &= q^{\frac{P_1Q_1}{4}} - q^{\frac{P_2Q_2}{4}} + q^{\frac{9P_1Q_1}{4}} + \ldots. \end{aligned} \tag{4.27}$$

In Fall (i) erhalten wir die Bedingung $P_2Q_2 = P_1Q_1 + 1$ und damit $c = 1 - 24P_1Q_1$, in Fall (ii) müssen wir $P_2Q_2 = P_1Q_1 + 4$ erfüllen, was $c = 1 - 6P_1Q_1$ ergibt. Dies sind exakt die Werte der zentralen Ladung für unsere Serien der bosonischen $\mathcal{W}(2, 3k)$-Algebren mit $k = P_1Q_1$ und der Algebren $\mathcal{W}(2, 8k)$ der ungeraden Sektoren mit $k = P_1Q_1/4$.

[xxv] Der Cubus ist dual zum Oktaeder, der Dodekaeder dual zum Ikosaeder

Um die fermionischen $\mathcal{W}(2,3k)$-Algebren zu erhalten, müssen wir im Beweis von E. Kiritsis auch den zusätzlichen Fall berücksichtigen, daß die Potenzen der Charakter-Reihen halbzahlige Differenzen aufweisen. Wir erhalten dann in der Tat eine weitere Zustandssumme für $k=(2l-1)/2 \in \mathbb{Z}_+ + \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} Z_{ferm}[2k,2(k+1)](\tau,\bar{\tau}) &= Z[2(2l-1)] + Z[2(2l+1)] + Z\left[\frac{(2l-1)}{2}\right] + Z\left[\frac{(2l+1)}{2}\right] \\ &= Z_{bos}[2(2l-1),2(2l+1)] + Z_{bos}\left[\frac{(2l-1)}{2},\frac{(2l+1)}{2}\right], \end{aligned} \tag{4.28}$$

wobei wir mit Z_{bos} unsere bosonische Zustandssumme (4.25) bezeichnet haben. Faktorisierungen von k sind natürlich möglich, müssen dann aber in beiden bosonischen Zustandssummen auf gleiche Weise vorgenommen werden. Schließlich formulieren wir den

SATZ -493/19. *Neben den Virasoro-TÆCR aus Satz −375/17 gibt es noch folgende reguläre nicht unitäre Virasoro-TÆCR mit $c_{eff}=1$: Seien zwei Zahlen $p/q,\ p',q' \in \mathbb{Q}_+$ gegeben. Dann existieren rationale Modelle mit Zustandssumme $Z_{bos}[p/q,p'/q']$ genau dann, wenn $p'q'-pq=1$ oder 4 ist. Im ersteren Falle ist die chirale Symmetrie-Algebra eine $\mathcal{W}(2,3pq)$, in letzterem eine $\mathcal{W}(2,8pq)$. Ferner existieren rationale Modelle mit Zustandssumme $Z_{ferm}[p/q,p'/q']$ genau dann, wenn $p'q'-pq=2$ ist. Die chirale Symmetrie-Algebra ist dann eine $\mathcal{W}(2,3pq/2)$. Damit ist die Klassifikation der regulären TÆCR mit $c_{eff}=1$ vollständig.* ■

Dieser Satz besagt unter anderem, daß es unter den parabolischen Modellen (Fall (ii) in Satz −667/8) nur einige spezielle Serien gibt, die rationale Virasroro-Modelle darstellen. Man ist vielleicht versucht, auch für andere rationale Werte $c \neq 1-24k$, $k \in \mathbb{N}/4$ und c nicht in der diskreten Serie erweiterte lokale Systeme zu konstruieren. Von Gleichung (4.23) ausgehend, könnte man zumindest für $k=\frac{p}{\alpha^2}$ die Existenz weiterer TÆCR vermuten. Damit erhielten wir dann (wieder sei $\varepsilon = \in \{0,1\}$)

$$\Lambda_{\lambda,\alpha^2(k+\varepsilon)}(\tau) = \frac{1}{\eta(\tau)}\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{(\alpha n+\frac{\alpha\lambda}{2\alpha^2(k+\varepsilon)})^2(k+\varepsilon)} = \frac{1}{\eta(\tau)} q^k \sum_{r\in\alpha\mathbb{Z}+\frac{\alpha\lambda}{2\alpha^2(k+\varepsilon)}} q^{h_{r,(-)^\varepsilon r}},$$

was eine Bedingung an r oder äquivalent dazu an λ stellt. Um nun ganz- oder halbzahlige Gewichte zu erhalten, müßte

$$h_{r,(-)^\varepsilon r} = \left(\left(\alpha n + \frac{\alpha\lambda}{2\alpha^2(k+\varepsilon)}\right)^2 - 1\right)\frac{p}{\alpha^2} = pn^2 + n\lambda + \frac{\lambda^2}{4p} - \frac{p}{\alpha^2}$$

sein. Dies forciert $\lambda = p = \alpha^2(k+\varepsilon)$, was schließlich in die Bedingung $\frac{p}{4}-\frac{p}{\alpha^2}\in\mathbb{Z}$ mündet, die offensichtlich nur für $\alpha=2$ erfüllt werden kann. Dies ist aber genau der Fall unserer ungeraden Sektoren. Die Algebren zu den ungeraden Sektoren sind also die einzigen lokalen Systeme, die aus einem größeren Satz nicht notwendig chiraler lokaler Operatoren extrahiert werden können. Genau dieser Fall tritt ja für $k \in \mathbb{Z}_+ + \frac{1}{4}$ ein, wo die Operatoren des geraden Sektors nicht relativ zueinander lokal sind und daher nicht zur chiralen Algebra hinzugenommen werden können.

Wir wollen noch die Bedeutung von unterschiedlichen Faktorisierungen des Modulus in (3.40) in zwei coprime Zahlen P,Q erläutern. Die diagonale Zustandssumme beispielsweise der bosonischen $\mathcal{W}(2,3k)$-Theorien ist natürlich $Z_{bos}[k,k+1]$ oder eine dazu duale. Verschiedene Faktorisierungen von k oder $(k+1)$ korresponideren zu nicht diagonalen Zustandssummen. Letztere wiederum bringen einen nicht trivialen Automorphismus der Fusions-Algebra mit sich. Diese Automorphismen können wir direkt aus den möglichen Zerlegungen von k bzw. $(k+1)$ in zwei coprime Faktoren ablesen. O.B.d.A. sei $k=pq$ mit $(p,q)=1$ faktorisiert. Dann haben wir einen Automorphismus der Fusions-Algebra aus Proposition −117/11, der gegeben ist durch $j \mapsto pj \bmod 2q$, $j \in \{0,1,\ldots,k\}$, und alle anderen Indizes bleiben unverändert (vor allem der Index $k+1$ verhält sich wie der Index

0!). Insbesondere ist $N_{pj,pj'}^{pj''} = N_{j,j'}^{j''}$, wobei wir alle Indizes modulo $2q$ nehmen und $j, j', j'' \in \{1, \ldots, k-1\}$ ist. Dies sieht man sofort an der expliziten Form der Fusions-Koeffizienten, wie sie in obiger Proposition gegeben ist. Habe stattdessen $(k+1)$ eine solche Zerlegung $k+1 = pq$. Dann gibt es einen Automorphismus $-j \mapsto -pj \bmod 2q$, $-j \in \{0, -1, \ldots, -k-1\}$ und wiederum bleiben alle anderen Indizes unverändert.
Die eins-zu-eins Korrespondenz der durch die Zustandssummen charakterisierten Theorien und der Automorphismen impliziert, daß es keine weiteren nicht trivialen Automorphismen geben kann. Denn eine Theorie mit $x_1 = \frac{P_1}{Q_1}$ und $x_2 = \frac{P_2}{Q_2}$ in der Zustandssumme (4.25), so daß $P_2Q_2 - P_1Q_1 = 1$ ist, entspricht genau einem Automorphismus, der wie oben angegeben zu konstruieren ist, und die Menge dieser Theorien ist vollständig.

4.5 Supersymmetrische Theorien mit N=1

Die Existenz der fermionischen $\mathcal{W}(2, 3k)$-Algebren, $k \in \mathbb{Z}_+ + \frac{1}{2}$, laßt vermuten, daß sich unsere Resultate auf den Fall supersymmetrischer $N = 1$ Theorien verallgemeinern lassen. Wir haben im Præludium die Supersymmetrie nicht explizit behandelt, weil dies dann doch den Rahmen der Arbeit sprengte, wollen aber doch kurz skizzierne, worum es geht. Zunächst stellen wir fest, daß es für Satz $-667/8$ der Klassifikation degenerierter Virasoro-Modelle, sowie für Proposition $-350/13$ über die prinzipielle Gestalt der Modulformen für die Charaktere genaue Analoga zu der Super-Virasoro-Algebra

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (n-m)L_{m+n} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{m+n,0}\,, \\ [L_m, G_r] &= \left(r - \frac{m}{2}\right)\,, \\ \{G_r, G_s\} &= 2L_{r+s} + \frac{c}{3}\left(s^2 - \frac{1}{4}\right)\delta_{r+s,0} \end{aligned} \tag{4.29}$$

gibt, wobei $m, n \in \mathbb{Z}$ und entweder $r, s \in \mathbb{Z}$ für den Ramond-Sektor, oder $r, s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ für den Neveu-Schwarz-Sektor ist. Bedeutsam ist, daß die Charaktere lediglich veränderte Vorfaktoren in Quotienten von η-Funktionen erhalten können, so daß das Serre-Stark-Theorem weiter anwendbar bleibt (der "Zähler" der Charaktere also nach wie vor durch Modul-Formen vom Gewicht $\frac{1}{2}$ im regulären Falle gegeben ist[xxvi]). Nach Proposition $-232/11$ erwarten wir allerdings jetzt Theorien mit $c_{\mathit{eff}} \leq \frac{3}{2}$. Die unitären Super-Virasoro TÆCR mit $c = \frac{3}{2}$ besitzen übrigens eine zu Satz $-375/17$ ganz ähnliche Klassifikation.
Wir wollen die Notation festlegen: Wir schreiben $c = \frac{3}{2} - 24k = \frac{3}{2}(1 - 16k) = \frac{3}{2}\hat{c}$ und betrachten wieder den Fall $k \in \mathbb{N}/4$, der in der Tat zu Theorien mit $c_{\mathit{eff}} = \frac{3}{2}$ führen wird. Mit $\alpha_\pm = \sqrt{k} \pm \sqrt{k + \frac{1}{2}}$ haben wir die Tiefstgewichte

$$h_{r,s}(c) = \frac{1}{4}(r\alpha_+ + s\alpha_-)^2 + \frac{1}{16}(\hat{c} - 1) + \frac{1}{32}(1 - (-1)^{r-s})\,, \tag{4.30}$$

wobei für den NS-Sektor $r - s \equiv 0 \bmod 2$ und für den R-Sektor $r - s \equiv 1 \bmod 2$ ist. Wir notieren eine supersymmetrische $\mathcal{W}$-Algebra wie üblich allein durch Angabe der jeweils kleineren Dimension der Superpartner, i.e. $\mathcal{SW}(\frac{3}{2}, \delta) = \mathcal{W}(2, \frac{3}{2}, \delta, \delta + \frac{1}{2})$. Dies ist eine supersymmetrische konforme Algebra, die durch ein zusätzliches supersymmetrisch kovariantes Feld $\Phi(z, \theta) = \phi(z) + \theta\psi(z)$ mit Dimension $(\delta, \delta + \frac{1}{2})$ erweitert ist, wobei θ die Grassman-Variable bezeichnet. Die Supervirasoro-Algebra selbst ist dann also eine $\mathcal{SW}(\frac{3}{2})$. In Analogie zu (4.2) bezeichnen wir die superkonformen Blöcke mit $\Phi^{(n)}$.

[xxvi] Es treten aber nun auch die alternierenden Θ-Funktionen aus (3.31) auf.

Mit derselben Argumentationsweise wie in Abschnitt III.1 sehen wir, daß die $\mathcal{SW}(\frac{3}{2},3k)$-Algebren durch das Feld $\Phi^{(2)}$, die $\mathcal{SW}(\frac{3}{2},8k)$-Algebren durch $\Phi^{(3)}$ erzeugt werden.
Wir wollen auch hier zunächst die bis dahin bekannten Beispiele angeben, die durch explizite Konstruktion gefunden wurden [73, 277, 281, 359, 599, 613, 751].
Wieder stehen die c-Werte der generisch existierenden Algebren in Klammern. Die $\mathcal{SW}(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$-Algebra existiert generisch und mit unabhängig wählbarer Selbstkopplung. Sie ist nichts weiter als das supersymmetrische Analogon der $\mathcal{W}(2,2)$ und kann daher als direkte Summe zweier Super-Virasoro-Algebren geschrieben werden. Sie ist aber nur für verschwindende Selbstkopplung durch eine supersymmetrische Freie-Feld-Konstruktion zu realisieren, da dies sonst den Fusions-Regeln derselben widerspräche. Die $\mathcal{SW}(\frac{3}{2},2)$-Algebra existiert ebenfalls für generisches s. Ihr klassisches Gegenstück ist die Symmetrie-Algebra der Super-Toda-Theorie zur Super-Lie-Algebra $\mathfrak{osp}(3|2)$. Diese, die $\mathcal{SW}(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ (abelsche Super-Kac-Moody-Algebra) und $\mathcal{SW}(\frac{3}{2},1)$ ($N=2$ Super-Virasoro-Algebra) sind die einzigen bekannten Super-$\mathcal{W}$-Algebren mit zwei Generatoren, die für generisch wählbare zentrale Ladung existieren.

Tabelle IV.2 Zwei Sätze von $\mathcal{SW}$−Algebren mit rationalen c−Werten, die nicht in der supersymmetrischen diskreten Serie enthalten sind.

Die Serie $\mathcal{SW}(\frac{3}{2},\delta)$ mit $c=\frac{3}{2}-8\delta$:		
$\mathcal{SW}(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$	$(c=-\frac{21}{2})$	$((C_{\Phi\Phi}^{\Phi})^2=0)$
$\mathcal{SW}(\frac{3}{2},3)$	$c=-\frac{45}{2}$	$(C_{\Phi\Phi}^{\Phi})^2=0$
$\mathcal{SW}(\frac{3}{2},\frac{9}{2})$	$c=-\frac{69}{2}$	$(C_{\Phi\Phi}^{\Phi})^2=0$
$\mathcal{SW}(\frac{3}{2},6)$	$c=-\frac{93}{2}$	$(C_{\Phi\Phi}^{\Phi})^2=0$
Die Serie $\mathcal{SW}(\frac{3}{2},\delta)$ mit $c=\frac{3}{2}-3\delta$:		
$\mathcal{SW}(\frac{3}{2},2)$	$(c=-\frac{9}{2})$	$(C_{\Phi\Phi}^{\Phi})^2=\frac{242}{13}$
$\mathcal{SW}(\frac{3}{2},4)$	$c=-\frac{21}{2}$	$(C_{\Phi\Phi}^{\Phi})^2=-\frac{508369}{2499}$
$\mathcal{SW}(\frac{3}{2},6)$	$c=-\frac{34}{2}$	$(C_{\Phi\Phi}^{\Phi})^2=\frac{6309688448}{3137409}$

Wir betrachten wieder die "diagonalen" Felder mit Gewichten $h_{r,r}=(r^2-1)k$ und $h_{r,-r}=(r^2-1)k+\frac{1}{2}r^2$ im NS-Sektor. Im R-Sektor müssen wir die Gewichte korrigieren, $h=h_{r,\pm r}+\frac{1}{16}$. Die Lokalitätsbedingungen für chirale Theorien ergeben dasselbe Muster, wie im nicht supersymmetrischen Fall. $r=2, k\in\mathbb{N}/2$ generiert das Analogon der $\mathcal{W}(2,3k)$-Algebra, die $\mathcal{SW}(\frac{3}{2},3k)$, und $r=2, k\in\mathbb{N}/4$ das Analogon der ungeraden Sektoren, die $\mathcal{SW}(\frac{3}{2},8k)$.
Der Vakuum-Charakter einer $\mathcal{SW}(\frac{3}{2},3k)$-Theorie, aus dem wir mittels Modul-Transformationen wieder alle anderen RPA-Charaktere bestimmen können, ist

$$\begin{aligned}\chi_0^{\mathcal{SW}}(\tau) &= \prod_{n\in\mathbb{N}}\frac{1+q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^n}q^{\frac{\hat{c}}{16}}\sum_{r\in\mathbb{Z}}\left(q^{h_{r,r}}-q^{h_{r,-r}}\right)\\ &= \frac{\eta(\frac{\tau+1}{2})}{\eta^2(\tau)}e^{-\frac{\pi i}{24}}\left(\Theta_{0,k}(\tau)-\Theta_{0,k+\frac{1}{2}}(\tau)\right).\end{aligned} \tag{4.31}$$

Wie bei den fermionischen Theorien ist der NS-Sektor invariant unter S und T^2, seine Charaktere involvieren die $\Theta_{\lambda,k+\frac{\varepsilon}{2}}$-Funktionen mit $\lambda\in\mathbb{Z}$. Der R-Sektor ist ein wenig komplizierter. Der kombinatorische Vorfaktor, der den Charakter zu einer Modul-Form vom Gewicht null macht, ist $\prod\frac{1+q^n}{1-q^n}=\eta(2\tau)/\eta^2(\tau)$. Von (3.33) lernen wir, daß Invarianz unter der T-Transformation $\lambda-k+\frac{\varepsilon}{2}\in\mathbb{Z}$ erzwingt. Damit ist der R-Sektor invariant unter T und ST^2S.
Man beachte, daß wir hier lediglich die Charaktere betrachten, in denen die Fermionen-Zahl nicht mit $(-)^F$ gezählt wird, da diese bereits hinreichend sind, alle möglichen irreduziblen RPA zu klassifizieren. Natürlich muß man in der modul-invarianten Zustandssumme die Charaktere des

sogenannten $\widetilde{\mathrm{NS}}$-Sektors, gegeben durch $\mathrm{tr}_{|h\rangle}(-)^F q^{L_0-c/24}$, noch hinzunehmen, um die Invarianz unter ganz Γ zu erhalten. Man erhält diese Charaktere aber leicht aus denen des normalen NS-Sektors durch Anwenden der T-Transformation, $\chi^{\mathcal{SW}}_{\lambda,\widetilde{\mathrm{NS}}}(\tau) = \chi^{\mathcal{SW}}_{\lambda,\mathrm{NS}}(\tau+1)$. Die $\widetilde{\mathrm{NS}}$-Charaktere involvieren dann die alternierenden $\widetilde{\Theta}$-Funktionen aus (3.31) und tragen einen Vorfaktor $\prod \frac{1-q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^n}$ $= \exp(-\frac{2}{16}\pi i)\eta(\frac{1}{2}\tau)\eta^{-2}(\tau)$. Sie sind also im wesentlichen durch die Funktionen

$$\Lambda^{\widetilde{\mathrm{NS}}}_{\lambda,k} = \frac{\eta(\frac{\tau}{2})}{\eta^2(\tau)} e^{-\frac{2\pi i}{16}} \widetilde{\Theta}_{\lambda,k}(\tau) \tag{4.32}$$

gegeben. Da diese beiden Sektoren durch T vertauscht werden, muß die diagonale modul-invariante Zustandssumme die allgemeine Form

$$Z = a(Z^{\mathrm{NS}} + Z^{\widetilde{\mathrm{NS}}} + Z^{\mathrm{R}}) + bZ^{\widetilde{\mathrm{R}}} \tag{4.33}$$

besitzen, wobei Z^{A} die diagonale Zustandssumme der Charaktere des A-Sektor ist, i.e. $Z^{\mathrm{A}} = \sum_\lambda \left|\chi^{\mathcal{SW}}_{\lambda,\mathrm{A}}(\tau)\right|^2$. Hier sind a, b bis auf die Normierung freie Konstanten. $Z^{\widetilde{\mathrm{R}}}$ ist übrigens nichts anderes als $\mathrm{tr}(-)^F$. Mit diesem Ansatz fallen die fermionischen Beiträge aus dem NS-Sektor heraus, der bosonische Charakter ist $\mathrm{tr}_{|h\rangle}(1+(-)^F)q^{L_0-c/24}$. Man beachte ferner, daß die Nullmoden-Algebra im R-Sektor keineswegs trivial ist, vielmehr vermag sie eine 2^n-dimensionale zusätzliche Darstellung der Clifford-Algebra zu tragen, wie zum Beispile die Darstellung $(-)^F = \pm 1$ für den Fermionenanzahloperator.
Sei zunächst $k \in \mathbb{N}$ (diesen Fall wollen wir *bosonisch* nennen, in Analogie zu den $\mathcal{W}(2,3k)$-Algebren). Die Charaktere sind generisch – bis auf mögliche Linearkombinationen von Θ-Funktionen, deren q-Potenzen ganzzahlige Differenz aufweisen – durch die Funktionen

$$\begin{aligned} \Lambda^{\mathrm{NS}}_{\lambda,k+\frac{\varepsilon}{2}}(\tau) &= \frac{\eta(\frac{\tau+1}{2})}{\eta^2(\tau)} e^{-\frac{\pi i}{24}} \Theta_{\lambda,k+\frac{\varepsilon}{2}}(\tau) \quad \mathrm{NS-sector}\,, \\ \Lambda^{\mathrm{R}}_{\lambda+\frac{\varepsilon}{2},k+\frac{\varepsilon}{2}}(\tau) &= \frac{\eta(2\tau)}{\eta^2(\tau)} \Theta_{\lambda+\frac{\varepsilon}{2},k+\frac{\varepsilon}{2}}(\tau) \quad \mathrm{R-sector} \end{aligned} \tag{4.34}$$

gegeben, wo $\lambda \in \mathbb{Z}$ und $\varepsilon \in \{0,1\}$. Die beiden Sektoren werden durch TST ineinander überführt. Alle Gewichte im R-Sektor müssen um den Wert $\frac{1}{16}$ verschoben werden. Außerdem gibt es auch wieder entartete Darstellungen.

Proposition -279/10. *Sei $k \in \mathbb{Z}$. Ferner sei $\varepsilon \in \{0,1\}$. Dann existiert eine $N=1$ supersymmetrische TÆCR mit chiraler Algebra $\mathcal{SW}(\frac{3}{2},3k)$ zur zentralen Ladung $c = \frac{3}{2} - 24k$. Die VPA sind im NS-Sektor $(c, h_{\lambda/(2k+\varepsilon),(-)^\varepsilon\lambda/(2k+\varepsilon)}, 0)$, $1 \le \lambda < (k+\varepsilon)$, sowie $(c, h_{0,0} = -k, 0)$, $(c, h_{1,1} = 0, 0)$ und $(c, h_{1/2,1/2}, \pm w \ne 0)$. Im R-Sektor lauten sie $(c, h_{\lambda/(4k+2\varepsilon),(-)^\varepsilon\lambda/(4k+2\varepsilon)} + \frac{1}{16}, 0)$, $0 \le \lambda < (4k+2\varepsilon)$ mit $\lambda \in 2\mathbb{Z}+\varepsilon$ und $(c, h_{1/2,(-)^\varepsilon 1/2} + \frac{1}{16}, \pm w \ne 0)$. Die zugehörigen Charaktere sind im R-Sektor einfach durch $\chi^{\mathcal{SW}}_{(-)^\varepsilon\lambda,\mathrm{R}} = \Lambda^{\mathrm{R}}_{\lambda/2,k+\varepsilon/2}$ gegeben, im NS-Sektor durch $\chi^{\mathcal{SW}}_{(-)^\varepsilon\lambda,\mathrm{N}} = \Lambda^{\mathrm{R}}_{\lambda,k+\varepsilon/2}$ außer für h_{min} und die Vakuum-RPA, wo stattdessen die Linearkombinationen $\chi^{\mathcal{SW}}_{0,\mathrm{NS}} = \frac{1}{2}(\Lambda^{\mathrm{NS}}_{0,k} - \Lambda^{\mathrm{NS}}_{0,k+1/2})$ und $\chi^{\mathcal{SW}}_{k+1,\mathrm{NS}} = \frac{1}{2}(\Lambda^{\mathrm{NS}}_{0,k} + \Lambda^{\mathrm{NS}}_{0,k+1/2})$ zu nehmen sind. Die Charaktere für Darstellungen mit $w^2 \ne 0$ haben Multiplizität 2, die Darstellungen spalten in zwei entartete identische auf.* ∎

Der Fall der fermionischen $\mathcal{SW}$-Algebren, i.e. $k \in \mathbb{Z}_+ + \frac{1}{2}$, läßt sich sofort vom bosonischen ablesen, lediglich die Rolle von k und $k+\frac{1}{2}$ vertauscht sich, da nun k halbzahlig ist.

Auch im supersymmetrischen Fall können wir die $\mathbb{Z}_2$-Orbifolds konstruieren, die wieder durch den ungeraden Sektor gegeben sind. Die Charaktere der $\mathcal{SW}8k$-Algebren setzen sich im NS-Sektor aus den Funktionen

$$\Lambda^{\mathrm{NS}}_{\lambda,4k+2\varepsilon}(\tau) = \frac{\eta\left(\frac{\tau+1}{1}\right)}{\eta^2(\tau)} e^{-\frac{\pi i}{24}} \Theta_{\lambda,4k+2\varepsilon}(\tau) \tag{4.35}$$

zusammen, wobei wieder Linearkombinationen auftreten können. Im R-Sektor hingegen sind die Charaktere wirklich durch die Funktionen

$$\Lambda^{\mathrm{R}}_{\lambda,4k+2\varepsilon}(\tau) = \frac{\eta(2\tau)}{\eta^2(\tau)}\Theta_{\lambda,4k+2\varepsilon}(\tau) \tag{4.36}$$

gegeben, da keine Linearkombinationen möglich sind. Dies liegt daran, daß Felder mit $h_{r,r}$ und $h_{r,-r}$ entgegengesetzte Parität bezüglich der Darstellung des $(-)^F$-Operators besitzen, die ja im R-Sektor auftritt. Dadurch sind aber die RPA zu $h_{1,1}$, $h_{0,0}$ und $h_{1,-1}$ nun jedweils zweifach entartet, es gibt je zwei verschiedene Eigenwerte w von $\Phi_0 = \Phi^{(3)}_0$. Desweiteren existieren zwei *verschiedene* Darstellungen zum Zustand niedrigster Energie. Wir können nun einige RPA zu höheren Energien auf jedem der beiden Grundzustände aufbauen, indem wir den Mode $\Phi^{(2)}_{\frac{1}{2}}$ für $k \in \mathbb{Z}_+ + \frac{1}{2}$ oder den Mode $\Phi^{(2)}_1$ für $k \in \mathbb{Z}_+$ auf sie anwenden[xxvii]. Wir erhalten entsprechend zu oben

Proposition -350/11. *Sei $k \in \mathbb{Z}/4$. Ferner sei $\varepsilon \in \{0,1\}$ und $A\in \{NS,R\}$. Dann existiert eine $N = 1$ supersymmetrische TÆCR mit chiraler Algebra $\mathcal{SW}(\frac{3}{2}, 8k)$ zur zentralen Ladung $c = \frac{3}{2} - 24k$. Die VPA sind im NS-Sektor $(c, h_{\lambda/(4k+2\varepsilon),(-)^\varepsilon\lambda/(4k+2\varepsilon)} + \frac{1}{16}\delta_{\mathrm{A,R}}, w \neq 0)$ mit $0 \leq \lambda \leq (4k+2\varepsilon)$, wobei im NS-Sektor die zweite RPA zu $h_{0,0}$ durch eine zu $h_{2,2}$ ersetzt ist, die RPA zu $h_{1,-1}$ durch eine zu $(c, h_{1,1} = 0, w \neq 0)$. Die Vakuum-RPA im NS-Sektor hat als einzige $w = 0$. Die Charaktere sind im R-Sektor $\chi^{\mathcal{SW}}_{(-)^\varepsilon\lambda,\mathrm{R}} = \Lambda^{\mathrm{R}}_{\lambda,4k+2\varepsilon}$ und im NS-Sektor $\chi^{\mathcal{SW}}_{(-)^\varepsilon\lambda,\mathrm{NS}} = \Lambda^{\mathrm{NS}}_{\lambda+4k+2\varepsilon,4k+2\varepsilon}$ für $1 \leq \lambda < (4k + 2\varepsilon)$. Die restlichen NS-Charaktere sind für die Vakuum-RPA $\chi^{\mathcal{SW}}_{0,\mathrm{NS}} = \frac{1}{2}(\Lambda^{\mathrm{NS}}_{4k,4k} - \Lambda^{\mathrm{NS}}_{4k+2,4k+2})$, für die RPA auf dem Zustand $|\Phi^{(2)}\rangle$ mit $h_{2,2}$ als Gewicht $\chi^{\mathcal{SW}}_{4k,\mathrm{NS}} = \frac{1}{2}(\Lambda^{\mathrm{NS}}_{0,4k} - \Lambda^{\mathrm{NS}}_{0,4k+2})$, für die RPA niedrigster Energie $\chi^{\mathcal{SW}}_{4k+1,\mathrm{NS}} = \frac{1}{2}(\Lambda^{\mathrm{NS}}_{0,4k} + \Lambda^{\mathrm{NS}}_{0,4k+2})$ und schließlich für die zweite RPA mit $h = 0$ (aber $w \neq 0$) $\chi^{\mathcal{SW}}_{4k+2,\mathrm{NS}} = \frac{1}{2}(\Lambda^{\mathrm{NS}}_{4k,4k} + \Lambda^{\mathrm{NS}}_{4k+2,4k+2})$. Die R-Charaktere für $\lambda \in \{0, 4k + 2\varepsilon\}$ haben Multiplizität 2, die Darstellungen spalten in zwei entartete identische auf.* ■

Selbstverständlich können wir auch die Strukturkonstanten unserer Algebren berechnen. Alle Konstanten lassen sich wieder auf c und die Selbstkopplung des Feldes $\Phi \equiv \Phi^{(3)}$ zurückführen. Letztere kann mit Hilfe der supersymmetrischen Version der Freien-Feld-Konstruktion durch Normierungskonstanten ähnlich denen der Dotsenko-Fateev-Modelle ausgedrückt werden, die in [3, 719] erstmals angegeben wurden. Interessanterweise gelten für die Monodromie-Koeffizienten, die Zopf-Matrizen und die Δ-Koeffizienten in (4.6) exakt die gleichen Formeln, wenn dort α_+^2 durch $\frac{\alpha_+^2-1}{2}$ substituiert wird. Das Quadrat der Selbstkopplung ist dann

$$\left(C^{\Phi}_{\Phi\Phi}\right)^2 = \begin{cases} \dfrac{(\frac{3}{2}-24k)}{8k}\dfrac{\prod_{j=1}^{8k}\left(j^2-64(k^2+\frac{k}{2})\right)^2\prod_{j=1}^{2k}\left(j^2-4(k^2+\frac{k}{2})\right)^3}{\prod_{j=1}^{6k}\left(j^2-36(k^2+\frac{k}{2})\right)\prod_{j=1}^{4k}\left(j^2-16(k^2+\frac{k}{2})\right)^4} \\ \qquad\qquad \textit{wenn } k \in \mathbb{Z}_+/2\,, \\ \dfrac{(\frac{3}{2}-24k)}{8k}\dfrac{\prod_{j=1}^{8k}\left(j^2-64(k^2+\frac{k}{2})\right)^2\prod_{j=1}^{2k+1/2}\left((j-\frac{1}{2})^2-4(k^2+\frac{k}{2})\right)^3}{\prod_{j=1}^{6k+1/2}\left((j-\frac{1}{2})^2-36(k^2+\frac{k}{2})\right)\prod_{j=1}^{4k}\left(j^2-16(k^2+\frac{k}{2})\right)^4}\dfrac{3}{4(k^2+\frac{k}{2})} \\ \qquad\qquad \textit{wenn } k \in \mathbb{Z}_+ + \frac{1}{4}\,. \end{cases} \tag{4.37}$$

Wir sehen, daß die Struktur der supersymmetrischen regulären TÆCR mit $c_{\mathit{eff}} = \frac{3}{2}$ derjenigen der rein konformen mit $c_{\mathit{eff}} = 1$ sehr ähnlich ist. Wir können formulieren:

[xxvii] Man beachte, daß für $k \in \mathbb{Z}_+ + \frac{1}{4}$ dies nicht im Rahmen chiraler $\mathcal{SW}$-Algebren verstanden werden kann, da dieses Feld nicht lokale relativ zu sich selbst ist. Es ist aber lokal relativ zu den anderen Feldern der $\mathcal{SW}$-Algebra, $\mathbb{1}$, $\Phi^{(3)}$, etc. Daher stellt es solange kein wirkliches Problem dar, mit dem Feld $\Phi^{(2)}$ zu operieren, wie nur ein Mode $\Phi^{(2)}_{\frac{1}{4}}$ (symbolische Notation!) in den Monomen der Entwicklung des resultierenden Zustands in Moden auftritt.

Satz -777/23. *Sei* $k \in \mathbb{N}$. *Mit den Serien nicht unitärer regulärer TÆCR mit chiraler Algebra* $\mathcal{W}(2, 3k/2)$ *bzw.* $\mathcal{W}(2, 2k)$ *zu* $c = 1 - 12k$ *bzw.* $c = 1 - 6k$ *und denjenigen mit supersymmetrischer chiraler Algebra* $\mathcal{SW}(\frac{3}{2}, 3k/2)$ *bzw.* $\mathcal{SW}(\frac{3}{2}, 2k)$ *zu* $c = 3/2 - 12k$ *bzw.* $c = 3/2 - 6k$ *ist die Klassifikation aller regulärer (Super-) Virasoro-TÆCR mit* $c_{\mathit{eff}} = 1$ *bzw.* $c_{\mathit{eff}} = 3/2$ *vollständig.*
Nicht reduzible Darstellungen der Modul-Gruppe auf getwisteten Summen von Darstellungsräumen der Modul-Formen vom Gewicht $\frac{1}{2}$ *und verschiedenen Moduli* $k_1, \ldots, k_N$ *sind genau dann physikalisch relevant, wenn* $N = 2$ *und* $2|k_1 - k_2| \in \{1, 2, 4, 8\}$ *ist.* ∎

Wir bemerken abschließend, daß es natürlich Darstellungen der Modul-Gruppe auf direkten Summen solcher Räume geben mag, die dann aber vollständig reduzibel sind. Es ist bemerkenswert, daß die Vertwistung nur für ganz spezielle Differenzen der Moduli möglich ist. Zwar existieren für unsere Serien von (Super-) $\mathcal{W}$-Algebren auch entsprechende Versionen für $N \geq 2$ Supersymmetrie. Die explizite Konstruktion einiger Beispiele für $N = 2$ zeigt aber, daß diese Algebren keine chiralen Symmetrie-Algebren von rationalen Modellen sind [67]. Das ist nach Satz $-777/23$ auch nicht anders zu erwarten, da offensichtlich keine entsprechenden Analoga der Virasoro-Charaktere existieren[xxviii]. Ob dies etwas mit der Existenz von Divisionsalgebren zu tun hat?

[xxviii] Für $N = 2$ hat man zwar neben dem konformen Gewicht h eine zweite Quantenzahl, die Ladung Q des chiralen Stromes, so daß der Charakter als $\chi_{|c,h,Q\rangle}(\tau, z) = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_{|c,h,Q\rangle}} q^{L_0 - \frac{c}{24}} e^{2\pi i z J_0}$ zu definieren ist. Nichtsdestotrotz müssen die $\chi_{|c,h,Q\rangle}(\tau, 0)$ nach wie vor eine Darstellung der Modul-Gruppe bilden.

5

Interludium Arithmetische Geometrie

Die Klassifikation aller TÆCR hat viel mit Geometrie zu tun, stellt sich doch natürlicherweise die Frage nach einem "Raum aller TÆCR" im Sinne eines klassifizierenden Raumes, $\mathcal{B}$(TÆCR). Über diesen Raum können bis jetzt nicht sehr viele rigorose Aussagen gemacht werden. In Bezug auf geeignete Kriterien, wie zum Beispiel die (effektive) zentrale Ladung, läßt er sich in Komponenten zerlegen, sogenannte Modul-Räume. Eines der wenigen bewiesenen rigorosen Resultate ist, daß die Modul-Räume *unitärer* TÆC algebraische Varietäten sind [829]. Wir werden aber zeigen, daß der Modul-Raum nicht unitärer TÆC mit $c_{\mathit{eff}} = 1$ alles andere als eine algebraische Varietät, sondern ein multifraktales Gebilde ist. Es ist also zu vermuten, daß der Raum aller TÆCR auch im allgemeinen eine wesentlich kompliziertere Struktur besitzt, als bis jetzt angenommen wurde. Die Nicht-Unitarität führt uns in das Neuland der arithmetischen Geometrie, gibt es doch einen verblüffenden Zusammenhang zwischen der Modul-Gruppe und den Elementen des Modul-Raumes der nicht unitären TÆCR mit $c_{\mathit{eff}} = 1$.

5.1 Modul-Räume & marginale Deformationen

Als erstes werden wir die Begriffsbildung darlegen. Wir wollen uns den klassifizierenden Raum aller TÆC bezüglich der effektiven zentralen Ladung zerlegt vorstellen, i.e. wir schreiben ihn formal als kontinuierliche Summe $\mathcal{B}(\text{TÆC}) = \sum_x \mathcal{M}(x)$. Dabei bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(x)$ den Modul-Raum aller TÆC mit $c_{\mathit{eff}} = x$, den wir weiter in zwei Sektoren einteilen, $\mathcal{M}(x) = M(x) \cup M'(x)$, wobei $M(x)$ der Modul-Raum aller unitären Theorien mit $c = x$, und $M'(x)$ der Modul-Raum aller nicht

unitären Theorien mit $c_{eff} = x$ ist. Weiter sei $\mathcal{R}(X)$ die Menge aller rationalen regulären Theorien im Modul-Raum X.
Zumindest $M(x)$ hat die Struktur einer algebraischen Varietät [829]. Wir können den Moduli des Raumes kontinuierlich variierende Parameter zuordnen, zu deren Änderung Deformationen der Theorien mittels sogenannter *marginaler Operatoren* korrespondieren. Marginale Operatoren haben das konforme Gewicht $h = \bar{h} = 1$. Störungen einer unitären Theorie mit marginalen Operatoren ändern die zentrale Ladung nicht und erhalten die konforme Symmetrie[xxix]. In der gesamten Literatur gibt es bis jetzt keine überzeugende Darstellung zu marginalen Deformationen nicht unitärer Theorien. Es ist daher notwendig, kurz darauf einzugehen: Wir wollen die marginalen Operatoren mit ψ_i bezeichnen. Störungen erster Ordnung kann man in der Pfadintegral-Formulierung durch einen zusätzlichen Term in der Wirkung beschreiben,

$$\delta S = \sum_i \frac{\delta g_i}{2\pi} \int d^2 z \psi_i(z, \bar{z}) .$$

Die Korrelationsfunktionen eines beliebigen Produktes von Operatoren verändern sich dadurch um

$$\frac{\delta}{\delta g_i} \langle \phi_1(z_1) \ldots \phi_n(z_n) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int d^2 z \langle \psi_i(z, \bar{z}) \phi_1(z_1) \ldots \phi_n(z_n) \rangle . \tag{5.1}$$

Marginale Operatoren, für die Gleichung (5.1) zu endlichen Störungen integriert werden kann, heißen *integrabel*. Lokal können ihre Kopplungskonstanten g_i, die Moduli, als Koordinatensystem für den Raum der TÆC in der Umgebung der ungestörten Theorie verwendet werden[xxx]. Die Bewegung im TÆC-Raum, die durch marginale Deformationen bewirkt wird, drückt sich durch einen Fluß der konformen Dimensionen und Kopplungskonstanten der primären Felder aus. Für die Gewichte gilt zum Beispiel

$$\delta h_\alpha = \delta \bar{h}_\alpha = - \sum_i C_{i\alpha\alpha} \delta g_i . \tag{5.2}$$

Hat man mehrere Operatoren mit demselben Gewicht, muß man die Matrix $C_{i\alpha\beta}$ zuvor diagonalisieren. Damit erhalten wir sofort eine notwendige Bedingung für die Integrabilität der marginalen Störung mit ψ_i: Es muß $C_{iij} = 0$ für alle primären Felder ψ_j mit $h_j = \bar{h}_j = 1$ sein. Wir sehen auch, daß wegen $C_{i00} = 0$ der Vakuum-Zustand erhalten bleibt. Bei nicht unitären Theorien wird aber im allgemeinen $C_{i,min,min} \neq 0$ sein. Doch verletzt die marginale Sörung weder die konforme Invaianz, noch ändert sie die Randbedingungen. Daher muß, wenn sich h_{min} ändert, auch die zentrale Ladung modifiziert werden, so daß die effektive zentrale Ladung, die eben gemäß (3.15) bzw. (3.16) den Effekt der Randbedingungen mißt, konstant bleibt. Wir können also allgemein eine marginale Deformation als eine Störung definieren, unter der sich c_{eff} nicht ändert. Dies rechtfertigt im Nachhinein auch unsere oben angewandte Vorgehensweise bei der Einteilung des $\mathcal{B}$(TÆC).
Die integrablen marginalen Störungen in der Umgebung einer generische TÆC spannen lokal eine Mannigfaltigkeit der mit dieser TÆC verbundenen Theorien auf, die durch die g_i parametrisiert ist. Es mag auch Punkte geben, an denen sich die Anzahl der integrablen Störungen ändert. Punkte, an denen sie sich erhöht, heißen *multikritisch*. Im allgemeinen sind multikritische Punkte die Schnittpunkte zweier oder mehrerer Untermannigfaltigkeiten des TÆC-Raumes. Wenn aber an einem solchen Punkt die TÆC eine erweiterte Symmetrie besitzt, die die Anzahl der unabhängigen Deformationen reduziert, liegt eine redundante Parametrisierung des Raumes mit einer Orbifold-Singularität am multikritischen Punkt vor. Wir haben es also mit Varietäten anstatt mit reinen Mannigfaltigkeiten zu tun.

[xxix] Relevante Deformationen entlang des Renormierungsgruppen-Flußes führen im allgemeinen über nicht konforme Theorien und verringern c.
[xxx] In der String-Theorie kann dieser Raum der Theorien als der Modul-Raum der klassischen Lösungen der String-Bewegungsgleichungen angesehen werden – daher der Name.

5.2 Modul-Raum zu effektiver zentrale Ladung c = 1

Da wir uns von nun an ausschließlich auf den Fall $c_{eff} = 1$ beschränken, schreiben wir im folgenden statt $\mathcal{M}(1)$ einfach $\mathcal{M}$ für den Modul-Raum, statt $M(1), M'(1)$ einfach M, M' für seine unitäre und seine nicht unitäre Komponente.
Betrachten wir nun den Raum aller nicht unitären regulären rationalen Theorien, $\mathcal{R}(M')$. Sein Aussehen, eine Approximation zeigt Figur V.2, ist äußerst überraschend. Es stellen sich natürlicherweise sofort folgende Fragen:
• Ist die Menge $\mathcal{R}(M')$ dicht in $(\mathbb{R}_+)^2$?
• Gibt es eine (einfache) Erklärung für die zahllosen quadratischen Kurven, aus denen $\mathcal{R}(M')$ zu bestehen scheint?
• Sind die Punkte von $\mathcal{R}(M')$ rationale Punkte in einer Mannigfaltigkeit von generisch nicht rationalen TÆC, oder sind sie isolierte Punkte?
• Was kann man über das Aussehen des Raumes aller TÆC für $c_{eff} > 1$ aussagen?
Die letzte Frage liegt leider noch weitab ihrer Lösbarkeit, die übrigen werden wir jedoch im folgenden beantworten.
Wir erinnern noch einmal an unser Ergebnis aus dem vorhergehenden Kapitel. Dort hatten wir für die bosonischen Modelle den folgenden Typ von Zustandssumme abgeleitet,

$$Z_{bos}[x, y] = \frac{1}{2}\left(Z[x] + Z[y]\right) , \tag{4.25}$$

wobei x, y rationale Zahlen seien. Weiter konnten wir in Satz $-493/19$ Bedingungen an x, y formulieren, die die Existenz rationaler Modelle mit dieser Zustandssumme implizierten. Für die bosonischen Modelle wollen wir diese Bedingugen auf eine etwas andere Art formulieren:

Korollar 7/10. *Seien $p, q, p', q' \in \mathbb{Z}_+$. Genau dann wenn*

$$\det \begin{pmatrix} p' & p \\ q & q' \end{pmatrix} \in \{1, 4\} \tag{5.3}$$

existieren TÆCR mit $c = 1 - 24pq$ und Zustandssumme $Z_{bos}[p/q, p'/q'] = (Z[p/q] + Z[p'/q'])/2$, die bis auf Dualität eindeutig ist. ∎

Im folgenden werden wir uns auf den Fall der $\mathcal{W}(2, 3k)$-Theorien konzentrieren, i.e. $p'q' - pq = 1$ im obigen Korollar, da die $\mathcal{W}(2, 8k)$-Theorien als deren $\mathbb{Z}_2$-Orbifolds verstanden werden können.
Der Modul-Raum der unitären Theorien mit $c = 1$ wurde bereits von P. Ginsparg [457] betrachtet. Die zusammenhängende Komponente wird durch zwei Typen von Theorien aufgespannt, den Gauss-Modellen zum kompaktifizierenden Radius R mit Zustandssumme $Z[2R^2] = (Z[2R^2] + Z[2R^2])/2 = Z_{bos}[2R^2, 2R^2]$ und deren $\mathbb{Z}_2$-Orbifolds[xxxi] mit Zustandssumme $Z_{orb}[2R^2] = (Z[2R^2] + 2Z[4] - Z[1])/2$. Diese beiden Typen spannen je eindimensionale Untermannigfaltigkeiten des Modul-Raumes auf, die sich im multikritischen Punkt[xxxii] $R = 1/\sqrt{2}$ treffen, wo offensichtlich $Z[1] = Z_{orb}[1]$ ist. Nach Satz $-375/17$ gibt es noch drei exzeptionelle Theorien, die durch Ausmodulieren der exzeptionellen diskreten Symmetrien aus SU(2) entstehen, die aber keine marginalen Deformationen zulassen. Das liegt daran, daß die marginale Störung den Kompaktifizierungsradius verändert, dieser aber durch die exzeptionelle Symmetrie sozusagen eingefroren wird.
Dieses wohlbekannte Bild des Modul-Raumes müssen wir nun in der in Figur V.1 angedeuteten Weise modifizieren, wenn wir die nicht unitären Theorien einbeziehen wollen. Zunächst ist klar, daß wir eine weitere Dimension hinzunehmen müssen, da die nicht unitären Theorien zwei Radien involvieren. Der Modul-Raum ist also, bis auf die drei exzeptionellen Punkte, dreidimensional. Die

[xxxi] die Linie des sogenannten kritischen Ashkin-Teller-Modells
[xxxii] der sogenannte Kosterlitz-Thouless-Übergangspunkt

Diagonale in der (R_1, R_2)-Ebene ist die Linie der Unitarität. Die Punkte mit $2R_{circ}^2$ oder $2R_{orb}^2 \in \mathbb{Q}_+$ gehören nach Satz $-375/17$ zu rationalen unitären $c = 1$ Theorien, die Punkte in der (R_1, R_2)-Ebene, die Korollar $7/10$ erfüllen, repräsentieren rationale nicht unitäre Theorien.

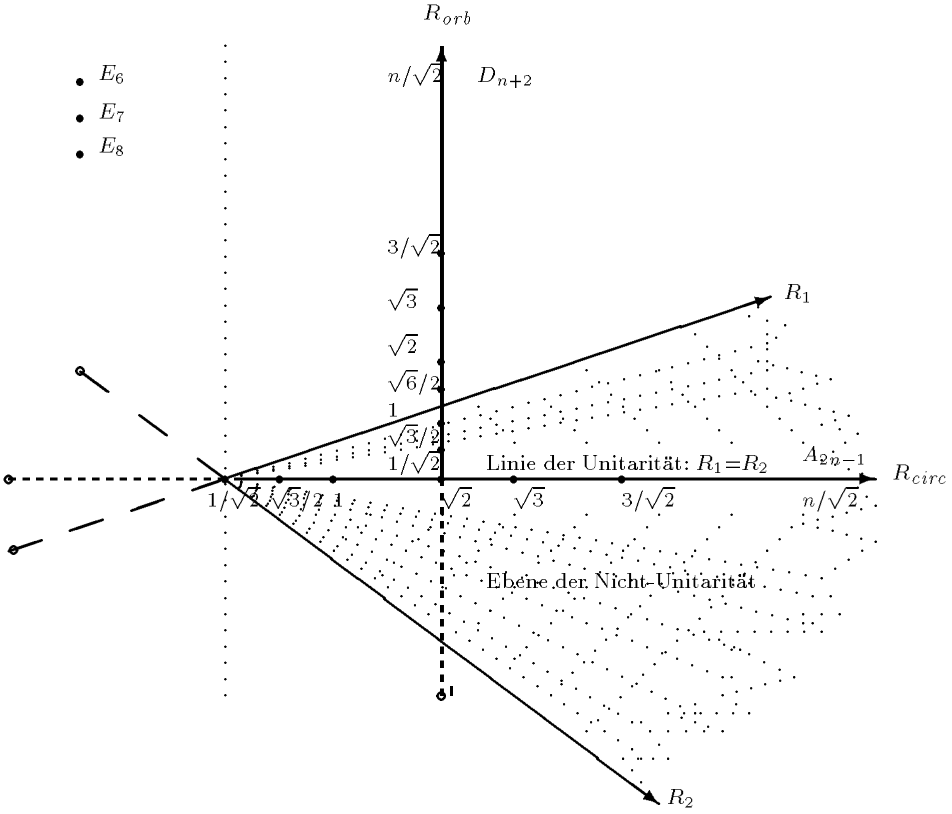


Fig. V.1. Überblick über die $c_{eff} = 1$ Modelle. Die diagonale Achse in der (R_1, R_2)-Ebene repräsentiert Kompaktifizierungen auf einem Kreis S^1 mit Radius R_{circ}, die verticale Achse repräsentiert Kompaktifizierungen auf dem Orbifold $S^1/\mathbb{Z}_2$ mit Radius R_{orb}. Die gestrichelten Regionen dieser Linien sind durch die Dualität $R \leftrightarrow 1/2R$ bestimmt. Die nicht unitären Modelle liegen in der aufgeschnittenen Ebene $\{R_1, R_2 | R_1 \neq R_2\}$.

Bei den unitären $c = 1$ TÆC existieren die wohlbekannten marginalen Flüsse, die die TÆCR miteinander über irrationale Theorien verbinden. Dies ist für die nicht unitären Theorien mit $c_{eff} = 1$ nicht länger wahr. Vielmehr gilt

Proposition -13/14. *Es gibt keine marginalen Flüsse zwischen nicht unitären TÆCR mit* $c_{eff} = 1$.

Dies folgt, da das einzige existierende Feld ψ mit Dimension $(h, \bar{h}) = (1, 1)$, das den marginalen Fluß erzeugen könnte, nicht verschwindende Selbstkopplung $C_{\psi\psi}^{\psi}$ hat. Diese Feld ψ gehört nämlich zu der $\mathcal{W}$-konformen Familie zum SPA mit kleinstem Virasoro-Eigenwert, (h_{min}, h_{min}), deren Selbst-Fusions-Koeffizient nicht verschwindet, wie man leicht aus Proposition $-117/11$ entnimmt. G. Moore und N. Seiberg [829] haben aber gezeigt, daß für Theorien mit maximal erweiterter Symmetrie-Algebra, wie es bei uns der Fall ist, das Nichtverschwinden des Selbst-Fusions-Koeffizienten einer $\mathcal{W}$-konformen Familie das Nichtverschwinden der Selbstkopplung aller Virasoro-primären Felder, die in dieser Familie enthalten sind, impliziert, da letztere proportional zu $C_{min,min}^{min}$ sein müssen. ■

Wir wollen nun einen genaueren Blick auf die (R_1, R_2)-Ebene werfen. Rationale nicht unitäre Theorien werden durch eine gewisse Teilmenge $\mathcal{R}(M') \subset \{x, y \in \mathbb{Q}_+ | x \neq y\}$ dargestellt. Im folgenden werden wir dabei nicht immer davon ausgehen, daß rationale Zahlen als vollständig gekürzte Brüche vorliegen. Eine Folgerung von Korollar 7/10 ist, daß die Punkte in $\mathcal{R}(M')$ mit den Elementen von PSL(2,$\mathbb{Z}$) in Korrespondenz stehen. Ferner sehen wir sofort, daß die Linie der Unitarität, $R_1 = R_2$, zu Matrizen mit Determinante null korrespondieret[xxxiii]. Zwar existieren nicht unitäre Theorien beliebig nahe der Linie der Unitarität, aber will man eine rationale Zahl durch zwei andere so approximieren, daß sie die Bedingung (5.3) erfüllen, werden ihre Nenner beständig anwachsen und damit die zentrale Ladung immer kleiner machen. Das bedeutet, daß der Grad der Nicht-Unitarität in Richtung zur Diagonale zunimmt. In Figur V.2 haben wir $\mathcal{R}(M')$, berechnet bis zu maximalen Nennern von 100 000, geplottet.

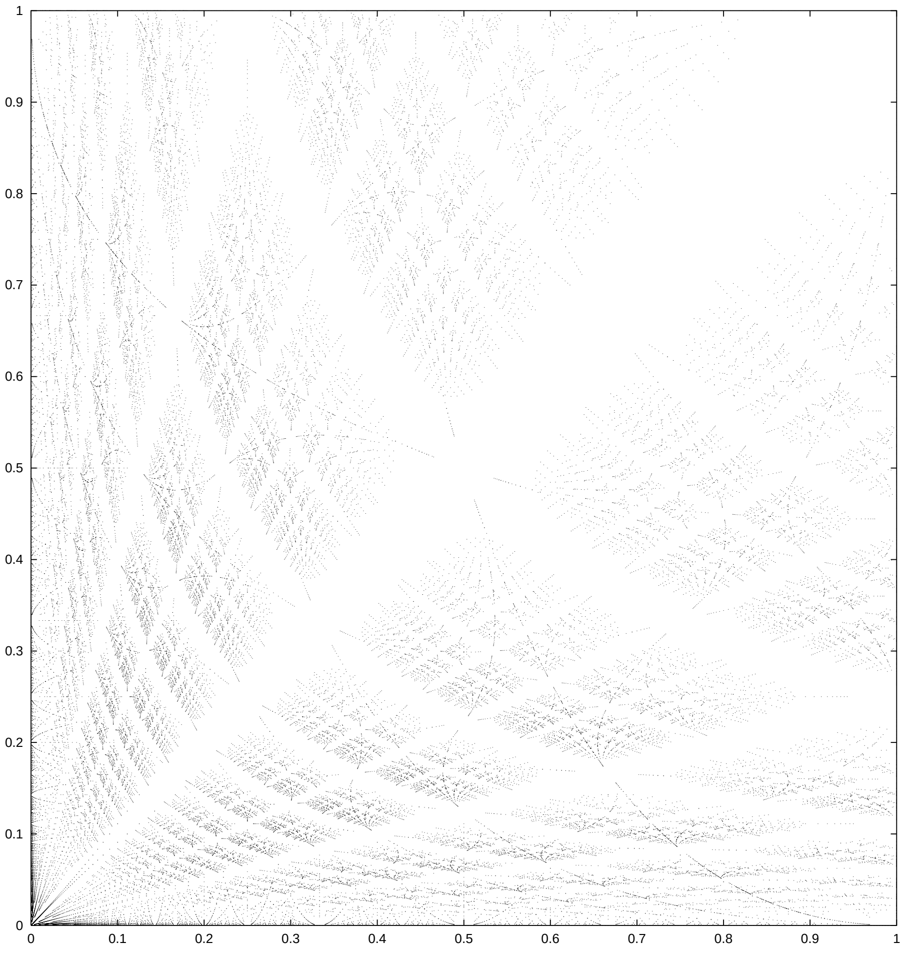


Fig. V.2. Der Modul-Raum der nicht unitären Theorien mit $c_{eff} = 1$. Die x-Achse ist $2R_1^2 = p/q$, die y-Achse ist $2R_2^2 = p'/q'$, beide im Bereich $[0, 1]$. Geplottet wurden Punkte mit Nennern $q, q' \leq 100\,000$. Punkte außerhalb des gezeigten Bereichs erhält man durch Dualität $p/q \mapsto q/p$, $p'/q' \mapsto q'/p'$.

Man beachte, daß insbesondere nahe der Diagonale die Dichte der Punkte recht gering ist, wie es nach obenstehender Bemerkung zu erwarten war. Aufgrund der Dualitätseigenschaften der

[xxxiii] Genauer gesagt, korrespondiert nur eine kleine Teilmenge der Matrizen mit verschwindender Determinante zu $c = 1$ Theorien. Die anderen Matrizen mit Determinante null gehören zu den minimalen Modellen. Zum Beispiel entspricht die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & p \\ q & pq \end{pmatrix}$ der Zustandssumme $Z = (Z[1/pq] - Z[p/q])/2$ des (A_{p-1}, A_{q-1})-Modells. Andere Paare von Faktorisierungen von pq ergeben nicht diagonale Zustandssummen nebst Automorphismen der Fusions-Regeln.

einzelnen Summanden von Gauss-Zustandssummen können wir uns auf die Region $[0,1] \times [0,1]$ in der $(2R_1^2, 2R_2^2)$-Ebene beschränken. Wir wollen eine erste Behauptung über $\mathcal{R}(M')$ formulieren:

PROPOSITION -19/6. *Die Menge* $\Gamma \equiv \mathcal{R}(M') \cap \{(x,y)\,|\,0 \leq y < x \leq 1\}$ *ist ein Fundamentalbereich von allen nicht unitären regulären TÆCR mit* $c_{\mathit{eff}} = 1$. $\mathcal{R}(M')$ *ist in eins-zu-eins Korrespondenz zu der Gruppe* PSL(2,$\mathbb{Z}$), *die auf* $\mathcal{R}(M')$ *operiert. Die Korrespondenz zu* Γ *ist durch die folgenden Identifizierungen definiert: Sei* $A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. *Dann ist* A *identifiziert mit* A^T, A^{-1}, *und* $(A^T)^{-1}$ *über Dualität. Die Symmetrie unter Vertauschen von* R_1 *und* R_2 *ergibt die Identifizierungen* $A \sim SA$ *wobei* $S \equiv \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, *i.e. wir schränken* A *auf Matrizen mit nur positiven ganzzahligen Einträgen ein. Diese Teilmenge von* PSL(2,$\mathbb{Z}$) *formt eine Semi-Gruppe, die auf* Γ *operiert.*

Der Beweis dieser Behauptung ist einfach. Γ erhält man durch Identifizieren von Theorien, die aufgrund der Dualitätseigenschaft der U(1)-Zustandssumme ohnehin äquivalent sind. Da weiterhin das Vertauschen der Radii in (4.25) die Zustandssumme Z_{bos} nicht ändert, ordnen wir sie o.B.d.A. so, daß $0 \leq 2R_1^2 < 2R_2^2 \leq 1$ ist. Die Abbildung von der Modul-Gruppe PSL(2,$\mathbb{Z}$) auf $\mathcal{R}(M')$ ist einfach gegeben durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(\left|\frac{a}{d}\right|, \left|\frac{b}{c}\right| \right) . \tag{5.4}$$

PSL(2,$\mathbb{Z}$) wird vollständig durch zwei Generatoren erzeugt, $S \equiv \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $T \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, zuzüglich der Relationen $S^2 = (ST)^3 = \mathbb{1}$. Zusammen mit (5.4) gibt uns das einen sehr schnellen Algorithmus, um Bilder wie Figur V.2 von $\mathcal{R}(M')$ zu erzeugen. Die Aktion von S reduziert sich auf ein Vertauschen der Radii R_1 und R_2 was die Zustandssumme invariant läßt. Die Menge Γ erhalten wir auf folgende Weise: Sei $x = |a/d|$, $y = |c/d|$ mit (5.4) berechnet für irgendein Element von PSL(2,$\mathbb{Z}$), i.e. für jedes erlaubte Wort in S, T. Dann ist der korrespondierende Punkt in Γ gegeben durch $(\max\{\min\{x, 1/x\}, \min\{y, 1/y\}\}, \min\{\min\{x, 1/x\}, \min\{y, 1/y\}\})$. Soweit existieren immer genau zwei Elemente von PSL(2,$\mathbb{Z}$), die zu einunddemselben Punkt in $\mathcal{R}(M')$ korrespondieren. Sie unterscheiden sich durch zwei Vorzeichen, so daß o.B.d.A. $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ -c & d \end{smallmatrix}\right)$ denselben Punkt ergeben. Wir definieren, daß Matrizen mit negativen ganzzahligen Einträgen zu den $\mathbb{Z}_2$-Orbifolds korrespondieren sollen (genauer gesagt sollte man alle Matrixelemente noch mit 2 multiplizieren, um Determinante 4 zu erhalten). Dies gibt die gewünschte eins-zu-eins Korrespondenz. ■

5.3 Seltsame Strukturen & Quadratische Kurven

Figur V.2 zeigt eine überraschend seltsame und komplexe Struktur der Menge $\mathcal{R}(M')$. Zunächst fällt ein "Netz von Kurven" auf. Wir werden später sehen, daß die Struktur von $\mathcal{R}(M')$ auch zu Kettenbrüchen in Beziehung steht. Die Selbstähnlichkeit von $\mathcal{R}(M')$ ist nicht ganz trivial. Die Menge scheint durch ein Netz von Ursprungsgeraden und symmetrischen Hyperbeln extrem geringer Dichte in "Rauten" eingeteilt zu sein. Die Selbstähnlichkeit der Rauten hat zwei Gründe. Zum einen Reskalieren $x \mapsto \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{Q}_+$, i.e. Bewegung entlang der Ursprungsgeraden, und zum anderen Bewegungen entlang der Hyperbeln, i.e. mittels der Abbildung $x \mapsto \alpha\frac{1}{x}$. Die Selbstähnlichkeit ist allerdings nicht vollkommen, zumindest bei der sehr groben Approximation von $\mathcal{R}(M')$, wie sie in Figure V.2 gezeigt ist. Die "Kurven", die durch eine Raute gehen, können sich in Anzahl und Form unterscheiden, die grobe Struktur ist dieselbe. In der Tat formt $\mathcal{R}(M')$ einen sogenannten Multifraktal. Ein Multifraktal hat keinen wohldefinierten Skalenfaktor α, mit dem ein Teil von ihm das Ganze reproduziert. Stattdessen gibt es mehrere verschiedene Skalenfaktoren α_i, unter denen jeweils bestimmte Teilmengen selbstähnlich sind. In unserem Fall definiert jede Primzahl p eine solche Skala und $\mathcal{R}(M')$ ist somit eine Vereinigung von unendlich vielen Fraktalen.
Man mag die Tiefe der Approximation durch die maximale Länge der Worte in S, T, i.e. die Anzahl der Generatoren nach Herausteilen der Relationen $S^2 = (ST)^3 = \mathbb{1}$, definieren, die man zum

Erzeugen eines Bildes von $\mathcal{R}(M')$ verwendet hat. Wir wollen daher im folgenden annehmen, daß die Elemente von PSL(2,$\mathbb{Z}$) jeweils durch Worte minimaler Länge repräsentiert sind. Da T durch Translation entweder des Zählers oder des Nenners von x und y agiert, aber S lediglich x und y vertauscht, sehen wir, daß jedes Auftreten von S in einem Wort $A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ einen Knoten markiert, wo die Bewegung eines Punktes von $\mathcal{R}(M')$ unter der Operation von T die Richtung ändert. Die Selbstähnlichkeit wird unter anderem dadurch bewirkt, da dies die baumartige Struktur erzeugt, i.e. daß die Kurven von Bündelpunkten auszugehen scheinen. Da die Aktion von S allein aber das Bild nicht ändert, ist die maximale Anzahl der T-Generatoren in einem Wort ein besseres Maß für die Approximationstiefe.
Wir wollen nun die Kurven diskutieren. Sei $(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'})$ ein Punkt in $\mathcal{R}(M')$. Wenn p, q coprim sind, dann gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ so daß wir

$$\frac{p'}{q'} = \frac{(p')^2}{p'q'} = \frac{(ap+bq)^2}{pq \pm 1} = \frac{(ap+bq)^2}{pq}\left(1 \mp \frac{1}{pq \pm 1}\right) \tag{5.5}$$

schreiben können. Wir sehen, daß für $p, q \gg 1$ die Abweichung von einfachen algebraischen Kurven der Form $y = a^2x + 2ab + b^2\frac{1}{x}$ sehr klein wird. Auf der anderen Seite liegt jeder Punkt von $\mathcal{R}(M')$ (mehr oder weniger) nahe zu solch einer Kurve. Allgemeiner gilt, daß jeder Punkt $\mathcal{R}(M')$ nahe zu mindestens einer Kurve liegt, deren Graph die Form $(x, \alpha x + \beta\frac{1}{x} + \gamma)$ oder $(\alpha y + \beta\frac{1}{y} + \gamma, y)$ hat, wobei $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ sind. Um dies zu sehen, schreiben wir

$$\begin{aligned} \frac{p'}{q'} &= \frac{(ap+bq)(cp+dq)}{epq+f} \\ &= \left(ac\frac{p}{q} + bd\frac{q}{p} + (ad+bc)\right)\left(e + \frac{f}{pq}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{5.6}$$

oder entsprechend mit $p, q \leftrightarrow p', q'$, wobei $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ sind. Sei nun $p, q \gg f$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit sehr hoch, daß der Zähler den Nenner teilt. Insbesondere für den Fall, daß a, b oder c, d coprim sind, gibt es unendlich viele p, q, so daß $(ap + bq)$ oder $(cp + dq)$ Teiler von $pq + f$ für kleine f sind. Wir haben also gezeigt

Proposition -125/22. *Sei (x, y) ein beliebiger Punkt der Menge $\mathcal{R}(M')$. Dann gibt es Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$, so daß $y \approx \alpha x + \beta\frac{1}{x} + \gamma$ (oder vice versa) bis zur Ordnung von schlimmstenfalls $\frac{1}{pq}$. Insbesondere gibt es immer eine Lösung der Form $y \approx a^2x + 2ab + b^2\frac{1}{x}$ wenn x als eine rationale Zahl mit teilerfremden Zähler und Nenner gegeben ist*[xxxiv]. ∎

Im Sinne dieser Proposition können wir $\mathcal{R}(M')$ als die Vereinigung einer unendlichen Menge approximierter Kurven ansehen, die die netzartige Struktur von Figur V.2 formen. Die speziellen Kurven aus dem zweiten Teil der Proposition $-125/22$ sind diejenigen, die am schnellsten die Punkte mit wachsender Approximationstiefe sammeln. Anders ausgedrückt sind es diejenigen mit der höchsten Wahrscheinlichkeit, daß in ihrer Nähe Punkte von $\mathcal{R}(M')$ liegen. Nicht alle Teile des Graphen einer bestimmten Kurve haben dieselbe Dichte gesammelter Punkte. Dies liegt an der ungleichmäßigen Verteilung der Wahrscheinlichkeit, daß Paare von rationalen Zahlen mit maximal beschränktem Nenner entlang einer solchen Kurve liegen. Letzteres wiederum liegt an der ungleichmäßig verteilten Wahrscheinlichkeit für die Teilbarkeit von Zahlen. Die Wahrscheinlichkeit für die Teilbarkeit zweier Zahlen ist bekanntermaßen extrem irregulär und erfüllt den Satz vom zentralen Limes nur in der Mittelung über alle Zahlen, i.e. für den Fall beliebig großer Nenner. Man macht sich leicht klar, daß viele Regionen des Modul-Raumes nur schlecht von Zahlen-Paaren mit kleinen Nennern erreicht werden, was die Möglichkeiten weiter reduziert. Geht eine Kurve durch einen solchen Bereich, wird sie dort entsprechend dünn besetzt sein.

[xxxiv] In diesem Fall ist $a, b \in \mathbb{Z}$. Wenn der größte gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner der rationalen Zahl x eine Zahl $m > 1$ ist, dann sind a, b rationale Zahlen über dem Modulus m.

5.4 Dichtheit in M'

Die interessanteste Frage dürfte es wohl sein, ob die Menge $\mathcal{R}(M')$ nicht unitärer TÆCR dicht in der Menge M' liegt. Um diese Frage beantworten zu können, benötigen wir einige Vorbereitung, die aber die Beziehung von $\mathcal{R}(M')$ zu der Modul-Gruppe und den Kettenbrüchen erhellt.
Wir betrachten die Abbildung (siehe Gleichung (5.4))

$$\begin{aligned} Q : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{c}\right) . \end{aligned} \tag{5.7}$$

Weiter definieren wir $U_n = (ST^n)^t = \binom{1\ 0}{n\ 1}\binom{0\ 1}{-1\ 0} = \binom{0\ 1}{-1\ n}$. Dann kann jedes $A \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ geschrieben werden als $A = U_{n_k} \dots U_{n_2} U_{n_1} (T^{n_0})^t$. Wir ordenen dem Wort A seine Länge $\ell(A) = \sum_{i=0}^{k} n_i$ zu. Es ist wohlbekannt (siehe jedes beliebiges Buch über Zahlentheorie, zum Beispiel [601]), daß die Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ als Kettenbrüche gegeben sind:

$$\frac{a}{b} = [n_0, n_1, \dots, n_{k-1}] , \tag{5.8}$$

$$\frac{c}{d} = [n_0, n_1, \dots, n_{k-1}, n_k] , \tag{5.9}$$

wobei wir die übliche Notation für Kettenbrüche verwendet haben,

$$[n_0, n_1, n_2, \dots] = n_0 - \cfrac{1}{n_1 - \cfrac{1}{n_2 - \cfrac{1}{\ddots}}} . \tag{5.10}$$

Man beachte, daß jede Zahl $w \in \mathbb{R}$ eine Kettenbruch-Entwicklung besitzt. Nun sei A eine Approximation einer gegebenen Zahl $w \in \mathbb{R}$, die besser als $\varepsilon > 0$ sei, i.e. $|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}| < \varepsilon$. Dann stellt jede Matrix $B = A' \cdot A$, so daß $\ell(A' \cdot A) = \ell(A') + \ell(A)$ ist, eine Approximation von w besser als ε dar. Wir wollen Matrizen B mit dieser Eigenschaft durch $B \succ A$ bezeichnen. Wenn man beachtet, daß $\frac{a/d}{b/c} = \frac{a}{d} \cdot \frac{c}{b} \approx w^2$ ist, sieht man leicht

Proposition -217/26. *Der Orbit aller Matrizen $A' \cdot A \succ A$ unter der Abbildung Q ist beschränkt auf einen bandartigen Bereich um w^2 mit der Weite $\varepsilon' = 2w\varepsilon + \varepsilon^2$. Das Band ist definiert durch die Gleichungen $\frac{x}{y} = \alpha$ oder $xy = \alpha$ where $\alpha \in [w^2 - \varepsilon', w^2 + \varepsilon'] \cup [\frac{1}{w^2} - \varepsilon', \frac{1}{w^2} + \varepsilon']$.* ∎

Figur V.3 zeigt ein Beispiel mit $A = \binom{3\ 2}{11\ 7}$. Diese Matrix ergibt ein $w^2 \approx \frac{14}{33}$ mit einer Genauigkeit von $\varepsilon = \left|\frac{2}{3} - \frac{7}{11}\right| = \frac{1}{33}$. Das Band ist damit auf eine Weite von $\varepsilon' = 2w\varepsilon + \varepsilon^2 \approx 0.04$ beschränkt. Die volle Breite bei $x = 1$ ist dann ungefähr $\frac{2}{25}$. Der "Dreck" außerhalb dieses Bandes, den man in Figur V.3 sieht, rührt vom Algorithmus her, mit dem das Bild erzeugt wurde. Dieser Algorithmus eliminierte nämlich aus Zeitgründen nicht alle Punkte mit Matrizen, deren Länge $\ell(A' \cdot A) < \ell(A') + \ell(A)$ ist.
Im Limes $\varepsilon \to 0$ schrumpft der Orbit auf ein Band infinitesimaler Weite zusammen, da auch $\varepsilon' \to 0$. Daraus folgt, daß das Band durch Abbilden aller Matrizen $B = A' \cdot A \succ A$ auf $\mathbb{R}^2$ via Q dicht ausgefüllt wird, wenn $\varepsilon \to 0$ (wieder $\ell(A' \cdot A) = \ell(A') + \ell(A)$). Dies sehen wir wie folgt: Die Matrizen der ganzen Modul-Gruppe PSL(2,$\mathbb{Z}$) approximieren (via Abbildung Q) jede relle Zahl, wenn die Punkte beispielsweise auf die x-Achse projiziert werden. Sei nun A gegeben (und also auch w). Man betrachte die Menge aller Matrizen $B \succ A$. Diese Menge formt eine abgeschlossene Semi-Gruppe. Nehmen wir nun die komplementäre Semi-Gruppe aller Matrizen B^{-1}. Diese Semi-Gruppe ergibt jeden möglichen w'-Wert, da ja A^{-1} beliebig weit nach links geschoben wird, wenn

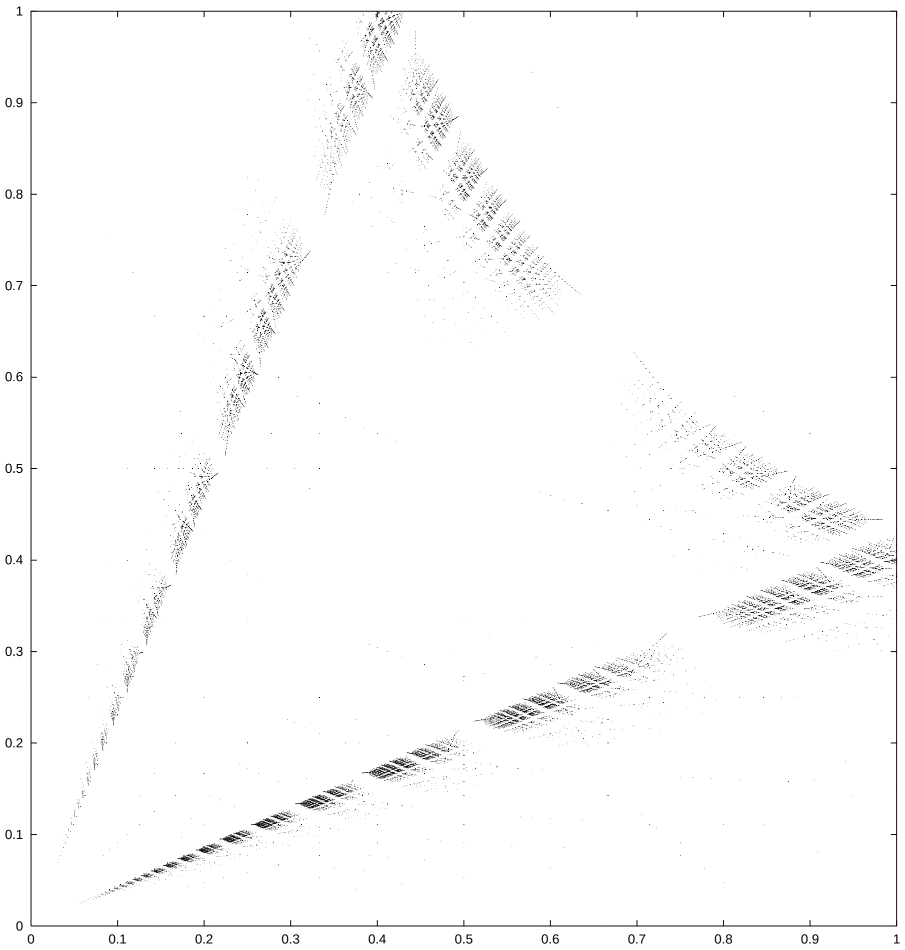


Fig. V.3. Orbit der Matrix $A = \binom{3\ 2}{11\ 7}$ unter der Wirkung von PSL(2,$\mathbb{Z}$) und der Abbildung Q. Der Orbit ist beschränkt auf ein Band der Weite $\varepsilon' \approx 0.04$ um die Steigung $w^2 \approx 0.42$. Geplottet wurden alle Matrizen $A' \cdot A$ mit $\ell(A') \leq 23$.

die Wortlänge $\ell(B^{-1})$ anwächst, und damit immer weniger zum w'-Wert von B^{-1} beitragen kann. Daher approximiert diese in einem gewissen Sinne komplementäre Menge von Matrizen jede relle Zahl unter der Abbildung Q und anschließender Projektion beispielsweise auf die x-Achse. Aufgrund unserer Dualitätsrelationen erhalten wir dann das gewünschte Resultat, daß die ursprüngliche Semi-Gruppe das w-Band dicht ausfüllt. Wir erhalten also

Satz -111/10. *Die Menge $\mathcal{R}(M')$ liegt dicht in $(\mathbb{R}_+)^2$, i.e. die Menge regulärer nicht unitärer TÆCR mit $c_{\mathit{eff}} = 1$ liegt dicht im Modul-Raum aller nicht unitären TÆC mit $c_{\mathit{eff}} = 1$.* ∎

Schließlich wollen wir der Vollständigkeit halber kurz auf die Theorien mit $c = 1 - 24k$, k halb- oder viertelzahlig, eingehen, die wir bisher nicht in diesem Zusammenhang diskutiert haben. Diese Theorien haben kompliziertere Zustandssummen, für die fermionsichen $\mathcal{W}(2,3k)$-Theorien siehe (4.28), die sich als Linerkombinationen bosonischer Zustandssummen (4.25) schreiben lassen.
Die Menge $\mathcal{R}(M'_{ferm})$ für diese fermionischen Theorien ist äquivalent zu unserer Menge $\mathcal{R}(M'_{bos})$ in dem Sinne, daß eine Bijektion zwischen ihnen existiert, gegeben durch Multiplizieren einer Spalte oder Zeile einer Matrix, die zu einem Punkt in $\mathcal{R}(M'_{bos})$ korrespondiert, mit einem Faktor 2. Daß dies tatsächlich eine Bijektion ist, folgt, wenn die diversen Identifizierungen aufgrund von Dualität und Symmetrie unter Radien-Austausch berücksichtigt werden. Ähnliches gilt auch für die Orbifold-Theorien mit $k \in \mathbb{Z}_+ + \frac{1}{4}$.

5.5 Konsequenzen

Wir haben gezeigt, daß die Struktur des Modul-Raumes $\mathcal{M}$ der $c_{eff} = 1$ Theorien hochgradig nicht trivial ist. Die nicht unitären regulären TÆCR formen eine multifraktale aber in der Parameterebene dennoch dichte Menge isolierter Punkte, also alles andere als eine algebraische Varietät oder Orbifold. Dies steht im Gegensatz zu der Vermutung, zumindest die unitären Theorien formten derartige Modul-Räume (wie es für die unitären Theorien mit $c < 1$ tatsächlich der Fall ist). Dies mag ein neues Licht auf die mögliche Struktur des Raumes aller TÆC werfen, $\mathcal{B}(T\AE C)$.
Wir bewiesen weiter, daß die Punkte der Menge regulärer nicht unitärer TÆCR in eins-zu-eins Korrespondenz zu den Elementen der Modul-Gruppe PSL(2,$\mathbb{Z}$) stehen. Wir konstruierten eine Operation von PSL(2,$\mathbb{Z}$) auf $\mathcal{R}(M')$. Darüber hinaus ergab die Approximation der Menge $\mathcal{R}(M')$ bis zu einer bestimmten Tiefe (die zu Kettenbrüchen einer maximalen Länge korrespondiert) eine interessante Struktur von algebraischen, quadratischen Kurven. Wir sind damit in das neuartige Gebiet der arithmetischen Geometrie vorgestoßen. Einmal mehr wird deutlich, daß TÆC auch für scheinbar noch so entlegene Gebiete der Mathematik Relevanz besitzt.
Obwohl diese nicht unitären Theorien höchstwahrscheinlich keine Anwendung in der String-Theorie finden, ist es aber sehr gut möglich, daß sie Phänomene der statistischen Physik beschreiben können, wo Nicht-Unitarität essentiell sein kann. Ein Beispiel dafür ist möglicherweise der fraktionale Quanten-Hall-Effekt (EQFH). Ein Weg, den EQFH zu beschreiben, arbeitet mit Tropfen von Quanten-Flüssigkeiten. Auf dem Rand dieser Tropfen leben TÆC, die notwendig die effektive zentrale Ladung $c_{eff} = 1$ besitzen müssen [379]. Wenn dieser Rand nicht einfach zusammenhängend ist (e.g. der Rand eines Kreisringes), kann es Ladungstransport zwischen den einzelnen Randkomponenten geben. In diesem Fall ist die TÆC, die auf dem Rand lebt, nicht länger unitär. Es ist schwer vorstellbar, daß ein Effekt, wie der EQFH, der spezielle rationale Zahlen selektiert, mit generisch irrationalen TÆC in Beziehung steht. Wenn wir also Rationalität der TÆC fordern, werden wir zwangsläufig auf eine unserer nicht unitären TÆCR mit $c_{eff} = 1$ geführt.
Es ist oft festgestellt worden, daß sich nur EQFH mit fraktionalen Filling-Faktoren ν mit kleinen Nennern experimentell beobachten lassen. Wir wollen hier kurz argumentieren, inwiefern dies natürlich sein kann. Bei unseren Theorien liegen Punkte mit großen Nennern immer nahe Punkten mit wesentlich kleineren Nennern. Wenn ein System gezwungen wird, eine bestimmte Theorie zu realisieren, wird es natürlicherweise diejenige wählen, die weniger stark die Unitarität verletzt und deren Feldinhalt möglichst klein ist (i.e. das System wird die Theorie wählen, deren Zustand tiefster Energie möglichst ähnlich zu einem trivialen Grundzustand ist). Diese Theorien sind in unserem Fall genau die mit kleineren Nennern. Diese "Topologie" unserer Menge $\mathcal{R}(M')$ könnte also sehr gut genau das experimentell beobachtete Verhalten des EFQH erklären. Wir werden am Schluß dieser Arbeit noch detaillierter darauf eingehen, inwiefern sich unsere nicht unitären Theorien mit $c_{eff} = 1$ zur Beschreibung des EQFH eignen.

Thema Secundum
c = 13 - 6(p + 1/p)

Es gibt nun noch eine weitere Klasse von TÆC, deren effektive zentrale Ladung gleich 1 ist. Wir haben sie in Satz $-667/8$ als logarithmische TÆC bezeichnet. Sie weist mehrere Besonderheiten auf. Zunächst erweckt die zentrale Ladung $c_{p,1} = 1 - 6\frac{(1-p)^2)}{p}$ den Eindruck, als handele es sich um minimale Modelle. Allerdings versagt die Charakter-Formel von Roccha-Caridi (siehe Proposition $-22/5$) gerade in dem Fall, wo p oder q gleich 1 werden. Es ist auch bekannt, daß für diese zentralen Ladungen die degenerierten Darstellungen lediglich einen singulären Vektor besitzen. Daraus resultiert eine Struktur ganz ähnlich zu den Theorien mit $c = 1 - 24k$, wo erst auf der Ebene der erweiterten Symmetrie-Algebra die Zahl der Darstellungen endlich wurde. In diesem Fall ist die maximal erweiterte Symmetrie-Algebra eine $\mathcal{W}(2, 2p-1, 2p-1, 2p-1)$, die eine $\mathcal{W}(2, 2p-1)$ als Unteralgebra besitzt, im folgenden als symmetrisches Singulett bezeichnet. Analog zu Kapitel IV gibt es auch hier wieder unendlich viele degenerierte Darstellungen mit ganzzahligem konformen Gewicht, gegeben durch

$$h_{2k+1,1} = k^2p + kp - k\,. \tag{6.1}$$

Auch hier korresponiert dazu ein Satz relativ zueinander lokaler, chiraler Vertex-Operatoren. Die Stuktur der degenerierten Darstellungen weist allerdings eine Besonderheit auf. L_0 ist nämlich nicht mehr diagonalisierbar, sondern hat eine Jordan-Normalform mit nicht trivialen Blöcken.
Die Darstellungstheorie dieser Algebren läßt zunächst hoffen, auch hier rationale Theorien zu finden. Für die Singulett-Algebra ist dies nicht der Fall. Die Triplett-Algebra jedoch hat nahezu die Struktur eines rationalen Modells. Sie besitzt lediglich endlich viele Darstellungen, deren Charaktere eine Darstellung der Modul-Gruppe aufspannen. Allerdings sind einige der Axiome für Rationalität nicht weiter gültig. So ist die T-Matrix nicht mehr diagonal, und es treten in den q-Potenzreihen der Charactere auch $\log q$-Terme auf. Dies sind Konsequenzen aus der Tatsache, daß bei diesen

Theorien auch Felder auftreten, deren Zweipunktfunktionen logarithmisch divergieren (anstatt mit einer bestimmten Potenz, die das konforme Gewicht festlegt). Wir haben es also mit logarithmischen Theorien zu tun und müssen nun auf die im Præludium dargestellten Verallgemeinerungen zurückgreifen.
Mit der nun folgenden Behandlung der logarithmischen $c_{\mathit{eff}=1}$ Theorien sind dann alle Möglichkeiten ausgeschöpft, die nach Satz $-667/8$ und Proposition $-350/13$ in Betracht kommen. Wir dürfen daher die Klassifikation der rationalen Theorien mit $c_{\mathit{eff}} \leq 1$ damit als abgeschlossen betrachten. Da sich unsere Resultate problemlos auf den supersymmetrischen Fall mit $N = 1$ übertragen – wenngleich dies hier nicht explizit ausgeführt wird – können wir darüber hinaus sagen, daß nun alle rationalen Theorien mit $c_{\mathit{eff}} \leq \frac{3}{2}$ verstanden und klassifiziert sind. Der Vollständigkeit halber werden wir kurz auf die A-D-E-Klassifikation der minimalen Modelle nach A. Cappelli, C. Itzykson und J.-B. Zuber [151] eingehen und die sich daraus ergebenden Möglichkeiten erweiterter Symmetrie-Algebren angeben.

6.1 Die chiralen Algebren

In einer Arbeit von H.G. Kausch [677] wurde die Möglichkeit untersucht, die Virasoro-Algebra um ein Multiplett von Felder gleicher Dimension zu erweitern. Neben einigen sporadischen Lösungen fand sich dabei eine Serie von Algebren, die durch ein Triplett (oder auch Singulett) von Feldern ungerader Dimension erweitert sind, das eine SO(3)-Struktur aufweist. Die EXPO ist

$$W^{(j)}(z)W^{(k)}(\zeta) = \frac{c}{\Delta}\delta^{jk}\frac{1}{(z-\zeta)^{2\Delta}} + C_{WWW}i\varepsilon^{jkl}\frac{W^{(l)}(\zeta)}{(z-\zeta)^{\Delta}} + \mathit{descendante\ Felder}\,, \tag{6.2}$$

wobei $c = c_{p,1} = 1 - 6\frac{(p-1)^2}{p}$ und $\Delta = 2p-1$ ist[xxxv]. Dies lieferte letztlich den Anstoß, bei dem noch verbliebenen Fall (i.2) von Satz $-667/8$ nach rationalen Modellen erweiterter Symmetrie-Algebren zu suchen, zumal schon länger bekannt war, daß die Modelle mit $c = c_{p,1}$ die effektive zentrale Ladung eins besitzen. Diese Modelle, besonders $c = -2$, spielen nämlich bei der Behandlung von (zweidimensionalen) Polymeren und der Theorie sich selbst vermeidender Wege eine große Rolle [251], entzogen sich aber bis jetzt einem genauen Verständnis ihrer Darstellungstheorie. Kürzlich erst trat die TÆC $\mathcal{W}(2,3)$ bei $c = -2$ auch beim Phänomen der sogenannten vereinheitlichenden $\mathcal{W}$-Algebren auf [71].
Mit einer Freie-Feld-Konstruktion wie in Abschnitt IV.1 bzw. II.8 sehen wir, daß die degenerierten Felder konforme Gewichte $h_{m,n} = \frac{\alpha_{m,n}^2}{4} + \frac{c_{p,1}-1}{24}$ haben, wobei $\alpha_{m,n} = m\sqrt{p} - n\sqrt{p}^{-1}$ ist. Der Fundamentalbereich der minimalen Modelle ist hier allerdings leer: $\{m,n | 1 \leq m < 1,\, 1 \leq n < p\} = \emptyset$. Wir können aber o.B.d.A. immer die Label (m,n) auf den Bereich $0 < m, 0 < n \leq p$ reduzieren, da $\alpha_{m,n} = -\alpha_{-m,-n}$ und $\alpha_{m,n} = \alpha_{m+1,n+p}$ ist. Ferner erhalten wir abstrakte Fusions-Regeln, die durch die Bedingungen gegeben werden, unter denen wohldefinierte chirale Vertexoperatoren existieren.

Proposition 4/5. *Sei $c = 13 - 6(p + p^{-1})$ mit $p \in \mathbb{N}$. Dann existieren wohldefinierte chirale Vertexoperatoren für Tripel von Virasoro-RPA zu $(h_{m_1,n_1}, h_{m_2,n_2}, h_{m_3,n_3})$ mit $0 < m_i$ und $0 < n_i \leq p$ genau dann wenn $|m_1 - m_2| < m_3 < m_1 + m_2$ und $|n_1 - n2| < n_3 \leq \min(p, n_1 + n_2 - 1)$ ist, und ferner $m_1 + m_2 + m_3 - 1 \equiv n_1 + n_2 + n_3 - 1 \equiv 0 \bmod 2$ gilt.* ■

Besondere Bedeutung haben die Schirm-Ladungen. Mit den Notationen aus Abschnitt II.8 ist die eine gegeben durch

$$Q = \int_{\Omega_1} \frac{dz}{2\pi i} V_{\alpha_+}(z)\,.$$

[xxxv] Bei der Singulett-Version entfällt der Term proportional zum Feld W.

Sie besitzt auf den Fock-Räumen $\mathcal{F}_{m,n}$ triviale Monodromie und ist daher selbst ein wohldefinierter chiraler lokaler Vertexoperator $Q : \mathcal{F}_{m,n} \to \mathcal{F}_{m-2,n}$. Diese Schirm-Ladung ist es nämlich, die die nicht triviale Multiplett-Struktur der chiralen Felder bewirkt. Wir haben $Q^m = 0$ auf $\mathcal{F}_{m,n}$. Die andere Schirm-Ladung (zur "Potenz" k) ist

$$\tilde{Q}^k = \int_{\Omega_k} \frac{dz_1}{2\pi i} \dots \frac{dz_k}{2\pi i} V_{\alpha_-}(z_1) \dots V_{\alpha_-}(z_k)\,,$$

wobei der Integrationsweg radial geordnet $|z_1| > \dots > |z_k|$ ist und den Ursprung einschließt. Sie ist auf $\mathcal{F}_{m,n}$ genau dann wohldefiniert, wenn $0 < k = n < p$ ist. $\tilde{Q}^p$ verschwindet auf $\mathcal{F}_{m,p}$ identisch. Die BRST-Identität ist $\tilde{Q}^{p-n}\tilde{Q}^n = 0$, so daß wir die in Satz −667/8, Fall (i.2), angegebene Einbettungsstruktur vermittels der exakten Sequenz

$$\dots \xrightarrow{\tilde{Q}^{p-n}} \mathcal{F}_{m-2,n} \xrightarrow{\tilde{Q}^{n}} \mathcal{F}_{m-1,p-n} \xrightarrow{\tilde{Q}^{p-n}} \mathcal{F}_{m,n} \xrightarrow{\tilde{Q}^{n}} \mathcal{F}_{m+1,p-n} \xrightarrow{\tilde{Q}^{p-n}} \mathcal{F}_{m+2,n} \xrightarrow{\tilde{Q}^{n}} \dots$$

erhalten. Die Virasoro-Module sind dann durch $\mathcal{H}_{m,n} = \ker_{\mathcal{F}_{m,n}} \tilde{Q}^n$ gegeben. Die Felder $\phi_{2k+1,1}, k \in \mathbb{N}$ haben alle eine ganzzahlige Dimension, $h_{2k+1,1} = k^2 p + kp - k$, so daß wir die lokale chirale Algebra erweitern können. In der Tat kann man mit den abstrakten Fusions-Regeln aus Proposition 4/5 leicht sehen, daß eine Algebra schließt, in der nur das Feld $\phi_{3,1}$ hinzugenommen wird, da die Dimensionen weiterer Felder zu groß werden, als daß sie im singulären Teil der EXPO noch auftreten können. Die Multiplett-Struktur erhalten wir durch sukzessives Anwenden von Q auf das zusätzliche Feld, $W^{(j)} = Q^j \phi_{3,1}$. Dies ergibt in der Tat drei Felder mit SO(3)-Struktur [677] und somit eine $\mathcal{W}(2, 2p-1, 2p-1, 2p-1)$.

Mit der oben angedeuteten BRST-Struktur erhalten wir genau $2p$ (reguläre) Darstellungen der erweiterten chiralen Algebra, indem wir die durch Q erzeugten Multipletts hinzunehmen[xxxvi]. Formal können wir diese $\mathcal{W}$-Module schreiben als

$$\mathcal{H}^{\mathcal{W}}_{n,+} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \bigoplus_{m=0}^{2j-1} Q^m \mathcal{H}_{2j+1,n}\,, \tag{6.3}$$

$$\mathcal{H}^{\mathcal{W}}_{n,-} = \bigoplus_{j=1}^{\infty} \bigoplus_{m=0}^{2j-2} Q^m \mathcal{H}_{2j,n}\,, \tag{6.4}$$

mit $1 \leq n \leq p$. Die entsprechenden konformen Gewichte sind $h_{1,n}$ und $h_{2,n}$. Aus naheliegenden Gründen nennen wir die $\mathcal{W}$-Darstellungen zu $h_{1,n}$ Singulett-Darstellungen, und diejenigen zu $h_{2,p}$ Duplett-Darstellungen. Weiter gibt es spezielle Darstellungen, die die Gewichte $h_{0,n}, 1 \leq n < p$, haben. Ihre SPA sind singuläre Vektoren in den Räumen $\mathcal{F}_{1,p-n}$, die jeweils das selbe Tiefstgewicht haben. Die zugehörigen chiralen Vertexoperatoren entarten. Beispielsweise existieren neben dem Vertexoperator zur Identität $p-1$ weitere mit konformen Gewicht null, die gerade $\mathcal{F}_{0,n}$ nach $\mathcal{F}_{1,p-1}$ abbilden. Zwangsläufig sind damit auch die descendanten Felder der Identität entartet, also das Virasorofeld selbst. Dies erzwingt die Existenz von Jordan-Zellen für L_0, i.e. L_0 ist nicht länger diagonalisierbar. Ferner ändern sich dadurch auch die Multiplizitäten in den Virasoro-Modulen. Salopp gesagt haben wir eine p-fach entartete Identität, die – außer auf den RPA zu $h_{1,p}$ und $h_{2,p}$ – eine Multiplizität p in den Charakteren beitragen wird. Dies werden wir explizit in Abschnitt VI.3 sehen. Wir halten fest

Proposition 11/35. *Sei $p \in \mathbb{N}$. Dann existiert zu $c = 13 - 6(p + p^{-1})$ eine $\mathcal{W}(2, 2p-1, 2p-1, 2p-1)$ mit $2p$ regulären irreduziblen RPA, deren Zerlegung in irreduzible Viraosor-RPA durch (6.3) und (6.4) gegeben wird. Die $\mathcal{W}$-Algebra implementiert eine $\mathfrak{su}(2)$-Struktur mit Singulett- und Duplett-Multiplizitäten. Weiter existieren $p-1$ spezielle Darstellungen, deren Einbettungsstruktur zu*

[xxxvi] Die Operatoren Q und $\tilde{Q}^k$ erzeugen vier zweidimensionale Komplexe aus den $\mathcal{F}_{m,n}$, je einen für m gerade und ungerade und jeweils für n generisch oder $n = p$.

Entartungen innerhalb der chiralen Vertexoperator-Algebra führen. Die zugehörige TÆC ist daher logarithmisch. ∎

6.2 Strukturkonstanten

Wir haben in Kapitel IV schon einmal Strukturkonstanten von chiralen lokalen Vertexoperator-Algebren berechnet. Auch für die logarithmischen Theorien ist dies möglich, wenngleich hier sehr sorgfältig gewisse auftretende Singularitäten zu behandeln sind. Zunächst machen wir ganz analog zu Kapitel IV den üblichen Ansatz für die Zerlegung chiraler lokaler Felder in chirale Vertexoperatoren,

$$W^{(n,n')}(z) = \sum_{l,l',m,m'} \mathcal{D}^{(l,l')}_{(n,n')(m,m')} V^{h_{m,m'}}_{h_{l,l'}h_{n,n'}}(\cdot, z)\,, \tag{6.5}$$

wobei die chiralen Vertexoperatoren Abbildungen von $\mathcal{H}_{h_{n,n'}} \mapsto \mathrm{Hom}(\mathcal{H}_{h_{m,m'}}, \mathcal{H}_{h_{l,l'}})$ sind. In unserem Fall haben wir $n' = m' = l' = 1$ und n, m, l ungerade, wobei $h_{2k+1,1}$ durch Gleichung (6.1) gegeben sind. Die für uns relevanten Koeffizienten $\mathcal{D}^{(l,1)}_{(n,1)(m,1)}$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{D}^{(l,1)}_{(n,1)(m,1)}\right)^2 &= c \cdot \frac{h_{l,1}}{h_{n,1}h_{m,1}} \frac{N^{(1,1)}_{(l,1)(l,1)}}{N^{(1,1)}_{(n,1)(n,1)} N^{(1,1)}_{(m,1)(m,1)}} \left(\Delta^l_{n,m}(x)\Delta^1_{1,1}(x')\right)^2, & (6.6)\\
\Delta^l_{n,m}(x) &= (-1)^{\frac{1}{2}(n+m-l-1)} \left(\frac{[n]_x[m]_x[l]_x}{[1]_x}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \prod_{j=(l+n-m+1)/2}^{n-1} [j]_x \prod_{j=(m+n-l+1)/2}^{n-1} [j]_x \prod_{j=(l+m-n+1)/2}^{(l+m+n-1)/2} \frac{1}{[j]_x}\,. & (6.7)
\end{aligned}$$

Wir erinnern daran, daß die Klammersymbole definiert sind als $[j]_x = x^{j/2} - x^{-j/2}$ mit $x = \exp(2\pi i p)$ und $x' = \exp(2\pi i p^{-1})$. Man beachte wieder den Vorfaktor $c \cdot h_{l,1}h^{-1}_{n,1}h^{-1}_{m,1}$, der unserer Normierung (2.60) der Zwei-Punkt-Funktionen Rechnung trägt. Diese hatten wir so gewählt, daß sie für einfache chirale primäre Felder den Wert

$$\langle 0|W^{(n,1)}_{-h_{n,1}} W^{(m,1)}_{h_{m,1}}|0\rangle = \frac{c}{h_{n,1}}\delta_{n,m} \tag{6.8}$$

annimmt. Die Normierungsintegrale $N^{(l,1)}_{(n,1)(m,1)}$, i.e. die Drei-Punkt-Funktionen der chiralen Vertexoperatoren, können wir wieder aus der allgemeinen Form der Lösung der Fuchs-Differentialgleichungen für degenerierte Darstellungen gewinnen [233]. In unserem Fall werden sie besonders einfach. Mit $r = \frac{1}{2}(n + m - l - 1)$ als der Anzahl von Schirm-Ladungen lauten sie

$$\begin{aligned}
N^{(l,1)}_{(n,1)(m,1)} &= (-1)^{\frac{1}{2}r} \prod_{j=1}^{r} \frac{[m-j]_x[j]_x}{[1]_x} \\
&\quad \times \prod_{j=1}^{r} \frac{\Gamma(jp)\Gamma(1+(j-m)p)\Gamma(1+(j-n)p)}{\Gamma(p)\Gamma(2+(r-m-n+j)p)}\,. & (6.9)
\end{aligned}$$

Die Strukturkonstanten der EXPO bzw. der Lie-Algebra der Fourier-Moden der chiralen lokalen Felder ergeben sich damit zu

$$C^{(l,1)}_{(n,1)(m,1)} = \mathcal{D}^{(l,1)}_{(n,1)(m,1)} N^{(l,1)}_{(n,1)(m,1)}\,. \tag{6.10}$$

Es wird sich als nützlich erweisen, den folgenden Symmetrie-Faktor $\mathcal{S}(n,m,l)$ einzuführen, da die erweiterte Symmetrie-Algebra aufgrund ihrer $\mathfrak{su}(2)$-Struktur entweder ein Multiplett von Feldern gleicher Dimension oder deren symmetrisches Singulett enthält. Der eigentliche Grund dafür ist die Tatsache, daß die Schirm-Ladung selbst ein lokaler Operator ist, operierend auf lokalen Feldern, wenn $p \in \mathbb{N}$. In unserem Fall haben wir die Multipletts $W_l^{(j)} = Q^j W^{(l,1)}$, $0 \leq j < l$ und die symmetrischen Singuletts $W_l = \sum_{j=0}^{l-1} W_l^{(j)}$. Von den formalen Fusions-Regeln für degenerierte Darstellungen,

$$W_l^{(j)} \star W_{l'}^{(j')} = \sum_{\substack{m=|l-l'|+1 \\ l+l'-m-1 \,\equiv\, 0 \bmod 2}}^{l+l'-1} W_m^{(j+j'-r)} \tag{6.11}$$

wieder mit $r = \frac{1}{2}(l+l'-m-1)$, können wir die Multiplizitäten für die formalen Fusions-Regeln der Singuletts ableiten,

$$W_l \star W_{l'} = \sum_{\substack{m=|l-l'|+1 \\ l+l'-m-1 \,\equiv\, 0 \bmod 2}}^{l+l'-1} \mathcal{S}(l,l',m) W_m = \sum_{\substack{m=|l-l'|+1 \\ l+l'-m-1 \,\equiv\, 0 \bmod 2}}^{l+l'-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(l+l'-|l-l'|-2) \\ \frac{1}{2}(m-|l-l'|-1) \end{pmatrix} W_m\,, \tag{6.12}$$

was im wesentlichen die Multiplizitäten sind, die beim Tensorieren symmetrischer $\mathfrak{su}(2)$-Young-Tableaux auftreten. Als nächstes wollen wir die Phasen $\Delta^l_{n,m}(x)$ bestimmen. Trivialerweise ist für alle x' die Phase $\Delta^1_{1,1}(x') = 1$. Da $p \in \mathbb{N}$ ist, finden wir, daß $[k]_x$ null ist. Wenn wir aber $[k]_x$ für $p+\varepsilon$ im Limes $\varepsilon \to 0$ betrachten, erhalten wir in führender Ordnung von ε den Ausdruck

$$[k]_x = (-1)^{kp} 2\pi i k\varepsilon \quad (\varepsilon \to 0) \tag{6.13}$$

für $p \in \mathbb{N}$. Alle diese $2\pi i\varepsilon$-Faktoren heben sich aber in Zähler und Nenner genau weg, so daß $\Delta^l_{n,m}(x)$ auch für ganzzahliges p analytisch ist. Man würde, vielleicht etwas naiv, erwarten, daß das Resultat einfach ein Vorzeichen ist, da alle Operatoren, die wir betrachten, lokal relativ zueinander sind. Stattdessen ergibt sich aber, daß die $\left(\Delta^l_{n,m}(x)\right)^2$ rationale Zahlen sind, die von der Multiplett-Struktur herrühren. Das Ergebnis lautet nämlich:

$$\begin{aligned} \Delta^l_{n,m}(x) &= (-1)^{lp}(-1)^{\frac{1}{2}(n+m-l-1)(p+1)}(-1)^{p((lm+ln+nm)/2-(l^2+m^2+n^2-1)/4)} \\ &\quad \times \sqrt{nml}\,\frac{(n-1)!^2(\frac{1}{2}(l+m-n-1))!}{(\frac{1}{2}(l+n-m-1))!(\frac{1}{2}(m+n-l-1))!(\frac{1}{2}(l+m+n-1))!}\,. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir auch Singularitäten in den Normierungsintegralen für $p \in \mathbb{N}$. Nichtsdestotrotz ist aber das Quadrat von $C^{(l,1)}_{(n,1)(m,1)}$ nachwievor wohldefiniert und endlich, da sich auch hier dann alle singulären Terme gegenseitig wegheben. Darüber hinaus ergeben sich die Werte für ganzzahliges p gerade als die analytische Fortsetzung aus dem Bereich $p \in \mathbb{R}_+ - \mathbb{N}$: Im Limes $\varepsilon \to 0$ haben wir für $m \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$ in führender Ordnung in ε

$$\Gamma(m(p+\varepsilon)) = \begin{cases} (mp-1)! & mp > 0\,, \\ \frac{(-1)^{mp}}{(-mp)!}\frac{1}{m\varepsilon} & mp \leq 0\,. \end{cases} \tag{6.15}$$

Wenn wir dies in die Normierungs-Integrale stecken, erhalten wir schließlich das Resultat

$$\begin{aligned} \left(C^{(l,1)}_{(n,1)(m,1)}\right)^2 &= \frac{c}{\mathcal{S}(n,m,l)}\frac{h_{l,1}}{h_{m,1}h_{n,1}}(\varphi(\Delta^l_{n,m}))^2 \prod_{j=1}^{r} \frac{((pj-1)!^2(p(r+l+1-j)-2)!^2}{p(m-j)-1)!^2(p(n-j)-1)!^2} \\ &\quad \times \prod_{j=1}^{n-1}\frac{(p(n-j)-1)!^2}{(pj-1)!(p(n-j+1)-2)!}\prod_{j=1}^{m-1}\frac{(p(m-j)-1)!^2}{(pj-1)!(p(m-j+1)-2)!} \\ &\quad \times \prod_{j=1}^{l-1}\frac{(pj-1)!(p(l-j+1)-2)!}{(p(l-j)-1)!^2}\,, \end{aligned} \tag{6.16}$$

wo wieder $r = \frac{1}{2}(n+m-l-1)$ gesetzt wurde. Mit $\varphi(\Delta^l_{n,m})$ bezeichnen wir den Phasen-Anteil von $\Delta^l_{n,m}$, da der relle Anteil sich mit entsprechenden Beiträgen aus den Normierungskonstanten sehr schön zu $\mathcal{S}(n,m,l)^{-1}$ kombiniert.
Wir wollen zwei Beispiele betrachten. Zunächst geben wir für die Selbstkopplungs-Strukturkonstante der zusätzlichen Generatoren der $\mathcal{W}$-Algebra den folgenden expliziten Ausdruck an, wobei $\mathcal{S}(3,3,3) = 2$ die $\mathfrak{su}(2)$-Multiplizität für das Triplett auf der rechten Seite des symmetrischen Tensorproduktes zweier Tripletts ist:

$$\left(C^{(3,1)}_{(3,1)(3,1)}\right)^2 = c_{p,1}(-1)^p \frac{(4p-2)!^2(p-1)!^3}{2(3p-2)!(2p-1)!^4}\,. \tag{6.17}$$

Dies ist genau der Ausdruck, der von H.G. Kausch [677] durch explizites Ausintegrieren der Schirm-Ladungen abgeleitet wurde. Wieder haben wir die zentrale Ladung $c = 13 - 6(p+p^{-1})$ durch $c_{p,1}$ parametrisiert, als formale Fortsetzung der minimalen Serie $c_{p,q}$ aus Satz $-667/8$, Fall (i.1), auf $q = 1$. Da das Feld W_5 eine geradzahlige Dimension $h_{5,1} = 6p-2$ hat, kann das Feld W_3 mit der ungeraden Dimension $h_{3,1} = 2p-1$ nicht auf der rechten Seite der EXPO des ersteren mit sich selbst auftreten. Wir können daher wieder eine gerade Unteralgebra formen, eine $\mathcal{W}(2,6p-2)$. In der Tat hat das nächste gerade Feld, W_9, die Dimension $h_{9,1} = 20p-4 > 2h_{5,1}-1$. Da $h_{5,1}$ gerade ist, verschwindet die Selbstkopplung nicht. Zwei Beispiele dieser Serie konnten explizit konstruiert werden, nämlich die $\mathcal{W}(2,4)$ bei $c = 1$ [79, 683] und die $\mathcal{W}(2,10)$ bei $c = -2$ [281]. Die Selbstkopplungs-Konstanten sind $\frac{50}{3}$ bzw. $-\frac{352836}{5}$. Unser expliziter Ausdruck (6.16) ergibt mit $\mathcal{S}(5,5,5) = 6$ für die Selbstklopplung des W_5-Feldes

$$\left(C^{(5,1)}_{(5,1)(5,1)}\right)^2 = c_{p,1}(-1)^{p-1}\frac{(2p-1)!^3(p-1)!^3(7p-2)!^2(6p-2)!(6p-3)!}{6(4p-1)!^3(3p-1)!^3(5p-2)!(4p-2)!(3p-2)!(2p-2)!}\,, \tag{6.18}$$

was für $p = 1$ und $p = 2$ genau die explizit bekannten Beispiele ergibt.

6.3 Darstellungen & Charaktere

Wir haben schon angedeutet, daß unserer Theorien logarithmische TÆC sind. V. Gruarie [541] hat als erster die aus der Existenz logarithmischer Felder herrührenden Konsequenzen abgeleitet und sich dabei wesentlich auf das Beispiel des degenerierten Virasoro-Modells bei $c = -2$ gestützt. Der entscheidende Punkt ist, daß gewisse Differentialgleichungen entartete Lösungen besitzen. Zum einen sind dies die Differentialgleichungen, die aus den Ward-Identitäten der konformen Blöcke folgen, zum anderen genau analog dazu die modularen Differentialgleichungen für die Charaktere. Dies geschieht genau dann, wenn es mehrere inäquivalente RPA zum selben Tiefstgewicht h gibt. Eine genauere Analyse der Struktur degnerierter Modelle zeigt, daß dann auch immer eine Darstellung auftritt, die auf dem generischen Nullvektor aufbaut, der in der (regulären) RPA zu h auftritt. Darin reflektiert sich die Tatsache, daß auf Charakter-Ebene viele Eigenschaften ohnehin nur modulo $\mathbb{Z}$ fixiert sind[xxxvii]. Doch bevor wir auf diese Struktur genauer eingehen, wollen wir den Fall der Singulett-Algebren behandeln. Die daraus resultierenden TÆC stellen sich als nicht rational heraus, i.e. die erweiterte Symmetrie-Algebra ist noch zu klein.

6.3.1 Charaktere der Singulett-Algebren W(2,2p-1)

Wir wollen die Charaktere der $\mathcal{W}(2,2p-1)$-Algebren bestimmen. Dabei sollten wir uns das zusätzliche Feld als das symmetrische Singulett des $\mathfrak{su}(2)$-Trippletts von primären Feldern vorstellen, die

[xxxvii] Die RPA zum Nullvektor der Darstellung $\mathcal{H}_{|h\rangle}$ hat ein Tiefstgewicht $h+k$ mit $k \in \mathbb{Z}_+$.

die $\mathcal{W}(2,2p-1,2p-1,2p-1)$ erzeugen. Wir versuchen wieder, zunächst den Vakuum-Charakter zu berechnen, und dann aus dessen modularen Eigenschaften die Charaktere der anderen Darstellungen zu erhalten. Aus der Einbettungsstruktur der Virasoro-Verma-Module nach Fall (i.2) von Satz −667/8 lernen wir, daß der Virasoro-Charakter für die RPA zu $|h_{2n+1,1}\rangle$, $n \in \mathbb{Z}_+$, gegeben ist durch

$$\chi^{Vir}_{2n+1,1}(\tau) = \frac{q^{(1-c)/24}}{\eta(\tau)}\left(q^{h_{2n+1,1}} - q^{h_{-2n-1,1}}\right) . \tag{6.19}$$

Damit ist der $\mathcal{W}$-Algebra-Charakter der $\mathcal{W}$-Vakuum-Darstellung gegeben durch

$$\begin{aligned}\chi^{\mathcal{W}}_0(\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \chi^{Vir}_{2n+1,1}(\tau) &(6.20)\\ &= \frac{q^{(1-c)/24}}{\eta(\tau)} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{sgn}(n) q^{\frac{(2pn+p-1)^2}{4p}} , &(6.21)\end{aligned}$$

wobei wie üblich $\mathrm{sgn}(0) = 0$ gesetzt ist. Es wird sich als nützlich erweisen, die Signum-Funktion umzuschreiben als $\mathrm{sgn}(n + \frac{p-1}{2p})$. Dieser Charakter ähnelt sehr einer durch η geteilten klassischen Θ-Funktion $\Theta_{p-1,p}(\tau,0,0)$, bis auf die zusätzliche Signum-Funktion[xxxviii]. Wir definieren daher die Funktionen

$$\Xi_{n,m}(\tau) = \sum_{k\in\mathbb{Z}+\frac{n}{2m}} \mathrm{sgn}(k) q^{mk^2} . \tag{6.22}$$

Das Verhalten unter Modul-Transformationen ist allerdings recht unterschiedlich gegenüber (3.33). Zunächst beobachten wir, daß die Existenz der Signum-Funktion nicht das Verhalten unter der Transformation $T\colon \tau \to \tau+1$ ändert, welches einfach $\Xi_{n,m}(\tau+1) = \exp(i\pi\frac{n^2}{2m})\Xi_{n,m}(\tau)$ ist. Um nun auch das Verhalten unter der Transformation $S\colon \tau \to -\frac{1}{\tau}$ zu erhalten, sollten wir die Funktionen $\Xi_{n,m}$ als Linearkombinationen aus den wohlbekannten $\Theta_{\lambda,k}$ schreiben. Dazu führen wir die Funktion

$$\sigma(x,y) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i y p^2}}{p + i\varepsilon^2} \left(e^{ipx} - e^{-ipx}\right) dp \tag{6.23}$$

ein, so daß $\sigma(x,0) = \mathrm{sgn}(x)$ ist. Im folgenden werden wir die offensichtliche Limes-Prozedur nicht explizit notieren, sondern implizit voraussetzen. Mit diesen Definitionen finden wir dann

$$\begin{aligned}\Xi_{n,m}(\tau) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}+\frac{n}{2m}} \sigma(k,0) q^{mk^2}\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}+\frac{n}{2m}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{p} \left(e^{2\pi i k p} - e^{-2\pi i k p}\right) q^{mk^2} &(6.24)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{p} \left(\Theta_{n,m}(\tau,p,0) - \Theta_{n,m}(\tau,-p,0)\right) .\end{aligned}$$

Daraus folgt, wenn wir die Linearität der S-Transformation verwenden, daß wir

$$\Xi_{n,m}(-\frac{1}{\tau}) = \tilde{\Xi}_{n,m}(\tau) = \sqrt{\frac{-i\tau}{2m}} \sum_{n' \bmod 2m} \sin(-2\pi\frac{nn'}{2m}) \Xi_{n',m}(\tau) , \tag{6.25}$$

schreiben können, wobei $\tilde{\Xi}_{n,m}$ durch

$$\tilde{\Xi}_{n,m} = \sum_{k\in\mathbb{Z}+\frac{n}{2m}} \sigma(k, -\frac{1}{2m\tau}) q^{mk^2}$$

[xxxviii] Die klassischen Θ-Funktionen $\Theta_{\lambda,k}(\tau,z,u)$, die von drei Argumenten abhängen, sind für $z = u = 0$ mit den in (3.31) definierten elliptischen Funktionen identisch. Aus ihnen setzen sich die Charaktere der $\widehat{\mathfrak{su}(2)}$ Kac-Moody-Algebra zusammen.

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}+\frac{n}{2m}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{-m\tau}{4\pi i}}k\right) q^{mk^2} \tag{6.26}$$

gegeben ist. Dabei bezeichnet $\operatorname{erf}(x)$ die übliche Gauss-Fehlerfunktion bis auf die Normierung. Um die letzte Gleichung ableiten zu können, vergegenwärtige man sich, daß das Integralmaß unter Reskalierung $\frac{dp}{p}$ invariant ist. Obwohl der Satz von Funktionen $\Xi_{n,m}$ und $\tilde{\Xi}_{n,m}$ unter der S-Transformation schließt, bildet er keine Darstellung der vollen Modul-Gruppe. Denn die Funktionen $\tilde{\Xi}_{n,m}$ schließen leider nicht unter der T-Transformation. Das bedeutet, daß sie keine gute q-Entwicklung besitzen, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind und, vor allem, deren Potenzen sich nur um ganze Zahlen unterscheiden. Daraus folgt, daß die Modul-Gruppe eine unendlich dimensionale Darstellung durch wiederholtes Anwenden von T auf den $\tilde{\Xi}_{n,m}$ formen wird. Wir schließen also, daß die $\mathcal{W}(2,2p-1)$-Algebren keine rationale konforme Feldtheorie ergeben.

Ähnlich, wie bei den elliptischen Funktionen $\Theta_{\lambda,k}$, kann man zusätzliche Variablen einführen, die mit zusätzlichen Quantenzahlen korrespondieren. Wir könnten zum Beispiel schreiben:

$$\Xi_{n,m}(\tau,z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}+\frac{n}{2m}} \sigma(k,z) q^{mk^2}\,. \tag{6.27}$$

Die Variable z könnte dann zum Eigenwert des zusätzlichen Elementes der Cartan-Unteralgebra neben L_0 gehören, dem Generator W_0, oder genauer zu seinem Quadrat, da nur letzteres bestimmt werden kann. Aus dem Transformationsverhalten der $\mathfrak{su}(2)$-Θ-Funktionen [659] erhalten wir

$$\begin{aligned} \Xi_{n,m}(\tau+1,z) &= e^{\frac{\pi i n^2}{2m}}\Xi_{n,m}(\tau,z)\,, && (6.28)\\ \Xi_{n,m}(-\frac{1}{\tau}, z\tau^2-\frac{\tau}{2m}) &= \sqrt{\frac{-i\tau}{2m}} \sum_{n' \bmod 2m} \sin(-2\pi\frac{nn'}{2m})\Xi_{n',m}(\tau,z)\,, && (6.29) \end{aligned}$$

wobei wir wieder die Skaleninvarianz des Integrals und die Linearität der S- und T-Transformation ausgenutzt haben. Diese Menge von Funktionen definiert in der Tat eine endlich dimensionale Darstellung der Modul-Gruppe. Die zusätzliche Quantenzahl weist aber darauf hin, daß die Symmetrie-Algebra noch erweitert werden kann. Einige Ideen zu dieser Problematik findet man in [389, 397].

6.3.2 Charaktere der Triplett-Algebren W(2,2p-1,2p-1,2p-1)

Wir kommen nun zu den Charakteren der Triplett-Algebren. Am naheliegendsten scheint es zu sein, die degenerierten Virasoro-Darstellungen, deren h-Werte sich um ganze Zahlen unterscheiden aufzusummieren und diese als Darstellungen der erweiterten Symmetrie-Algebra aufzufassen. In unserem Fall müssen wir dabei berücksichtigen, daß wir ein Triplett von Feldern haben, das eine $\mathfrak{su}(2)$-Symmetrie aufweist. Dies bringt Multiplizitäten in den Virasoro-Darstellungen mit sich. Mit Hilfe des Isomorphismus zwischen den Feldern und den Moden, die den Hilbertraum der Vakuum-Darstellung aufspannen, sieht man leicht, daß die Multiplizität der Virasoro-Darstellung $|h_{2k+1,1}\rangle$ gerade $2k+1$ ist. Beispielsweise ist $h_{3,1}=2p-1$ gerade die Dimension der zusätzlichen Felder, so daß die Multiplizität natürlich gerade gleich deren Anzahl ist. Die Virasoro-Charaktere sind gemäß der Klassifikation von Feigin und Fuks [331], nach der es nur genau einen singulären Vektor in diesen Darstellungen gibt, gegeben durch

$$\chi^{Vir}_{2k+1,1} = \frac{1}{\eta(q)}\left(q^{h_{2k+1,1}} - q^{h_{2k+1,-1}}\right)\,. \tag{6.30}$$

Die Vakuum-Darstellung der $\mathcal{W}$-Algebra ist dann der Hilbertraum

$$\mathcal{H}^{\mathcal{W}}_{|0\rangle} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} (2k+1)\mathcal{H}^{Vir}_{|h_{2k+1,1}\rangle}\,. \tag{6.31}$$

Der Vakuum-Charakter ist daher einfach

$$
\begin{aligned}
\chi_0^{\mathcal{W}} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}_+}(2k+1)\chi_{2k+1,1}^{Vir} \\
&= \frac{q^{(1-c)/24}}{\eta(q)}\left(\sum_{k\geq 0}(2k+1)q^{h_{2k+1,1}} - \sum_{k\geq 0}(2k+1)q^{h_{-(2k+1),1}}\right) \\
&= \frac{q^{(1-c)/24}}{\eta(q)}\left(\sum_{k\geq 0}(2k+1)q^{h_{2k-1,1}} + \sum_{k\geq 1}(-2k+1)q^{h_{-2k+1,1}}\right) \\
&= \frac{q^{(1-p)^2/4p}}{\eta(q)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(2k+1)q^{(1-(2k+1)p)^2-(1-p)^2)/4p} \\
&= \frac{1}{\eta(q)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(2k+1)q^{(2pk+(p-1))^2/4p}.
\end{aligned}
\tag{6.32}
$$

Dies läßt sich durch Θ-Funktionen und affine Θ-Funktionen nach (3.31) in der einfachen Form

$$
\chi_0^{\mathcal{W}} = \frac{1}{p\eta(\tau)}\left((\partial\Theta)_{p-1,p}(\tau) + \Theta_{p-1,p}(\tau)\right) \tag{6.33}
$$

ausdrücken. Doch damit fangen die Probleme nun an. Während nämlich Terme der Art $\Lambda_{\lambda,k} = \Theta_{\lambda,k}/\eta$ Modul-Formen vom Gewicht 0 sind, trifft dies für Terme $(\partial\Lambda)_{\lambda,k} = (\partial\Theta)_{\lambda,k}/\eta$ nicht zu (siehe Proposition $-350/13$). Diese Terme sind Modul-Formen vom Gewicht 1, so daß man also eigentlich η^3 im Nenner benötigte, wie es denn auch in den Charakterformeln für die affine Kac-Moody-Algbra $\widehat{\mathfrak{su}(2)}$ bzw. $A_k^{(1)}$ der Fall ist.
Betrachten wir also das Transformationsverhalten von $(\partial\Lambda)_{\lambda,k}$ unter S und T. Ohne Mühe leitet man aus (3.33) die folgenden Relationen ab:

$$
(\partial\Lambda)_{\lambda,k}(\tau+1) = \exp\left(2\pi i\left(\frac{\lambda^2}{4k}-\frac{1}{24}\right)\right)(\partial\Lambda)_{\lambda,k}, \tag{6.34}
$$

$$
(\partial\Lambda)_{\lambda,k}(-\frac{1}{\tau}) = (-i\tau)\sqrt{\frac{2}{k}}\sum_{1\leq\lambda'\leq k-1}\sin\left(\frac{\pi\lambda\lambda'}{k}\right)(\partial\Lambda)_{\lambda',k}. \tag{6.35}
$$

Man beachte das Auftreten des Termes τ, der sich nicht als Potenzreihe in q schreiben läßt. Zur Vereinfachung der Schreibweise definierten wir bereits in Kapitel III weitere Funktionen $(\nabla\Lambda)_{\lambda,k} \equiv -\tau(\partial\Lambda)_{\lambda,k}$. Deren modulares Transformationsverhalten ist dann natürlich gegeben durch

$$
(\nabla\Lambda)_{\lambda,k}(\tau+1) = \exp\left(2\pi i\left(\frac{\lambda^2}{4k}-\frac{1}{24}\right)\right)\left((\nabla\Lambda)_{\lambda,k}-(\partial\Lambda)_{\lambda,k}\right), \tag{6.36}
$$

$$
(\nabla\Lambda)_{\lambda,k}(-\frac{1}{\tau}) = -\sqrt{\frac{2}{k}}\sum_{1\leq\lambda'\leq k-1}\sin\left(\frac{\pi\lambda\lambda'}{k}\right)(\partial\Lambda)_{\lambda',k}. \tag{6.37}
$$

Es fällt auf, daß die T-Transformation nicht mehr diagonal ist. Grundsätzlich ist das Auftreten von Modulformen mit Gewicht ungleich null suspekt. Daher wollen wir auf einem anderen Weg versuchen, die Charaktere zu bestimmen, ohne auf Annahmen über die Struktur der Darstellungen zurückzugreifen. Alles, was wir wissen müssen, sind die h-Werte, die man bei einer gegebenen $\mathcal{W}$-Algebra explizit durch Jakobi-Identitäten oder durch das Bestimmen von Nullfeldern errechnen kann [269]. Die modulare Differentialgleichung (siehe Abschnitt III.5) gestattet es uns dann, die q-Entwicklung der Charaktere bis zu jeder gewünschten Ordnung zu bestimmen. Dies ist völlig hinreichend, da bekanntermaßen bereits wenige Terme einer solchen Potenzreihe die Funktion

eindeutig festlegen, wenn die Potenzreihe eine Modul-Form ist. [xxxix]. Wir haben für zwei Beispiele explizit die modulare Differentialgleichung gelöst und dabei exakt die obigen Ergebnisse erhalten. Die Beispiele waren die $\mathcal{W}(2,3,3,3)$ bei $c=-2$, die dort nur RPA zu den Tiefstgewichten $h \in \{-1/8, 0, 3/8, 1\}$ besitzt, sowie die $\mathcal{W}(2,5,5,5)$ bei $c=-7$, die dort nur die RPA zu $h \in \{-1/3, -1/4, 0, 5/12, 1, 7/4\}$ besitzt.
Formal kann man übrigens die möglichen Darstellungen aus Fall (i.1) von Satz $-667/8$ ablesen. Die möglichen h-Werte eines minimalen Modells mit $c = c_{p,q}$ sind durch $h_{r,s} = \frac{(pr-qs)^2-(p-q)^2}{4pq}$ mit $1 \leq r < q$ und $1 \leq s < p$ gegeben. Die h-Werte eines $c_{p,1}$-Modells, inklusive aller inäquivalenten Darstellungen zum selben Tiefstgewicht, sind dann durch die erlaubten Werte des nur formal existierenden $c_{3p,3}$-Modells gegeben. Wir wollen ein Beispiel explizit ausführen:
Dazu betrachten wir den Fall $p = 1$, also die TÆC $\mathcal{W}(2,3,3,3)$ bei $c = -2$. Hier sind die Höchstgewichte durch explizite Rechnungen bekannt, $h \in \{0, 1, -\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\}$. Dabei gibt es zwei (verschiedene!) Darstellungen mit $h = 0$. Zunächst sei die übliche Form für die Charaktere angenommen,

$$\chi_i = q^{h_i - c/24} \sum_{l=0}^{\infty} b_{i,l} q^l \,, \tag{6.38}$$

wobei h_i gegeben ist durch $h_{1,i} = \frac{i^2-2ip+p-1}{4p}$. Daraus ergeben sich die Koeffizienten der modularen Differentialgleichung wie folgt

$$\begin{aligned} a_{0,0} &= 1\,, \\ a_{4,1} &= -\tfrac{163}{576}\,, \\ a_{6,0} &= \tfrac{65}{2304}\,, \\ a_{8,2} &= \tfrac{121}{82944}\,, \\ a_{10,1} &= \tfrac{143}{995328}\,. \end{aligned} \tag{6.39}$$

Damit lassen sich die Charaktere zu jeder Ordnung berechnen. Ein Koeffizientenvergleich erweist dann, daß sich die Lösungen bis auf multiplikative Vorfaktoren schreiben lassen als

$$\begin{aligned} \chi_1 &= A\Lambda_{1,2} + B(\partial\Lambda)_{1,2}\,, \\ \chi_2 &= \Lambda_{0,2}\,, \\ \chi_3 &= A'\Lambda_{1,2} + B'(\partial\Lambda)_{1,2}\,, \\ \chi_4 &= \Lambda_{2,2}\,, \\ \chi_5 &= \tfrac{1}{2}\Lambda_{1,2} - \tfrac{1}{2}(\partial\Lambda)_{1,2}\,. \end{aligned} \tag{6.40}$$

Man erkennt also, daß χ_1, χ_3 und χ_5 linear abhängig sind. Wenn χ_1 zu einer Vakuum-Darstellung gehören soll, muß der lineare q-Term verschwinden, i.e. $b_{1,1} = 0$. Daraus folgt $A = B = 1/2$, wenn man auch $b_{1,0} = 1$ fordert.
Wir benötigen noch eine weitere linear unabhängige Lösung, für die wir nun den Ansatz

$$\tilde{\chi}_3 = \log(q) q^{1/12} \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{b}_{3,l} q^l \tag{6.41}$$

wählen. Damit erhalten wir die folgende weitere Lösung

$$\tilde{\chi}_3 = (\nabla\Lambda)_{1,2}\,, \tag{6.42}$$

wobei wir jetzt eine Definition in q statt in τ verwenden und daher $(\nabla\Lambda)_{\lambda,k} \equiv -\frac{\log(q)}{2\pi i}(\partial\Lambda)_{\lambda,k}$ setzen. Unser Resultat entspricht dem, was wir durch den konkreten Ansatz des Vakuum-Charakters und

[xxxix] Auch die logarithmischen Lösungen sind dadurch bestimmt, da sie sich eindeutig als Grenzfall bei Entartung der Differentialgleichung ergeben und daher gleich einer solchen Form multipliziert mit $\log q$ sein müssen.

dessen S-Transformation erhalten haben. Wenn wir χ_3 durch $\tilde{\chi}_3$ ersetzen, erhalten wir die folgende S-Matrix:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{i}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -i & 0 & 0 & 0 & i \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{i}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.43}$$

Diese Matrix hat, wie es sein muß, die Determinante $\det(S) = 1$, ist aber weder symmetrisch, noch reell, noch unitär. Sie erfüllt jedoch die Relation $S^2 = 1\!\!1$. Allerdings besitzt keine Spalte bzw. Zeile allein nichtverschwindende Einträge. Soweit das Beispiel. Für die $\mathcal{W}(2,5,5,5)$ bei $c = -7$ geht die Rechnung funktioniert analog.
Generell können wir für die $c_{p,1}$-Serie folgende Feststellungen machen, wobei wir auf die Notationen aus Kapitel III zurückgreifen:

Proposition -7/20. *Sei $p \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann existiert zu $c = c_{p,1} = 13-6(p+p^{-1})$ eine $\mathcal{W}(2,2p-1,2p-1,2p-1)$. Sie besitzt genau $3p-1$ RPA, deren Tiefstgewichte durch $h_{1,s}, 1 \leq s \leq 3p-1$ gegeben sind. $2\times(p-1)$ RPA haben paarweise dasselben Tiefstgewicht, weitere $p-1$ Tiefstgewichte differieren um eine ganze Zahl, die genau dem Level des singulären Vektors entspricht. Eine Basis für die Charaktere wird durch die (durch η zu teilenden) Funktionen $\{\Theta_{\lambda,p}, (\partial\Theta)_{\mu,p}, (\nabla\Theta)_{\mu,p} | 0 \leq \lambda, \mu \leq (2p-1), \mu \neq 0, p\}$ gegeben.* ∎

Wir haben schon in Kapitel III darauf hingewiesen, daß die Funktionen $(\nabla\Theta)_{\mu,p}$ zu einer nicht mehr diagonalen T-Matrix führen. Sie zerfällt in Blöcke, die Jordan-Zellen ähneln, aber auch Charaktere miteinander verknüpfen, deren zugehörige Tiefstgewichte sich nur um ganze Zahlen unterscheiden. Beispielsweise sieht die T-Matrix für das $c_{1,2}$-Modell wie folgt aus, wenn wir dieselbe Basis von Modul-Funktionen wählen:

$$T = \begin{pmatrix} \exp(\pi i/6) & & & & \\ & \exp(-\pi i/12) & & & \\ -\exp(\pi i/6) & 0 & \exp(\pi i/6) & 0 & \exp(\pi i/6) \\ & & & \exp(11\pi i/12) & \\ & & & & \exp(13\pi i/6) \end{pmatrix}. \tag{6.44}$$

Allerdings, und das ist entscheidend, wenn unsere TÆC Modul-Invarianz aufzeigen sollen, erfüllt diese T-Matrix zusammen mit der S-Matrix aus (6.43) die Relation $(ST)^3 = 1\!\!1$. Man überzeugt sich leicht, daß dies allgemein gilt, wenn der in Proposition $-7/20$ angegebene Satz von Modul-Formen verwendet wird.
Die Frage ist nun, ob wir die Charaktere so linearkombinieren können, daß wir eine physikalisch sinnvolle S-Matrix erhalten, i.e. eine, mit der man gemäß Satz $-46/3$ die Fusions-Algebra bestimmen kann. Wenn dies gelänge, wäre klar, daß auch logarithmische TÆC in das Schema rationaler Modelle gefaßt werden können, ohne daß die geforderten Bedingungen wesentlich zu modifizieren wären.
Dazu müssen wir zunächst darauf eingehen, wie ein Charakter sinnvoll für eine nicht triviale Jordanzelle zu definieren ist. Der Einfachheit halber betrachten wir eine Jordanzelle der Form $\left(\begin{smallmatrix} h & 0 \\ 1 & h \end{smallmatrix}\right)$. Das bedeutet, daß wir zwei SPA haben, $|h;0\rangle$ und $|h;1\rangle$, auf denen L_0 wie folgt operiert: $L_0|h;0\rangle = h|h;0\rangle$ und $L_0|h;1\rangle = h|h;1\rangle + |h;0\rangle$. Das off-diagonale Element könnte auch jede andere von null verschiedene Zahl sein, eine Fixierung erfolgt erst später durch Modul-Invarianz. Wir sehen, daß einer der beiden SPA der Jordanzelle ein echter L_0-Eigenwert ist, der Charakter zu der zugehörigen RPA sollte sich also wie gehabt definieren lassen. Der andere SPA erzeugt durch Anwenden von L_0 einen weiteren Zustand, der *nicht* im klassischen Verma-Modul enthalten ist. Bei nochmaligem Anwenden von L_0 wird dieser Zustand aber mitgenommen (und es entsteht wieder ein neuer Zustand). Der Operator L_0 hat auf der Jordanzelle also das Aussehen $L_0 = \left(\begin{smallmatrix} L_{0;1} & 0 \\ 1 & L_{0;0} \end{smallmatrix}\right)$, wobei

der zweite Index lediglich andeuten soll, daß die L_0-Operatoren auf verschiedenen Modulen agieren. Die Charktere sind definiert als $\mathrm{tr}_{|h\rangle} q^{L_0 - c/24}$. Verwenden wir hier unsere L_0-Matrix, erhalten wir

$$\begin{aligned} q^{L_0} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i\tau)^n}{n!} \begin{pmatrix} L_{0;1} & 0 \\ 1 & L_{0;0} \end{pmatrix}^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i\tau)^n}{n!} \begin{pmatrix} L_{0;1}^n & 0 \\ nL_{0;0}^{n-1} & L_{0;0}^n \end{pmatrix}^n \\ &= \begin{pmatrix} q^{L_{0;1}} & 0 \\ 2\pi i\tau q^{L_{0;0}} & q^{L_{0;0}} \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{6.45}$$

Wir sehen also, daß der logarithmische Term wirklich durch die Jordanzelle verursacht wird. Als nächstes müssen wir uns fragen, worüber sich die Spur in der Definition des Charakters erstreckt. Für den Charakter, den wir auf der RPA zu $|h:0\rangle$ nehmen, ändert sich nichts. Für den Charakter über $|h;1\rangle$ müssen wir jedoch die Zustände mitzählen, die durch die Jordanzelle hinzukommen. Dieser Charakter hat dann einen zusätzlichen logarithmischen Term. Für größere Jordanzellen verläuft die Argumentation ganz ähnlich.

Die Jordanzerlegung ist natürlich in einem gewissen Sinne willkürlich. Immerhin sehen wir an ihr, daß notwendigerweise logarithmische Terme in die Definition der Charaktere hineinzunehmen sind. Aber welcher Charakter nun welchen logarithmischen Anteil hat, hängt von der genauen Linearkombination ab. Diese wollen wir durch Modul-Invarianz fixieren. Offensichtlich gilt nach Abschnitt III.5, daß die folgende Zustandssumme modular invariant ist:

$$Z_{log}[p] = \alpha \sum_{\lambda=0}^{2p-1} |\Theta_{\lambda,p}|^2 + \beta \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu\neq p}}^{2p-1} \frac{1}{2}\left((\partial\Theta)_{\mu,p}(\nabla\Theta)^*_{\mu,p} + (\nabla\Theta)_{\mu,p}(\partial\Theta)^*_{\mu,p}\right) , \tag{6.46}$$

wobei α, β zunächst beliebige freie Konstanten sind. Physikalisch relevant ist diese Zustandssumme aber sicherlich nur dann, wenn $alaph, \beta \in \mathbb{Z}/2$ sind. Wir können ausnutzen, daß der nicht logarithmische Anteil des Vakuum-Charakters Funktionen aus beiden Teilen der Zustandssumme involviert.

Auch hier zunächst wieder unser Beispiel. Wir führen allgemeine Linearkombinationen für die Charaktere ein. Man beachte, daß die Struktur genau dieselbe ist, wenn wir $c_{p,1}$-Modelle mit $p > 2$ betrachten. Für jedes Tiefstgewichts-Tripel $(h, h, h+k)$ von Darstellungen gemäß Proposition $-7/20$ macht man den gleichen Ansatz, da diese Tripel nicht untereinander mischen können. Der Ansatz ist

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \Theta_{0,2}/\eta , \\ \chi_2 &= \Theta_{2,2}/\eta , \\ \chi_1^0 &= (a_0\Theta_{1,2} + b_0(\partial\Theta)_{1,2} + c_0(\nabla\Theta)_{1,2})/\eta , \\ \chi_1^+ &= (a_+\Theta_{1,2} + b_+(\partial\Theta)_{1,2} + c_+(\nabla\Theta)_{1,2})/\eta , \\ \chi_1^- &= (a_-\Theta_{1,2} + b_-(\partial\Theta)_{1,2} + c_-(\nabla\Theta)_{1,2})/\eta . \end{aligned}$$

Als erstes sieht man, daß die a_i, b_i rell und die c_i imaginär sein müssen, will man eine physikalisch relevante Zustandssumme erhalten. Setzt man $a_0 \neq 0$, erhält man schnell einen Widerspruch. Mit $a_0 = 0$ läßt sich dann aber alles auflösen: $a_+ = a_- = 1$, $b_- = -b_+$ und ferner $c_+ = -c_- = \pm ib_+$. Dann sind auch $\pm c_0 = -\sqrt{2}ib_+$ und $\pm b_0 = \sqrt{2}b_+$ bis auf ein gemeinsames Vorzeichen fixiert. Das bedeutet zweierlei: Zum einen treten in allen Darstellungen des Tripels zwingend logarithmische Anteile auf, da sonst keine Modul-Invarianz erreicht wird, i.e. Terme, die nicht in (6.46) vorkommen können, sich wegheben. Zum anderen erhält dadurch die S-Matrix eine etwas ungewöhnliche Gestalt, da eine $\mathcal{W}$-Familie, übrigens diejenige mit der unphysikalsichen Multiplizität $\sqrt{2}$, von allen anderen entkoppelt, die restlichen aber eine gute Fusions-Algebra unter sich via

Verlinde-Formel ergeben. Die S-Matrix lautet (mit der Vorzeichenfreiheit von oben)

$$\begin{pmatrix} \mp 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & \pm 1/2 & -1/2 & \mp 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \mp 1/2 & -1/2 & \pm 1/2 \end{pmatrix}, \tag{6.47}$$

wobei die dritte Spalte bzw. Zeile zur Vakuum-Darstellung mit χ_1^+ gehört und der Charakter-Vektor durch $(\chi_1^0, \chi_0, \chi_1^+, \chi_2, \chi_1^-)^t$ gegeben ist. Diese S-Matrix ist symmetrisch und unitär. Die noch freien Konstanten legt man durch die T-Matrix fest. Insbesondere folgt $b_+ = \pm 1$, wobei die Vorzeichenwahl lediglich die dritte und fünfte Spalte bzw. Zeile vertauscht. Mit $b_+ = 1$ haben wir dann mit χ_1^+ tatsächlich den Vakuum-Charakter, dessen nicht logarithmischer Anteil bis auf eine Multiplizität 2 mit unserem obigen Ergebnis übereinstimmt.
Diese größere Multiplizität ist nach (6.46) unvermeidbar, sonst hätten wir eine Zustandssumme mit rationalen, nicht ganzen Koeffizienten, was unphysikalisch wäre. Die zusätzliche Multiplizität ist generell gerade gleich p und wird durch die entarteten Lösungen von chiralen Vertexoperatoren gleicher konformer Dimension verursacht (siehe den ersten Abschnitt). Im allgemeinen Fall $p \geq 2$ haben wir dann das folgende Bild:

PROPOSITION -17/15. *Sei $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$. Dann hat die $\mathcal{W}(2, 2p-1, 2p-1, 2p-1)$-Algebra Darstellungen mit den folgenden Tiefstgewichten und Charakteren: Die Darstellung zum Tiefstgewicht niedrigster Energie, $h_{min} = h_{1,p} = h_{0,0} = -(p-1)^2/4p$, mit Charakter $\chi_p = \Theta_{0,p}/\eta$ sowie die Darstellung zu $h_{1,2p} = h_{1,0}$ mit Charakter $\chi_0 = \Theta_{p,p}/\eta$, die beide keine Nullzustände enthalten. Sodann Tripel von Darstellungen zu $(h_{1,s} = h_{1,2p-s}, h_{1,2p+s})^{xl}$ mit Charakteren $(\chi_s^+, \chi_s^0, \chi_s^-)$ mit $\chi_s^{\pm} = (\Theta_{p-s,p} \pm (\partial\Theta)_{p-s,p} \pm i(\nabla\Theta)_{p-s,p})/\eta$ und $\chi_s^0 = \sqrt{2}((\partial\Theta)_{p-s,p} - i(\nabla\Theta)_{p-s,p})/\eta$. Die "diagonale" Zustandssumme ist dann*

$$Z_{log}[p] = \frac{1}{\eta\bar{\eta}} \left(|\chi_0|^2 + |\chi_p|^2 + \sum_{1 \leq s \leq p-1} \left(|\chi_s^0|^2 + \chi_s^+ (\chi_s^-)^* + \chi_s^- (\chi_s^+)^* \right) \right) . \blacksquare \tag{6.48}$$

Wenn wir beachten, daß $(\partial\Theta)_{0,p} = (\nabla\Theta)_{p,p} \equiv 0$ ist, können wir alle Charaktere auch in einheitlicher Form schreiben. Die sich daraus ergebende S-Matrix hat eine Blockstruktur. $p-1$ logarithmische Darstellungen mit den Charakteren $\chi_s^0, 1 \leq s \leq p-1$ entkpoppeln von den übrigen $2(p-1)+2 = 2p$ "regulären" Darstellungen, für die wir ja schon im ersten Abschnitt abstrakte Fusions-Regeln angegeben hatten. Die Darstellungen, die entkoppeln, haben auch verschwindende Quantendimension. Diese Tatsache sowie die Blockstruktur der S-Matrix zeigen, daß die Verlinde-Formel für logarithmische TÆC nicht mehr streng anwendbar ist. Mit ihr können lediglich die Fusionsregeln der nicht speziellen Darstellungen reproduziert werden, wenn man sich auf den entsprechenden Block der S-Matrix beschränkt.
Der Fall $p = 1$ ist trivial, es treten keine logarithmischen Darstellungen auf. Es handelt sich dabei einfach um die $\widehat{\mathfrak{su}(2)}$, die einfachste nicht abelsche unendlich dimensionale Lie-Algebra $A_1^{(1)}$, die drei Ströme besitzt. Sie stellt eines der in Kapitel IV beschriebenen unitären Modelle mit $c = 1$ dar. Wir haben insbesondere $Z_{\log}[1] = Z[1]$, i.e. für den Radius $1/\sqrt{2}$ reduziert sich unsere Zustandssumme für logarithmische TÆC auf die gewöhnliche Zustandssumme der Gauss-Modelle am multikritischen Punkt. Allerdings haben R. Dijkgraaf und E. & H. Verlinde [211] bewiesen, daß der Modul-Raum der $c = 1$-Theorien keine marginalen Deformationen besitzt, die aus ihm hinausführen. Es gibt ein Feld, daß Träger marginaler Deformationen sein könnte, $\phi_{2,p-1}$ mit $h_{2,p-1} = 1$, das in dem im

^{xl}Man beachte, daß der singuläre Vektor der Darstellung zu $h_{1,s}$ den Level $h_{1,-s} = h_{1,2p+s}$ hat, derjenige der Darstellung zu $h_{1,2p-s}$ aber $h_{1,s-2p} = h_{1,4p-s}$.

ersten Abschnitt definierten Fundamentalbereich liegt. Dieses Feld hat in der Tat verschwindende Selbstkopplung (da der erste Index gerade ist). Es ist also – vorausgesetzt es mischt nicht mit anderen marginalen Feldern – integrabel. Allerdings existiert dieses Feld nicht für $p = 1$ (die Felder $\phi_{r,s}$ mit $r = 0$ oder $s = 0$ entkoppeln völlig aus dem Hilbertraum der Theorie, da der BRST-Operator die entsprechenden Zustände annihiliert). Wir können also tatsächlich aus den regulären Theorien nicht in die logarithmischen marginal transformieren. Beachten wir außerdem, daß die Zustandssumme aus Proposition 11/35 auch nicht diagonal kombiniert werden kann, dann erhalten wir damit

Proposition -161/55. *Der Modul-Raum der logarithmischen TÆC mit $c_{eff} = 1$ ist generisch eindimensional. Er ist disjunkt zum Modul-Raum der regulären TÆC mit $c_{eff} = 1$ mit einer Orbifold-Singularität im Punkte $R = 1/\sqrt{2}$, i.e. dieser Punkt existiert disjunkt doppelt. Die Zustandssumme der logarithmischen TÆCR ist für $(p,q) = 1$ gegeben durch*

$$Z_{log}[p/q] = \frac{1}{\eta\bar{\eta}} \left(|\chi_0|^2 + |\chi_{pq}|^2 + \sum_{1\leq s\leq pq-1} \left(\chi_s^0(\chi_{s'}^0)^* + \chi_s^+(\chi_{s'}^-)^* + \chi_s^-(\chi_{s'}^+)^* \right) \right) , \qquad (6.49)$$

wobei mit $s = pn - qm \bmod 2pq$ dann $s' = pn + qm \bmod 2pq$ gegeben ist.

Die Struktur des zusammenhängenden Teiles des Modul-Raumes der Theorien mit $c = 1$ reproduziert sich exakt für die logarithmischen Theorien. Dies sieht man am besten daran, daß allgemein, i.e. für alle $x \in \mathbb{R}_+$, die Identität

$$Z_{log}[x] = \left(1 + \frac{2x^2}{\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \right) Z[x] \qquad (6.50)$$

gilt (für nicht rationale x sei $Z_{log}[x]$ dadurch definiert). Entsprechend erhalten wir die Zustandssumme der $\mathbb{Z}_2$-Orbifolds zu den logarithmischen Theorien durch Anwenden von $(1 + \frac{2x^2}{\pi i}\partial_x)$ auf $Z_{orb}[x]$,

$$Z_{log,orb}[x] = \left(1 + \frac{2x^2}{\pi i} \frac{\partial}{\partial x} \right) (Z[x] + 2Z[4] + Z[1])/2 \,. \qquad (6.51)$$

Die zugehörigen $\mathcal{W}$-Algebren sind dann völlig analog zu Satz $-375/17$ gegeben, indem man die Dimensionen der Felder korrekt “skaliert”: Zu $Z_{log}[p]$ gehört eine $\mathcal{W}(2,(2p-1)^{\otimes 3})$, deren $\mathbb{Z}_2$-Orbifold eine $\mathcal{W}(2, 6p-2)$ ist. Wenn p eine Quadratzahl ist, $p = n^2$, können diese Algebren um das Feld der Dimension $h_{2n+1,1} = p(n^2+n) - n = n^4 + n^3 - n$ erweitert werden. Aber auch für $p \neq n^2$ muß es noch eine Erweiterung geben, da die $\mathcal{W}(2, 6p-2)$ allein noch keine rationale Theorie bildet [281]. Zu den drei exzeptionellen Fällen existieren vermutlich keine logarithmischen Pendants, da bei ihnen die Radien in den Zustandssummen alle eingefroren sind, es also nicht klar ist, worauf sich der Ableitungsoperator beziehen sollte. ■

Wir haben schon in Kapitel III gesehen, daß auch Potenzen logarithmischer Terme modular invariant kombiniert werden können. Mit der Bezeichnung $D = \frac{2x^2}{\pi i}\partial_x$ sind natürlich alle Ausdrücke der Form $(\sum_{n\in\mathbb{Z}_+} a_n D^n)Z[x]$ modular invariant. Allerdings läßt Satz $-668/7$ keinen Raum für weitere logarithmische TÆCR mehr. Weiter haben wir in Abschnitt III.6 festgestellt, daß das Auftreten höherer Potenzen von Logarithmen zu Theorien mit $c_{eff} > 1$ führt.

Damit ist die Analyse der logarithmnischen Theorien abgeschlossen. Die expliziten Beispiele [73, 281] sowie unsere allgemeinen Resultate zur modularen Struktur von Charakteren machen es offensichtlich, daß die supersymmetrischen TÆC mit $N = 1$ exakt dieselbe Struktur besitzen. Wir finden auch hier logarithmische Theorien (mit $c_{eff} = 3/2$), die eine völlig analoge Darstellungsstruktur aufweisen. Wir verzichten daher auf eine ausführlichere Diskussion. Wie bei den anderen nicht unitären Theorien aus Kapitel IV ergibt sich für $N = 1$-Supersymmetrie nichts wesentlich neues. Wieder ist es aber so, daß für $N = 2$ keine rationale Struktur gefunden werden kann [67].

Es bleibt also die Vermutung bestehen, daß $N = 2$-Supersymmetrie die Äquivalenz von Unitarität und Rationalität impliziert.

6.4 Minimale Modelle

Damit sind alle Möglichkeiten aus Satz $-667/8$ erschöpft bis auf den wohlbekannten Fall der minimalen Modelle zu $c = 1 - 6\frac{(p-q)^2}{pq}$, mit $p > q > 1, (p,q) = 1$, deren "Rand" $q = 1$ gerade die oben untersuchten logarithmischen TÆC bilden. Auch die minimalen Modelle lassen unter bestimmten Umständen erweiterte Symmetrie-Algebren zu. In [79, 61] wurden diese Möglichkeiten aus den nicht diagonalen Zustandssummen der A-D-E-Klassifikation von A. Cappelli, C. Itzykson und J.-B. Zuber [151, 149] abgeleitet. Der Vollständigkeit halber sei zum Schluß kurz auf diese eingegangen.

Sei eine Darstellung der Virasoro-Algebra mit der zentralen Ladung c aus der minimalen Serie nach Fall (i.1) von Satz $-667/8$ gegeben. Die TÆC zu $c = c_{p,q}$ besitzt dann bekanntlich nur endlich viele RPA, deren Tiefstgewichte wir mit $h(p,q;r,s) = \frac{(pr-qs)^2-(p-q)^2}{4pq}$, $1 \leq r \leq q-1$, $1 \leq s \leq p-1$ bezeichnen. Die Fusions-Algebra ist gegeben durch [37]

$$[\phi_{r,s}] \star [\phi_{r',s'}] = \sum_{\substack{n=|r-s|+1 \\ n+r+s-1\equiv 0 \bmod 2}}^{\min(q-1,r+s-1)} \sum_{\substack{n'=|r'-s'|+1 \\ n'+r'+s'-1\equiv 0 \bmod 2}}^{\min(p-1,r'+s'-1)} [\phi_{n,n'}]\,, \tag{6.52}$$

wobei $[\phi_{r,s}]$ die konforme Familie zu $h(p,q;r,s)$ bezeichnet. Ausgangspunkt ist nun die daraus in [79] abgeleitete

Proposition -39/10. *Sei $\delta \in \mathbb{Z}_+/2$. Wenn δ eine Zerlegung $\delta = \frac{(p-2)(q-2)}{4}$ mit $p,q \in \mathbb{Z}_+$ coprim zuläßt, existiert die Algebra $\mathcal{W}(2,\delta)$ für die zentrale Ladung $c = c_{p,q} = 1 - 6\frac{(p-q)^2}{pq}$ mit verschwindender Strukturkonstante C_{WW}^W.*

Man beachte, daß insbesondere $h(p,q;q-1,1) = h(p,q;1,p-1) = \delta$ ist, wenn δ die Voraussetzungen der obigen Proposition erfüllt. Aus der Fusions-Algebra folgt dann $[\phi_\delta] \star [\phi_\delta] = [\mathbb{1}]$. Für unitäre Darstellungen impliziert dies allgemein, daß das zugehörige Feld ϕ_δ einen Automorphismus der Fusions-Regeln bewirkt [227, 383], i.e. einen sogenannten *einfachen Strom* mit anyonischer Statistik darstellt [1063, 941]. Die lokale chirale Algebra kann dann um das Feld ϕ_δ erweitert werden, wenn $\delta \in \mathbb{Z}_+/2$ ist. Nun sind die wesentlichen Eigenschaften eines lokalen einfachen Stromes völlig unabhängig von Unitarität zu definieren, und es lassen sich gut aus Vertexoperator-Algebren meromorpher TÆC nach den Ausführungen von Kapitel II solche einfachen Ströme konstruieren. Im Grunde haben wir genau das getan, als wir die parabolischen und logarithmischen TÆCR konstruierten. ■

In Tabelle VI.1 haben wir die A-D-E-Klassifikation der modular invarianten Zustandssummen minimaler TÆCR nach [151] zusammengestellt. Die Charaktere sind dabei die in Proposition $-22/5$ angegebenen Rocha-Caridi-Charaktere. Das Auftreten von A-D-E bezieht sich auf die Indizes, die die Exponenten der entsprechenden einfachen einfach-geschnürten Lie-Algebren reproduzieren.

In dieser Tabelle bezeichnet *c.c.* das komplex Konjugierte des vorstehenden Terms. In der Tat lassen sich die Modelle von Proposition $-39/10$ mit der nicht diagonalen (D_{2n}, A_{p-1})-Invariante erklären. Das zusätzliche lokale chirale primäre Feld hat dann die Dimension $h(p,4n-2;4n-3,1) = (p-2)(n-1)$. Weiter gibt es auch zu den (E_6, A_{p-1})- und (E_8, A_{p-1})-Invarianten Lösungen mit den Dimensionen $h(p,12;5,1) = (p-4)/2$ und $h(p,12;7,1) = p-3$ für E_6, sowie $h(p,30;11,1) = p-5$, $h(p,30;19,1) = 3(p-3)$ und $h(p,30;29,1) = 7(p-2)$ für E_8. Für die Invariante (E_7, A_{p-1}) sollte eine Lösung mit Dimension $h(p,18;17,1) = 4p-8$ existieren, wofür es aber noch kein explizit berechnetes Beispiel gibt[xli].

Tabelle IV.1 Modular invariante Zustandssummen der minimalen Modelle

(A_{q-1},A_{p-1})		$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{q-1}\sum_{s=1}^{p-1}\lvert\chi_{r,s}\rvert^2$
$(D_{q/2+1},A_{p-1})$	$q\equiv 2(4)$	$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p-1}\left(\sum_{\substack{r=1\\ r\equiv 1(2)}}^{q-1}\lvert\chi_{r,s}\rvert^2+\lvert\chi_{q/2,s}\rvert^2+\sum_{\substack{r=1\\ r\equiv 1(2)}}^{q/2-2}(\chi_{r,s}\chi^*_{r,q-s}+c.c.)\right)$
$(D_{q/2+1},A_{p-1})$	$q\equiv 0(4)$	$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p-1}\left(\sum_{\substack{r=1\\ r\equiv 1(2)}}^{q-1}\lvert\chi_{r,s}\rvert^2+\lvert\chi_{q/2,s}\rvert^2+\sum_{\substack{r=1\\ r\equiv 0(2)}}^{q/2-2}(\chi_{r,s}\chi^*_{p-r,s}+c.c.)\right)$
(E_6,A_{p-1})	$q=12$	$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p-1}\left(\lvert\chi_{1,s}+\chi_{7,s}\rvert^2+\lvert\chi_{4,s}+\chi_{8,s}\rvert^2+\lvert\chi_{5,s}+\chi_{11,s}\rvert^2\right)$
(E_7,A_{p-1})	$q=18$	$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p-1}\Big(\lvert\chi_{1,s}+\chi_{17,s}\rvert^2+\lvert\chi_{5,s}+\chi_{13,s}\rvert^2+\lvert\chi_{7,s}+\chi_{11,s}\rvert^2+\lvert\chi_{9,s}\rvert^2$ $[(\chi_{3,s}+\chi_{15,s})\chi^*_{9,s}+c.c]\Big)$
(E_8,A_{p-1})	$q=30$	$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p-1}\left(\lvert\chi_{1,s}+\chi_{11,s}+\chi_{19,s}+\chi_{29,s}\rvert^2+\lvert\chi_{7,s}+\chi_{13,s}+\chi_{17,s}+\chi_{23,s}\rvert^2\right)$

Sei die Zustandssumme allgemein von der Form $\sum_{r,s,r',s'}\mathcal{N}_{r,s,r',s'}\chi_{r,s}\chi^*_{r',s'}$, wobei die $\mathcal{N}_{r,s,r',s'}$ nicht negative ganze Zahlen sind. Wir können dann den chiralen Feldinhalt mittels des Isomorphismus zwischen dem Vektorraum der Felder und dem Hilbertraum der Zustände ablesen,

$$Z_{chiral} = \sum_{r,s}\mathcal{N}_{r,s,1,1}\chi_{r,s}\,. \tag{6.53}$$

Da bis auf das Virasoro-Feld alle einfachen Felder primär sein müssen, ist die Anzahl der primären Felder maximal $\sum_{r,s}\mathcal{N}_{r,s,1,1}$. Die oben erwähnten Lösungen, die eine um ein zusätzliches primäres Feld erweiterte Symmetrie-Algebra $\mathcal{W}(2,\delta)$ ergeben, lassen sich durch die nicht diagonalen Zustandssummen intepretieren, in denen Terme zu echt chiralen Unterdarstellungen auftreten, i.e. Terme der Form $\chi^*_{1,1}\chi_{r,s}$. Dabei sei bemerkt, daß der Term $\mid\chi_{1,1}+\chi_{11,1}+\chi_{19,1}+\chi_{29,1}\mid^2$ der (E_8,A_{p-1})-Invarianten zunächst eine $\mathcal{W}$-Algebra mit vier Generatoren suggeriert. Allerdings können wir mit Standardargumenten wie in Kapitel IV leicht sehen, daß das Feld $\phi_{11,1}$ bereits eine abgeschlossene Unteralgebra erzeugt, da die Dimensionen der anderen Felder zu groß sind. Die anderen Felder $\phi_{19,1}$ und $\phi_{29,1}$ sind dann nicht einfach. Die loakle chirale Algebra, in der sie mit enthalten sind, bildet dann nur im schwachen Sinne eine $\mathcal{W}$-Algebra.
Wir betrachten abschließend noch einen Sonderfall. Dazu nehmen wir an, es existiere eine Algebra $\mathcal{W}(2,\delta_1)$ mit $\delta_1 = h(p,12;7,1)$ korrespondierend zur (E_6,A_{p-1})-Invariante. Dann sind die drei Kombinationen

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}_{(1)} &= \chi_{1,1}+\chi_{7,1}\\ \tilde{\chi}_{(2)} &= \chi_{4,1}+\chi_{8,1}\\ \tilde{\chi}_{(3)} &= \chi_{5,1}+\chi_{11,1}\end{aligned}$$

die Charaktere der irreduziblen RPA der $\mathcal{W}(2,\delta_1)$-Algebra. Die zugehörigen primären Felder haben dann die jeweils kleinere Dimension. Diese drei RPA genügen einer Fusions-Algebra vom Ising-Typ [181], i.e. $[\tilde{\phi}_{5,1}]\star[\tilde{\phi}_{5,1}] = [\tilde{\phi}_{1,1}] = [\mathbb{1}]$. Der Argumentation zu Proposition $-39/10$ folgend stellt $\tilde{\phi}_{5,1}$ einen einfachen Strom mit Dimension $\delta_2 = \frac{q-4}{2}$ dar, um den wir die $\mathcal{W}(2,\delta_1)$ erweitern können.

[xli]Das erste Modell dieser Serie wäre eine $\mathcal{W}(2,12)$ bei $c_{5,18}$.

Da aus Dimensionsgründen das Feld mit Dimension δ_1 nicht im Kommutator von $\tilde{\phi}_{5,1}$ mit sich auftritt, erzeugt letzteres eine abgeschlossene Unteralgebra $\mathcal{W}(2,\delta_2) \subset \mathcal{W}(2, delta_1)$. Beispielsweise existieren die Algebren $\mathcal{W}(2,\frac{7}{2})$ und $\mathcal{W}(2,8)$ beide für die zentrale Ladung $c_{12,11} = \frac{21}{22}$, wobei $\delta_2 = \frac{7}{2} = h(11,12;5,1)$ und $\delta_1 = 8 = h(11,12;7,1)$ ist. Das Feld $\phi_{7,1}$ ist daher nicht einfach, $\phi_{7,1} \propto \mathcal{N}(\phi_{5,1}, \partial\phi_{5,1})$. Wir können dann $\mathcal{W}(2,\delta_1)$ als den bosonischen Sektor der $\mathcal{W}(2,\delta_2)$ intepretieren. Dies erklärt auch, warum die Selbstkopplung des Feldes $\phi_{7,1}$ nicht verschwindet.
Damit haben wir auch für die minimalen Modelle angegeben, unter welchen Umständen erweiterte Symmetrie-Algebren existieren. Anders als in den vorhergehenden Fällen, sind hier schon die Virasoro-Modelle rational, die größere Symmetrie der $\mathcal{W}$-Algebra verkleinert lediglich die Anzahl der irreduziblen RPA.
Auch dieses Muster setzt sich exakt auf den supersymmetrischen Fall mit $N = 1$ fort, was schon daran zu erkennen ist, daß die Struktur der $(p,q;r,s)$-Quadrupel ebenfalls aus der A-D-E-Klassifikation der superkonformen Zustandssummen [149] gewonnen werden kann.
Fassen wir kurz unseren Argumentationsweg zusammen, mit dem wir die Klassifikation aller TÆCR mit $c_{\mathit{eff}} \leq 1$ durchführen: In Kapitel IV (zusammen mit den obenstehenden Ausführungen zu minimalen Modellen) haben wir eine mathematisch rigorose vollständige Klassifikation aller regulären TÆCR mit $c_{\mathit{eff}} \leq 1$ erzielt und auch alle physikalisch relevanten Zustandssummen angegeben. Aus $c_{\mathit{eff}} \leq 1$ folgt, daß das zugrundeliegende Virasoro-Modell degeneriert sein muß, da die Charakttere sonst generisch durch $\eta^{-1}(\tau)$ gegeben wären, was unter $S : \eta^{-1}(-1/\tau) = (-i\tau)^{-1/2}\eta^{-1}(\tau)$ eine zu starke Singularität lieferte. Daher brauchen wir für den logarithmischen Fall nur noch die Modelle mit $c = c_{p,1}$ zu betrachten, da wir alle anderen Möglichkeiten degenerierter Virasoro-Modelle bereits vollständig behandelt haben. Diesen verbleibenden Fall können wir auf die Klassifikation der Gauss-Modelle mit $c = 1$ zurückführen. Es bleibt allerdings noch zu zeigen, daß wir damit *alle* physikalische relevanten Zustandssummen logarithmischer Modelle mit $c_{\mathit{eff}} = 1$ erhalten, wenngleich dies sehr plausibel ist.
Dies beschließt unsere Betrachtungen zur Klassifikation aller rationalen konformen Theorien mit $c_{\mathit{eff}} \leq 1$ bzw. $c_{\mathit{eff}} \leq 3/2$ im supersymmetrischen Fall.

7

Toccata
Der Fractionale Quanten-Hall-Effekt

In diesem letzten Kapitel wollen wir nun eine mögliche konkrete Anwendung von TÆC vorstellen. Motiviert wird dies durch die abschließenden Bemerkungen in Kapitel V. Wir wollen also aufzeigen, inwiefern unsere regulären nicht unitären Theorien mit $c_{\mathit{eff}} = 1$ den fraktionalen Quanten-Hall-Effekt zu beschreiben vermögen. Dies ist auch von allgemeinem Interesse, da bis jetzt nur sehr wenige konkrete Anwendungen nicht unitärer Theorien bekannt sind. Wir müssen aber bemerken, daß die Resultate dieses Kapitels keine mathematisch rigorosen Sätze, sondern eher phänomenologischer Natur sind. Wir haben es ja auch mit experimentell beobachtbaren Daten zu tun. Unsere Darstellung des EQFH ist knapp gehalten und unseres Behandlung eher konzeptionell. Wir stützen uns im wesentlichen auf die Bilder von R.B. Laughlin und J.K. Jain. Ausführliche Darstellungen des derzeitigen Standes von experimenteller Forschung und Theorie zum Quanten-Hall-Effekt findet sich in [907, 983].

Der Quanten-Hall-Effekt gehört sicher zu den interessantesten Phänomenen der Festkörperphysik, da er nicht so recht in das Bild kontinuierlicher Phasenübergänge passen will. Die transversale Leitfähigkeit eines zweidimensionalen Elektronengases in starken Magnetfeldern und bei niedrigen Temperaturen ist durch quantisierte Plateaux der Form $\sigma_{xy} = (e^2/h)\nu$ gegeben[xlii], wobei der sogenannte *Fillingfaktor* eine ganze oder rationale Zahl ist. Der ganzzahlige Quanten-Hall-Effekt (EQIH[xliii]) mit $\nu \in \mathbb{N}$ wurde von Klaus von Klitzing [733] im Jahre 1980 entdeckt, der EQFH ($\nu \in \mathbb{Q}_+ - \mathbb{N}$) 1982 von D.C. Tsu, H.L. Stromer und A.C. Gossard [997].

Obwohl sich beide Effekte in vielerlei Hinsicht sehr ähneln, gibt es einen fundamentalen Unterschied: Der EQIH läßt sich gut als ein Phänomen nicht wechselwirkender Elektronen beschreiben [761], während für den EQFH die Wechselwirkung wesentlich ist und zu einem neuartigen Aggregatzu-

[xlii] Der longitudinale Widerstand verschwindet auf den Plateaux.

[xliii] Effectus Quantus Integralis secundum Hall

stand der Elektronem führt, einem inkompressiblen Quantentropfen [769]. Dieses Kondensationsphänomen ließ sich zu einer hierarchischen Struktur mit Quasiteilchen und -löchern erweitern, die auf den fundamentalen Brüchen $\nu = 1/(2p+1)$ aufbauen [547, 563]. Die wiederholte Kondensation von Quasiteilchen erscheint allerdings physikalisch wenig sinnvoll. Eine andere phänomenologische Theorie von J.K. Jain betrachtet zusammengesetzte Teilchen aus Elektronen und "angehefteten" Flußquanten des Magnetfeldes [631, 641]. Sie vermag EQIH und EQFH einheitlich zu behandeln. Die neueren Experimente stehen in sehr gutem Einklang mit dieser Theorie [241, 1069, 569].
In allen heutigen Arbeiten zum EQFH spielt R.B. Laughlin's Ansatz der Wellenfunktion für $\nu = 1/(2p+1)$ [769] eine entscheidende Rolle. Dieser läßt sich zwar nicht strikt beweisen, stimmt aber mit numerisch exakten Lösungen extrem gut überein. Der Grundzustand hat demnach die Form

$$\psi_p = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{2p+1} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_i |z_i|^2\right) , \tag{7.1}$$

wobei p schon wegen des Pauli-Prinzips eine ganze Zahl sein sollte. In J.K. Jain's Bild, wo die Elektronen an $2p$ Flußquanten gebunden sind, ergeben sich die Wellenfunktionen aus denen des EQIH, ϕ_n, zu $\nu = n$ durch

$$\psi_\nu = D^{2p}\phi_n \quad \text{mit} \quad D = \prod_{i<j}(z_i - z_j) . \tag{7.2}$$

Mit Argumenten der Mean-Field-Theorie leitet man für diese Zustände den Fillingfaktor $\nu = n/(2pn \pm 1)$ ab. Die Laughlin-Wellenfunktionen ergeben sich gerade für $n = 1$. Die Forderung, eine gerade Anzahl von Flußquanten anzuheften, resultiert daraus, daß dann die Statistik des Elektrons fermionisch bleibt.

7.1 Mikroskopische Beschreibung

Wir betrachten ein zweidimensionales Elektron in einem transverslen Magnetfeld. Die Schrödinger-Gleichung lautet dann

$$H\psi = \frac{1}{2m}\left(p - \frac{e}{c}A^2\right)^2 \psi = E\psi , \tag{7.3}$$

wobei der Impuls $p = -i\hbar\nabla$ und das Eichpotential A in der Ebene existieren. In komplexen Koordinaten und dimensionslosen Größen sind Hamilton- und Drehimpuls-Operator dann gegeben als

$$H = a^\dagger a + a a^\dagger , \quad J = b^\dagger b - a^\dagger a , \tag{7.4}$$

wobei wir die Operatoren

$$\begin{array}{rclcrcl} a & = & \frac{z}{2} + \bar\partial & \qquad & a^\dagger & = & \frac{\bar z}{2} - \partial \\ b & = & \frac{\bar z}{2} + \partial & & b^\dagger & = & \frac{z}{2} - \bar\partial \end{array} \tag{7.5}$$

eingeführt haben, die die Standard-Vertauschungsregeln $[a, a^\dagger] = [b, b^\dagger] = 1$ mit allen anderen Kommutatoren gleich null erfüllen. Das Vakuum ist durch die Bedingungen $a\psi_{0,0} = b\psi_{0,0} = 0$ bestimmt zu

$$\psi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(\frac{1}{2}|z|^2) . \tag{7.6}$$

Die Lösungen der Schrödimger-Gleichung bilden dann unendlich entartete Landau-Level der Energien $2n + 1$ mit den Eigenfunktionen

$$\psi_{n,l} = \frac{(b^\dagger)^l (a^\dagger)^n}{\sqrt{l!n!}} \psi_{0,0} . \tag{7.7}$$

Die Einschränkung des Problems auf einen endlichen Bereich der Fläche A reduziert die Entartung, da zu hohe Drehimpulse zu "große" Wellenfunktionen erzeugen. Die Entartung ergibt sich zu $N_A = \Phi_{mag}/\Phi_0$, wobei $\Phi_{mag} = BA$ der magnetische Fluß durch die Fläche und $\Phi_0 = (h/e)$ ein einzelnes Flußquantum ist.

Nehmen wir an, wir hätten N solcher Elektronen. Wenn sie nicht miteinander wechselwirken, ergibt sich der Fillingfaktor zu $\nu = N/N_A$ und ist eine ganze Zahl aufgrund gewisser Eichbedingungen (ν kann als Chern-Charakter eines U(1)-Bündels über dem Parametertorus der magnetischen Flüße gedeutet werden [919, 743, 11, 617]).

Wir führen nun eine Wechselwirkung ein, die in Jain's Bild als die Wechselwirkung der angehefteten Flußquanten gedeutet werden kann. Dazu redefinieren wir die Operatoren $b_i, a_i^\dagger$, wobei der Index i von nun an die Elektronen nummeriert:

$$\begin{aligned} b_i &= \partial_i + \tfrac{\bar{z}_i}{2} - 2p\sum_{i\neq j}\tfrac{1}{z_i - z_j}\,, \\ a_i^\dagger &= -\partial_i + \tfrac{\bar{z}_i}{2} + 2p\sum_{i\neq j}\tfrac{1}{z_i - z_j}\,. \end{aligned} \tag{7.8}$$

In den Vertauschungsregeln treten durch diese Redefinition nun auch Terme $2p\pi\delta(z_i - z_j)$ auf, die wir nicht zu berücksichtigen brauchen, solange wir fermionische Statistik verlangen. Die daraus resultierende Theorie beschreibt den EQFH mit $\nu = 1/(2p+1)$, wobei die makroskopischen Observablen durch Addition wie im Fall ohne Wechselwirkung gewonnen werden, $H = \sum_{i=1}^N (a_i^\dagger a_i + a_i a_i^\dagger)$ und die Laughlin-Wellenfunktion (7.1) ist Eigenfunktion von H zum tiefsten Landau-Level.

Die Inkompressibilität des Quantentropfens ist gleichbedeutend mit der Invarianz der Theorie unter den flächenerhaltenden nicht singulären Diffeomorphismen. In der Tat konnte die zugehörige Symmetrie-Algebra für den EQIH von A. Cappelli, C.A. Trugenberger und G.R. Zemba [157] und für den EQFH von uns zusammen mit R. Varnhagen [379] konstruiert werden.

Proposition 6/7. *Mit den Definitionen von oben und $n, m \geq -1$ existieren Operatoren*

$$\mathcal{L}_{m,n} = \sum_{i=1}^N (b_i^\dagger)^{m+1}(b_i)^{n+1}\,, \tag{7.9}$$

die alle mit dem Hamilton-Operator vertauschen[xliv]*. Sie erzeugen die Algebra der flächenerhaltenden, nicht singulären Diffeomorphismen, $\mathcal{W}_{1+\infty} = \mathcal{W}(1,2,3,4,\ldots)$, mit den Vertauschungsregeln*

$$[\mathcal{L}_{n,m}, \mathcal{L}_{k,l}] = \sum_{s=0}^{\min(m,k)} \frac{(m+1)!(k+1)!}{(m-s)!(j-s)!(s+1)!}\mathcal{L}_{n+k-s,m+l-s} - (m \leftrightarrow l, n \leftrightarrow k)\,. \tag{7.10}$$

Weiter sind die Laughlin-Wellenfunktionen ψ_p aus (7.1) Tiefstgewichts-Zustände, i.e. mit $W_n^{(s)} \sim \mathcal{L}_{n+s-2,s-2}$ für $s \geq 1$, $n \geq -s+1$ als den Moden der Generatoren der Algebra mit Spin s gilt $W_n^{(s)}\psi_p = 0$ für $-s < n \leq -1$. ■

Wir halten noch eine wichtige Beobachtung fest: Die redefinierten Operatoren b_i und $a_i^\dagger$ haben für $p > 0$ nicht mehr $b_i^\dagger$ und a_i als ihre hermitesch Konjugierten, es sei denn, man führt das nicht triviale Integralmaß $d\mu = \prod_{i<j}|z_i - z_j|^{-4p}dz_1 \ldots dz_N$ ein. Dies ist ein erster Hinweis auf mögliche Nicht-Unitarität im EQFH.

Der Konfigurationsraum ist in unserem Fall gegeben durch $C_N = \{(z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N | z_i \neq z_j$ für $i \neq j\}$. Die Operatoren $a_i, a_i^\dagger$ können dann als kovariante Ableitungen auf einem $\mathrm{U}(1)^{\otimes N}$-Bündel über C_N angesehen werden, siehe auch [1021]. Die Krümmung ist dann gerade μ, also diejenige eines konstanten magnetischen Feldes zuzüglich den $2p$ Flußquanten pro Elektron. Solche Flußquanten kann man elegant mit Hilfe lokalisierter Wilson-Schleifen einer abelschen Chern-Simons-Theorie

[xliv] Es treten in der Tat auch keine Terme in δ-Funktionen auf.

beschreiben. Die N-Punkt-Funktion von Flußquanten lokalisiert an den Koordinaten z_i ist dann tatsächlich proportional zu μ, wenn man die Wilson-Schleifen durch Vertexoperatoren ausdrückt [29]. Dies ist unser erster Hinweis darauf, daß es einen Zusammenhang zwischen den Laughlin-Wellenfunktionen (7.1) und Korrelationsfunktionen von Vertexoperatoren gibt, der schon länger vermutet wird [977, 439, 193, 823].
Einem Argument von A. Lopez und E. Fradkin zufolge ändert das Addieren von $2p$ Flußquanten die Erwartungswerte nicht. Man überzeugt sich leicht davon, daß wirklich $\int \psi_p^\dagger \psi_p d\mu$ von p unabhängig ist. Allerdings bleiben nicht alle Observablen unverändert (sonst wäre die Theorie ja auch trivial), da das Addieren der Flußquanten das effektive magnetische Feld ändert. Weiter hat bereits E. Verlinde gezeigt [1021], daß ein Hamilton-Operator ohne Wechselwirkung zwischen den Teilchen eine nicht triviale Streumatrix impliziert, wenn eine Substitution der Art $\partial_i \to \partial_i + \alpha \sum_{j\neq i} 1/(z_i - z_j)$ und $\bar\partial_i \to \bar\partial_i$ durchgeführt wird.
Das wichtigste Ergebnis unserer sehr knappen Einführung ist jedoch das folgende: B.I. Halperin hat gezeigt [557], daß es im EQH sogenannte gap-lose Anregungen gibt, i.e. angeregte Zustände zur selben Energie, siehe auch [1039, 977]. Da die Generatoren der $\mathcal{W}_{1+\infty}$-Algebra mit dem Hamilton-Operator vertauschen, stellen offensichtlich die Zustände

$$W_{n_1}(s_1) W_{n_2}^{(s_2)} \dots W_{n_k}^1(s_k)\psi_p \quad \text{mit } s_i \geq s_{i+1} \text{ und } s_i = s_{i+1} \Longrightarrow n_i \geq n_{i+1}$$

das Spektrum der gap-losen Anregungen dar, die man sich als angeregte Bewegungen bzw. Schwingungen des Randes des Tropfens vorstellt. Daher heißen sie auch Rand-Anregungen. Diese Anregungen lassen sich immer als ψ_p multipliziert mit einer vollständig symmetrischen Funktion schreiben. Andererseits erhalten wir aber schon allein mit dem Strom $j \equiv W^{(1)}$ ein vollständiges System aller symmetrischen Funktionen, nämlich Produkte der Potenzsummen $s_k = \sum_{i=1}^N z_i^k$, i.e.

$$j_{n_1} j_{n_2} \dots j_{n_k}\psi_p = s_{n_1} s_{n_2} \dots s_{n_k}\psi_p$$

ist eine Basis aller symmetirschen Funktionen, wenn $n_i \geq n_{i+1}$. Wir haben also eine sehr hohe Redundanz im Spektrum. Der Charakter des Spektrums ist weiter nichts als die erzeugende Funktion der Partitionen,

$$\chi_{Rand}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}\,. \tag{7.11}$$

Allein die positiven Moden des Stromes erzeugen alle Rand-Anregungen, die man daher als Oberflächenwellen deuten kann, die in dieselbe Richtung mit der selben Geschwindigkeit laufen. Dies bedeutet insbesondere, daß eine zweidimensionale Quantenfeldtheorie, die EQH beschreiben soll, chiral sein muß, zumindest für $\nu = 1/(2p+1)$. Das Spektrum ist generisch äquivalent zu dem einer U(1)-Kac-Moody-Algebra bei Level eins. Allerdings haben wir ja nur eine explizite Darstellung der positiven Moden in Proposition 6/7 konstruiert. Um nun eine Sesquilinearform auf dem Raum der Rand-Anregungen einführen zu können, müßten wir wissen, was die negativen Moden der Felder $W(s)$ wären. Naiv würde man hier zunächst an die singulären Diffeomorphismen denken. Eine Invarianz der Theorie auch unter diesen macht wenig Sinn, da sie die Topologie des Tropfens aufgrund der Singularität zerreißen würden. Es ist auch nach der obigen Bemerkung zum nicht trivialen Integrationsmaß klar, daß wir nicht unbedingt Hermitizität erwarten, i.e. $(W_n^{(s)})^\dagger = W_{-n}^{(s)}$, sondern vermutlich eher eine nicht unitäre Theorie. Vor allem im nicht unitären Fall ist die Sesquilinearform keineswegs notwendig positiv definit, und es kann singuläre Vektoren geben. Mit den Argumenten aus Kapitel III folgt

Proposition -14/11. *Angenommen, die Rand-Anregungen lassen sich durch eine auf dem Rand definierte TÆC beschreiben, die zur Chern-Simons-Theorie assoziiert ist, welche das Anheften der Flußquanten an die Elektronen beschreibt. Dann wird diese TÆC durch einen U(1)-Strom erzeugt und hat maximal den durch (7.11) gegebenen Spektrum-Charakter, ist also eine Theorie mit* $c_{\mathit{eff}} \leq 1$.
■

Beachten wir, daß das nicht triviale Maß μ, das von dem nicht flachen Knizhnik-Zamolodchikov-Zusammenhang herrührte, durch eine Korrelationsfunktion einer Theorie mit $c_{eff} = 1$ gegeben ist, können wir die letzte Aussage von Proposition $-14/11$ entsprechend verschärfen. Wir werden daher in den folgenden Abschnitten prüfen, ob unsere regulären nicht unitären TÆCR mit $c_{eff} = 1$ gegeignet sind, EQFH zu beschreiben.

7.2 Konforme Feldtheorie

Die TÆCR, mit denen wir den EQFH beschreiben wollen, leben zunächst auf dem Rand des Tropfens. Genauer gesagt leben sie für jede Zusammenhangskomponente des Randes (die wir uns als Kreis vorstellen können) auf einem Zylinder $S^1 \times \mathbb{R}$, wobei die zweite Richtung für die Zeit steht. Wir wollen aber annehmen, daß sich die Theorie analytisch wieder auf die Ebene fortsetzen läßt und die Korrelationsfunktionen dann wirklich die Wellenfunktionen der Quantentropfen darstellen. Dabei gehen wir nicht davon aus, daß alle beobachteten EQH-Plateaux durch ein und dieselbe TÆCR beschrieben werden. Der vorhergehende Abschnitt motiviert nun folgende Annahmen an die möglichen TÆCR-Kandidaten, die EQFH beschreiben könnten:

- die TÆCR haben $c_{eff} = 1$;
- die Fermionen und die angehefteten Flußquanten lassen sich durch Vertexoperatoren beschreiben;
- die Wellenfunktionen zu $\nu = 1/(2p+1)$, die am ausgeprägtesten und stabilsten sind, sollten mit Korrelatoren von Vertexoperatoren aus den RPA zu Grundzuständen beschrieben werden;
- es soll das Prinzip *maximaler Chiralität* gelten, i.e. die lokalen Vertexoperatoren seien so aus links- und rechts-chiralem Anteil kombiniert, daß $|\bar{h}|$ minimal ist;

Die letzte Forderung können wir für den EQFH zu $\nu = 1/(2p+1)$ verschärfen. Hier erwarten wir völlig chirale Vertexoperatoren, $\bar{h} = 0$. Bevor wir aber nun geeignete TÆCR angeben, müssen wir noch einen Punkt diskutieren. Die Laughlin-Wellenfunktionen (7.1) besitzen einen nicht holomorphen, exponentiellen Faktor $\exp(-1/2\sum_i |z_i|^2)$. Die Korrelationsfunktionen von den in (2.73) definierten chiralen Vertexoperatoren ψ_α können diesen nicht ohne weiteres reproduzieren[xlv]. Es gilt nämlich

$$\langle \Omega^*_{-\alpha_0}, \psi_{\alpha_1}(z_1)\dots\psi_{\alpha_N}(z_N)\Omega_0\rangle = \prod_{i<j}(z_i - z_j)^{2\alpha_i\alpha_j}\,, \tag{7.12}$$

wenn $|z_1| > \dots > |z_N|$ und $\sum_{i=1}^N \alpha_i = \alpha_0$ ist, wobei α_0 die Hintergrundsladung und Ω_α das zum Superauswahlsektor zur Ladung α gehörende Vakuum bezeichnet (siehe Abschnitt II.8). Mit solchen Korrelatoren können wir zwar den Produktteil der Laughlin-Wellenfunktion erzeugen, nicht aber den Exponentialterm. Entweder schreibt man diesen explizit als zusätzlichen Faktor in das Integralmaß μ, oder man führt einen zusätzlichen Term $\exp(-i\alpha\int d^2z'\bar{\rho}\phi(z'))$ in den Korrelator (7.12) ein, wobei ϕ das freie Feld und $\bar{\rho}$ eine mittlere Dichte $(\pi\alpha^2)^{-1}$ ist. Ausintegrieren dieses Termes über eine Kreisscheibe der Fläche $2\pi\alpha^2 N$ ergibt im Realteil den korrekten Exponentialterm für N Elektronen, während der Imaginärteil eine singuläre Phase darstellt, die durch eine ebenfalls singuläre Eichtransformation eliminiert werden kann. Die Eichtransformation stellt dabei genau das äußere uniforme magnetische Feld dar [823]. Im folgenden werden wir den Exponentialterm oft nicht mehr explizit ausschreiben und den Beitrag des äußeren magnetischen Feldes in $\Omega^*_{-\alpha_0}(N)$ absorbieren, da das Integral auch die Hintergrundsladung modifiziert.

Betrachten wir nun fermionische Theorien mit $c = 1 - 24k, k \in \mathbb{Z}_+ + \frac{1}{2}$ (siehe Kapitel IV). Sei $k = (2p+1)/2, l \in \mathbb{Z}_+$. Die Hintergrundsladung ist gerade $\alpha_0 = \sqrt{k}$. Der Zustand niedrigster Energie hat L_0-Eigenwert $h(\alpha_{0,0}) = -\alpha_{0,0}^2 = -k$. Wie wir in Kapitel IV gesehen haben, treten in der zugehörigen RPA keine geschirmten Vertexoperatoren auf, so daß wir (7.12) direkt anwenden

[xlv] Die Wellenfunktionen im Landau-Grundzustand sind Schnitte in einem holomorphen Vektorbündel. Die Ableitung $\bar{\partial}$ kann daher eine mit einer beliebigen Funktion multiplizierte Derivation nach $\bar{z}$ sein.

können. Im Spektrum dieser RPA liegt auch ein Zustand, der durch einen Vertexoperator $\psi_{\alpha_{1,1}}$ erzeugt wird und Gewicht $h(\alpha_{1,1}) = 0$ hat. Die vollständige symmetrische Theorie enthält also einen lokalen Operator $V_{(0,0|1,1)}(z,\bar{z}) \equiv \psi_{\alpha_{0,0}}(z) \otimes \psi_{\alpha 1,1}(\bar{z})$. Seine n-Punkt-Funktion ist

$$\langle \Omega^*_{-\sqrt{k}}(N), \prod_{i=1}^{N} V_{(0,0|1,1)}(z_i,\bar{z}_i)\Omega_0\rangle = \prod_{i<j}(z_i - z_j)^{2p+1} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_i |z_i|^2\right) , \tag{7.13}$$

also genau das gewünschte Resultat. Man beachte, daß damit *alle* oben gemachten Forderungen erfüllt sind! Wir können die Laughlin-Wellenfunktionen für $\nu = 1/(2p+1)$ durch eine N-Punkt-Funktion einer nicht unitären TÆCR mit $c_{eff} = 1$ ausdrücken[xlvi].

Ein großer Vorteil dieses Zugangs über konforme Feldtheorie liegt darin, daß man auch die Wellenfunktion für periodische Randbedingungen erhält. In der Tat stellt das physikalische System eigentlich einen Torus dar, da zum Messen der Ströme bzw. Spannungen Stromkreise geschlossen werden müssen. Erzeugt man den longitudinal fließenden Strom über ein Magnetfeld und mißt die Hall-Spannung über ein induziertes weiteres Magnetfeld, erhält man den sogenannten *magnetischen Torus* über die Eichinvarianz modulo ganzer magnetischer Flußquanten. Der Torus habe wie üblich den modularen Parameter τ mit (komplexen) Kantenlängen L_x, L_y. Dann lautet die allgemeine N-Punkt-Funktion

$$\langle \Omega^*_{-\alpha_0}(N), \psi_{\alpha_1}(z_1)\ldots\psi_{\alpha_N}(z_N)\Omega_0\rangle_l^{g=1} = \prod_{i<j}\left(\frac{\Theta[{}^{1/2}_{1/2}](\frac{z_i-z_j}{L_x}|\tau)}{\Theta'[{}^{1/2}_{1/2}](0|\tau)}\right)^{2\alpha_i\alpha_j} \Theta\begin{bmatrix} l/\alpha_0^2 \\ 0\end{bmatrix}\left(\frac{Z\alpha_0^2}{L_x}\middle|\tau\alpha_0^2\right) , \tag{7.14}$$

wobei $Z = \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i/\alpha_0$ der Ladungsschwerpunkt ist. Die sogenannten *Θ-Funktionen mit Charakteristik* sind definiert durch

$$\Theta\begin{bmatrix} a \\ b\end{bmatrix}(z|\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi\tau\frac{(n+a)^2}{2}+2i\pi(n+a)(z+b)} ,$$

und Θ' steht für $\partial_z\Theta$. Betrachten wir unseren konkreten Fall, so erhalten wir die Laughlin-Wellenfunktionen auf dem Torus,

$$\langle \Omega^*_{-\sqrt{k}}(N), \prod_{i=1}^{N} V_{(0,0|1,1)}(z_i,\bar{z}_i)\Omega_0\rangle_l^{g=1} =$$
$$\prod_{i<j}\left(\frac{\Theta[{}^{1/2}_{1/2}](\frac{z_i-z_j}{L_x}|\tau)}{\Theta'[{}^{1/2}_{1/2}](0|\tau)}\right)^{2p+1} \Theta\begin{bmatrix} l/(2p+1) \\ 0\end{bmatrix}\left(\frac{(2p+1)Z}{L_x}\middle|(2p+1)\tau\right) , \tag{7.15}$$

die nun $(2p+1)$-fach entartet sind. Diese Entartung rührt von der Möglichkeit einer zusätzlichen Quantenzahl her, die das "Vakuum" mit Hintergrundsladung auf dem Torus tragen kann. Sie folgt aus den Eigenschaften der Darstellung der Zopfgruppe auf dem Torus, die durch die Vertexoperatoren vermittelt wird. Wir wollen die Funktionen (7.15) mit $\psi_{p,l}(z_1,\ldots,z_n)$ bezeichnen. Auf diesem $(2p+1)$-dimensionalen Raum operieren die sogenannten *magnetischen Translationen* S_a und T_b. Für die "elementaren" Schritte $a = L_x/(2p+1)$ und $b = L_y/(2p+1)$ gilt dann

$$S_a\psi_{p,l} = e^{\pi i\frac{l}{2p+1}}\psi_{p,l} , \qquad T_b\psi_{p,l} = \psi_{p,l+1} .$$

Ferner ist $\psi_{p,l}$ auch unter Austauschen von L_x und L_y, i.e. $\tau \to -1/\tau$ kovariant, da

$$\Theta\begin{bmatrix} l/(2p+1) \\ 0\end{bmatrix}\left(\frac{z\sqrt{2p+1}}{\tau}\middle| -\frac{(2p+1)}{\tau}\right) =$$
$$e^{i\pi z^2/\tau}\sqrt{\frac{\tau}{i(2p+1)}}\sum_{l'=1}^{2p+1} e^{-2\pi i\frac{ll'}{2p+1}}\Theta\begin{bmatrix} l'/(2p+1) \\ 0\end{bmatrix}\left(z\sqrt{2p+1}\middle| -(2p+1)\tau\right)$$

[xlvi] Man kann dies auch mit Vertexoperatoren einer rationalen unitären $c = 1$-Theorie tun, erhält dann aber die Laughlin-Wellenfunktion nicht aus der RPA zum Grundzustand niedrigster Energie [193].

ist. Soweit können wir also auf einfache Weise den EQFH mit $\nu = 1/(2p+1)$ mit Hilfe der nicht-unitären TÆCR mit $c = 1 - 12(2p+1)$ und maximaler chiraler Symmetrie-Algebra $\mathcal{W}(2, \frac{3}{2}(2p+1))$ beschreiben. Auf dem Torus können wir die korrekte Entartung reproduzieren. Die Beschreibung involviert den chiralen Vertexoperator zur RPA minimaler Energie. Ferner beachte man, daß der EQIH mit $\nu = 1$ von uns mit der nicht-unitären TÆCR $\mathcal{W}(2, \frac{3}{2})$ bei $c = -11$ beschrieben wird, also der $N = 1$-Super-Virasoro-Algebra. In der Literatur ist schon öfter diskutiert worden, daß Hochtemperatur-Supraleitung und EQH mit $N = 1$-Theorien in Zusammenhang stehen könnten.

7.3 Anyonen und Fusion

Bis jetzt können wir lediglich die EQFH-Zustände mit $\nu = 1/(2p+1)$ beschreiben. Die Idee ist nun, die anderen beobachteten Zustände aus den weiteren RPA der $\mathcal{W}(2, \frac{3}{2}(2p+1))$-Algebren zu gewinnen, bzw. aus Korrelatoren der zugehörigen Vertexoperatoren. Die physikalische Vorstellung ist folgende: Wenn sich das System in einem Zustand mit $\nu = 1/(2p+1)$ befindet und nun das äußere Magnetfeld erhöht wird, geht das System zunächst in angeregte Zustände über, i.e. in RPA höherer Energien, die noch zur selben TÆCR gehören, so daß sich die Entartung der Wellenfunktionen nicht ändert. Erst ab einem kritischen Wert kommt es zu einem Phasenübergang in einen Zustand einer anderen TÆCR. Dieser Phasenübergang wird nach neuesten Überlegungen vermutlich durch nicht-unitäre Theorien mit $c = 0$ beschrieben[xlvii].
Die Zunahme des äußeren Magnetfeldes bleibt solange ohne nennenswerte Wirkung, wie nicht an die überwiegende Zahl der Elektronen je zwei weitere Flußquanten angeheftet worden sind. Dieses Anheften wollen wir durch das Fusionieren entsprechender Vertexoperatoren beschreiben, $V_{(0,0|1,1)}(z)$ für das Elektron mit bereits $2p$ Flußquanten $V_{(\frac{2p}{2p+1},\frac{2p}{2p+1}|\frac{2p}{2p+1},\frac{2p}{2p+1})}(w)$ für ein einzelnes Flußquant. Zwar tragen zu der Fusion im allgemeinen Felder verschiedener RPA bei, jedoch mit unterschiedlichen Potenzen in $(z-w)$ für $w \to z$. Unter Fusion wollen wir daher die Projektion auf den führenden Term verstehen. Solange die Zahl der Flußquanten deutlich kleiner als die der zur Verfügung stehenden Elektronen ist, verhalten sich die Flußquanten, die mit einzelnen Elektronen wechselwirken, untereinander wie Anyonen [1063, 823], i.e. wie Teilchen mit fraktionaler Statistik. Dies sehen wir explizit, wenn wir M solche Flußquanten in den Korrelator (7.13) einfügen,

$$\begin{aligned} &\langle \Omega^*_{-\sqrt{k}}(N,M), \prod_{j=1}^{M} V_{(\frac{2p}{2p+1},\frac{2p}{2p+1}|\frac{2p}{2p+1},\frac{2p}{2p+1})}(w_j,\bar{w}_j) \prod_{i=1}^{N} V_{(0,0|1,1)}(z_i,\bar{z}_i)\Omega_0\rangle = \\ &\qquad \prod_{j<j'} |w_i - w_{j'}|^{1/(2p+1)} \prod_{i,j}(z_i - w_j) \prod_{i<i'}(z_i - z_{i'})^{2p+1} e^{-\frac{1}{2}\sum_i |z_i|^2 - \frac{1}{2(2p+1)}\sum_j |w_i|^2} . \end{aligned} \tag{7.16}$$

In der Tat haben die Flußquanten den statistischen Parameter $\theta = 2\pi/(2p+1)$ und die fraktionale Ladung $e/(2p+1)$. Wir können auf diese Weise die Anregungen des Laughlin-Zustandes beschreiben. Die verschiedenen RPA, aus denen wir Vertexoperatoren wählen können, ergeben dabei die verschiedenen möglichen Anregungen mit fraktionaler Statistik. Einer gängigen Idee zu Folge stellen die Flußquanten sogenannte Quasilöcher dar [547, 557, 563, 569]. Man konstruiert dann Fillingfaktoren $\nu \neq 1/(2p+1)$ aus Kondensaten von N Elektronen und $2qM$ Flußquanten mit $\nu^* = \nu/(2q\nu+1)$ im thermodynamischen Limes $N, M \to \infty$. Dies ist das sogenannte Hierarchie-Schema der EQFH. Später hat J.K. Jain eine andere Deutung des EQFH geliefert [631, 641, 431, 433]: Er gibt die Idee nur partiell gefüllter Landau-Level auf. Die effektiven Teilchen sind Fermionen, die aus einem Elektron und $2p$ angehefteten Flußquanten bestehen, und die insgesamt n Landau-Level vollständig füllen. Der Fillingfaktor ist dann $\nu = n/(2pn \pm 1)$, wobei das Vorzeichen von der Richtung des

[xlvii] Man beachte, daß es sehr wohl nicht triviale Theorien mit $c = 0$ geben kann, wenn man die Forderung nach Unitarität fallen läßt.

äußeren Magnetfeldes abhängt. Wir wollen dieses Bild nun mit Hilfe von Fusion beschreiben. Lassen wir nämlich mit $M = N$ in (7.16) die Koordinaten der Flußquanten gegen diejenigen der Elektronen streben, $w_i \to z_i$, können wir die EXPO der Felder einsetzen und den führenden Term betrachten. Da sich aber der rechts-chirale Teil des Vertexoperators $V_{(0,0|1,1)}(z, \bar{z})$ wie die Identität verhält, erhalten wir nach Einsetzen der EXPO keinen rein links-chiralen Ausdruck mehr. Die links-chirale EXPO wird mit $\psi_{\alpha_{\frac{2p}{2p+1},\frac{2p}{2p+1}}}(\bar{z})$ tensoriert. Wiederholen wir die Prozedur ein zweitesmal und heften somit zwei Flußquanten an, ist der führende rechts-chirale Term aber gerade wieder $\psi_{\alpha_{1,1}}(\bar{z})$, und wir erhalten in führender Ordnung wieder einen links-chiralen Vertexoperator. Nach den Fusionregeln für die $\mathcal{W}(2, \frac{3}{2}(2p+1))$-Algebren, die sich mit Kapitel III bestimmen lassen, tritt im links-chiralen Teil die Identität nicht auf, der führende Term ist daher durch den *chiralen* Vertexoperator $V_{(\frac{p+1}{2p+3}, p+12p+3|1,1)}(z, \bar{z})$ gegeben.
Damit haben wir gezeigt, daß sich das Anheften einer *geraden* Anzahl von Flußquanten durch Fusion beschreiben läßt. Ausgehend von den Laughlin-Zuständen mit $\nu = 1/(2p+1)$ erhalten wir symbolisch die Fusion

$$\left([\phi_{0,0}] \star \left[\phi_{\frac{2p}{2p+1},\frac{2p}{2p+1}}\right]\right) \star \left[\phi_{\frac{2p}{2p+1},\frac{2p}{2p+1}}\right] = \left[\phi_{\frac{2p+1}{2p+3},\frac{2p+1}{2p+3}}\right] + \ldots, \tag{7.17}$$

wobei wir Terme niedrigerer Ordnung nicht ausgeschrieben haben. Die Felder auf der rechten Seite gehören allerdings zur RPA maximaler Energie (außer der Vakuum-RPA). Das Anheften von Flußquanten führt also zu extrem angeregten Zuständen. J.K. Jain [631, 641] wies nun bereits darauf hin, daß das Anheften der Flußquanten auch die Größe des Systems ändert, so daß die totale magnetische Flußdichte konstant bleibt. Man beachte aber, daß die effektiven konformen Gewichte $h_{eff} = h - \frac{c}{24}$ der TÆCR mit $c = 1 - 12(2p+1)$, die durch $h_{\frac{\lambda}{2p+1}, -\frac{\lambda}{2p+3}}$ gegeben sind, mit den effektiven Gewichten $h_{\frac{\lambda}{2p+3},\frac{\lambda}{2p+3}}$ der TÆCR zu $c = 1 - 12(2p+3)$ übereinstimmen,

$$h_{\frac{\lambda}{2p+3}, -\frac{\lambda}{2p+3}} + \frac{2p+1}{2} - \frac{1}{24} = h_{\frac{\lambda}{2p+3},\frac{\lambda}{2p+3}} + \frac{2p+3}{2} - \frac{1}{24}.$$

Die geänderte Größe des Systems, die letztlich aus dem geänderten Magnetfeld resultiert, erzwingt, daß der angeregte Zustand in den Grundzustand der TÆCR mit $c = 1 - 12(2p+3)$ und Symmetrie-Algebra $\mathcal{W}(2, \frac{3}{2}(2p+3))$ übergeht. Es kommt zu einem Phasenübergang zu den zusammengesetzten Elektronen, der zu einem Übergang zwischen zwei TÆCR korrespondiert.

Proposition -36/13. *Der EQFH mit $\nu = 1/(2p+1)$ wird durch Korrelatoren chiraler Vertexoperatoren aus der RPA zum Grundzustand der nicht-unitären TÆCR mit zentraler Ladung $c = 1 - 12(2p+1)$ beschrieben. Das Anheften von zwei Flußquanten wird durch zweimalige Fusion mit Vertexoperatoren $V_{(\frac{2p}{2p+1},\frac{2p}{2p+1}|\frac{2p}{2p+1},\frac{2p}{2p+1})}$ dargestellt. Der dabei auftretende Phasenübergang entspricht einem Übergang des angeregten Zustandes in den Grundzustand der "nächsten" TÆCR mit $c = 1 - 12(2p+3)$. Der Fillingfaktor ändert sich dabei zu $\nu = 1/(2p+3)$.* ■

7.4 Geometrie und Modul-Gruppe

Aus Kapitel IV kennen wir die Zustandssummen der oben erwähnten TÆCR. Mit der dort eingeführten Notation (4.28) sind sie $Z_{ferm}[1/(2p+1), 1/(2p+3)](\tau, \bar{\tau})$. Wir haben weiter oben bereits bemerkt, daß der modulare Parameter die Konfiguration des physikalischen bzw. magnetischen Torus beschreibt. Die Modul-Invarianz der Zustandssumme sagt aus, daß die Theorie "topologisch" ist, i.e. nicht von der genauen Geometrie des magnetischen Torus abhängt. Doch was ist die Bedeutung der beiden Radien? Wir wollen diese Radien als die Ränder eines Kreisringes deuten, in dem der wechselwirkende Teil des Quantentropfens liegt. Die Änderung der Systemgröße durch

Anheften zweier Flußquanten ersieht man dann direkt: Das Radien-Paar $(1/(2+1), 1/(2p+3))$ wird zu $(1/(2p+3), 1/(2p+5))$, bzw. zu $(1/(2p-1), 1/(2p+1)$ bei umgekehrter Polung des Magnetfeldes. Wir haben noch eine weitere Möglichkeit, das System zu verändern: Wir können den Strom verändern, und damit die Zahl der besetzten Landau-Level. Auch dies ändert die Radien. Hinzufügen eines weitern Landau-Levels führt zu $((2p+4)/(2p+1), (2p+2)/(2p+3))$.
Zu diesem Ergebnis kommt man durch die Annahme, daß auf dem "Parameterraum" eine unendlich große diskrete Gruppe operiert, zum Beispiel eine Untergruppe der Modulgruppe [797, 569]. Der Parameterraum ist hier der durch die beiden Größen $2R_1^2$ und $2R_2^2$ aufgespannte Modul-Raum $\mathbb{R}_+^2$ der Zustandssummen $Z_{ferm}[2R_1^2, 2R_2^2]$. Aus Kapitel IV wissen wir, daß die rationalen Theorien die Bedingung

$$\det \begin{pmatrix} p' & p \\ q & q' \end{pmatrix} = 2 \tag{7.18}$$

erfüllen müssen, wobei $2R_1^2 = p/q$ und $2R_2^2 = p'/q'$ ist. Der Fillingfaktor ist dann gegeben durch $\nu = p'/q$ und hängt auf völlig nicht-lineare, "chaotische" Weise von den Radien ab. Folgende Transformationen von ν lassen sich physikalisch motivieren:

$$\begin{array}{lcll} \nu & \to & \nu/(2\nu+1) & \text{Anheften zweier } \uparrow -\text{Flußquanten}, \\ \nu & \to & \nu/(2\nu-1) & \text{Anheften zweier } \downarrow -\text{Flußquanten}, \\ \nu & \to & \nu+1 & \text{Auffüllen eines weiteren Landau} - \text{Levels}, \\ \nu & \to & 1-\nu & \text{Teilchen} - \text{Loch} - \text{Dualität}. \end{array} \tag{7.19}$$

Die ersten drei Transformationen werden durch die Untergruppe $\Gamma_T(2)$ von $\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ erzeugt, die durch $ST^{-2}S$ und T aufgespannt wird (die zweite Transformation ist durch ST^2S gegeben, wenn man anschließend die Radien unter Vorzeichenwechsel vertauscht). Die letzte Transformation ist kein Element der Modulgruppe. Sie hat aber ebenfalls eine natürliche Erklärung. Die Zustandssumme $Z_{ferm}[p/q, p'/q']$ besitzt in jedem ihrer Argumente die Eigenschaft (2.10) der Dualität. Dem entspricht das Vertauschen der Elemente der Diagonalen bzw. der Offdiagonalen in der Matrix in (7.18), die wir mit $D_/$ bzw. $D_\backslash$ bezeichnen wollen, $D_\backslash D_/ = D_/ D_\backslash = D_\times$. Normalerweise müßten wir die Definition von ν entsprechend angleichen. Allerdings entspricht $D_\times$ effektiv einem Vertauschen des inneren und des äußeren Radius. Wenn wir uns vorstellen, daß die Anregungen auf dem äußeren Radius, wie im ersten Abschnitt erläutert, links-chiral sein sollen, die auf dem inneren hingegen rechts-chiral, so wird der Drehsinn der Randanregungen gerade vertauscht. Ähnliches passiert, wenn wir die Transformation TS betrachten, die nicht in $\Gamma_T(2)$ enthalten ist und die ν auf $1-1/\nu$ abbildet. Beide Transformationen zusammen ergeben aber gerade die Teilchen-Loch-Dualität. Genauer gibt eine Matrix, die (7.18) erfüllt, zwei Fillingfaktoren, $(\nu, \nu^*) = (p'/q, p/q')$, der erste bezieht sich auf Elektronen, der zweite auf Lochanregungen. Die Transformation $TSD_\times$ bildet (ν, ν^*) nach $(1-\nu^*, 1-\nu)$ ab, macht also den Austausch von Teilchen und Löchern explizit sichtbar. Ebenso bildet die zweite Transformation, ST^2S, eigentlich (ν, ν^*) auf $(\nu/(1-2\nu), \nu^*/(1-2\nu^*))$ ab. Das Umpolen des Magnetfeldes vertauscht aber ebenfalls Links- und Rechts-Chiralität. Um dem Rechnung zu tragen, müsen wir die Radien vertauschen. Da dies jedoch das Vorzeichen der Determinante (7.18) ändern würde, erhalten die neuen Fillingfaktoren ebenfalls noch ein Vorzeichen. Die Abbildung ist dann korrekterweise $(\nu, \nu^*) \to (\nu^*/(2\nu^*-1), \nu/(2\nu-1))$.
Die physikalische Bedeutung der zwei Radien wäre dann die folgende: Der Quantentropfen besitzt einen äußeren Kreisring, der mit den Flußquanten wechselwirken kann und in dem sich die zusammengesetzten Elektronen bilden können. Wenn man sich den Quantentropfen als eine Art Atom vorstellt, so stellt der Kreisring die Valenzzone dar. Seine Größe wird durch die beiden Radien der Zustandssumme in magnetischen Einheiten parametrisiert.
Die Theorien mit nichtdiagonalen Zustandssummen liefern dann diejenigen Fillingfaktoren, die nicht zu Laughlin-Zuständen gehören. Es ist bemerkenswert, daß nicht alle Fillingfaktoren, die nach den oben genannten Vorschriften gebildet werden können, auch gemessen wurden. Unser Bild

liefert dafür eine natürliche Erklärung. Die mit den Matrizen aus $\Gamma_T(2)$ gebildeten Kettenbrüche für (ν, ν^*) sind zwar immer rationale Zahlen mit teilerfremdem Nenner und Zähler, nicht jedoch zwingend die Radien, die aus den Zahlenpaaren auf der Diagonalen bzw. Offdiagonalen gebildet werden. Die zugehörigen TÆCR existieren aber nur dann, wenn beide Radien teilerfremde Zähler und Nenner haben.

Sei ν vorgegeben. Dann existieren unendlich viele Matrizen zu ν, die (7.18) genügen. Sei nämlich $\nu = a/c$ und $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ eine geeignete Matrix. Dann sind auch alle Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} a & b+kc \\ c & d+ka \end{smallmatrix}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ geeignete Matrizen. Im folgenden wollen wir annehmenm, daß b, d immer minimal gewählt seien, i.e. $|bd| > 0$ so klein wie möglich. Das zugehörige Paar von Fillingfaktoren sei mit (ν, ν_0^*) bezeichnet, die Paare für die anderen Lösungen entsprechend mit (ν, ν_k^*). Wie oben bemerkt, ist die minimale Lösung (ν, ν_0^*) nicht notwendig eine, zu der eine TÆCR existiert. Zu gegebenem ν wählen wir dann (ν, ν_k^*) mit $k \geq 0$ so klein wie möglich aus, so daß auch die Radien durch nicht mehr zu kürzende Brüche gegeben sind. Je größer k gewählt werden muß, desto mehr ist die zugehörige TÆCR nicht unitär, $c = 1 - 12a(d + kc)$, desto größer ist die RPA zum minimalen Tiefstgewicht und desto unwahrscheinlicher ist es, daß das System diese TÆCR wählt.

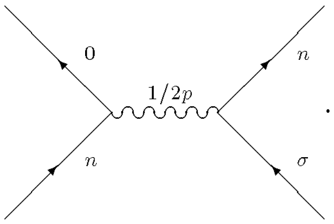
Diese Argumentation läßt sich zu einem allgemeinen Prinzip ausbauen, das möglicherweise sogar die Existenz der Plateaux erklären kann. Auf der einen Seite können wir jedes $\nu \in \mathbb{R}$ durch einen mit $\ldots(ST^{-2p_3}S)T^{n_3}(ST^{-2p_2}S)T^{n_2}(ST^{-2p_1}S)T^{n_0} \in \Gamma_T(2)$ erzeugten Kettenbruch

$$\begin{aligned} \nu &= [n_0, 2p_1, n_1, 2p_2, n2, 2p_3, \ldots, 2p_k, n_k] \\ &= n_k + \cfrac{1}{2p_k + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{2p_1 + \cfrac{1}{n_0}}}}}\,, \end{aligned}$$

$n_i, p_i \neq 0 \ \forall i > 0$, approximieren, auf der anderen Seite werden experimentell nur Hall-Leitfähigkeiten σ_{xy} der Form $\sigma = [n_0, 2p_1, n_1]$ gemessen, die die jeweils unter der Variation des äußeren magnetischen Feldes stabilen Plateaux ausbilden. In einer Arbeit von J. Fröhlich und A. Zee [433] wird gezeigt, daß das Anheften der Flußquanten eine (in erster Ordnung) globale Wechselwirkung vom Chern-Simons-Typ ist, die an den Gesamtstrom der Elektronen in allen besetzten Landau-Leveln ankoppelt. Die Tatsache, daß es überhaupt zu einer Wechselwirkung zwischen den Landau-Leveln kommt, wird durch die Existenz von Verunreinigungen verursacht, an denen die Flußquanten den gängigen Vorstellungen nach hängenbleiben.

Es hängt wesentlich von den experimentellen Voraussetzungen ab, wie gut sich fraktionale Plateaux zwischen den ganzzahligen Plateaux des EQIH beobachten lassen. Nur bei sehr niedrigen Temperaturen, extrem starken Magnetfeldern und einem engen Bereich der Verunreinigungsdichte kann der EQFH nachgewiesen werden. Typischerweise müssen die Voraussetzungen um eine Größenordnung besser sein, als für den ganzzahligen Effekt. Eine weitere Verbesserung der Voraussetzungen führt allerdings (bis jetzt) zu keiner wesentlichen Verfeinerung in der Plateaux-Struktur. Man findet weiterhin nur die oben angegebenen Hall-Leitfähigkeiten der Form $\sigma_{xy} = \frac{n}{2pn \pm 1} + m$, $n \in \mathbb{N}$, $m, p \in \mathbb{Z}_+$.

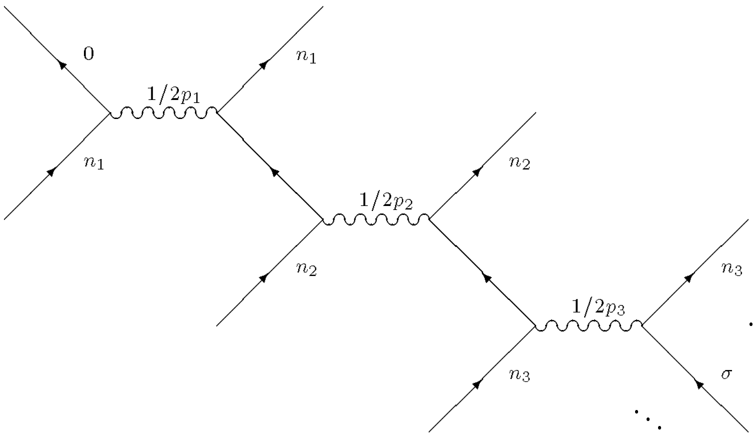
Um dies zu erklären, wollen wir zunächst einen graphische Formalismus zur Beschreibung der Vorgänge in der Hall-Probe angeben, der (ganz ohne jeden Hintergedanken) an die Feynman-Graphen der Quantenelektrodynamik erinnert. Einen Strom von n Landau-Leveln stellen wir durch eine fermionsiche Linie $\xrightarrow{\ n\ }$ dar, deren Richtung die Bewegungsrichtung der Elektronen angibt. Die Chern-Simons-Wechselwirkung der $2p$ angehefteten Flußquanten stellen wir durch eine bosonische Linie (die "Photonen") $\overset{1/2p}{\sim\!\sim\!\sim\!\sim}$ dar. Dies ist syntaktisch korrekt, da die Ladungsträger Fermionen sind und das Anheften einer geraden Anzahl von Flußquanten die Statistik der Ladungsträger nicht ändert, also bosonischen Charakter hat. Die zugehörigen Leitfähigkeit ist in unseren magnetischen Einheiten für n nicht wechselwirkende Landau-Level n und für ein Leiterstück mit Flußquanten-Wechselwirkung $1/2p$. Der Fall $p = 0$ entspricht einem Kurzschluß an dieser Stelle, da ein seriell geschaltetes Leiterstück unendlicher Leitfähigkeit nichts zur Gesamtleitfähigkeit beiträgt. Der "Propagator" ersetzt sich durch eine Punktwechselwirkung mit unendlich schweren Bosonen. Der elementare Graph erster Ordnung sieht dann wie folgt aus:



(7.20)

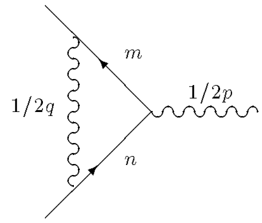
Dabei wollen wir die Ströme der Landau-Level mit dem selben Index miteinander identifizieren, so daß der Stromkreis geschlossen ist. Über das dann noch freie Paar von Propagatoren können wir dann die Hall-Leitfähigkeit messen, die sich klassisch durch das Anwenden der Kirchhoffschen Gesetze aus dem Graphen bestimmen läßt. Für die Messung müssen wir jedoch auch das noch freie Paar von Propagatoren miteinander verbinden, was dem Graphen automatisch die Topologie eines Torus verleiht.

Da die elementaren Leitfähigkeiten in magnetischen Einheiten quantisiert sind, können wir klassisch mit (7.20) nur die tatsächlich gemessenen Leitfähigkeiten $\sigma_{xy} = \frac{n}{2pn\pm1}$ erhalten, wobei das Vorzeichen von der Pfeilrichtung abhängt. Umdrehen aller Pfeile ändert das Vorzeichen in σ_{xy} und korrespondiert zu einer negativen Leitfähigkeit der freien Landau-Level, i.e. zu einem Löcher-Strom. Mit Graphen höherer Ordnung können wir aber jede klassische Hall-Leitfähigkeit produzieren, da sich jede reelle Zahl durch einen $\Gamma_T(2)$-Kettenbruch approximieren läßt,



(7.21)

wobei die oben beschriebenen Identifizierungen vorzunehmen sind. Klassisch ergibt sich die Hall-Leitfähigkeit aus einem Netzwerk paralleler Leiter, die über Flußquanten-Widerstände miteinander verknüpft werden. Quantenmechanisch lassen sich diese Graphen als Beiträge höherer Ordnung einer Chern-Simons-Quantenelektrodynamik intepretieren, deren Einfluß mit wachsenden p_i und n_i sowie mit wachsender Ordnung abnimmt. Dies kann man auch an der Stärke der entsprechenden Korrekturen der Kettenbruchentwicklung der klassischen Hall-Leitfähigkeit ablesen. Die Chern-Simons-Wechselwirkung führt im Gegensatz zur gewöhnlichen Quantenelektrodynamik zu einer "topologischen" Quantenfeldtheorie, i.e. der Wert eines Graphen hängt nicht von den Koordinaten der Vertices ab. Die Leitfähigkeit soll nicht davon abhängen, wo genau die Widerstände eingefügt werden. Das bedeutet insbesondere, daß keine Teilgraphen mit "Whetstone-Brücken", i.e. mit interfermionischen Wechselwirkungen des Typs



vorkommen können. Weiter wollen wir die Selbstwechselwirkung der fermionischen Propagatoren als implizit gegeben annehmen, i.e. wir verwenden keine nackten Propagatoren.
Zu jedem solchen erlaubten Graphen G nach (7.21) assoziieren wir die zugehörige Kettenbruchentwicklung $\sigma(G)$ und die zugehörige Matrix $A(G) \in \Gamma_T(2)$. Die Länge $\ell(G)$ definieren wir wie in Kapitel V. In Kapitel V haben wir gezeigt, daß eine gegebene Matrix $A(G)$ einen Ursprungs-Kegel bzw. ein hyperbelförmiges Band in der Parameterebene definiert, in der alle Punkte zu Matrizen $B \succ A(G)$ liegen[xlviii]. Die Breite dieses Bereiches ist durch $\varepsilon = |\nu - \nu^*|$ parametrisiert, die mittlere Steigung bzw. Hyperbelöffnung ist durch $\nu \cdot \nu^*$ gegeben (vgl. Figur V.3). Mit unserer Definition des Filling-Faktors ν formen die Matrizen $B \succ A(G)$ für $A = \binom{a\ b}{c\ d}$ unter der Abbildung

$$Q' : B = \begin{pmatrix} p & p' \\ q' & q \end{pmatrix} \mapsto \left(\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}\right) \tag{7.22}$$

hyperbelförmige Bänder mit einer maximalen Breite von $\varepsilon' \sim 2\bar{\nu}\varepsilon + \varepsilon^2 \sim 2\sqrt{\nu \cdot \nu^*}|\nu - \nu^*| + (\nu - \nu^*)^2$. Im Unterschied zu Kapitel V beschränken wir uns nun *nicht* auf den dort eingeführten Fundamentalbereich $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq x \leq 1\}$, da ν sonst nicht einheitlich definiert werden kann.
Unsere Theorie ist nun die folgende: Die beobachteten Hall-Leitfähigkeiten $\sigma_{xy} = [n_0, 2p_1, n_1]$ gehören alle zu Graphen $G(n_0, p_1, n_1)$ erster Ordnung[xlix]. Die zugehörigen Matrizen $A(G)$ erzeugen als Keime der Orbiten $B = A' \cdot A(G) \succ A(G)$, $A' \in \Gamma_T(2)$, die breitest möglichen Bänder von Matrizen mit nur echt positiven Einträgen und Determinante 2. Wenn sich das System nun in irgendeinem generischen Zustand befindet, dem ein effektiver, aufgrund der quantenmechanischen Natur unscharfer Filling-Faktor $\bar{\nu} \pm \Delta\nu$ entspricht, so kann es sich auf andere Zustände "abkühlen", in deren Attraktor-Band der generische Zustand liegt. Diese Abkühlung erfolgt solange, bis das System auf einem möglichst einfachen Zustand landet, der von einem Graphen erster Ordnung und damit von einer globalen Wechselwirkung dominiert wird. Die Bänder definieren also Äquivalenzklassen von Zuständen, die durch über die Aktion von $\Gamma_T(2)$ kodierte Chern-Simons-Wechselwirkungen auf ein und denselben "minimalen" Zustand abkühlen können. Da der effektive Filling-Faktor $\bar{\nu}$ eine in erster Ordnung lineare Funktion des äußeren Magnetfeldes ist (ähnlich wie die klassische Hall-Leitfähigkeit), korrespondieren zu diesen Attraktor-Bändern automatisch entsprechende Plateaux der quantenmechanischen Hall-Leitfähigkeit. Diese sind umso breiter, je kleiner die Zahlen n_0, p_1 und n_1 sind. Sehr schmale Bänder und entsprechend sehr kleine Plateaux lassen sich naturgemäß nur schwer beobachten, da der Spielraum der äußeren Parameter sehr klein wird. Dies erklärt die Dominanz kleiner Zahlen n_0, p_1 und n_1.
Bei genauerer Betrachtung zeigt sich, daß sich die zu den Graphen erster Ordnung gehörenden Bänder zum Teil überschneiden. An diesen Stellen sollten die Übergange zwischen zwei Plateaux liegen. Die Bänder zu den Laughlin-Zuständen mit $\sigma_{xy} = 1/(2p-1)$ haben die Breite $4/(4p^2 - 1)^{3/2} + 4/(4p^2-1)^2$ zentriert um $\bar{\nu} = (4p^2-1)^{-1/2}$, überschneiden sich also nicht. Dazwischen ist noch Platz für Bänder mit $n_0 > 1$. Bänder mit verschiedenem n_1 sind ebenfalls (fast immer)

[xlviii] In Kapitel V haben wir dies für $\Gamma = \Gamma(1)$ gezeigt. Damit gilt dies trivialerweise auch für Untergruppen von Γ wie die hier betrachtete $\Gamma_T(2)$.
[xlix] Auf den Fall nullter Ordnung, i.e. keine Wechselwirkung, gehen wir weiter unten noch ein.

disjunkt. Man kann aber bereits mit den Hyperbel-Bändern zu kleinen Zahlen $n_0, p_1 > 0$ den Bereich $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x, y > 0,\ xy < 1\}$ völlig abdecken. Dieser Bereich wird durch $T: n_1 \mapsto n_1 + 1$ jeweils um 1 verschoben. Über die Teilchen-Loch-Dualität erhalten wir eine unabhängige zweite Überdeckung, die wir von der ersten beispielsweise durch das Vorzeichen der Determinante der Matrizen unterscheiden könnten. Zusammen mit dem Umpolen des Stromes, $n_i \mapsto -n_i$, können wir die ganze Parameterebene schon mit sehr kleinen Zahlen abdecken, $p \leq 4, |n_0| \leq 8, p|n_0| < 8$. In der Figur VII.1 sind die Attraktor-Bänder für $n_0 \geq 0$ bzw. $n_0 \leq 0$ dargestellt. Dabei haben wir wie in Kapitel V die Radien der Zustandssumme $Z[x,y] = (Z(R_1) + Z(R_2))/2$ als Parameter verwendet, und zwar hier in der Form $x = 2R_1^2, y = 1/2R_2^2$, so daß die Hyperbeln zu Ursprungsgeraden werden. Weiter haben wir der Übersichtlichkeit halber einen doppelt logarithmischen Plot gewählt, bei dem Ursprungsgeraden auf parallele Geraden abgebildet werden.

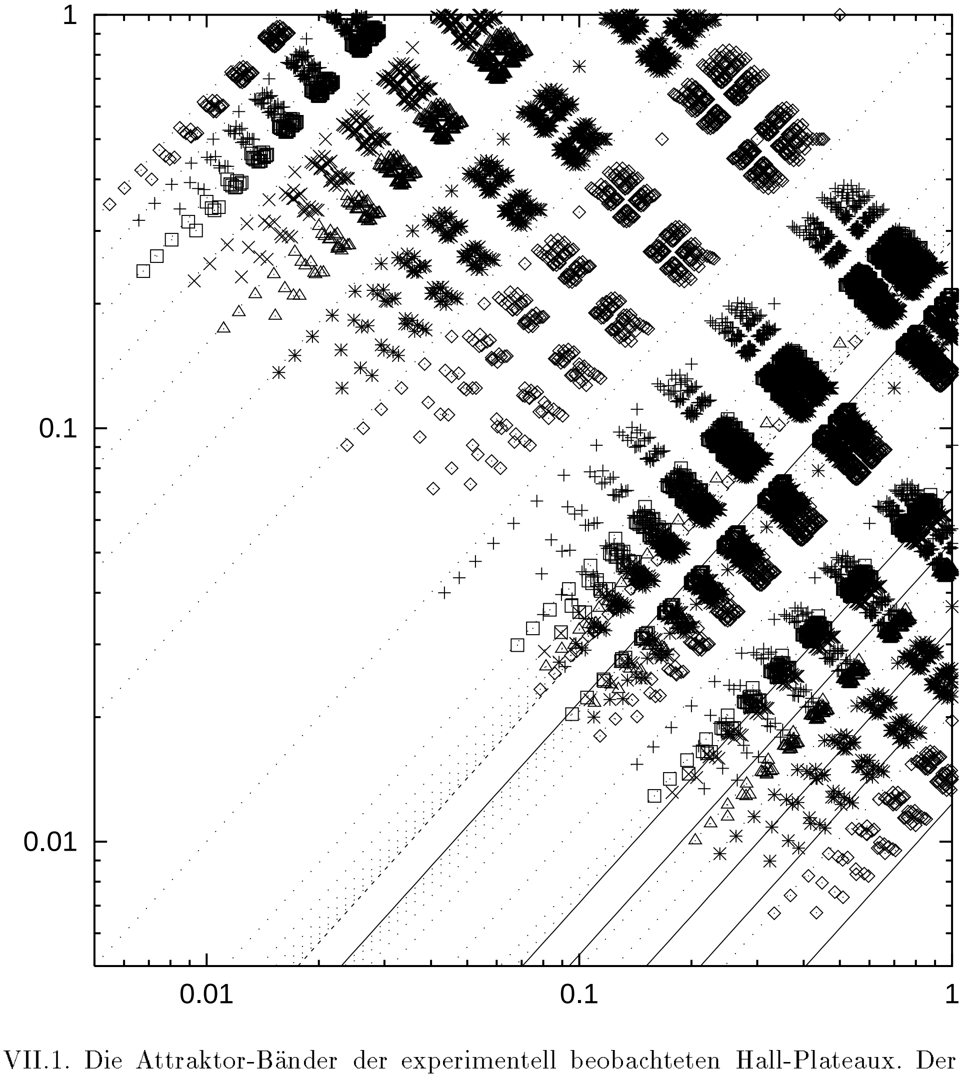


Fig. VII.1. Die Attraktor-Bänder der experimentell beobachteten Hall-Plateaux. Der Übersichtlichkeit halber wurden durch doppelt logarithmisches Auftragen parallele Geraden-Bänder erzeugt. Geplottet wurden alle Matrizen $A' \cdot A$ mit $\ell(A') \leq 10$, wobei A die minimale Matrix zur jeweiligen Hall-Leitfähigkeit des Plateau ist. Von oben links nach unten rechts gehören die Bänder zu den Werten $\nu \in \{8,7,6,5,4,3,2,1,\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{4}{7},\frac{5}{9},\frac{6}{11},\frac{7}{13},\frac{6}{13},\frac{5}{11},\frac{4}{9},\frac{3}{7},\frac{2}{5},\frac{1}{3},\frac{2}{7},\frac{3}{11},\frac{2}{9},\frac{1}{5},\frac{1}{7}\}$, die durch die verwendeten Symbole unterschieden sind.

Die Attraktor-Bänder haben wir nur auf eine Tiefe von $\ell \leq 10$ berechnet, da sonst nahe benachbarte Bänder nicht mehr zu unterscheiden wären. Dadurch entsteht der Eindruck, daß zwischen manchen Bändern noch Platz ist. Das ist dann der Fall, wenn die Bänder nahe den in Kapitel V beschriebenen "verbotenen" Zonen liegen, die nur schwer zu approximieren sind. Solche Zonen entsprechen exakt den Filling-Faktoren mit *geraden* Nennern, die ja auch nicht beobachtet werden. In Figur VII.1 erkennt man solche Lücken für $\nu = 1/2$ und $\nu = 1/4$. Der Bereich um $\nu = 1$ ist ebenfalls sehr dünn, da wir diesen Wert durch $[-1, 1]$ dargestellt haben, also durch einen Graphen erster Ordnung. Der Graph nullter Ordnung, der zum echten EQIH mit $\nu = n$ gehört, hat einen Attraktor mit mindestens der Breite $n - 1 < \nu \leq n$.

In Figur VII.1 sind außerdem noch mit durchgezogenen Geraden diejenigen Hall-Leitfähigkeiten angedeutet, die zu den nächst-stabilen Plateaux gehören würden, i.e. die sich experimentell, wenn überhaupt, als nächstes beobachten lassen sollten. Von oben links nach unten rechts gehören die Geraden zu den Werten $\nu \in \{\frac{8}{15}, \frac{7}{15}, \frac{4}{15}, \frac{3}{13}, \frac{2}{11}, \frac{2}{13}, \frac{1}{9}\}$. Gut zu erkennen ist die weitere Annäherung an die verbotenen Zonen $\nu = \frac{1}{2}$ und $\nu = \frac{1}{4}$. Auf diese Weise lassen sich zusammen mit der Teilchen-Loch-Dualität $\nu \mapsto 1 - \nu$ alle gemessenen Hall-Leitfähigkeiten einordnen[l].

Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, daß es überhaupt zu Wechselwirkung kommt. Dies ist der Fall, wenn es aufgrund von Verunreinigungen der Probe und ausreichend tiefer Temperatur zur Anderson-Lokalisierung der Flußquanten kommt. Bei zu hoher Temperatur bleibt die Wechselwirkung aus, und es dominieren die Graphen nullter Ordnung, $p_1 = n_1 = 0$. Die zugehörigen minimalen Matrizen $\binom{n\ 2}{1\ 0}$ im oben definierten Sinn korrespondieren zu $(\nu = n \in \mathbb{N}, \nu_0^* = \infty)$. Weiter entsprechen diesen minimalen Lösungen *unitäre* Theorien mit $c = 1 - 24 \cdot n \cdot 0 = 1$, die wir formal aus der in (4.25) definierten Zustandssumme $Z[x, y]$ erhalten, wenn wir einen der Parameter auf null oder unendlich setzen. Ihre Attraktor-Bänder sind breiter als die der TÆCR zu fraktionalen Hall-Leitfähigkeiten und bedecken die ganze Parameterebene.

Mit dem hier vorgestellten Modell des Quanten-Hall-Effektes haben wir eine sehr einheitliche Sichtweise vorschlagen können, die sowohl den EQIH wie den EQFH erklärt, und aus der sich auch die Existenz der Plateaux ableiten läßt. So schön und elegant dieses Modell auch erscheinen mag, so sehr müssen wir bedenken, daß es keine bewiesene Theorie darstellt. Unsere graphische Notation macht zwar das Auftreten von Kettenbrüchen und der Modulgruppe plausibel, doch ist ein tieferes Verständnis der mikroskopischen Vorgänge und der Wechselwirkung der Flußquanten erforderlich, um unsere Notation wirklich rechtfertigen zu können. Vielleicht können aber die hier niedergelegten Ideen späteren Forschungen nützlich sein.

[l] Es gibt Hinweise auf zwei weitere Plateaux bei $\nu = \frac{4}{11}$ und $\nu = \frac{4}{13}$, die sich in zweiter Ordnung als $[1, 2, 1, 2]$ und $[-2, 2, -2, 4]$ ergeben. Allerdings sind diese Plateaux unseres Wissens nach nicht bestätigt.

CODA

Die Zeit wird kommen, wenn eifriges Forschen über lange Zeiträume hinweg Dinge ans Licht bringt, die jetzt noch verborgen liegen. Das Leben eines Menschen, auch wenn er es ganz dem Himmel widmete, reichte nicht aus, ein so weites Feld zu ergründen ... Und so wird sich die Kenntnis davon nur über Generationen hinweg entfalten. Es wird aber auch die Zeit kommen, wenn unsere Nachfahren staunen, daß wir Dinge, die ihnen so einfach erscheinen, nicht wußten ... Viele Entdeckungen aber sind künftigen Jahrhunderten vorbehalten, wenn wir längst vergessen sind. Unser Universum wäre betrüblich unbedeutend, hätte es nicht jeder Generation neue Probleme zu bieten ... Die Natur gibt ihre Geheimnisse nicht ein für allemal preis.

Seneca, Naturales quaestiones, VII

Reprise

Hier wollen wir zusammenfassen, was in dieser Arbeit geleistet worden ist und was noch zu tun wäre. Das Hauptziel bestand in der vollständigen Klassifikation aller rationalen konformen Quantenfeldtheorien in zwei Dimensionen, deren effektive zentrale Ladungen $c_{\mathit{eff}} \leq 1$ sind, sowie in der Klassifikation aller $N = 1$ supersymmetrischen rationalen konformen Theorien mit $c_{\mathit{eff}} \leq \frac{3}{2}$. Ein weiteres Ziel war die Untersuchung des Modul-Raumes dieser Theorien. Schließlich haben wir auch eine mögliche Anwendung von Theorien mit $c_{\mathit{eff}} = 1$ aufgezeigt, bei der Nicht-Unitarität eine wesentliche Rolle spielt: Den fraktionalen Quanten-Hall-Effekt. Unsere Ergebnisse im einzelnen:

- Zunächst tragen wir die im weiteren benötigten Definitionen und Resultate zusammen. Wir leiten die Struktur von $\mathcal{W}$-Algebren aus der sogenannten meromorphen Feldtheorie chiraler Vertexoperator-Algebren ab. Bei der Diskussion der Darstellungstheorie gehen wir auch auf den Fall ein, daß mehrere inäquivalente Darstellungen zum selben Tiefstgewichtsvektor existieren, daß also der chirale Energieoperator L_0 nicht diagonalisierbar ist. Wir erarbeiten die Konsequenzen für die Charaktere der Darstellungen und ihre modularen Eigenschaften (Proposition −350/13 und auch Proposition −232/11). Dieses Ergebnis legt zusammen mit der generellen Struktur degenerierter Modelle (Satz −667/8) bereits weitgehend die Möglichkeiten fest, rationale Theorien mit $c_{\mathit{eff}} \leq 1$ konstruieren zu können.

- Wir beweisen die Existenz zweier Serien von nicht-unitären rationalen konformen Quantenfeldtheorien mit $c_{\mathit{eff}} = 1$. Die eine ist parametrisiert durch $c = 1 - 12k$, $k \in \mathbb{N}$, mit chiraler Symmetrie-Algebra $\mathcal{W}(2, \frac{3}{2}k)$, die andere durch $c = 1 - 6k$, $k \in \mathbb{N}$, mit chiraler Symmetrie-Algebra $\mathcal{W}(2, 2k)$. Wir konstruieren für diese c-Werte abgeschlossene chirale Vertexoperator-Algebren (Proposition 1/2) und beweisen, daß sie die Struktur der oben angegebenen $\mathcal{W}$-

Algebren tragen (Proposition −3/5). Für diese $\mathcal{W}$-Algebren geben wir die Strukturkonstanten (Proposition −25/7) sowie die irreduziblen Tiefstgewichtsdarstellungen mit den zugehörigen Charakteren (Propositionen −21/4, −187/13, −114/7) an. Ferner berechnen wir die S- und T-Matrix (Proposition −44/5) und die Fusionsregeln (Proposition −117/11).
Unsere Ergebnisse lassen sich auf $N = 1$ supersymmetrische $\mathcal{W}$-Algebren verallgemeinern (Propositionen −279/10, −350/11).
Schließlich beweisen wir, daß damit die Klassifikation aller regulären rationalen konformen Feldtheorien mit $c_{\mathit{eff}} = 1$, bzw. mit $c_{\mathit{eff}} = \frac{3}{2}$ für den supersymmetrischen Fall, vollständig ist (Sätze −493/19, −777/23).

⁘ Wir untersuchen den Modul-Raum der konformen Feldtheorien mit $c_{\mathit{eff}} = 1$. Die regulären rationalen nicht-unitären Theorien formen einen Multifraktal, der dicht in der Parameterebene liegt (Satz −111/10 und Figur IV.2). Im Gegensatz zu den unitären Theorien gibt es keine marginalen Flüße, die die nicht-unitären Theorien miteinander verbinden könnten (Proposition −13/14). Der Modul-Raum der rationalen nicht-unitären Theorien mit $c_{\mathit{eff}} = 1$ steht in enger Beziehung zur Modul-Gruppe PSL(2,$\mathbb{Z}$). Wir können eine Operation der Modul-Gruppe auf ihm definieren und eine eins-zu-eins Korrespondenz seiner Punkte zu Elementen der Modul-Gruppe beweisen (Proposition −19/6). Schließlich erklären wir die Struktur quadratischer Kurven, die in Figur IV.2 sichtbar ist (Proposition −125/22). Die enge Beziehung zur Modul-Gruppe tritt auch in den Beweisen der anderen Aussagen zu Tage und läßt die überraschend nicht triviale Struktur des Modul-Raumes im Licht der arithmetischen Geometrie erscheinen.

⁙ Wir schließen die Klassifikation aller Theorien mit $c_{\mathit{eff}} \leq 1$ durch die Untersuchung sogenannter logarithmischer konformer Feldtheorien ab. Aufgrund der Entartung der Differentialgleichungen, die aus den Ward-Identitäten für die konformen Blöcke folgen, treten in den Operatorproduktentwicklungen logarithmische Terme auf. Im Rahmen der von uns angestrebten Klassifikation tritt dies bei den Modellen mit $c = c_{p,1} = 13-6(p+1/p)$ auf, die den "Rand" der minimalen Modelle bilden. Wir erarbeiten die Darstellungsstruktur dieser Modelle (Proposition 11/35) und geben die Charaktere an (Proposition −17/15). Damit beweisen wir, daß auch logarithmische konforme Feldtheorien Rationalität besitzen können, i.e. es gibt nur endlich viele Tiefstgewichtsdarstellungen und die Charaktere formen eine Darstellung der Modul-Gruppe mit invarianter Zustandssumme. Bei den hier betrachteten Modellen ist dies dann der Fall, wenn die Symmetrie-Algebra zu einer $\mathcal{W}(2, 2p-1, 2p-1, 2p-1)$ maximal erweitert wird. Auch diese Ergebnisse besitzen Verallgemeinerungen auf die $N = 1$-Theorien.
Wir klären die Struktur des Modul-Raumes der logarithmischen Theorien mit $c_{\mathit{eff}} = 1$ (Proposition −161/55): Es zeigt sich, daß der zusammenhängende Teil des Modul-Raumes der regulären Theorien mit $c_{\mathit{eff}} = 1$ ein exaktes Pendant im Modul-Raum der logarithmischen $c_{\mathit{eff}} = 1$-Theorien besitzt.
Am Beispiel des Modells zu $c = c_{1,2} = -2$ gehen wir schließlich auf die Problematik ein, Fusion zu definieren, wenn der Energieoperator L_0 nicht mehr diagonalisierbar ist, eine weitere Konsequenz der oben erwähnten Entartungen.

⁙ Damit können wir die Klassifikation aller rationalen konformen Theorien mit $c_{\mathit{eff}} \leq 1$, sowie die Klassifikation aller $N = 1$ supersymmetrischen rationalen konformen Theorien abschließen. Neben den minimalen Modellen und den unitären Modellen mit $c = 1$ bzw. $c = \frac{3}{2}$ im supersymmetrischen Fall existieren noch genau zwei Klassen von Theorien, die parabolischen und die logarithmischen, die wir beide eingehend studiert haben. Alle rationalen Theorien mit $c_{\mathit{eff}} \leq 1$ fügen sich so in die Klassifikation der degenerierten Modelle der Virasoro-Algebra ein, daß damit alle Möglichkeiten erschöpft sind, aus degenerierten Virasoro-Modellen rationale Theorien zu gewinnen (siehe Satz −667/8).

Modelle mit $c_{\mathit{eff}} = 1$ können nicht allein bezüglich der Virasoro-Algebra rational sein. Die chirale Symmetrie-Algebra muß erweitert werden. Der Vollständigkeit halber geben wir auch für die bereits bekannten unitären $c = 1$-Modelle die Struktur der chiralen Algebren an (Satz –375/17). Auch die minimalen Modelle, die schon bezüglich der Virasoro-Algebra rational sind, besitzen unter gewissen Umständen erweiterte chirale Algebren, die mit den nichtdiagonalen Zustandssummen in Beziehung stehen (Proposition –39/10).

- Die formale Ähnlichkeit der Laughlin-Wellenfunktionen, die den fraktionalen Quanten-Hall-Effekt für Fillingfaktoren $\nu = 1/(2p+1)$ beschreiben, mit den Korrelationsfunktionen von chiralen Vertexoperatoren motiviert eine Untersuchung des Quanten-Hall-Effektes mit Methoden der konformen Feldtheorie. Zunächst konstruieren wir die Symmetrie-Algebra für den Effekt mit $\nu = 1/(2p+1)$, die sich als die Algebra der nicht singulären flächenerhaltenden Diffeomorphismen erweist (Proposition 6/7). Weiter bestimmen wir das Spektrum der energielosen Anregungen (Proposition –14/11). Damit können wir zeigen, daß eine Beschreibung des Quanten-Hall-Effektes mittels konformer Feldtheorie zu $c_{\mathit{eff}} = 1$ Theorien mit chiralen lokalen Vertexoperatoren führt. Unsere in Kapitel IV konstruierte Serie fermionischer Theorien mit $c = 1 - 12k$, $k \in \mathbb{Z}_+ + \frac{1}{2}$, erweist sich als geeigneter Kandidat. Das Anheften von zwei Flußquanten kann durch Fusion geeigneter Vertexoperatoren beschrieben werden, wobei sich der auftretende Phasenübergang durch einen Übergang zu einer anderen konformen Feldtheorie manifestiert (Proposition –36/13). Weiter lassen sich die Anregungszustände mit fraktionaler Statistik ebenfalls durch geeignete Vertexoperatoren erhalten.
  Die bekannte Beziehung zwischen den Fillingfaktoren und der Modul-Gruppe findet ihre Entsprechung in der Operation der Modul-Gruppe auf dem Modul-Raum dieser konformen Feldtheorien. Die Dualität der Zustandssumme korrespondiert dabei zur Teilchen-Loch-Dualität. In diesem Rahmen kann auch eine Erklärung dafür gefunden werden, daß nicht alle erlaubten Fillingfaktoren gemessen werden: Die gemessenen Hall-Leitfähigkeiten gehören zu einer Chern-Simons-Wechselwirkung über die Flußquanten von erster Ordnung. Wir können über den Zusammenhang mit der Modul-Gruppe Attraktor-Bereiche im Parameter-Raum konstruieren, die höhere Ordnungen der Wechselwirkung auf geeignete erste Ordnungen abkühlen und so die Plateaux-Breiten erzeugen könnten.

Natürlich bleiben viele Fragen offen. Wir wollen einige naheliegende oder uns wichtig erscheinende herausgreifen und damit mögliche weitere Wege vorzeichnen, die nun eingeschlagen werden könnten:

- Im Rahmen unserer Arbeit fiel auf, daß supersymmetrische Theorien mit $N = 1$ im wesentlichen die selbe Struktur aufweisen, wie die gewöhnlichen Theorien. Insbesondere stehen die rationalen Modelle in eins-zu-eins Beziehung. Supersymmetrie mit $N = 2$ verhält sich dahingegen völlig anders. Viele chirale Algebren existieren zwar auch in $N = 2$ supersymmetrischer Form, aber es lassen sich keine rationalen Modelle aus ihnen konstruieren [67]. Man vermutet sogar, daß Unitarität eine notwendige Bedingung für Rationalität bei $N = 2$ Theorien ist. Andererseits kann bei den bis jetzt bekannten Resultaten nicht ausgeschlossen werden, daß es nicht doch rationale Untermodelle gibt.

- Unsere Untersuchungen waren auf den Bereich $c \leq 1$ beschränkt. Vor allem in der Stringtheorie ist man an rationalen konformen Theorien mit $c > 1$ interessiert. Einige der hier vorgestellten Methoden lassen sich sicher auf $c > 1$ erweitern. Es ist zu erwarten, daß sich gerade über die modularen Eigenschaften, die solche Theorien besitzen müßten, neue Einsichten gewinnen ließen.
  Besonders interessant dürfte die Erforschung der Modul-Räume für Theorien mit $c_{\mathit{eff}} > 1$ sein. Die Teilräume der nicht-unitären Theorien haben vermutlich ähnlich überraschende Eigenschaften arithmetischer Geometrie, wie der von uns untersuchte Raum der $c_{\mathit{eff}} = 1$ Theorien.

Wir haben ein relativ neues Gebiet von konformen Theorien erforscht, die sogenannte logarithmischen Theorien. Ihre Struktur gilt es noch besser zu verstehen. Insbesondere ist noch nicht klar, wie eine exakte Definition von Darstellungen und Charakteren auszusehen hätte. Wir konnten zeigen, daß die Verlinde-Formel zur Berechnung der Fusions-Algebra nicht mehr uneingeschränkt gültig ist, aber durch was ist sie zu erstzen? Ein erster Schritt wäre, die Fusions-Algebra auf direkte Weise zu gewinnen, z.B. mit der von W. Nahm entwickelten Methode [877]. Da gerade die logarithmischen Theorien Anwendungen in der Festkörper- und statistischen Physik besitzen [251], ist eine genaue Kentnis ihrer rationalen Struktur von besonderem Interesse.

Der fraktionale Quanten-Hall-Effekt diente hier als Beispiel einer möglichen Anwendung nicht-unitärer konformer Feldtheorien. Die Ähnlichkeit seines Phasendiagrammes zu dem der Hochtemperatur-Supraleitung legt nahe, daß auch letztere mit Methoden der konformen Feldtheorie beschrieben werden kann. Zwei Fragen sind von allgemeinem Interesse: Welche Rolle spielt Nicht-Unitarität bei Phänomenen der Festkörper- und statistischen Physik, und welche Bedeutung hat dort die immer wieder diskutierte $N = 1$ Supersymmetrie?
Der fraktionale Quanten-Hall-Effekt kann noch nicht als wirklich gelöstes Problem betrachtet werden: Die gemessenen Fillingfaktoren unterliegen zweifellos einer Symmetrie. Zur Zeit konkurrieren mehrere Ansätze [563, 569, 631, 641, 797], die solche Symmetrien vorschlagen. Alle diese Ansätze produzieren aber immer noch zu viele Filling-Faktoren. Desweiteren können die meisten Theorien zwar die Quantisierung des Hall-Wiederstandes erklären, nicht jedoch die Plateau-Breite.

Unsere regulären nicht-unitären $c_{eff} = 1$ Theorien mögen auch eine Anwendung in $\mathcal{W}$-Gravitationstheorien finden. Dort treten auf natürliche Weise rationale Potenzen von Schirm-Ladungen auf [229, 509]. Die Vertexoperatoren zu Tiefstgewichtsdarstellungen mit rationalen Kac-Labeln zeigen genau ein solches Verhalten, das auch eng mit anyonischer Statistik zusammenhängt.
In letzter Zeit ist vermehrt darüber diskutiert worden, daß auch in String- und $\mathcal{W}$-Gravitationstheorien Nicht-Unitarität eine wichtige Rolle spielen kann. Dies rechtfertigt einmal mehr, sich mit den bis jetzt eher vernschlässigten nicht-unitären rationalen konformen Feldtheorien zu beschäftigen.

Zuletzt sei noch die Frage aufgeworfen, was hinter der Tatsache steckt, daß nach Satz $-777/23$ die Charaktere einer rationalen konformen Feldtheorie nur Linearkombinationen von Θ-Funktionen zu höchstens zwei verschiedenen Moduli enthalten kann, deren Differenz darüberhinaus auf $2|k - k'| \in \{1, 2, 4, 8\}$ eingeschränkt ist. Es wäre nicht das erste mal, daß "physikalische Bedingungen" zu mathematischen Strukturen führen, wie es z.B. bei der A-D-E-Klassifikation der modular invarianten Zustandssummen minimaler Modelle der Fall ist [151, 149]. Bei dem oben erwähnten Fall denkt man vielleicht zuerst an die Divisionsalgebren, deren Dimension d bekanntlich $\in \{1, 2, 4, 8\}$ sein muß.

Aria Gratia

Seien wir kurz bei Platon zu Gast: Es ist an einem Winterabend irgendwo in Athen; die Tafeln sind gedeckt in Agathons Haus; das Mädchen spielt auf der Flöte; Sokrates hat sich gewaschen und Sandalen angelegt; er ist in der Vorhalle stehen geblieben; er weigert sich, von der Stelle zu gehen, als die anderen nach ihm schicken. Nun ist Sokrates bereit; er neckt Alkibiades; Alkibiades nimmt ein Haarband und bindet es “um dieses wunderbaren Menschen Haupt”. Er rühmt Sokrates:

Ἴστε ὅτι, οὔτε εἴ τις καλός ἐστι, μέλει αὐτῷ οὐδέν, ἀλλὰ καταφρονεῖ τοσοῦτον ὅσον οὐδ᾽ ἂν εἷς οἰηθείη, οὔτ᾽ εἴ τις πλούσιος, οὔτ᾽ εἰ ἄλλην τινὰ τιμὴν ἔχων τῶν ὑπὸ πλήθους μακαριζομένων· ἡγεῖται δὲ πάντα ταῦτα τὰ κτήματα οὐδενὸς ἄξια, καὶ ἡμᾶς οὐδὲν εἶναι· λέγω ὑμῖν. Εἰρωνευόμενος δὲ καὶ παίζων πάντα τὸν βίον πρὸς τοὺς ἀνθρώπους διατελεῖ· σπουδάσαντος δὲ αὐτοῦ καὶ ἀνοιχθέντος, οὐκ οἶδα εἴ τις ἑώρακε τὰ ἐντὸς ἀγάλματα· ἀλλ᾽ ἐγὼ ἤδη ποτ᾽ εἶδον, καὶ μοι ἔδοξεν οὕτω θεῖα καὶ χρυσᾶ εἶναι καὶ πάγκαλα καὶ θαυμαστά, ὥστε ποιητέον εἶναι ἐν βραχεῖ ὅ τι κελεύοι Σωκράτης.

Selten begegnem einen heute Menschen, die wie Sokrates einfach durch ihre Art des Seins Lehrer sind. Ich möchte meinem Doktorvater Prof. Werner Nahm dafür danken, daß er mir ein solch sokratischer Lehrer war und ist, für seine Art, zu faszinieren und Erkenntnis zu suchen, und für seine stets helfende und geduldige Hand auf meinem eigenen Weg dazu.

Auch all den anderen Gästen, die in Agathons Haus geladen waren und sind, möchte ich danken:

Meinen Freunden und Gefährten Raimund Varnhagen, Albrecht Kliem, Michael Rösgen, Andreas Recknagel, Johannes Kellendonk und Rolf Schimmrigk für so manchen (sokratischen) Dialog, so manche *μαιεία* und die immer herzliche Freundschaft, ohne die diese Arbeit niemals so gelungen wäre;

Meinen Mitstreitern Ralph Blumenhagen, Wolfgang Eholzer, Andreas Honecker, Ralf Hübel, Michael Terhoeven und Andreas Wißkirchen für ihre stete Hilfsbereitschaft, die zahllosen Ratschläge und Diskussionen, die diese Arbeit bereichert haben;

Meinen Kollegen Lazlo Fehér, Jose Figueroa-O'Farrill, Nouredine Mohammedi, Nils Obers, Sonia Stanciu, ferner Ralf Kaufmann und Steffen Mallwitz für die immer freundliche Atmosphäre und viele Hinweise, die mir manches leichter machen konnten;

Mein besonderer Dank gilt auch den Freunden, mit denen ich an so manchem Abend über Gott und die Welt, Mathematik und Physik gestritten habe, Stephan Kroneck und Katrin Wendland für die Lektüre der Griechen, Klaus Berkhan und Ulrich Schramm für ihre Treue in schwereren Zeiten;

Aber all dies hätte nichts bewirkt ohne die liebevolle Unterstützung meiner Mutter, meines Bruders Alexander und von Birgitt. Ihnen möchte ich von ganzem Herzen danken – für alles.

Recitativo

[2] L. Alvarez-Gaumé, C. Gomez, G. Sierra
Topics in Conformal Field Theory, in L. Brink, *Physics and Mathematics of Strings*, (1990) 16

[3] L. Alvarez-Gaumé,, Ph. Zaugg
Structure Constants in the $N = 1$ Superoperator Algebra, Ann. Phys. **215** (1992) 171

[5] G. Anderson, G. Moore
Rationality in Conformal Field Theory, Commun. Math. Phys. **117** (1988) 441

[7] G.E. Andrews
The Theory of Partitions, Encyclopedia of Mathematics Vol. 2 (1976)

[11] J.F. Avron, R. Seiler
Quantization of the Hall Conductance for General Multiparticle Schrödinger Hamiltonians, Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 259-262,
M. Klein, R. Seiler
Power-Law Corrections to the Kubo Formula Vansih in Quantum Hall Systems, Commun. Math. Phys. **128** (1990) 141-160

[13] F.A. Bais, P. Bouwknegt, M. Surridge, K. Schoutens
Extensions of the Virasoro Algebra Constructed from Kac-Moody Algebras Using Higher Order Casimir Invariants, Nucl. Phys. **B304** (1988) 348

[17] F.A. Bais, P. Bouwknegt, M. Surridge, K. Schoutens
Coset Construction for Extended Virasoro Algebras, Nucl. Phys. **B304** (1988) 371

[19] P. Bak et al.
Phase Diagram of Selenium Adsorbed on the Ni(100) Surface: A Physical Realization of the Ashkin-Teller Model, Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 1539

[23] I. Bakas
The Large N Limit of Extended Conformal Symmetries, Phys. Lett. **B228** (1989) 57

[29] A.P. Balachandran, G. Bimonte, K.S. Gupta, A. Stern
The Chern-Simons Source as a Conformal Family and its Vertex Operators, Int. Jour. Mod. Phys. **A7** (1992) 5855-5876, *Conformal Edge Currents in Chern-Simons Theories*, Int. J. Mod. Phys. **A7** (1992) 4655-4670

[31] J. Balog, L. Fehér, P. Forgács, L. O'Raifeartaigh, A. Wipf

Toda Theory and $\mathcal{W}$-Algebra from a Gauged WZNW Point of View, Ann. Phys. (N.Y.) **203** (1990) 76, *Kac-Moody Realization of $\mathcal{W}$-Algebras*, Phys. Lett. **B244** (1990) 435

[37] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov
Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, Nucl. Phys. **B241** (1984) 333

[41] J. Bellissard
K-Theory of C^*-Algebras in Solid State Physics, in *Statistical Mechanics and Field Theory, Mathematical Aspects*, T.C. Dorlas, M.N. Hugenholtz, M. Winnink (Hrsg.), Lect. Notes in Phys. Vol. **257** (1986) 99-156, Springer Verlag, *Ordinary Quantum Hall Effect and Non-Commutative Cohomology*, in *Localization in Disordered Systems*, W. Weller, P. Ziesche (Hrsg.), Teubner Verlag Leipzig (1987)
J. Bellissard, S. Nakamura
Low Energy Bands do not Contribute to Quantum Hall Effect, Commun. Math. Phys **131** (1990) 282-305

[43] D. Bernard, G. Felder
Fock Representations and BRST Cohomology in SL(2) Current Algebra, Commun. Math. Phys. **127** (1990) 145

[47] L.C. Biedenharn,J.D. Louck
The Racah-Wigner Algebra in Quantum Theory, Encyclopedia of Mathematics Vol. **9** (1980)

[53] A. Bilal, J.-L. Gervais
Systematic Construction of Conformal Theories with Higher-Spin Virasoro Symmetries, Nucl. Phys. **B318** (1989) 579

[59] B. Block, X.G. Wen
Effective Theories of Fractional Quantum Hall Effect at Genereic Filling Fractions, Phys. Rev. **B42** (1990) 8133, *Structure of Microscopic Theory of the Quantum Hall Effect*, Phys. Rev. **B43** (1991) 8337

[61] R. Blumenhagen
Covariant Construction of $N = 1$ Super $\mathcal{W}$-Algebras, Nucl. Phys. **B381** (1992) 641

[67] R. Blumenhagen
$N = 2$ Supersymmetric $\mathcal{W}$-Algebras, Nucl. Phys. **B405** (1993) 744,
R. Blumenhagen, R. Hübel
A Note on Representations of $N = 2$ $\mathcal{SW}$-Algebras, Universität Bonn Preprint BONN-TH-94-08, hep-th/9407068 (1994)

[71] R. Blumenhagen, W. Eholzer, A. Honecker, K. Hornfeck, R. Hübel
Unifying $\mathcal{W}$-Algebras, Phys. Lett. **B332** (1994) 51-60, *Coset Realization of Unifying $\mathcal{W}$-Algebras*, INFN Turin Preprint DFTT-25-94, hep-th/9406203 (1994)

[73] R. Blumenhagen, W. Eholzer, A. Honecker, R. Hübel
New $N = 1$ Extended Superconformal Algebras with Two and Three Generators, Int. Jour. Mod. Phys. **A7** (1992) 7841

[79] R. Blumenhagen, M. Flohr, A. Kliem, W. Nahm, A. Recknagel, R. Varnhagen
$\mathcal{W}$-Algebras with two and three Generators, Nucl. Phys. **B361** (1991) 255

[83] P. Bouwknegt
Extended Conformal Algebras from Kac-Moody Algebras, in *Infinite Dimensional Lie Algebras and Lie Groups*, Proc. CIRM-Luminy Conf. 1988, World Scientific (1989)

[89] P. Bouwknegt
Extended Conformal Algebras, Phys. Lett. **B207** (1988) 295

[97] P. Bouwknegt, J. McCarthy, K. Pilch
On the Free Field Resolution for Coset Conformal Field Theories, Nucl. Phys. **B352** (1991) 139

[101] P. Bouwknegt, W. Nahm
Realizations of the Exceptional Modular Invariant $A_1^{(1)}$ Partition Functions, Phys. Lett. **B184** (1987) 359

[103] P. Bouwknegt, K. Schoutens
$\mathcal{W}$-symmetry in conformal field theory, Phys. Rep. **223** (1993) 183

[107] P. Bowcock, P. Goddard
Virasoro Algebras with Central Charge $c < 1$, Nucl. Phys. **B285**[FS19] (1987) 651

[109] H.W. Braden, E. Corrigan, P.E. Dorey, R. Sasaki
Affine Toda Field Theory and Exact S-Matrices, Nucl. Phys. **B338** (1990) 689

[113] D. Buchholz, *Einführung in die Algebraische Quantenfeldtheorie*, Vorlesungsnotizen Univ. Hamburg (1985)

[127] D. Buchholz, G. Mack, X. Todorov
The Current Algebra on the Circle as a Germ of Local Field Theories, Nucl. Phys. Proc. Suppl. Vol. **5B** (1988) 20

[131] J. Campuzano et al.
Au(100) (1×2)*-to-*(1×1) *Phase Transition: A Physical Realization of the Two-Dimensional Ising Modell*, Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 2684

[137] P. Candelas, M. Lynkev, R. Schimmrigk

Calabi-Yau manifolds in weighted $\mathbb{P}_4$, Nucl. Phys. **B341** (1990) 383

[139] P. Candelas, X. de la Ossa, P. Green, L. Parkes
A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly solvable theory, Nucl. Phys. **B359** (1991) 21

[149] A. Cappelli
Modular invariant partition functions of superconformal theories, Phys. Lett. **B185** (1987) 82

[151] A. Cappelli, C. Itzykson, J.-B. Zuber
Modular invariant partition functions in two dimensions, Nucl. Phys. **B280**[FS18] (1987) 445, *The A-D-E classification of minimal and* $A_1^{(1)}$ *conformal invariant theories*, Commun. Math. Phys. **113** (1987) 1

[157] A. Cappelli, C.A. Trugenberger, G.R. Zemba
Infinite symmetry in the quantum-Hall-effect, Nucl. Phys. **B396** (1993) 465, *Classification of Quantum Hall Universality Classes by* $\mathcal{W}_{1+\infty}$ *Symmetry*, Phys. Lett. **306B** (1993) 100

[163] A. Cappelli, G.V. Dunne, C.A. Trugenberger, G.R. Zemba
Confomal Symmetry and Universal Properties of Quantum Hall States, Nucl. Phys. **B398** (1993) 531-567

[167] J.L. Cardy
Operator Content of Two-Dimensional Conformally Invariant Theories Nucl. Phys. **B270** (1986) 186

[173] J.L. Cardy
Conformal Invariance and Statistical Mechanics, Les Houches, Session XLIX, *Fields, Strings and Critical Phenomena*, Elsevier Science Publishers B.V. (1989)

[179] M. Caselle, K.-S. Narain
A New Approach to the Construction of Conformal Field Theories, Nucl. Phys. **B323** (1989) 673

[181] M. Caselle, G. Ponzano
Analyticity, Modular Invariance and the Classification of Three Operators Fusion Algebras, Phys. Lett. **B242** (1990) 52

[191] D. Clark et al.
Specific-heat anomaly of Au(100)(1×2) *studied by low energy electron diffraction*, Phys. Rev. **B34** (1986) 4379

[193] C. Cristofano, G. Maiella, R. Musto, F. Nicodemi
Coulomb Gas Approach to Quantum Hall Effect, Phys. Lett. **B262** (1991) 88, *Coulomb Gas Description of the Collective States for the Fractional Quantum Hall Effect*, Mod. Phys. Lett **A6** (1991) 1779, *Theoretical Aspects of Quantum Hall Effect and Two-Dimensional CFT*, Mod. Phys. Lett. **A6** (1991) 2217

[197] E. Cunningham
The Principle of Relativity in Electrodynamics and an Extension Thereof, Proc. London Math. Society **8** (1910) 77,
H. Bateman, E. Cunningham
The Conformal Transformations of a Space of Four Dimension and the Generalization of the Lorentz-Einstein Principle, Proc. London Math. Society **7** (1909)

[199] R. Dijkgraaf, E. Verlinde
Modular Invariance and the Fusion Algebra, Nucl. Phys. Proc. Suppl. Vol. **5B** (1988) 87

[211] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde
$c = 1$ *Conformal Field Theories on Riemann Surfaces*, Commun. Math. Phys. **155** (1988) 649

[223] L. Dolan, P. Goddard, P. Montague
Conformal Field Theory of Twisted Vertex Operators, Nucl. Phys. **B338** (1990) 529, *Conformal Field Theory, Triality and the Monster Group*, Phys. Lett. **B236** (1990) 165

[227] S. Doplicher, R. Haag, J.E. Roberts
Local Observables amd Particle Statistics I & II, Commun. Math. Phys. **23** (1971) 199, Comm. Math. Phys. **35** (1974) 49

[229] Vl.S. Dotsenko
Three-Point Correlation Functions of the Minimal Conformal Theories Coupled to 2d Gravity, Mod. Phys. Lett. **A6** (1991) 3601

[233] V.S. Dotsenko, V.A. Fateev
Conformal Algebra and Multipoint Correlation Functions in 2d Statistical Models, Nucl. Phys. **B249**[FS12] (1984) 312, *Four-Point Correlation Functions and the Operator Algebra in 2d Conformal Invariant Theories with Central Charge* $c \leq 1$, Nucl. Phys. **B251**[FS13] (1985) 691, *Operator Algebra of Two-Dimensional Conformal Theories with Central Charge* $c \leq 1$, Phys. Lett. **B154** (1985) 291

[239] V. Drinfeld, V. Sokolov
Lie algebras and equations of Kortewed-de Vries type, J. Sov. Math. **30** (1984) 1975

[241] R.R. Du, H.L. Stromer, D.C. Tsui,L.N. Pfeifer, K.W. West
Experimental Evidence for New Particles in the Fractional Quantum Hall Effect, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 2944

[251] B. Duplantier, H. Saleur

Exact critical properties of two-dimensional dense selfavoiding walks, Nucl. Phys. **B290**[FS20] (1987) 291
[257] W. Eholzer
Fusion Algebras Induced by Representations of the Modular Group, Int. Jour. Mod. Phys. **A8** (1993) 3495
[263] W. Eholzer, N.-P. Skoruppa
Modular Invariance and Uniqueness of Conformal Characters, Universität Bonn Preprint BONN-TH-94-16, Max-Planck-Institut für Mathematik Bonn Preprint MPI-94-67, hep-th/9407074 (1994)
[269] W. Eholzer, M. Flohr, A. Honecker, R. Hübel, W. Nahm, R. Varnhagen
Representations of $\mathcal{W}$-Algebras with Two Generators and New Rational Models, Nucl. Phys. **B383** (1992) 249
[271] W. Eholzer, M. Flohr, A. Honecker, R. Hübel, R. Varnhagen
$\mathcal{W}$-Algebras in Conformal Field Theory, erscheint in Proc. Trieste Workshop *Superstrings and Related Topics*, Trieste, July 1993
[277] W. Eholzer, A. Honecker, R. Hübel
Representations of $N = 1$ Extended Superconformal Algebras, Mod. Phys. Lett. **A8** (1993) 725
[281] W. Eholzer, A. Honecker, R. Hübel
How complete is the classification of $\mathcal{W}$-symmetries?, Phys. Lett. **B308** (1993) 42
[283] W. Eholzer, R. Hübel
Fusion Algebras of Fermionic Rational Conformal Field Theories via Generalized Verlinde Formula, Nucl. Phys. **B414** (1994) 348
[293] V.A. Fateev, S.L. Lykyanov
The Models of Two-Dimensional Conformal Quantum Field Theory with $\mathbb{Z}_n$ Symmetry, Int. Jour. Mod. Phys. **A3** (1988) 507
[307] V.A. Fateev, S.L. Lykyanov
Exactly Soluble Models of Conformal Quantum Field Theory Associated with the Simple Lie Algebra D_n, Yad. Fiz. **49** (1989) 1491
[311] V.A. Fateev, A.B. Zamolodchikov
Nonlocal (parafermion) Currents in Two-Dimensional Conformal Quantum Field Theory and Self-Dual Critical Points in $\mathbb{Z}_n$-Symmetric Statistical Systems, Soviet Physics JETP **62** (1985) 215
[313] V.A. Fateev, A.B. Zamolodchikov
Conformal Quantum Field Theory Models in Two Dimensions Having $\mathbb{Z}_3$ Symmetry, Nucl. Phys. **B280**[FS18] (1987) 644
[317] B.L. Feigin, D.B. Fuks
Invariant skew-symmetric differential operators on the line and Verma modules over the Virasoro algebra, Funkt. Anal. Appl. **16** (1982) 114
[331] B.L. Feigin, D.B. Fuks
Verma Modules over the Virasoro Algebra, Funct. Anal. Appl. **17** (1983) 241, *Verma Modules over the Virasoro Algebra*, in *Topology*, Proc. Leningrad 1982, L.D. Faddeev, A.A. Mal'cev (Hrsg.), Lect. Notes Math. **1060** (1984) 230, Springer Verlag
[337] G. Felder
BRST Approach to Minimal Models, Nucl. Phys. **B317** (1989) 215, *Erratum*, Nucl. Phys. **B324** (1989) 548
[347] G. Felder, J. Fröhlich, G. Keller
Braid Matrices and Structure Constants for Minimal Conformal Models, Commun. Math. Phys. **124** (1989) 647
[349] J.M. Figueroa-O'Farrill
On the Homological Construction of Casimir Algebras, Nucl. Phys. **B343** (1990) 450
[353] J.M. Figueroa-O'Farrill, S. Schrans
The Spin 6 Extended Conformal Algebra, Phys. Lett. **B245** (1990) 471
[359] J.M. Figueroa-O'Farrill, S. Schrans
The Conformal Bootstrap and Super $\mathcal{W}$-Algebras, Int. J. Mod. Phys. **A7** (1992) 591
[367] M. Flohr
$\mathcal{W}$-Algebras, New Rational Models and the Completeness of the $c = 1$ Classification, Commun. Math. Phys. **157** (1993) 179
[373] M. Flohr
Curiosities at Effective $c = 1$, Mod. Phys. Lett. **A9** (1994) 1071
[379] M. Flohr, R. Varnhagen
Infinite symmetry in the fractional quantum-Hall-effect, Jour. Phys. **A27** Math. Gen. (1994) 3999
[383] K. Fredenhagen, K.H. Rehren, B. Schroer
Superselection Sectors with Braid Group Statistics and Exchange Algebras, I: General Theory, Commun. Math. Phys. **125** (1989) 201
[389] M.D. Freeman, K. Hornfeck, P. West
Commuting quantities and exceptional $\mathcal{W}$-algebras, Int. J. Mod. Phys. **A8** (1993) 909

[397] M.D. Freeman, P. West
On the relation between integrability and infinite-dimensional algebras, Kings College London Preprint KCL-TH-93-1 (1993)

[401] I. Frenkel, V.G. Kac, M. Wakimoto
Characters and fusion rules for $\mathcal{W}$-algebras via quantized Drinfeld-Sokolov reduction, Commun. Math. Phys. **147** (1992) 295

[409] I. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman
Vertex Operator Algebras and the Monster, Pure and Appl. Math. Vol. **134**, Academic Press (1986)

[419] D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker
Conformal invariance, unitarity and critical exponents in two dimensions, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1575,
Conformal invariance, unitarity and two dimensional critical exponents, in *Vertex Operators in Mathematics and Physics*, Springer Verlag (1985)

[421] D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker *Details of the Non-Unitarity proof for Highest Weight Representations of the Virasoro Algebra*, Commun. Math. Phys. **107** (1986) 535,

[431] J. Fröhlich, T. Kerler
Universality in Quantum Hall Systems, Nucl. Phys. **B354** (1991) 369

[433] J. Fröhlich, A. Zee
Large Scale Physics of the Quantum Hall Fluid, Nucl. Phys. **B364** (1991) 517

[439] S. Fubini
Vertex Operators and Quantum Hall Effect, Mod. Phys. Lett. **A6** (1991) 347

[443] I.M. Gelfand, M.A. Naimark
On the Embedding of Normed Rings into the Ring of Operators in Hilbert Space, Mathem. Sbornik **12** (1943) 197

[449] D. Gepner, Z. Qiu
Modular Invariant Partition Functions for Parafermionic Field Theories, Nucl. Phys. **B285** (1987) 423

[457] P. Ginsparg
Curiosities at $c = 1$, Nucl. Phys. **B295**[FS21] (1988) 153

[461] P. Ginsparg
Applied Conformal Theory, Les Houches, Session XLIX, *Fields, Strings and Critical Phenomena*, Elsevier Science Publishers B.V. (1989)

[463] J. Glimm, A. Jaffe
Quantum Physics, A Functional Integral Point of View, 2^{nd} edition, Springer Verlag (1987)

[467] P. Goddard
Meromorphic Conformal Field Theory, in *Infinite Dimensional Lie Algebras and Lie Groups*, Proc. CIRM-Luminy, Marseille Conf. 1988, V.G. Kac (Hrsg.), World Scientific (1989) 556

[479] P. Goddard, A. Kent, D. Olive
Virasoro Algebras and Coset Space Models, Phys. Lett. **152** (1985) 88

[487] P. Goddard, A. Kent, D. Olive
Unitary Representations of the Virasoro and Super-Virasoro Algebras, Commun. Math. Phys. **103** (1986) 105

[491] P. Goddard, D. Olive
Kac-Moody Algebras, Conformal Symmetry and Critical Exponents, Nucl. Phys. **B257**[FS14] (1985) 226

[499] P. Goddard, D. Olive
Kac-Moody and Virasoro Algebras in Relation to Quantum Physics, Int. Jour. Mod. Phys. **A1** (1986) 303

[503] P. Goddard, D. Olive (Hrsg.)
Kac-Moody and Virasoro Algebras, a Reprint Volume for Physicists, Adv. Series Math. Phys. Vol. **3**, World Scientific (1988)

[509] M. Goulian, M. Li
Correlation Functions in Liouville Theory, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 2051

[521] B.R. Greene, R. Plesser
Duality Symmetry in Calabi-Yau Moduli Space, Nucl. Phys, **B338** (1990) 15

[523] M. Green, J.H. Schwarz, E. Witten
Superstring theory I & II, Cambridge University Press (1987)

[541] V. Gurarie
Logarithmic Operators in Conformal Field Theory, Nucl. Phys. **B410** (1993) 535

[547] F.D.M. Haldane
Fractional Quantization of the Hall Effect: A Hierarchy of Incompressible Quantum Fluid States, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 605-608,
F.D.M. Haldane, E.H. Rezayi
Periodic Laughlin-Jastrow Wave Functions for the Fractional Quantum Hall Effect, Phys. Rev **B31** (1985) 2529

[557] B.I. Halperin
Quantized Hall Conductance, Current-Carrying Edge States and the Existence of Extended States in a Twoe-Dimensional Disordered Potential, Phys. Rev. **B25** (1982) 2185-2190
[563] B.I. Halperin
Statistics of Quasiparticles and the Hierarchy of Fractional Quantized Hall States, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1583-1586
[569] B.I. Halperin, P.A. Lee, N. Read
Theory of the Half-Filled Landau Level, Phys. Rev. **B47** (1993) 7312
[571] K. Hamada, M. Takao
Spin 4 Current Algebra, Phys. Lett. **B209** (1988) 247, *Erratum*, Phys. Lett. **B213** (1988) 564
[577] S. Helgason
Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces, Pure and Appl. Math. Vol. **80**, Academic Press (1978)
[587] A. Honecker
Automorphisms of $\mathcal{W}$-Algebras and Extended Rational Conformal Field Theories, Nucl. Phys. **B400** (1993) 574
[593] K. Hornfeck
On the Central Charge for the $\mathcal{W}$-Algebras, Phys. Lett. **B252** (1990) 357
[599] K. Hornfeck, E. Ragoucy
A Coset Construction for the Super-$\mathcal{W}_3$ Algebra, Nucl. Phys. **B340** (1990) 225
[601] Hua Loo Keng
Introduction to Number Theory, Springer Verlag 1982
[607] J.E. Humphreys
Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer Verlag (1972)
[613] T. Inami, Y. Matsuo, I. Yamanaka
Extended Conformal Algebras with $N = 1$ Supersymmetry, Phys. Lett. **B215** (1988) 701
[617] C. Itzykson, J.-M. Drouffe
Statistial Field Theory I& II, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press (1989)
[619] C. Itzykson, H. Saleur, J.-B. Zuber (Hrsg.)
Conformal Invariance and Applications to Statistical Mechanics, World Scientific (1988)
[631] J.K. Jain
Composite Fermion Approach to the Quantum Hall Effect, Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 199-202, *Incompressible Quantum Hall States*, Phys. Rev. **B40** (1989) 8079-8082
[641] J.K. Jain
Microscopic Theory of the Fractional Quantum Hall Effect Advances in Physics **41**,2 (1992) 105-146
[643] V.G. Kac
Contravariant Form for the Infinite-Dimensional Lie Algebras and Superalgebras, Lecture Notes in Physics **94** (1979) 441, Springer Verlag
[647] V.G. Kac
Infinite Dimensional Lie Algebras, an Introduction, Progress in Math. Vol. **44**, Birkhäuser Verlag (1983)
[653] V.G. Kac (Hrsg.)
Infinit Dimensional Groups with Applications, Math. Scienc. Research Institute Publ. Vol. **4**, Springer Verlag (1985)
[659] V.G. Kac, D.H. Peterson
Infinite-Dimensional Lie Algebras, Theta Functions and Modular Forms, Adv. Math. **53** (1984) 125
[661] V.G. Kac, A.K. Raina
Bombay Lectures on Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras, Adv. Series Math. Phys. Vol. **2**, World Scientific (1987)
[673] M. Kaku
Introduction to Superstrings, Springer Verlag (1988)
[677] H.G. Kausch
Extended Conformal Algebras Generated by a Multiplet of Primary Fields, Phys. Lett. **B259** (1991) 448
[683] H.G. Kausch, G.M.T. Watts
A Study of $\mathcal{W}$-Algebras using Jacobi Identities, Nucl. Phys. **B354** (1991) 740
[691] J. Kellendonk, A. Recknagel
Virasoro representations on fusion graphs, Phys. Lett. **B298** (1993) 329
[701] H.K. Kim, M.H. Chan
Experimental Determination of a Two-Dimensional Liquid-Vapor Critical-Point Exponent, Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 170

[709] E.B. Kiritsis
Proof of the Completeness of the Classification of Rational Conformal Theories with $c = 1$, Phys. Lett. **B217** (1989) 427, *Some Proofs on the Classification of Rational Conformal Field Theories with $c = 1$*, California Institute of Technology Preprint CALT-68-1510 (1988)

[719] Y. Kitazawa, N. Ishibashi, A. Kato, K. Kobayashi, Y. Matsuo, S. Odake
Operator Product Expansion Coefficients in $N = 1$ Superconformal Theory and Slightly Relevant Pertubation, Nucl. Phys. **B306** (1988) 425

[727] A. Kliem
Konstruktion von $\mathcal{W}$-Algebren, Universität Bonn Diplomarbeit BONN-IR-91-46 (1991)

[733] K. Klitzing, G. Dorda, M. Pepper
New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance, Phys. Rev. Lett. **45** (1980), 494

[739] V.G. Knizhnik, A.B. Zamolodchikov
Current Algebra and Wess-Zumino Model in Two Dimensions, Nucl. Phys. **B247** (1984) 83

[743] M. Kohmoto
Topological Invariant and the Quantization of the Hall Conductance, Ann. Phys. (NY) **160** (1985) 343-354

[751] S. Komata, K. Mohri, H. Nohara
Classical and Quantum Extended Superconformal Algebra, Nucl. Phys. **B359** (1991) 168

[757] M. Kontsevich, *Rational Conformal Field Theory and Invariants of 3-Dimensional Manifolds*, Centre Physique Theoretique Marseille Preprint CPT-88/P.2189 (1988)

[761] R.B. Laughlin
Quantized Hall Conductivity in Two Dimensions, Phys. Rev. **B23** (1981), 5632-5633

[769] R.B. Laughlin
Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations, Phys. Rev. Lett. **50** (1983), 1395-1398

[773] J. Lepowsky, S. Mandelstam, I.M. Singer (Hrsg.)
Vertex Operators in Mathematics and Physics, Conf. Proc., Math. Scienc. Research Institute Publ. Vol. **3**, Springer Verlag (1985)

[787] A. Lopez, E. Fradkin
Fractional Quantum Hall Effect and Chern-Simons Gauge Theories, Phys. Rev. **B44** (1990) 5246 *Universality in the Fractional Quantum Hall Effect*, Nucl. Phys. **B33**C Proc. Suppl. (1993) 67-91

[797] C.A. Lütken
Geometry of Renormalization Group Flows Constrained by Discrete Global Symmetries, Nucl. Phsy. **B396** (1993) 670-692, *Global Phase Diagrams for Charge Transport in Two Dimensions*, J. Phys. **A26** Math. Gen. (1993) L811-L817,
C.A. Lütken, G.G. Ross
Delocalization, Duality, and Scaling in the Quantum Hall System, Phys. Rev. **B48** (1993) 2500

[809] S.D. Mathur, S. Mukhi, A. Sen
On the Classification of Rational Conformal Field Theories Phys. Lett. **B213** (1988) 303

[811] S.D. Mathur, S. Mukhi, A. Sen
Reconstruction of Conformal Field Theories from Modular Geometry on the Torus, Nucl. Phys. **B318** (1989) 483

[821] J. Mickelsson
Current Algebras and Groups, Plenum Monographs in Nonlinear Physics, Plenum Press (1989)

[823] G. Moore, N. Read
Nonabelions in the Fractional Quantum Hall Effect, Nucl. Phys. **B360** (1991) 362

[827] G. Moore, N. Seiberg
Polynomial Equations for Rational Conformal Field Theories, Phys. Lett. **B212** (1988) 451

[829] G. Moore, N. Seiberg
Naturality in Conformal Field Theory, Nucl. Phys. **B313** (1989) 16

[839] F. Motteler, J. Dash
Heat Capacity of the Commensurate Phase and Ordering Transition of Para-H_2 monolayers on graphite, Phys. Rev. **B31** (1985) 346

[853] W. Nahm
Conformal Quantum Field Theory in Two Dimensions, World Scientific (erscheint demnächst)

[857] W. Nahm
Quantum Field Theories in One and Two Dimensions, Duke Math. Jour. **54** (1987) 579

[859] W. Nahm
Chiral Algebras of Two-Dimensional Chiral Field Theories and their Normal Ordered Products in Proc. Trieste Conf. *Recent Developments in Conformal Field Theories*, Trieste, October 1989, S. Randjbar-Daemi, E. Sezgin,

J.-B. Zuber (Hrsg.), World Scientific 1990, Proc. 3. Regional Conf. on Math. Phys., Islamabad 1989

[863] W. Nahm
A proof of modular invariance, Int. J. Mod. Phys. **A6** (1991) 2837, in Proc. Trieste July 1990 *Topological methods in quantum field theories*, World Scientific, 1991

[877] W. Nahm
Quasi-Rational Fusion Products, Universität Bonn Preprint hep-th/940210 (1994)

[881] W. Nahm, A. Recknagel, M. Terhoeven
Dilogarithm Identities in Conformal Field Theory, Mod. Phys. Lett. **A8** (1993) 1835

[883] P. Piercy, H. Pfnür
Experimental Verification of Critical Exponents in the Two-Dimensional Four-State Potts Universality Class: Oxygen on Ru(0001), Phys. Rev. Lett. **59** (1987) 1124

[887] C.N. Pope, L.J. Romans, X. Shen
The Complete Structure of $\mathcal{W}_\infty$, Phys. Lett. **B236** (1990) 173, $\mathcal{W}_\infty$ *and the Racah-Wigner Algebra*, Nucl. Phys, **B339** (1990) 191

[907] R.E.Prange, S.M.Girvin (Hrsg.)
The Quantum Hall Effect, Graduate Texts in Contemporary Physics, Springer Verlag (1987)

[911] A. Pressley, G. Segal
Loop Groups, Oxford Math. Monographs, Clarendon Press (1986)

[919] Q. Niu, D.J. Thouless, Y.S. Wu
Quantized Hall Conductance as a Topological Invariant, Phys. Rev. **B31** (1985) 3372-3377,
Q. Niu, D.J. Thouless
Quantum Hall Effect with Realistic Boundary Conditions, Phys. Rev. **B35** (1987) 2188-2197

[929] A. Recknagel
Fusion rules from algebraic K*-theory*, Int. Jour. Mod. Phys. **A8** (1993) 1345

[937] A. Rocha-Caridi
Vacuum Vector Representations of the Virasoro Algebra in *Vertex Operatos in Mathematics and Physics*, S. Mandelstam, I.M. Singer (Hrsg.), World Scientific (1984) 451, *On Highest Weight and Fock Space Representations of the Virasoro Algebra*, Proc. Symp. Pure Math. **49**, Part I (1989) 259

[941] sc A.N. Schellekens, S. Yankielowicz
Extended Chiral Algebras and Modular Invariant Partition Functions, Nucl. Phys. **B327** (1989) 673

[947] A.N. Schellekens
Meromorphic $c = 24$ *Conformal Field Theories*, Commun. Math. Phys. **153** (1993) 159

[953] G. Segal, G. Wilson
Loop Groups and Equations of KdV Type, Math. Inst. Univ. Oxford (1983)

[967] R. Schimmrigk
Kähler manifolds with positive first Chern class and mirrors of rigid Calabi-Yau manifolds, Universität Bonn Preprint BONN-HE-93-47, hep-th/9312111 (1993)

[971] R. Schimmrigk
Mirror Symmetry and String Vacua from a Special Class of Fano Varieties, Universität Bonn Preprint BONN-TH-94-07, hep-th/9405086 (1994)

[977] M. Stone
Superfluid Dynamics of the Fractional Quantum Hall State, Phys. Rev. **B42** (1990) 212-217, *Edge Waves in the Quantum Hall Effect*, Ann. Phys. **207** (1991) 38-52, *Schur Functions, Chiral Bosons and the Quantum Hall Effect*, Phys. Rev **B42** (1990) 8399-8404 *Vertex Operators in the Quantum Hall Effect*, Int. Jour. Mod. Phys. **B5** (1991), 509,
M. Stone, H.W. Wyld, R.L. Schult
Edge Waves in the Quantum Hall Effect and Quantum Dots, Phys. Rev. **B45** (1992) 14156

[983] M. Stone (Hrsg.)
Quantum Hall Effect, World Scientific (1992)

[991] R.F. Streater, A.S. Wightman
PCT, Spin and Statistics, and all That, W.A. Benjamin, Inc. (1964)

[997] D.C. Tsui, H.L. Stromer, A.C. Gossard
Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit, Phys. Rev. Lett. **48** (1982), 1559

[1009] C. Vafa
Toward Classification of Conformal Theories, Phys. Lett. **B206** (1988) 421

[1013] R. Varnhagen
Characters and Representations of New Fermionic $\mathcal{W}$*-Algebras*, Phys. Lett. **B275** (1992) 87

[1019] E. Verlinde
Fusion Rules and Modular Transformations in 2d Conformal Field Theory, Nucl. Phys. **B300**[FS22] (1988) 360

[1021] E. Verlinde
A Note on Braid Statistics and the Non-Abelian Aharanov-Bhom Effect, in *Modern Quantum Field Theory*, World Scientific (1991) 450-461 oder in Ref. [983] 258-269

[1031] G.M.T. Watts
W-Algebras and Coset Models, Phys. Lett. **B245** (1990) 65

[1033] G.M.T. Watts
WB Algebra Representation Theory, Nucl. Phys. **B339** (1990) 177, *Determinant Formulae for Extended Algebras in Two Dimensional Conformal Field Theories*, Nucl. Phys. **B326** (1989) 648

[1039] X.G. Wen
Non-Abelian Statistics in the Fractional Quantum Hall States, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 802-805, *Chiral Luttinger Liquid and the Edge Excitations in the Fractional Quantum Hall States*, Phys. Rev. **B41** (1990) 12838-12844 *Theory of the Edge States in Fraction Quantum Hall Effects*, Int. Jour. Mod. Phys. **B6**,10 (1992) 1711-1762

[1049] X.G. Wen, A. Zee
A Classification of Abelian Quantum Hall States and Matrix Formulation of Topological Fluids, Institute of Theoretical Physics Santa Barbara Preprint NST-ITP-92-10 (1992),
E.Keski-Vakkuri, X.G. Wen
The Ground State Structure and Modular Transformations of Fractional Quantum Hall States on a Torus, Int. J. Mod. Phys. **B7** (1993) 4227-4260
X.G. Wen, E. Dagotto, E. Fradkin
Anyons on a Torus, Phys. Rev. **B42** (1990) 6110

[1051] J. Wess, B. Zumino
Consequences of Anomalous Ward Identities, Phys. Lett. **B37** (1971) 95

[1061] E.P. Wigner
On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group, Annals of Mathematics **40** (1939) 149, siehe auch H. Weyl
Symmetry, Princeton University Press (1952)

[1063] F. Wilczek
Quantum Mechanics of Fractional-Spin Particles, Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 957

[1069] R.L. Willet, R.R. Ruel, M.A. Paalanen. K.W. West, L.N. Pfeiffer
Enhanced Finite-Wave-Vector Conductivity at Multiple Even-Denominator Filling Factors in Two-Dimensional Electron Systems, Phys. Rev. **B47** (1993) 7344

[1087] K.G. Wilson
Non-Lagrangian Models of Current Algebra, Phys. Rev. **179** (1969) 1499

[1091] E. Witten
Global Aspects of Current Algebra, Nucl. Phys. **B223** (1983) 422, *Current Algebra, Baryons, and Quark Confinement*, Nucl. Phys. **B223** (1983) 433

[1093] E. Witten
Quantum Field Theory and the Jones Polynomial, Commun. Math. Phys. **122** (1989) 351

[1097] E. Witten
Ground Ring of Two-Dimensional String Theory, Nucl. Phys. **B373** (1992) 187-213

[1103] B.G. Wybourne
Classical Groups for Physicists, John Wiley & Sons (1974)

[1109] A.B. Zamolodchikov
Conformal Symmetry in Two Dimensions: An Explicit Recurrence Formula for the Conformal Partial Wave Amplitude, Commun. Math. Phys. **96** (1984) 419

[1117] A.B. Zamolodchikov
Infinite Additional Symmetries in Two-Dimensional Conformal Quantum Field Theory, Theor. Math. Phys. **65** (1985) 1205

[1123] A.B. Zamolodchikov, Al.B Zamolodchikov
Conformal Field Theory and Critical Phenomena in Two-Dimensional Systems, Sov. Sci. A. Phys. **10** (1989) 269

[1129] D.-H. Zhang
Spin-4 Extended Conformal Algebra, Phys. Lett. **B232** (1989) 323

[1151] W. Zimmermann
Normal Products and the Short Distance Expansion in the Perturbation Theory of Renormalizable Interactions, Ann. Phys. **77** (1973) 570