Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die räumliche Struktur kristalliner Festkörper wird durch Punktgitter beschrieben, an deren Gitterpunkten eine Elementarzelle plaziert ist, die die lokale Anordnung der Atome wiedergibt. Die Bedeutung der Translationssymmetrie für die Eigenschaften des Festkörpers läßt sich dabei schon in Gitter-Approximationen erkennen, in denen der Elementarzelle ein endlichdimensionaler Hilbertraum zugeordnet wird. Allgemeiner läßt sich die räumliche Struktur eines Festkörpers durch eine Kachelung (oder Parkettierung, engl. tiling) beschreiben. Dies ist eine lückenlose Auslegung der Ebene (des $\mathbb{R}^n$) mit Kacheln, die hier der Einfachheit halber Polygonflächen (deren n-dimensionale Analoga) sind. Eine Dekoration der Kacheln mit Atomen entspricht dann dem zu beschreibenden Festkörper. Auch hier erhofft man sich von einfachen diskreten Modellen ein gutes Verständnis vom Einfluß der räumlichen Struktur auf die Eigenschaften des Festkörpers, vorausgestzt die Struktur besitzt Symmetrien o.ä., die sie mathematisch zugänglich macht, wie z.B. Periodizität oder Selbstähnlichtkeit. Die bekanntesten aperiodischen selbstähnlichen Kachelungen sind die zweidimensionalen Penrose-Kachelungen [?]. In der Tat haben diese Kachelungen nicht nur „gute" Eigenschaften, sondern lassen sich auf drei Dimensionen verallgemeinern [?, ?, ?] und in dieser verallgemeinerten Form als Modell für die räumliche Struktur eines idealisierten Quasikristalls ansehen.

Quasikristalle, die man 1984 experimentell zum ersten Mal beobachtet hat [?], zeichnen sich durch eine langreichweitige Orientierungsordnung mit Punktsymmetrie aus, die nicht mit einer periodischen Struktur vereinbar ist. Bisher sind Quasikristalle mit 8-, 10- und 12-zählig symmetrischer Orientierungsordnung beobachtet worden und dementsprechend ist das Interesse an Kachelungen mit dieser Orientierungsymmetrie besonders groß.

Ziel dieser Arbeit ist die algebraische Beschreibung der Kachelungen und als deren Anwendung die Berechnung des Gap-Labellings von diskreten Schrödinger-Operatoren, die Ein- oder Mehrteilchensysteme auf Kachelungen in einer Tight-binding-Approximation beschreiben. Die Geometrie der Kachelung, und damit meinen wir in erster Linie die Anordnung der Polygonflächen, die die räumliche Struktur des Festkörpers beschreibt, wird im Spektrum eines Schrödinger-Operator sichtbar, wenn man sie mit dem Potential auf eine sehr allgemeine Art und Weise in Verbindung bringt. Dieses soll nämlich nur von der lokalen Anordnung abhängen. Ist die Kachelung z.B. selbstähnlich und aperiodisch, so erwartet man typischerweise ein singulär stetiges Spektrum, das

eine Cantormenge vom Maß null ist, die ebenfalls eine Selbstähnlichkeit aufweist [?]. Gap-Labelling bedeutet, ganz allgemein, daß den Lücken im Spektrum eines solchen Operators Elemente einer abzählbaren Menge (die Labels) zugewiesen werden. Wählt man die Werte der integrierten Zustandsdichte des Operators als Labels, so erhält man eine geordnete Menge und kann damit verschiedenen Lücken eine relative Lage im Spektrum zuordnen. Auch hier zeigt sich die räumliche Struktur. Während es für periodische Kachelungen nur endlich viele Lücken gibt, erwartet man für aperiodische selbstähnliche Kachelungen, daß die Werte der integrierten Zustandsdicht auf Lücken dicht in dem Intervall $[0, 1]$ liegen und eine gewisse Selbstähnlichkeitsstruktur aufweisen.
Da es uns aber um Eigenschaften des Systems geht, die sich auf die räumlichen Struktur zurückführen lassen, benutzen wir eine etwas abstraktere Form des Gap-Labellings, bei der man nicht von einem speziellem Schrödinger-Operator ausgeht, sondern aus der Geometrie der Kachelung eine Gruppe konstruiert, die die Menge der Labels für die Lücken im Spektrum eines Operators enthält, der wie oben angedeutet von der Geometrie abhängt. Für „generische" Operatoren sollten sich diese Menge und die Gruppe möglichst sogar entsprechen. Diese Gruppe ist die K_0-Gruppe einer C^*-Algebra (oder deren Bild unter einem Homomorphismus), die als die den Schrödinger-Operator enthaltende Observablenalgebra betrachtet werden kann.

Die schon angesprochene Selbstähnlichkeit einiger dieser Kachelungen macht diese auch für andere Bereiche der Physik, in denen die Selbstähnlichkeit fundamental ist, insbesondere also in der konformen Feldtheorie, sehr interessant. Ihre Analyse erfordert Methoden der nichtkommutativen Geometrie. So wird in A. Connes Buch über nichtkommutative Geometrie [?] der nichtkommutative Raum der Penrose-Kachelungen als erstes Beispiel zum neuartigen Raumkonzept angeführt. Wir haben uns von diesem Beispiel, indem Connes eine von R. Robinson erfundene Abbildung [?] auf einen Pfadraum nutzt, um eine C^*-Algebra über dem nichtkommutativen Raum zu definieren, leiten lassen. Connes erhält hierbei eine AF-Algebra, die jedoch aus unserer Sicht einen Schönheitsfehler hat: sie entspricht nicht der physikalisch sinnvollen Observablenalgebra, da der diskrete Laplace-Operator nicht in ihr enthalten ist. Eine konsequentere Anwendung des Connes'schen Vorschlags zur Konstruktion der Algebra über nichtkommutativen Räumen, so wie wir ihn verstehen, führt denn auch auf eine C^*-Algebra, die jene AF-Algebra sowie alle Translationen und damit den diskreten Laplace-Operator enthält. Jetzt allerdings können wir die entscheidende Invariante, die geordnete K_0-Gruppe nicht in allen uns interessierenden Fällen (einschließlich der Penrose-Kachelung) berechnen, weshalb wir uns wieder der durch die Selbstähnlichkeitsstruktur definierten AF-Algebra zuwenden. Das Analogon der Robinsonabbildung spielt dabei eine zentrale Rolle.

Vor einem inhaltlichen Überblick der einzelnen Kapitel soll hier noch der Hoffnung Ausdruck gegeben werden, daß die algebraische Theorie selbstähnlicher Kachelungen generell für physikalische Theorien, in denen die Selbstähnlichkeit wichtig ist, nützlich sein könnte. Das Auftreten von AF-Algebren in zweidimensionalen statistischen Modellen - hier häufig in Form der der Integrabilität zugrundeliegenden Temperley-Lieb-Algebra - sowie in der konformen Quantenfeldtheorie, läßt tieferliegende Zusammenhänge zwischen diesen und der Theorie der selbstähnlichen Kachelungen vermuten. So liefert auch in der konformen Quantenfeldtheorie die Konstruktion von Pfadräumen einen vielversprechenden Ansatz insbesondere zur Analyse der Struktur der Superauswahlsektoren (Fusion) [?, ?, ?, ?].

Die Arbeit ist inhaltlich wie folgt gegliedert: Nach einer kurzen Erläuterung mathematischer Begriffe, darunter AF-Algebren und K-Theorie, wenden wir uns in Kapitel 3 der genauen Definition einer Kachelung sowie der Diskussion der physikalischen Modelle zu, die schließlich in das Gap-Labelling mündet.
Im vierten Kapitel konstruieren wir den nichtkommutativen Raum einer Kachelung $\mathcal{T}$, aus dem dann die Gruppoid-C^*-Algebra $A_{\mathcal{T}}$, die Algebra der Kachelung, erzeugt wird, die im Sinne der nichtkommutativen Geometrie als Algebra über dem nichtkommutativen Raum verstanden werden kann und im physikalischen Sinne als Observablenalgebra. Die K-Theorie derselben ist jedoch (noch) nicht allgemein lösbar, so daß wir uns im weiteren Verlauf auf bestimmte Kachelungen beschränken.

Wir diskutieren in Kapitel 5 eindimensionale Kachelungen. Nach kurzer allgemeiner Betrachtung wenden wir uns zuerst periodischen zu. Es erweist sich, daß die Algebra $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ der Observablenalgebra eines Systems über der geschlossenen Kette, die sich aus $\mathcal{T}$ durch periodische Identifikation ergibt, entspricht. Im Anschluß daran betrachten wir Kachelungen, die Fixpunkt einer lokal invertierbaren Substitution sind, sogenannte Substitutionskachelungen. Hier ist das Gap-Labelling insofern bekannt, als man das Bild eines Zustandes auf der K_0-Gruppe berechnen kann. Wir wenden hier eine neue Methode an, die in vielen Fällen die Berechnung der K_0-Gruppe selbst ermöglicht, und bisher das einzige verfügbare Mittel im höherdimensionalen Fall ist, wenn dieser nicht als kartesisches Produkt aufgefaßt werden kann. Diese Methode beruht auf der Konstruktion eines Pfadraumes und einem Analogon der Robinsonabbildung, wodurch man eine AF-Algebra $\mathcal{A}_\Sigma$ erhält, in der sich die Selbstähnlichkeitsstruktur widerspiegelt. Sie liefert auch ein besseres Verständnis der periodischen Approximation aperiodischer Kachelungen.

In Kapitel 6 behandeln wir Kachelungen, die sich als kartesische Produkte eindimensionaler auffassen lassen. Mit Hilfe sehr tiefer mathematischer Theoreme läßt sich die K-Theorie der zugehörigen Algebren auf den eindimensionalen Fall zurückführen. Die periodische Approximation liefert jetzt aber ein grundlegend neues Phänomen: Die verschiedenen Generatoren der K_0-Gruppe haben verschiedene Bedeutung. Neben Projektoren, deren Bilder triviale Vektorbündel beschreiben, treten jetzt auch solche zu nichttrivialen Vektorbündeln auf.

Das siebte Kapitel ist schließlich den Kachelungen gewidmet, die für Quasikristalle von besonderer Bedeutung sind. Sie besitzen eine Orientierungssymmetrie. Da wir die K-Theorie der zugehörigen C^*-Algebra nicht berechnen können, müssen wir uns mit der Konstruktion eines Pfadraumes sowie einer AF-Algebra begnügen, die uns zumindest für die Penrose-Kachelung ein unter der Orientierungssymmetrie invariantes Maß auf der Hülle der Kachelung liefert. Damit können wir ein Teil der Spurwerte für das Gap-Labelling ermitteln, von dem wir aber annehmen, daß er schon alle enthält. Diese Vermutung wird durch die Ergebnisse des sechsten Kapitels untermauert. Wir stellen die Rolle der Orientierungssymmetrie heraus, indem wir zeigen, daß die Spiegelachsen eine Obstruktion zur Approximation eines Translationsoperators aus Elementen der AF-

Algebra darstellen. Als Anwendung betrachten wir neben den Penrose-Kachelungen die Ammann-Beenker-Kachelungen und die dodekagonale Kachelungen.

Kapitel 2

Mathematische Hilfsmittel

Wir stellen die in dieser Arbeit benötigten mathematischen Hilfsmittel aus der nichtkommutativen Geometrie, speziell zur algebraischen Beschreibung von Kachelungen, zusammen.

Eine C^*-Algebra ist eine komplexe Algebra mit einer Involution ($*$-Algebra) und einer Norm, bezüglich der sie vollständig ist und die Verträglichkeitsbedingung $\|a^*a\| = \|a\|^2$ erfüllt. Eine der wesentlichsten Konsequenzen dieser Bedingung ist, daß sich die Norm eines Elementes algebraisch durch seinen Spektralradius ausdrücken läßt:

$$\|a\|^2 = \sup\{\lambda \in \mathbb{C} | \, a^*a - \lambda 1 \text{ ist nicht invertierbar}\} \tag{2.1}$$

- sofern nicht anders erwähnt, seien die C^*-Algebren unital, mögen also ein Einselement enthalten. Jede Algebra von beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist eine C^*-Algebra, die Norm ist die Supremumsnorm. Insbesondere im Hinblick auf physikalische Fragestellungen sieht man sich aber bei der Betrachtung von Operatoren mit Fragen der Konvergenz von Folgen von Matrixelementen $< y, a^{(n)}x >$ oder Vektoren $a^{(n)}x$ konfrontiert. Diese Arten von Konvergenz sind in der Normtopologie nicht formulierbar. Stattdessen gibt es auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ weitere natürliche Topologien, von denen wir hier nur die starke erwähnen, weil sie die einzige ist, die wir explizit verwenden werden, und der Abschluß einer C^*-Algebra unter diesen Topologien zum selben Ergebnis führt. Die starke Topologie wird durch die Familie der Seminormen $\{a \mapsto \|ax\|\}_{x\in\mathcal{H}}$ definiert, d.h. eine Folge $a^{(n)}$ von Elementen aus $\mathcal{A}$ konvergiert in der starken Topologie gegen a, wenn für alle $x \in \mathcal{H}$ $\|(a - a^{(n)})x\|$ eine Nullfolge ist.

Eine von-Neumann-Algebra M ist nun eine C^*-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ - zu gegebenem Hilbertraum $\mathcal{H}$ - die auch abgeschlossen unter der starken Topologie ist. Das Bikommutanten-Theorem von Murray-von-Neumann besagt dann, daß $M'' = M$, wobei $M' = \{a \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) | \forall b \in M : ab = ba\}$. M ist dann auch bezüglich einer Reihe weiterer Topologien (schwach, stark-$*$, σ-schwach, σ-stark, σ-stark-$*$) abgeschlossen. Es sei noch erwähnt, daß von-Neumann-Algebren auch abstrakt definiert werden können. Eine abstrakte C^*-Algebra ist nämlich isomorph zu einer von-Neumann-Algebra, genau dann wenn sie als linearer Raum das Duale eines Banachraumes ist.

Eine Spur auf einer C^*-Algebra ist ein positives lineares Funktional, welches zyklisch ist, d.h. $\tau(ab) = \tau(ba)$. Ist sie normiert, d.h. $\tau(1) = 1$, so ist sie auch normstetig und kann daher immer von einer dichten Unteralgebra auf den Normabschluß fortgesetzt werden. Sie läßt sich aber nicht ohne weiteres auf den starken Abschluß in einer gegebenen Darstellung fortsetzen. Im Gegenteil, die Fortsetzbarkeit hängt entscheidend von der Darstellung ab und das Kriterium der Fortsetzbarkeit dient sogar zu einer groben Klassifikation der so erhaltenen von-Neumann-Algebra. Existiert nämlich auf einem Faktor - das ist eine von-Neumann-Algebra mit eindimensionalem Zentrum, $M' \cap M = \mathbb{C}$ - eine normierte Spur, so ist er entweder vom Typ I_n, d.h. isomorph zu $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ oder - wenn er unendlichdimensional ist - von Typ II_1. Viele der in der Physik interessierenden C^*-Algebren, wie z.B. die AF-Algebren, haben Faktor-Darstellungen zu allen drei Typen; unter dem dritten Typ finden sich die für die Quantenfeldtheorie wichtigen Faktoren.

Es ist nicht immer von Vorteil, Abgeschlossenheit bezüglich der starken Topologie zu verlangen, da dieser Abschluß die Separabilität in der Normtopologie zunichte machen kann. Dies macht sich insbesondere in der K-Theorie bemerkbar. So ist die K_0-Gruppe des hyperfiniten II_1-Faktors gleich $\mathbb{R}$, während die von separablen C^*-Algebren immer abzählbar ist.

Nach dem Theorem von Gelfand-Neumark läßt sich jede unitale kommutative C^*-Algebra $\mathcal{A}$ auffassen als Algebra der komplexwertigen stetigen Funktionen über ihrem Spektrum,

$$\mathcal{A} = C(spec(\mathcal{A})) \tag{2.2}$$

$spec(\mathcal{A})$ ist die Menge der maximalen Ideale von $\mathcal{A}$, welche aufgefaßt werden kann als schwach-*-kompakte Teilmenge des Dualraumes von $\mathcal{A}$. Umgekehrt ist das Spektrum von $C(X)$ für kompaktes X wieder X als topologischer Raum, d.h. die Spektraltopologie stimmt mit der ursprünglichen auf X überein. Dies ist die Basis für eine algebraische Beschreibung kompakter topologischer Räume.

Die Erweiterung dieser Dualität auf nichtkommutative C^*-Algebren ist Ausgangspunkt der nichtkommutativen Geometrie. Ein Teil dieser Erweiterung ist die operatoralgebraische Formulierung der K-Theorie, die in natürlicher Weise auch für nichtkommutative Algebren definiert ist. Sie ist ein zentrales Mittel in dieser Arbeit, denn die K-Gruppen von C^*-Algebren liefern Invarianten, die zur Analyse von Kachelungen geeignet sind und direkte physikalische Bedeutung im Gap-Labelling erhalten. Da wir nur unitale C^*-Algebren betrachten werden, geben wir die Definitionen nur für diesen Fall an, wodurch sie sich deutlich vereinfachen. Eine ausführliche Darstellung der K-Theorie von Operatoralgebren findet man in [?].

Ausgangspunkt zur Konstruktion der K_0-Gruppe einer Algebra $\mathcal{A}$ ist der Wunsch, die Projektorklassen $Proj(\mathcal{A})$ von $\mathcal{A}$ so zu erweitern, daß sich eine additive Struktur definieren läßt. Die Elemente von $Proj(\mathcal{A})$ sind Äquivalenzklassen von Projektoren: $p \sim q$ genau dann, wenn es ein $u \in \mathcal{A}$ gibt, so daß $p = uu^*$ und $q = u^*u$. Nun führt man eine Addition als Abbildung von $Proj(\mathcal{A}) \times Proj(\mathcal{A})$ nach $Proj(M_2(\mathcal{A}))$ durch

$$[p] + [q] = \left[\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \right] \tag{2.3}$$

ein, die man stabilisiert, in dem man $\mathcal{A}$ bzw. $M_k(\mathcal{A})$ (nichtunital) durch

$$a \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

in $M_2(\mathcal{A})$ bzw. $M_{k+1}(\mathcal{A})$ einbettet; $M_\infty(\mathcal{A}) \cong \mathcal{A} \otimes M_\infty(\mathbb{C})$ heißt die Stabilisierung von $\mathcal{A}$ und läßt sich als algebraischer Limes des gerichteten Systems der $M_k(\mathcal{A})$ verstehen. Dadurch wird $V(\mathcal{A}) = Proj(M_\infty(\mathcal{A}))$ zu einem abelschen Monoid.
$K_0(\mathcal{A})$ erhält man nun mit Hilfe der Grothendieckkonstruktion, d.h. durch Einführung formaler Differenzen. Es ist der Quotient $K_0(\mathcal{A}) = V(\mathcal{A}) \times V(\mathcal{A})/\sim$ unter $([p],[q]) \sim ([p'],[q'])$, falls für ein $[r] \in V(A)$ $[p]+[q']+[r] = [q]+[p']+[r]$ gilt.

Durch Einführung formaler Differenzen hat man zwar die Struktur einer Gruppe gewonnen, verliert aber die Information, welche Elemente Projektorklassen der stabilisierten Algebra entsprechen. Diese wird zumindest in den Fällen, die für uns von Bedeutung sind, dadurch wiedergewonnen, daß $K_0^+(\mathcal{A}) = \{([p],[0]) | [p] \in V(\mathcal{A})\}$ einen positiven Kegel von $K_0(\mathcal{A})$ definiert, d.h. eine unter Addition abgeschlossene Untermenge, für die $K_0^+(\mathcal{A}) - K_0^+(\mathcal{A}) = K_0(\mathcal{A})$ sowie $K_0^+(\mathcal{A}) \cap -K_0^+(\mathcal{A}) = \{0\}$ gilt. Dadurch wird $K_0(\mathcal{A})$ eine geordnete Gruppe. Zur Vereinfachung der Schreibweise schreibt man gewöhnlich $[p]$ anstelle von $([p],[0])$.

Ein weiterer Preis, der für die Einführung der Additionsstruktur bezahlt werden mußte, ist, daß die geordnete K_0-Gruppe nicht eigentlich von $\mathcal{A}$, sondern von seiner Stabilisierung abhängt. Um dies wieder aufzufangen, betrachtet man eine Skalierung der Algebra. Das Element [1], das Bild der $1 \in \mathcal{A}$ in $K_0^+(\mathcal{A})$ heißt Ordnungseinheit und dient gewissermaßen als Skaleneinheit. Dann unterscheiden sich verschiedene Algebren mit isomorpher Stabilisierung eventuell noch durch ihre Ordnungseinheit.

Ein Zustand auf $\mathcal{A}$, d.h. eine positive normierte Linearform auf $\mathcal{A}$, induziert genau dann durch $\tau_*[p] = \tau(p)$ einen normierten Zustand auf der skalierten geordneten Gruppe $K_0(\mathcal{A})$, wenn er zyklisch ist, also ein Spurzustand.

Zur Definition der K_1-Gruppe von $\mathcal{A}$ betrachten wir die invertierbaren Elemente $GL_n(A)$ von $M_n(\mathcal{A})$, die unter der Einbettung

$$a \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

ein gerichtetes System von Gruppen liefern, dessen algebraischer Limes mit $GL(\mathcal{A})$ bezeichnet wird. Sei $GL(\mathcal{A})_0$ die Zusammenhangskomponente der 1. Dann ist $K_1(\mathcal{A}) = GL(\mathcal{A})/GL(\mathcal{A})_0$ ebenfalls eine abelsche Gruppe mit Gruppenmultiplikation

$$[u][v] = [uv] \sim \left[\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \right]. \tag{2.6}$$

Die Berechenbarkeit der K-Gruppen von C^*-Algebren beruht nicht zuletzt darauf, daß K_i, $i = 0,1$, ein Funktor von der Kategorie der C^*-Algebren in die der abelschen Gruppen ist, der direkte Summen und algebraische Limiten erhält. Jeder $*$-Homomorphismus

$h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ induziert einen Gruppenhomomorphismus $h_* = K_i(h) : K_i(\mathcal{A}) \to K_i(\mathcal{B})$ durch $h_*[x] = [h(x)]$. Außerdem ist sein Verhalten auf Tensorprodukten bekannt. Für C^*-Algebren existieren im allgemeinen mehrere Möglichkeiten, ein Tensorprodukt zu definieren, das der Vervollständigung des algebraischen Tensorproduktes bezüglich einer Norm entspricht, die die Kreuz-Norm-Bedingung $\|a \otimes b\| = \|a\|\|b\|$ erfüllt. Nukleare C^*-Algebren sind genau diejenigen, für die diese Definitionen zusammenfallen. Genauer heißt $\mathcal{A}$ nuklear, wenn für jede C^*-Algebra $\mathcal{B}$ alle diese Möglichkeiten des Tensorproduktes isomorph sind. Was nun die K-Gruppen von Tensorprodukten angeht, so gilt die Künnethformel, die wir hier mit etwas spezielleren Voraussetzungen aus [?] zitieren:

Theorem 1 *Für nukleare C^*-Algebren ist*

$$K_0(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \cong K_0(\mathcal{A}) \otimes K_0(\mathcal{B}) \oplus K_1(\mathcal{A}) \otimes K_1(\mathcal{B}) \tag{2.7}$$

$$K_1(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \cong K_0(\mathcal{A}) \otimes K_1(\mathcal{B}) \oplus K_1(\mathcal{A}) \otimes K_0(\mathcal{B}). \tag{2.8}$$

Kommutative C^*-Algebren und AF-Algebren sind z.B. nuklear ebenso wie verschränkte Produkte kommutativer C^*-Algebren mit $\mathbb{Z}$.

Wir erläutern die Begriffe aus der K-Theorie an zwei Beispielen:

1. Kommutative C^*-Algebren

Für kommutative C^*-Algebren ist die soeben definierte operatoralgebraische K-Theorie äquivalent zur topologischen K-Theorie (von kompakten topologischen Räumen - für nicht kompakte muß die Definition von K_0 für nichtunitale Algebren benutzt werden [?]). Jedes komplexe Vektorbündel E über einem Hausdorffraum X kann als Summand (unter der Whitneysumme) eines trivialen Bündels höherer Faserdimension geschrieben werden. Ist n diese höhere Faserdimension, so ist E das Bild eines Projektors aus $M_n(C(X))$. Umgekehrt definiert jeder d-dimensionale Projektor aus $M_n(C(X))$ ein d-dimensionales Vektorbündel über X durch sein Bild. Auf diese Art und Weise erhält man eine wohldefinierte Bijektion zwischen den Äquivalenzklassen komplexer Vektorbündel über X und den Projektorklassen der Stabilisierung von $C(X)$, d.h. $K^0(X) = K_0(C(X))$. Betrachten wir nun als Beispiel $X = S^1$, die Kreislinie, so folgt, da über S^1 alle komplexen Vektorbündel trivial sind, daß es in jeder Faserdimension nur eine Äquivalenzklasse von Vektorbündeln gibt. Diese wird durch eine Summe eindimensionaler nichttrivialer Vektorbündel repräsentiert, und daher wird $K^0(S^1)$ durch ein Element erzeugt, es ist also $\mathbb{Z}$. Da S^1 nicht kontrahierbar ist, ist $K^1(S^1) \neq 0$. In der Tat ist $K^1(S^1) = \mathbb{Z}$, und es ist leicht einzusehen, daß die Funktion $u : S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\} \to \mathbb{C}$, $u(z) = z$ nicht homotop zur 1 sein kann und $K_1(C(S^1))$ erzeugt.

2. AF-Algebren

AF-Algebren sind die einfachsten nichtkommutativen C^*-Algebren unendlicher Dimension. Sie sind der Normabschluß des algebraischen Limes eines gerichteten Systems von endlichdimensionalen C^*-Algebren.

Ein gerichtetes System ist eine Familie von Objekten und Morphismen einer Kategorie

$$\mathcal{A}^{(1)} \xrightarrow{h^{(1)}} \mathcal{A}^{(2)} \xrightarrow{h^{(2)}} \cdots, \tag{2.9}$$

welches wir auch kürzer $(\mathcal{A}^{(n)}, h^{(n)})$ schreiben. Der (direkte oder induktive) algebraische Limes ist kategoriell als universell abstoßendes Objekt $(\mathcal{A}, h_n)$ durch das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^{(n)} & \xrightarrow{h^{(n)}} & \mathcal{A}^{(n+1)} \\ h_n \searrow & & \swarrow h_{n+1} \\ & \mathcal{A} & \end{array} \tag{2.10}$$

definiert. Man schreibt schlicht $\mathcal{A} = \lim_{\rightarrow} \mathcal{A}^{(n)}$. Wir betrachten hier die Kategorie der C^*-Algebren einerseits sowie die der abelschen Gruppen. In beiden Fällen existiert der algebraische Limes und eine Realisierung ist gegeben durch die direkte Summe aller $\mathcal{A}^{(n)}$ modulo der durch $(0, \cdots, \overset{n'te}{a}, \cdots) \sim (0, \cdots, \overset{n+1'te}{h^{(n)}(a)}, \cdots)$ erzeugten Äquivalenzrelation [?]. Sind überdies die $h^{(n)}$ invertierbar, so kann man $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}^{(1)}$ identifizieren, wenn man $h_n = (h^{(n-1)} \circ \cdots \circ h^{(1)})^{-1}$ setzt. Wie schon angedeutet ist eine AF-Algebra $\mathcal{A}$ durch ein gerichtetes System endlichdimensionaler C^*-Algebren $\mathcal{A}^{(n)}$ mit $*$-Homomorphismen $h^{(n)}$ definiert

$$\mathcal{A} = \overline{\lim_{\longrightarrow} \mathcal{A}^{(n)}}. \tag{2.11}$$

Jede endlichdimensionale C^*-Algebra ist halbeinfach, d.h. sie ist die direkte Summe einfacher Algebren, und die Summanden, ihre einfachen Komponenten, sind ihrerseits isomorph zu $m \times m$ Matrixalgebren $M_m(\mathbb{C})$. Daher haben die Approximanden $\mathcal{A}^{(n)}$ von $\mathcal{A}$ die Form

$$\mathcal{A}^{(n)} = \bigoplus_{i=1}^{k_n} \mathcal{A}_i^{(n)}, \quad \mathcal{A}_i^{(n)} \cong M_{N_i^{(n)}}(\mathbb{C}). \tag{2.12}$$

Aufgrund der funktoriellen Eigenschaften von K_i erhalten wir daraus sofort gerichtete Systeme von K-Gruppen $(K_i(\mathcal{A}^{(n)}), h_*^{(n)})$, deren algebraische Limites die K-Gruppen der AF-Algebra sind (insbesondere ändern sich die K-Gruppen durch den C^*-Abschluß nicht). Wegen $K_1(\mathbb{C}) = 0$ ist das gerichtete System der K_1-Gruppen trivial und somit auch dessen algebraischer Limes. Weiterhin folgt aus $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$, daß $K_0(\mathcal{A}^{(n)}) = \mathbb{Z}^{N_i^{(n)}}$ ist und $h_*^{(n)}$ eine positive $k_{n+1} \times k_n$ Matrix, deren ji-Koeffizient angibt, wie häufig die Komponente $M_{N_i^{(n)}}$ unter $h^{(n)}$ in $M_{N_j^{(n+1)}}$ erscheint. Der positive Kegel von $K_0(\mathcal{A})$ ist dann gegeben durch

$$K_0^+(\mathcal{A}^{(n)}) = \bigcup_{n \geq 1} h_{n\,*}(K_0^+(\mathcal{A}^{(n)})). \tag{2.13}$$

Das gerichtete System der Algebren läßt sich in einem Bratteli-Diagramm kodieren. Ein Bratteli-Diagramm besteht aus einer Menge gewichteter Vertizes V, die sich in „Etagen" V_n gruppieren - also $V = \cup_{n \geq 1} V_n$ - und gerichteten Kanten zwischen aufeinanderfolgenden Etagen. Die i-te Vertex von V_n wird mit dem Generator von $K_0(\mathcal{A}_i^{(n)})$ identifiziert und erhält als Gewicht die Wurzel der Dimension von $\mathcal{A}_i^{(n)}$, das ist $N_i^{(n)}$. Er wird sodann durch $(h_*^{(n)})_{ji}$ (gerichtete) Kanten mit dem j-ten Vertex von V_{n+1} verbunden. Diese Kanten zusammen mit den Vertizes V_n und V_{n+1} liefern den (bipartiten)

Einbettungsgraph der Einbettung von $\mathcal{A}^{(n)}$ in $\mathcal{A}^{(n+1)}$ und die Matrizen $h_*^{(n)}$ heißen auch Einbettungsmatrizen.
Ein Bratteli-Diagramm, das man sich als die Folge der Einbettungsgraphen plus die Gewichtung der Vertizes vorstellen kann, bestimmt das gerichtete System der Algebren (bis auf Isomorphie) und kann als Invariante desselben gelten. Dadurch ist natürlich auch die AF-Algebra bestimmt, allerdings können völlig verschiedene, durch keinen einfachen Algorithmus miteinander vergleichbare Bratteli-Diagramme dieselbe AF-Algebra definieren. Bratteli-Diagramme eignen sich daher nicht zur Klassifizierung von AF-Algebren. Dies wird erst durch die K-Theorie erreicht. Nach Elliots Theorem ist die skalierte geordnete K_0-Gruppe eine vollständige Invariante für AF-Algebren [?].

Das gerichtete System der K_0-Gruppen allein ist schon durch das ungewichtete Bratteli-Diagramm bestimmt, und, wenn die Einbettungen $h^{(n)}$ unital sind, sind Dimensionen der $\mathcal{A}_j^{(n+1)}$ schon durch die der $\mathcal{A}_i^{(n)}$ und die (ganzzahligen) Matrizen $h_*^{(n)}$ bestimmt, so daß es nur einer Gewichtung der Vertizes aus V_1 bedarf. Diese „Anfangsgewichtung“ ist genau die Information, die die Ordnungseinheit trägt.

In den von uns später betrachteten Fällen ist das gerichtete System der K_0-Gruppen stationär, d.h. $K_0(\mathcal{A}^{(n)})$ und $h_*^{(n)}$ sind unabhängig von n. Das System ist also isomorph zu $(\mathbb{Z}^r, h)$. Dann sind natürlich auch die V_n miteinander identifizierbar und die Kanten zwischen den Etagen immer gleich. Wenn überdies die Einbettungen $h^{(n)}$ der Algebren unital sind, kann das gesamte gewichtete Bratteli-Diagramm in einem endlichen gewichteten Graph Σ zusammengefaßt werden, dessen Vertizes $\Sigma^{(0)}$ gerade V_1 entsprechen und dessen (gerichtete) Kanten $\Sigma^{(1)}$ denjenigen zwischen V_1 und V_2. Die Gewichtung der Vertizes ist dann die Anfangsgewichtung. Wir bezeichnen die so durch den Graph Σ mit der Gewichtung w_i für den i-ten Vertex definierte AF-Algebra mit $\mathcal{A}_{\Sigma,w}$ bzw., falls $w_i = 1$ für alle i, schlicht mit $\mathcal{A}_\Sigma$.

Für unitale AF-Algebren entsprechen die Spurzustände genau den Zuständen auf der skalierten geordneten K_0-Gruppe. Ist das System übersdies stationär und h primitiv (oder aperiodisch, d.h. ab einer bestimmten Potenz hat h^n strikt positive Koeffizienten), so gibt es nur eine normierte Spur auf $\mathcal{A}_{\Sigma,w}$ bzw. nur einen einzigen Zustand auf $K_0(\mathcal{A}_{\Sigma,w})$ [?],[?]. Sei τ der Perron-Frobenius-Eigenwert und ν der auf $(w, \nu) = 1$ (euklidisches Skalarprodukt) normierte Links-Perron-Frobenius-Eigenvektor von h und $a = \sum_i a_i$ mit $a_i \in \mathcal{A}_{\Sigma,i}^{(n)}$. Dann definiert

$$\mathrm{tr}^{(n)}(a) = \tau^{1-n} \sum_i \nu_i \mathrm{Tr}(a_i), \tag{2.14}$$

wobei Tr die gewöhnliche Spur für Matrizen bezeichne, ein System von treuen normierten Spuren auf dem gerichteten System der $\mathcal{A}_{\Sigma,w}^{(n)}$. Dieses System von Spuren ist mit der Einbettung verträglich ist, d.h. $\mathrm{tr}^{(n+1)} \circ h^{(n)} = \mathrm{tr}^{(n)}$, und kann daher auf den Limes fortgesetzt werden kann. Damit erhält man für das Bild des entsprechenden Zustandes auf skalierten geordneten K_0-Gruppe

$$\mathrm{tr}_*(K_0(\mathcal{A}_{\Sigma,w})) = \{\tau^{1-n}(z, \nu) | n > 0, z \in \mathbb{Z}^r\}, \tag{2.15}$$

welches auch eine (additive) Gruppe ist. Diese Gruppe weist Züge einer Selbstähnlichkeit auf, da ihre Elemente multipliziert mit τ^{-1} ebenfalls in der Gruppe liegen. Den algebraischen Limes der K_0-Gruppe selbst berechnen wir zunächst für den einfachsten Fall, in dem h ein Automorphismus ist und primitiv. In diesem Fall können wir $K_0(\mathcal{A}^{(n)})$ durch h^{-n+1} mit $K_0(\mathcal{A}^{(1)})$ identifizieren, so daß $\lim_{\rightarrow} K_0(\mathcal{A}^{(n)}) = \mathbb{Z}^r$ wird und mit (2.13)

$$K_0^+(\mathcal{A}_{\Sigma,w}) = \bigcup_{n\geq 1} h^{-n+1}((\mathbb{Z}^+)^r). \tag{2.16}$$

Mit anderen Worten ist $x \in K_0^+(\mathcal{A}_{\Sigma,w})$, dann und nur dann wenn $\exists n \geq 0 : h^n(x) \in K_0^+(\mathcal{A}^{(1)}) = (\mathbb{Z}^+)^r$. Da h positiv ist, impliziert $h^n(x) \in (\mathbb{Z}^+)^r$ auch $h^{n+1}(x) \in (\mathbb{Z}^+)^r$, weshalb obige Bedingung äquivalent zu $\forall y \in (\mathbb{R}^+)^r : \lim_{n\to\infty}(y, h^n(x)) \geq 0$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $(\nu, x) > 0$ oder $x = 0$ ist. Daher ist

$$K_0^+(\mathcal{A}_{\Sigma,w}) = \{x \in \mathbb{Z}^r \,|\, (\nu, x) > 0\} \cup \{0\}. \tag{2.17}$$

Insbesondere gibt es nur einen Zustand auf der geordneten K_0-Gruppe, nämlich (bis auf Normierung) die orthogonale Projektion auf den durch ν erzeugten Vektorraum. Es muß sich daher hierbei um den Spurzustand handeln. Ein Vergleich mit (2.15) zeigt, daß dies natürlich der Fall ist und die Ordnung auch durch $x \in K_0^+(\mathcal{A}_{\Sigma,w})$ gdw. $\tau(x) > 0$ oder $x = 0$ ausgedrückt werden kann.
Falls $(\nu, x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ist $K_0(\mathcal{A}_{\Sigma,w})$ sogar total geordnet und τ_* injektiv, so daß die K_0-Gruppe mit dem Bild des Spurzustandes identifiziert werden kann.

Ist h selbst nicht über $\mathbb{Z}$ invertierbar, aber noch $\frac{1}{\det h}h^r \in Aut(\mathbb{Z}^r)$, so ist $K_0(\mathcal{A}_{\Sigma,w}) = (\mathbb{Z}[\frac{1}{\det h}])^r$ mit $h_n = h^{-n}$ der algebraische Limes. Mit anderen Worten, wir haben die Koeffizienten $\mathbb{Z}$ durch $\mathbb{Z}[\frac{1}{\det h}]$ zu ersetzen und dasselbe gilt für (2.17). Für den Fall, daß h zwar nicht entartet, aber $\frac{1}{\det h}h^r$ kein Automorphismus von $\mathbb{Z}^r$ ist, können wir die geordnete K_0-Gruppe nicht so explizit angeben. Ist schließlich h entartet, also die Dimension von $F = \mathrm{Bild}(h^r)$ echt kleiner als r, so sind die algebraischen Limites der gerichteten Systeme $(\mathbb{Z}^r, h)$ und $(F, h^r|_F)$ isomorph, denn

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^r \arrow[rr, "h^r"] \arrow[dr, "h^r"'] & & \mathbb{Z}^r \arrow[rr, "h^r"] \arrow[dr, "h^r"] & & {} \\ & F \arrow[ur, "id"] \arrow[rr, "h^r|_F"'] & & F & \end{tikzcd} \tag{2.18}$$

kommutiert. $(F, h^r|_F)$ kann evtl. wie oben behandelt werden, wobei darauf geachtet werden muß, daß $h^r(w)$ als Ordnungseinheit verwendet wird.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einigen Bemerkungen zu dynamischen Systemen und zur Maßtheorie.
Sei Ω ein kompakter Hausdorffraum und φ ein Homöomorphismus. Dann wird durch Iteration von φ bzw. dessen Inverse eine Operation von $\mathbb{Z}$ auf Ω definiert und damit auch auf $C(\Omega)$ durch Zurückholen $\varphi^*(f)(x) = f(\varphi^{-1}x)$. (Ω, φ) heißt topologisches dynamisches System. Ein solches System heißt *topologisch transitiv*, wenn es einen dichten $\mathbb{Z}$-Orbit gibt $\exists S \in \Omega : \overline{\{\varphi^n S | n \in \mathbb{Z}\}} = \Omega$, und (Ω, φ) heißt *minimal*, wenn sogar jeder $\mathbb{Z}$-Orbit dicht liegt. Unter Anwendung des Zornschen Lemmas zeigt man, daß jedes topologische dynamische System ein minimales enthält.

Wir werden in dieser Arbeit vollständig unzusammenhängende kompakte metrische Räume betrachten. Ein topologischer Raum ist vollständig unzusammenhängend, wenn seine Topologie eine Basis hat, deren Mengen gleichzeitig offen und abgeschlossen sind. Die offenen ϵ-Umgebungen erzeugen eine σ-Algebra von Borelmengen. Jede stetige Funktion ist dann insbesondere meßbar und der Dualraum von $C(\Omega)$ kann mit dem Raum aller komplexen (Baire-) Maße identifiziert werden, d.h. jedes Maß auf Ω definiert ein lineares Funktional auf $C(\Omega)$, nämlich durch $\mu(f) = \int f d\mu$, sowie umgekehrt. In unserem Zusammenhang sollen Maße immer durch $\mu(\Omega) = 1$ normiert sein (Wahrscheinlichkeitsmaße). Im Zusammenhang mit dynamischen Systemen sind natürlich die φ-invarianten Maße von Interesse, das sind die, für die $\mu(f) = \mu(\varphi(f))$ gilt. Ein solches Maß auf Ω heißt *ergodisch*, wenn jede φ-invariante Menge entweder Maß 0 oder Maß 1 hat. Für ein minimales dynamisches System gibt es immer ein ergodisches Maß, welches aber nicht eindeutig zu sein braucht. Eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Eindeutigkeit ist, daß $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi^{-k}S) \to \mu(f)$ für jedes $f \in C(\Omega)$ konvergiert.

Kapitel 3

Gap-Labelling von Schrödinger-Operatoren auf Kachelungen

3.1 Festkörpermodelle auf Kachelungen

Unter einer Kachelung (Plakettierung) des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ wollen wir eine lückenlose, überlappungsfreie Überdeckung von $\mathbb{R}^n$ durch Kacheln, d.h. Repräsentanten von Protokacheln verstehen. Hierbei ist eine Protokachel die Kongruenzklasse (unter euklidischer Transformation) einer Polygonfläche (oder deren höher- bzw. eindimensionales Analogon), in der ein Punkt ausgezeichnet ist, und wir setzen voraus, daß die Menge der Protokacheln einer Kachelung endlich ist. Die Auszeichnung eines Punktes in einer Polygonfläche (Punktierung) dient zur Lokalisierung eines Musters in einer Kachelung sowie zur Brechung einer eventuell vorhandenen Symmetrie der Polygonfläche und soll daher nicht auf Symmetrieachsen bzw. -zentren liegen, kann aber ansonsten beliebig sein.

Unter orientierten Protokacheln verstehen wir translative Kongruenzklassen (Kongruenz nur unter Translation) punktierter Polygonflächen. Ein Muster M einer Kachelung T ist eine translative Kongruenzklasse einer endlichen Teilmenge von T, die eine einfach zusammenhängende kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ lückenlos überdeckt. Es ist also orientiert. Wir bezeichnen mit $T^{(\bullet)}$ die Menge der Punktierungen von T, die als Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ aufgefaßt werden kann, weil Kachelungen immer konkrete Überdeckungen des $\mathbb{R}^n$ sind. Die Menge der Punktierungen eines Musters M bezeichnen wir ebenso mit $M^{(\bullet)}$. Durch Identifikation von $M^{(\bullet)}$ mit einer Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, die schon durch die Identifikation eines Elementes mit einem Punkt von $\mathbb{R}^n$ bestimmt ist, wird ein Repräsentant des Musters bestimmt. Die Schreibweise $(M,x) \subset (T,y)$ bedeute, daß derjenige Repräsentant des Musters M in T realisiert ist, dessen Punktierung $x \in M^{(\bullet)}$ bei $y \in T^{(\bullet)}$ liegt, d.h. daß $x = y$ ist. Wir sagen schlicht (M,x) ist in T bei y realisiert. Der Rand eines realisierten Musters (M,x) ist der Rand der Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, die (M,x) überdeckt.

Bei eindimensionalen Kachelung lassen sich die Kacheln ordnen, so daß man $\mathcal{T}^{(\bullet)}$ mit $\mathbb{Z}$

und die Kachelung mit einer Folge über $\mathbb{Z}$ identifizieren kann. Eine solche Identifikation bedeutet aber noch lange nicht, daß die Kachelung periodisch ist. Für Kachelungen, die sich als kartesische Produkte von eindimensionalen Kachelungen auffassen lassen, ist daher $\mathcal{T}^{(\bullet)}$ mit $\mathbb{Z}^n$ identifizierbar. Neben diesem Typ von Kachelung betrachten wir noch Kachelungen mit Orientierungssymmetrie. Diese sind für Modelle von Quasikristallen besonders interessant.

Eine Kachelung $\mathcal{T}$ soll die räumliche Struktur eines Festkörpers beschreibenS. Die Atome des Festkörpers sitzen an den Punktierungen bzw. in den Zentren der Kacheln. Man kann auch sagen, daß sie an Vertizes des zur Kachelung dualen Graphen lokalisiert sind. Dessen Vertizes entsprechen nämlich den Polygonflächen und zwei Vertizes sind durch eine Kante verbunden, falls die Polygonflächen einen gemeinsame Kante haben. Die Atomsorten sowie ihre Verteilung werden durch die lokalen Muster, also die Kacheltypen sowie deren Anordnung bestimmt.

Die Vertizes des zur Kachelung dualen Graphen bzw. die Punktierungen der Kacheln liefern das zugrundeliegende Gitter oder Quasigitter o.ä. für die Behandlung von Einteilchen- oder Mehrteilchenproblemen in einer Tight-binding-Approximation. Das Potential und damit der Schrödinger-Operator soll dabei nur von den Mustern abhängen und somit insbesondere durch endlich viele Parameter, die diesen Mustern zugeordnet sind, beschrieben sein. Die Diskretisierung rechtfertigt sich dadurch, daß die Matrixelemente $< \psi_i^{(n)} | H_c | \psi_j^{(m)} >$ eines über dem Ortsraum-Kontinuum $\mathbb{R}^n$ definierten (unbeschränkten) Operators H_c mit den gebundenen Eigenzuständen der Atome an den Kachelplätzen i und j exponentiell mit deren Abstand abfallen. In der ersten Näherung der Tight-binding-Approximation verschwinden diese dann für nichtbenachbarte Atome. Die Schrödinger-Operatoren, die wir betrachten, sind damit beschränkte selbstadjungierte Operatoren über $\ell^2(\mathcal{T}^{(\bullet)})$, die aber nicht beliebig sind, weil das Potential in der oben beschriebenen Weise von der Geometrie der Kachelung abhängt. Die einfachste Näherung eines Einteilchenoperators besteht dann aus dem kinetischen Anteil, der proportional zum diskreten Laplace-Operator ist, mit einem diagonalen Potential, dessen Wert an einer Punktierung nur vom Typ der Protokachel, zu der die Punktierung gehört, abhängt. Als Beispiel eines solchen Operators sei eine Kachelung genommen, für die $\mathcal{T}^{(\bullet)} \cong \mathbb{Z}$, $\mathcal{T}$ also als Folge über $\mathbb{Z}$ aufgefaßt werden kann. Dann sind die Wellenfunktionen Elemente aus $\ell^2(\mathbb{Z})$ und $H = -\Delta + V$ mit $\Delta_{ij} = \delta_{i\,j+1} + \delta_{i\,j-1}$ sowie einem diagonalem Potential, dessen Werte V_{ii} nur von der Protokachel abhängt, die durch $\mathcal{T}_i$ repräsentiert wird. Insbesondere nimmt das Potential nur soviel verschiedene Werte an, wie es Protokacheln gibt. Für beliebige Kachelungen entspricht der diskrete Laplace-Operator der Zusammenhangsmatrix des zur Kachelung dualen Graphen.

3.2 Das Gap-Labelling

Wir beschreiben hier, wie man den möglichen Lücken des Spektrums eines Schrödinger-Operators Elemente einer abzählbaren Gruppe zuordnen kann, die auf gewisse Störungen des Operators unempfindlich sind. Hierbei ist die Shubinformel, die die integrierte Zustandsdichte mit der Spur pro Volumen der Spektralprojektoren verbindet, in gewisser Hinsicht als Motivation zu sehen, obwohl sie nicht Voraussetzung ist. Die Details sind den Arbeiten von Bellissard [?, ?, ?] zu entnehmen. Zudem möchten wir auf die Diplomarbeit von A. van Elst [?] hinweisen, in der einige Punkte ausführlich dargestellt sind.

Sei H ein Schrödingeroperator der im letzten Abschnitt erläuterten Art, insbesondere also ein beschränkter Operator über $\ell^2(\mathcal{T}^{(\bullet)})$. $\chi(H \leq E)$ bezeichne seine Spektralprojektoren auf Eigenfunktionen zu Eigenwerten kleiner gleich E und H_Λ seine Einschränkung auf eine Teilmenge Λ von $\mathcal{T}$ (mit Dirichlet Randbedingungen). Zur Definition einer integrierten Zustandsdichte auf einem unendlich dimensionalen Hilbertraum setzt man - wie der Name schon sagt -

$$\mathcal{N}_H(E) = \lim_{\Lambda \to \mathcal{T}} \frac{1}{|\Lambda^{(\bullet)}|} \mathrm{Tr}(\chi(H_\Lambda \leq E)) \tag{3.1}$$

an, wobei der Grenzwert mit Hilfe einer Folge von die Kachelung approximierenden Mustern gedacht sei und Tr die Spur auf $\mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{T}^{(\bullet)}))$; $\mathrm{Tr}(\chi(H_\Lambda \leq E))$ entspricht also der Anzahl der Eigenzustände von H_Λ zu Eigenwerten kleiner gleich E. Der Begriff der integrierten Zustandsdichte ist nicht nur von theoretischem Interesse, denn ihre Ableitung nach der Energie ist im Prinzip experimentell meßbar [?].
Die Frage, inwieweit der obige Grenzwert definiert und unter welchen Umständen unabhängig von der Folge und den gewählten Randbedingungen von H_Λ ist, kann noch nicht allgemein beantwortet werden, vgl. [?]. Zumindest aber für den Fall, daß H beschränkt ist und der $\mathcal{T}^{(\bullet)}$ mit einer diskreten mittelbaren Gruppe[1] identifiziert werden kann, kann die rechte Seite von (3.1) als Bild einer Spur ausgewertet auf $\chi(H \leq E)$ verstanden werden. Genauer definiert dann einerseits

$$\mathrm{tr}(a) = \lim_{\Lambda \to \mathcal{T}} \frac{1}{|\Lambda^{(\bullet)}|} \mathrm{Tr}(\chi_\Lambda a), \tag{3.2}$$

auf einer geeigneten Unteralgebra von $\mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{T}^{(\bullet)}))$, die die Spektralprojektoren von H enthält, eine normierte Spur. Hierbei ist nun χ_Λ der Multiplikationsoperator mit der charakteristischen Funktion auf Λ, d.h. der Projektor auf den endlichdimensionalen Unterraum $\ell^2(\Lambda^{(\bullet)})$ von $\ell^2(\mathcal{T}^{(\bullet)})$. Andererseits folgt aus der Mittelbarkeit, die im wesentlichen zum Ausdruck bringt, daß das Verhältnis des Randvolumens von Λ (gemessen an der Anzahl der Kacheln, die den Rand berühren) zum Gesamtvolumen gegen 0 tendiert,

$$\lim_{\Lambda \to \mathcal{T}} \frac{1}{|\Lambda^{(\bullet)}|} \mathrm{Tr}(\chi(H_\Lambda \leq E) - \chi_\Lambda \chi(H \leq E)) = 0. \tag{3.3}$$

Während (3.2) das (auf dynamische Systeme bezogene) Ergodentheorem zur Beweisgrundlage hat, enthält der in [?] angegebene Beweis von (3.3) keinen Bezug auf eine Gruppenstruktur, sondern beruht nur auf jenem Randvolumen-Gesamtvolumen Argument, weshalb er sich wörtlich auf beliebige Kachelungen übertragen läßt, deren Protokacheln endliche Kugeln überdecken sowie in endliche Kugeln hineinpassen. (3.2) und

[1]Eine diskrete Gruppe G heißt mittelbar, falls es eine Folge $\{\Lambda_n\}_{n\geq 1}$ beschränkter Teilmengen gibt, die G approximiert, $\bigcup_{n\geq 1} \Lambda_n\} = G$, und für alle $g \in G$: $\frac{|(\Lambda_n \backslash g\Lambda_n) \cup (g\Lambda_n \backslash \Lambda_n)|}{|\Lambda_n|} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ konvergiert. Insbesondere ist $\mathbb{Z}^r$ mittelbar.

(3.3) ergeben zusammengenommen die Shubinformel

$$\mathcal{N}_H(E) = \mathrm{tr}(\chi(H \leq E)). \tag{3.4}$$

Die Spektralprojektoren von H liegen im allgemeinen erst in einer von-Neumann-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{T}^{(\bullet)}))$. Beschränkt man sich jedoch auf Spektralprojektoren $\chi(H \leq E)$ zu Energien, die in einer Lücke des Spektrums von H liegen, so liegen sie bereits in $C(H)$, der C^*-Algebra, die von H und der Eins erzeugt wird und die eine Unteralgebra jeder unitalen C^*-Algebra ist, die H enthält. Dies liegt daran, daß es stetige Funktionen gibt, die auf $\{\lambda \in spec(H)|\lambda \leq E\}$ den Wert 1 auf $\{\lambda \in spec(H)|\lambda > E\}$ jedoch 0 annehmen. Ist daher $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit einer normierten Spur, die so auf $\ell^2(\mathcal{T}^{(\bullet)})$ dargestellt werden kann, daß $H = \pi(h)$ ein Darsteller für ein $h \in \mathcal{A}$ ist und die Spur mit dem oben diskutierten Grenzwert (3.2) übereinstimmt, so kann man für die Werte der integrierten Zustandsdichte, für die E in einer Lücke des Spektrums von H liegt, jedenfalls sagen

$$\mathcal{N}_H(E) = \mathrm{tr}(\chi(H \leq E)) \in \mathrm{tr}(Proj(\mathcal{A})), \tag{3.5}$$

denn die Spur eines Projektors hängt nur von seiner Projektorklasse ab. Dieses schöne Resultat zeigt einige bemerkenswerte Eigenschaften der integrierten Zustandsdichte auf Lücken. Erstens ist die integrierte Zustandsdichte die ja eine monoton steigende Funktion von E ist, mit $\chi(H \leq E)$ konstant auf den Lücken, und zweitens sind ihre Werte auf Lücken stabil unter Störungen von H, die mit H durch einen stetigen Pfad in $\mathcal{A}$ verbunden sind (Stetigkeit ist hier im norm-generalisierten Sinne gemeint, zur Def. siehe S. 284 aus [?]). Dies ebenso wie die Abzählbarkeit von $\mathrm{tr}(Proj(\mathcal{A}))$ für separables $\mathcal{A}$ folgt daraus, daß für zwei Projektoren p, q aus $\|p - q\| < 1$ schon $p \sim q$ folgt. Die Werte der integrierten Zustandsdichte liefern also unter gewissen Störungen stabile abzählbare Labels für die Lücken. Der vereinfachende Übergang zu Äquivalenzklassen von Projektoren findet seine Berechtigung auch darin, daß unitär äquivalente Operatoren dasselbe Spektrum haben und eben - wie man auch an der Zyklizität der Spur sieht - dieselbe integrierte Zustandsdichte.

Um nun die möglichen Werte der integrierten Zustandsdichte auf Lücken zu berechnen, bedarf es zunächst der Wahl oder Konstruktion einer geeigneten C^*-Algebra. Die rechte Seite von (3.5) ist ja eine Obermenge dieser Werte und es kommt darauf an, eine hinreichend nichtkommutative Algebra zu finden, so daß die Projektorklassen so groß werden - und damit $Proj(\mathcal{A})$ so klein -, daß zumindest die meisten Elemente von $\mathrm{tr}(Proj(\mathcal{A}))$ tatsächlich als Werte der integrierten Zustandsdichte vorkommen. Hierbei sollte $\mathcal{A}$ natürlich irgend etwas mit H zu tun haben; da $\mathrm{tr}(Proj(\mathcal{A}))$ aber keinen Bezug auf einen speziellen Operator aus $\mathcal{A}$ macht, wird es nur möglich sein, Aussagen über „generische“ Operatoren aus $\mathcal{A}$ zu machen. Im übrigen ist man durchaus nicht nur an einer Aussage über das Spektrum eines speziellen Schrödinger-Operators interessiert, sondern will etwas über eine ganze Familie von Operatoren wissen. Zumindest in einfachen Modellen läßt sich das Spektrum eines Operators über dem Ortsraum-Kontinuum lokal um einen Eigenwert E nämlich mit Hilfe einer Familie diskreter Operatoren auf dem durch die Tight-binding-Approximation gegebenen Hilbertraum bestimmen [?].

Was nun die Wahl einer geeigneten Algebra angeht, so verfolgen wir hier die Philosophie, daß $\mathcal{A}$ allein aus der Geometrie der Kachelung konstruiert werden sollte, mathematisch gesprochen nach Maßgabe der nichtkommutativen Geometrie, physikalisch als Observablenalgebra, die von Translationen und charakteristischen Funktionen erzeugt wird. In [?] wird für den Fall, daß $\mathcal{T}^{(\bullet)}$ mit $\mathbb{Z}^n$ identifiziert werden kann, die C^*-Algebra aus einem generischen Schrödinger-Operator unter Zuhilfenahme der Translationen auf $\mathbb{Z}^n$ konstruiert. Beide Zugänge, die natürlich eng miteinander in Beziehung stehen - so ist die in [?] betrachtete algebraische Hülle homöomorph zu der geometrischen, die im nächsten Kapitel diskutiert wird - führen in den vergleichbaren Fällen zum selben Ergebnis.

$Proj(\mathcal{A})$ ist im allgemeinen schwer zu berechnen, weil es zu wenig Struktur trägt. Betrachtet man statt dessen die stabilisierte Algebra $M_\infty(\mathcal{A})$, so läßt sich auf ihren Projektorklassen eine Addition einführen, was via Grothendieck-Konstruktion zu einer Gruppe, der K_0-Gruppe von $\mathcal{A}$, führt. Die Spur auf $\mathcal{A}$ induziert dann einen Spurzustand auf dieser K_0-Gruppe mit dessen Hilfe (3.1) etwas schwächer

$$\mathcal{N}_H(E) \in \mathrm{tr}_*(K_0(\mathcal{A})) \cap [0,1], \tag{3.6}$$

falls E in einer Lücke liegt, formuliert werden kann. Dies ist ein Teil des abstrakten Gap-Labelling Theorems von Bellissard, mit dem es in vielen interessanten Fällen gelingt, eine Obermenge der Werte der integrierten Zustandsdichte auf Lücken anzugeben, von der in manchen Fällen durch andere Methoden (mehr oder weniger rigoros) gezeigt werden kann, daß sie mit der Menge dieser Werte sogar übereinstimmt [?, ?, ?]. Für die Period-doubling-Substitution konnte die Übereinstimmung der beiden Mengen rigoros gezeigt werden [?].
Da tr_* ein Homomorphismus von abelschen Gruppen ist, ist $\mathrm{tr}_*(K_0(\mathcal{A}))$ eine Untergruppe von $\mathbb{R}$, die abzählbar ist, falls $\mathcal{A}$ separabel ist. Ist man jedoch weniger an den Werten der integrierten Zustandsdichte auf Lücken interessiert als an unter gewissen Störungen stabilen Labels für die Lücken, so sind diese natürlich schon durch Projektorklassen selbst gegeben, die positiven Elementen aus der K_0-Gruppe entsprechen. Die Elemente der K_0-Gruppe liefern ein Gap-Labelling, das im übrigen von der Gültigkeit der Shubinformel völlig unabhängig ist. Sie bleiben jedoch in Bezug auf das Spektrum noch abstrakt, da man sie nicht via Spurzustand bzw. Shubinformel mit der Lage der Lücke innerhalb des Spektrums in Verbindung bringen kann. Aber diese Art des Labellings ist, wenn tr_* nicht injektiv ist, feiner als das durch die Werte der integrierten Zustandsdichte. Wir werden hierfür ein Beispiel angeben.

Bemerkungen:

1. Natürlich wären die Projektorklassen aus der Algebra selbst ein noch feineres Label, aber - abgesehen davon, daß sie in der Regel nicht berechenbar sind - gibt es auf ihnen auch keine Ordnung, mittels der man zumindest eine relative Lage der Lücken zueinander definieren könnte. Andererseits hat der Übergang zur Stabilisierung auch einen Vorteil. Es erweist sich nämlich, wie in [?] gezeigt wird, daß die Algebra $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ in den Fällen, in denen man $\mathcal{T}^{(\bullet)}$ mit $\mathbb{Z}^n$ identifizieren kann, dieselbe Stabilisierung hat wie diejenige Algebra, die man (auf ähnliche Weise) dem ursprünglichen Problem im Ortsraum-Kontinuum zuordnet. Hierin äußert sich, daß das Spektrum eines im Ortsraum-Kontinuum definierten Operators ebenso gut wie das seiner Tight-binding-Approximation durch (3.6) charakterisiert wird.

2. Da auf der rechten Seite von (3.5) kein expliziter Bezug auf einen speziellen Operator H gemacht wird, wird es auch nicht möglich sein allgemein anzugeben, unter welchen Umständen alle Werte von $\mathrm{tr}(Proj(\mathcal{A}))$ Werten der integrierten Zustandsdichte auf Lücken eines speziellen Operators entsprechen. Verschiedene Operatoren selbst ähnlicher Art werden im allgemeinen verschiedene Lücken aufweisen, weil sich Lücken abhängig von (sogar normstetigen) Parametern für Potentialstärken schließen oder öffnen können. Für spezielle Operatoren läßt sich dies in einigen Fällen mit anderen Methoden kontrollieren [**?**, **?**, **?**]. Wir werden die Frage, ob und wann Lücken offen oder geschlossen sind in dieser Arbeit nicht verfolgen.

Kapitel 4

Algebraische Charakterisierung von Kachelungen

4.1 Der nichtkommutative Raum einer Kachelung

Sei $\mathcal{T}$ eine ausgezeichnete Kachelung aus der Menge $\mathcal{K}$ aller Kachelungen des $\mathbb{R}^n$ durch einen vorgegebenen endlichen Satz von Protokacheln. Die euklidische Gruppe der Isometrien, das semidirekte Produkt von $O(n)$ mit den Translationen operiert, in natürlicher Weise auf $\mathcal{K}$. Wir schreiben diese Operation $x \cdot T$ oder auch im Falle von reinen Translationen $T - x$. Sei $M_r(T)$ das kleinste in T realisierte Muster, welches die r-Umgebung der 0 (lückenlos) überdeckt. Mit $r(T, T') = sup\{r' \geq 0 | M_{r'}(T) = M_{r'}(T')\}$ ist durch

$$d(T, T') = \exp(-r(T, T')) \tag{4.1}$$

eine Metrik auf $\mathcal{K}$ definiert, die invariant unter $O(n)$ nicht aber unter Translationen ist. Wir wollen annehmen, daß auf dem Nullpunkt des $\mathbb{R}^n$ eine Punktierung von $\mathcal{T}$ liegt, also $0 \in \mathcal{T}^{(\bullet)}$.

Definition 1 *Die Menge*

$$\Omega = \overline{\{\mathcal{T} - x | x \in \mathcal{T}^{(\bullet)}\}} \tag{4.2}$$

heißt Hülle von $\mathcal{T}$.

Zur genaueren Bezeichnung schreiben wir, wenn es nötig ist, auch $\Omega_{\mathcal{T}}$. Ω ist also der Abschluß einer abzählbaren Teilmenge von $\mathcal{K}$. Es ist vollständig, denn jede Cauchyfolge aus Ω ist konvergent in $\mathcal{K}$: Sei $\{T^{(i)}\}_{i \geq 1}$ Cauchyfolge in Ω. Dann existiert für alle $r > 0$ ein N_r, so daß $\forall n, m \geq N_r : d(T^{(n)}, T^{(m)}) < \exp(-r)$ und daher $\forall n \geq N_r : M_r(T^{(n)}) = M_r(T^{(N_r)})$. Die Kette der realisierten Muster $M_r(T^{(N_r)}) \subset M_{r'}(T^{(N_{r'})}) \cdots$, $r < r' \cdots$ definiert eine Kachelung aus $\mathcal{K}$, gegen die die Cauchyfolge konvergiert.

Für je zwei Elemente $T, T' \in \Omega$ und jedes Muster $(M, x) \in (T, y)$ gibt es ein $y' \in T'^{(\bullet)}$, so daß $(M, x) \in (T', y')$. In diesem Sinne sind verschiedene Elemente von Ω durch endliche Muster nicht voneinander zu unterscheiden. Jedes Element $T \in \Omega_{\mathcal{T}}$ definiert dieselbe Hülle wie $\mathcal{T}$, $\Omega_T = \Omega_{\mathcal{T}}$.

Unter gewissen Umständen ist Ω bezüglich der durch die Metrik induzierten Topologie total unzusammenhängend und kompakt. Um dies zu klären betrachten wir die abgeschlossenen $\exp(-r)$-Umgebungen

$$V_r(T) := \{T' \in \Omega | \, M_r(T) = M_r(T')\} = \{T' \in \Omega | \, d(T, T') \leq \exp(-r)\} \tag{4.3}$$

von $T \in \Omega$.

Lemma 1 *Wenn es zu jedem $r \geq 0$ nur endlich viele $T_i \in \Omega$ gibt, so daß $M_r(T_i)$ paarweise verschieden sind, so ist Ω ein total unzusammenhängender kompakter Raum.*

Beweis: Unter der Voraussetzung sei zu gegebenem r, ein maximaler Satz von Kachelungen T_i (durch endliches I indiziert) mit paarweise verschiedenen $M_r(T_i)$ gewählt. Dann ist

$$\Omega \backslash V_r(T_i) = \bigcup_{j \in I \backslash \{i\}} V_r(T_j) \tag{4.4}$$

und daher $V_r(T_i)$ ebenfalls offen. Da die $V_r(T_i)$ eine Basis der Topologie bilden ist Ω total unzusammenhängend. (4.4) bedeutet aber auch, daß Ω und präkompakt ist, was für vollständige metrische Räume äquivalent zur Kompaktheit ist. $\square$

Wir betrachten im folgenden nur solche Kachelungen, für die Voraussetzung des letzten Lemmas erfüllt sind. Die Mengen aus (4.3) erzeugen die Topologie, allgemeiner sind für uns im weiteren Verlauf die Mengen der Form

$$U_{M,x} \equiv \{T \in \Omega | (M, x) \subset (T, 0)\} \tag{4.5}$$

von Interesse. Hierbei bedeutet $(M, x) \subset (T, 0)$, daß das Muster M so in T repräsentiert ist, daß der gewählte Punkt $x \in M^{(\bullet)}$ genau dem Nullpunkt $0 \in T^{(\bullet)}$ entspricht. Es ist natürlich $V_r(T) = U_{M_r(T),0}$.

Die auf Ω eingeschränkte Operation der Translationen liefert ein Äquivalenzrelation: $T \sim T'$ falls $\exists x \in \mathbb{R}^n : T' = T - x$.

Definition 2 *Der nichtkommutative Raum der Kachelung $\mathcal{T}$ ist der Quotient*

$$\Psi_{\mathcal{T}} = \Omega / \sim . \tag{4.6}$$

$\Psi_{\mathcal{T}}$ ist bezüglich der Quotiententopologie nicht Hausdorffsch und daher ein typisches Beispiel eines nichtkommutativen Raumes im Sinne A. Connes. Das Gap Labelling von Schrödingeroperatoren auf $\mathcal{T}$ sollte allein aus diesem nichtkommutativen Raum, der ja die Geometrie der Kachelung beinhaltet, ableitbar sein. Die von Connes vorgeschlagene Methode zur Analyse eines solchen Raumes läuft über die Konstruktion einer C^*-Algebra bzw. deren Invarianten, unter denen die geordnete K_0-Gruppe eine ist. Dies wird Gegenstand des nächsten Kapitels.

Bemerkung: In der Theorie der Quasikristalle betrachtet man üblicherweise die sogenannte lokale Isomorphieklasse einer Kachelung. Eine Unterklasse davon, die abgeschlossene Teilmenge

$$\mathcal{L}_{\mathcal{T}} = \{T \in \mathcal{K} | \forall r \geq 0 \, \exists x, y \in \mathbb{R}^n : M_r(\mathcal{T} - x) = M_r(T) \text{ sowie } M_r(\mathcal{T}) = M_r(T - y)\}$$

von $\mathcal{K}$ steht mit der Hülle von $\mathcal{T}$ in enger Verbindung. (Die volle lokale Isomorphieklasse erhielte man, wenn man in der Definition neben Translationen auch die übrigen Isometrien zuließe.) Es läßt sich nämlich zeigen, daß jedes Element des Orbitraumes $\mathcal{L}_\mathcal{T}/\sim$ einen Repräsentanten in Ω enthält. Da wir aber an Darstellungen auf $\ell^2(T^{(\bullet)})$ interessiert sind, betrachten wir den durch die auf Ω eingeschränkte Äquivalenzrelation definierten Gruppoiden.

Zum Abschluß dieses Abschnittes untersuchen wir die Frage nach der Abhängigkeit des nichtkommutativen Raumes von der Wahl der Punktierung.

Wir nennen eine Punktierung generisch, wenn sie nicht auf den Rändern oder Symmetrieachsen bzw. -zentren der Protokacheln liegt. Der Übergang von einer generischen zu einer nicht generischen Punktierung kann die Topologie der Hülle verändern, nämlich dann, wenn dadurch symmetrische Muster entstehen. Ist $x \in M^{(\bullet)}$ auf einer Symmetrieachse oder im Zentrum einer Symmetrie $g \in O(n)$ von M, so gilt $U_{g\cdot M, g\cdot x} = U_{M,x}$, während für generische Punktierungen und $g \neq id$ immer $U_{g\cdot M, g\cdot x} \cap U_{M,x} = \emptyset$.

Lemma 2 *Solange die Punktierung generisch bleibt hängt Ω als topologischer Raum nicht von ihrer Lage ab.*

Beweis: Seien x_i, x_i' zwei evtl. verschiedene Lagen der Punktierung der Protokachel a_i, die zu Hüllen $\Omega_\mathcal{T}$ bzw. $\Omega_{\mathcal{T}'}$ führen. Da die Symmetrie der Protokachel a_i durch die Punktierung gebrochen ist, definiert $T \mapsto T - (x_i' - x_i) : U_{a_i,x_i} \to U_{a_i,x_i'}$ eine Bijektion zwischen den beiden Hüllen, deren beidseitige Stetigkeit durch einen Vergleich der $\exp(-r)$-Umgebungen unmittelbar einleuchtend wird. $\square$

4.2 Die Algebra einer Kachelung

Wir definieren nun die C^*-Algebra $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ zu gegebener Kachelung $\mathcal{T}$. Wie schon im letzten Abschnitt angedeutet wird diese aus dem Quantenraum $\Psi_\mathcal{T}$ als Gruppoid-C^*-Algebra von $\mathcal{R}$ konstruiert. Aus physikalischem Blickwinkel betrachtet entspricht sie der Observablenalgebra, da sie eine Vervollständigung der Algebra ist, die durch die Analoga der Translationen und die charakteristischen Funktionen auf Mustern erzeugt wird. Diese Algebra ist in ähnlichem Kontext bei Bellissard eingeführt worden [?, ?]. Zur Ausarbeitung der Details in Bezug auf die Topologie des Gruppoiden sowie sein Links-Haarsystem haben wir jedoch auf die allgemeine Theorie zurückgegriffen, die von Renault in [?] erarbeitet wurde.

Ein topologischer Gruppoid Γ ist ein topologischer Raum mit einer nur auf einem Teilraum $\Gamma^2 \subset \Gamma \times \Gamma$ definierten stetigen Produktabbildung $(x,y) \mapsto xy$: $\Gamma^2 \to \Gamma$ sowie einer stetigen Inversenabbildung $x \mapsto x^{-1}$: $\Gamma \to \Gamma$, die folgenden Relationen genügen:

1. $(x^{-1})^{-1} = x$,
2. falls $(x,y), (y,z) \in \Gamma^2$, so sind $(xy,z), (x,yz) \in \Gamma^2$ und $(xy)z = x(yz)$,
3. es sind $(x^{-1},x), (x,x^{-1}) \in \Gamma^2$, und falls $(x,y) \in \Gamma^2$ bzw. $(z,x) \in \Gamma^2$, so ist $x^{-1}(xy) = y$ bzw. $(zx)x^{-1} = z$.

Man nennt dementsprechend $\Gamma^0 = \{x^{-1}x | x \in \Gamma\}$ den Raum der Einheiten.

Wie jede Äquivalenzrelation ist auch obige $\mathcal{R} \subset \Omega \times \Omega$ ein Gruppoid; es ist nämlich $\mathcal{R}^2 = \{((S,S'),(S',S''))|S \sim S' \sim S'' \in \Omega\}$, das Produkt ist durch die Transitivität, $(S,S')(S',S'') = (S,S')$, und die Inversion durch die Reflexivität, $(S,S')^{-1} = (S',S)$ gegeben. Die Einheiten entsprechen den Elementen (T,T), also $\mathcal{R}^0 \cong \Omega$. Die Topologie von $\mathcal{R}$ werde durch die Mengen

$$U_{M,x,x'} := \{(T, T-(x'-x)) | \, T \in U_{M,x}\} \tag{4.7}$$

erzeugt (vgl. (4.5)). In dieser Topologie ist $\mathcal{R}$ lokal kompakt, $\mathcal{R}^0$ offen sowie $\mathcal{R}^T = \{(T,T')|T' \sim T\}$ diskret. $\mathcal{R}$ heißt daher auch r-diskret.

Auf $C_c(\mathcal{R})$, den stetigen komplexwertigen Funktionen über $\mathcal{R}$ mit kompaktem Träger, läßt sich nun durch

$$f * g\,(S,S') = \sum_{S'' \sim S} f(S,S'')\,g(S'',S'), \tag{4.8}$$

$$f^*\,(S,S') = \overline{f(S',S)} \tag{4.9}$$

ein Produkt und eine Involution definieren, vermittels derer es zu einer topologischen $*$-Algebra. Die Einschränkung auf Funktionen mit kompakten Träger hat zur Folge, daß die Summe in (4.8) nur über endlich viele von 0 verschiedene Terme läuft. Das wie Matrixmultiplikation aussehende Produkt entspricht in der allgemeinen Theorie einer Faltung. Dies wollen wir in der folgenden Bemerkung, die ansonsten zum weiteren Verständnis der Arbeit nicht wesentlich ist, erläutern.

Bemerkung: Zur Definition einer Faltung auf $C_c(\Gamma)$ im allgemeinen Fall benötigt man ein Haarsystem auf Γ.
Ein Links-Haarsystem auf Γ ist eine Familie von Maßen $\{\lambda^u, u \in \Gamma^0\}$ auf Γ mit

1. Der Träger von λ^u ist $\Gamma^u = \{x \in \Gamma | xx^{-1} = u\}$,
2. für jedes $f \in C_c(\Gamma)$ ist $u \mapsto \int_\Gamma f(x)\,d\lambda^u(x)$ stetig,
3. (Links-Invarianz) $\int_\Gamma f(xy)\,d\lambda^{x^{-1}x}(y) = \int_\Gamma f(y)\,d\lambda^{xx^{-1}}(y)$ für alle $x \in \Gamma$ und $f \in C_c(\Gamma)$.

Auf $C_c(\Gamma)$ läßt sich nun eine Faltung und eine Involution durch

$$f * g\,(x) = \int_\Gamma f(xy)\,g(y^{-1})\,d\lambda^{x^{-1}x}(y) \tag{4.10}$$

$$f^*\,(x) = \overline{f(x^{-1})} \tag{4.11}$$

definieren. In unserem Fall, in dem $\mathcal{R}^{(T,T)} = \mathcal{R}^T$ diskret ist, gibt es, bei Normierung $\lambda^{(T,T)}(T,T) = 1$ nur die Möglichkeit, $\lambda^T = \lambda^{(T,T)}$ als das Punktmaß auf $\mathcal{R}^T$ zu wählen [?], d.h. $\lambda^T(S,S') = \delta_{ST}$. Es werden dann (4.10,4.11) zu (4.8,4.9).

Um mehr Klarheit zu schaffen, was für Elemente in $C_c(\mathcal{R})$ liegen, betrachten wir ein beliebiges Muster M von $\mathcal{T}$ und zwei Punktierungen $x, x' \in M^{(\bullet)}$. Die Funktionen $e_{M,x,x'} : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$

$$e_{M,x,x'}(S,S') = \begin{cases} 1 \text{ falls } (M,x) \subset (S,0) \text{ und } S' = S - (x'-x) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \tag{4.12}$$

sind stetig - sie entsprechen den charakteristischen Funktionen auf den $U_{M,x,x'}$ - und liefern ein Erzeugendensystem von $C_c(\mathcal{R})$.

Die zu $\mathcal{T}$ assoziierte C^*-Algebra $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ sei nun die Vervollständigung von $C_c(\mathcal{R})$ bezüglich der reduzierten Norm. Zur Definition der reduzierten Norm betrachten wir die folgende Unterfamilie von $*$-Darstellungen von $C_c(\mathcal{R})$, die wir aus naheliegenden Gründen als physikalische Darstellungen bezeichnen. Auf den durch die Elemente $T \in \Omega$ indizierten Hilberträumen $\ell^2(\mathcal{R}^T)$ definiert

$$(\pi_T(f)\psi)(S) = \sum_{S' \sim S} f(S,S')\psi(S'), \tag{4.13}$$

$\psi \in \ell^2(\mathcal{R}^T)$, eine irreduzible Darstellung. In einer solchen Darstellungen entsprechen die $e_{M,x,x'}$ den Translationen um $x' - x$:

$$(\pi_T(e_{M,x,x'})\psi)(S) = \begin{cases} \psi(S - (x'-x)) & \text{falls } (M,x) \subset (S,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \tag{4.14}$$

Die reduzierte Norm eines Elementes aus $C_c(\mathcal{R})$ ist nun das Supremum seiner Operatornormen in obigen Darstellungen, $\|f\|_{red} = \sup_T \|\pi_T(f)\|$, und die reduzierte Gruppoid-C^*-Algebra $C^*_{red}(\mathcal{R})$ ist der Abschluß von $C_c(\mathcal{R})$ bezüglich dieser Norm. $\mathcal{A}_\mathcal{T} = C^*_{red}(\mathcal{R})$ ist mit gewissem Recht als Observablenalgebra eines quantenmechanischen Systems über $\mathcal{R}^T$ aufzufassen, da es von den Translationen erzeugt wird.

Bemerkung: Wir verfolgen hier nicht die Fragestellung, wann die reduzierte mit der vollen Gruppoid-C^*-Algebra übereinstimmt, die man erhält, indem man auf zunächst $C_c(\mathcal{R})$ die Norm $\|f\|_I = \max\{\|f\|_R + \|f^*\|_R\}$ mit $\|f\|_R = \sup_S \sum_{S'} |f(S,S')|$ einführt, vermöge der es zu einer Banach *-Algebra vervollständigt werden kann, und dann das Supremum der Operatornormen über alle durch $\|\cdot\|_I$ beschränkten Darstellungen nimmt. Schließlich sind für unsere Anwendungen gerade obige Darstellungen von Relevanz.

Neben anderen allgemeinen Fragestellungen, die sich jetzt hier anbieten, wäre es im Hinblick auf Mehrteilchensysteme oder Einteilchensysteme auf kartesischen Produkten von Kachelungen besonders interessant zu wissen, ob zumindest im Falle der Nuklearität von $\mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}$ und $\mathcal{A}_{\mathcal{T}_2}$

$$\mathcal{A}_{\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2} = \mathcal{A}_{\mathcal{T}_1} \otimes \mathcal{A}_{\mathcal{T}_2} \tag{4.15}$$

ist. Der $*$-Homomorphismus $f \odot g \mapsto f * g : C_c(\mathcal{R}_1) \odot C_c(\mathcal{R}_2) \to C_c(\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2)$, wobei $\odot$ das algebraische Tensorprodukt bezeichnet, ist nämlich injektiv und hat nach Stone-Weierstraß ein dichtes Bild. Allerdings ist hier die Suche nach einer C^*-Norm, die die Kreuz-Norm-Bedingung $\|f \otimes g\| = \|f\| \, \|g\|$ erfüllt, schwierig (insbesondere tut dies $\|\cdot\|_I$ nicht). Wir werden diese Frage daher nur an speziellen Beispielen erörtern.

Eine Spur auf $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$

Mit Hilfe eines $\mathcal{R}$-invarianten Maßes auf Ω läßt sich eine Spur auf $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ definieren. Zur Erläuterung des Begriffes der $\mathcal{R}$-Invarianz betrachten wir zunächst den allgemeinen Fall.

Es sei μ ein (normiertes) Maß auf Γ^0. Mit Hilfe des Links-Haarsystems und $\lambda_u(x) = \lambda^u(x^{-1})$ definieren dann $\nu = \int_{\Gamma^0} \lambda^u \, d\mu(u)$ sowie $\nu^{-1} = \int_{\Gamma^0} \lambda_u \, d\mu(u)$ i.a. zwei verschiedene Maße auf Γ. μ heißt invariant (oder genauer Γ-invariant), wenn die Radon-Nikodym Ableitung $\frac{d\nu}{d\nu^{-1}} = 1$ ist.

Auf unsere Situation bezogen bedeutet dies

$$\nu(U_{M,x,x'}) = \int_\Omega d\mu(T) \int_{U_{M,x}} d\lambda^T(S, S-(x'-x)) = \mu(U_{M,x}) \tag{4.16}$$

sowie

$$\nu^{-1}(U_{M,x,x'}) = \int_\Omega d\mu(T) \int_{U_{M,x}} d\lambda^T(S-(x'-x), S) = \mu(U_{M,x'}). \tag{4.17}$$

Invarianz von μ bedeutet daher, daß $\mu(U_{M,x})$ unabhängig von der Wahl von $x \in M^{(\bullet)}$ ist. Sei nun $\mathrm{P} : C^*_{red}(\mathcal{R}) \to C(\Omega)$ die Restriktionsabbildung. P ist eine verallgemeinerte bedingte Erwartung für die

$$\int_{\mathcal{R}} f\overline{g} \, d\nu^{-1} = \int_\Omega \mathrm{P}(g^* * f) \, d\mu \tag{4.18}$$

gilt, was dem Skalarprodukt auf $L^2(\mathcal{R}, \nu^{-1})$ entspricht. Nun definiert die Integration über Ω mittels des Maßes μ eine Spur auf $C(\Omega)$, und es stellt sich die Frage, wann $f \mapsto \int_\Omega \mathrm{P}(f) \, d\mu$ eine Spur auf $C^*_{red}(\mathcal{R})$ definiert. Während Linearität, Positivität und Normiertheit, wie aus (4.18) ersichtlich, für alle Maße gelten, ist Zyklizität nur für bestimmte Maße erfüllbar. Es ist nämlich

$$\int_\Omega \mathrm{P}(f * g) \, d\mu = \int_\Omega (f * g)(S, S) \, d\mu(S) = \int_\Omega \sum_{S' \sim S} f(S, S') \, g(S', S) \, d\mu(S), \tag{4.19}$$

so daß die Zyklizität die Invarianz des Maßes μ zur Voraussetzung hat. Unter diesen Umständen ist dann auch $L^2(\overline{C^*_{red}(\mathcal{R})}, tr) = L^2(\mathcal{R}, \nu^{-1})$, denn $\mathrm{tr}(g^* * f)$ entspricht ja gerade (4.18). Wir wollen also im weiteren immer annehmen, daß μ invariant ist.

In Bezug auf das Gap-Labelling stellt sich nun die Frage, wann die durch μ definierte Spur mit derjenigen auf der rechten Seite der Shubin Formel übereinstimmt. Falls $\mathcal{T}^{(\bullet)}$ mit $\mathbb{Z}^n$ identifiziert werden kann und μ ergodisch ist, läßt sich mit Hilfe des Birkhoff'schen Ergodentheorems zeigen, daß die rechte Seite von (3.2) für μ-fast alle T gegen die durch μ definierte Spur konvergiert [?]. Zusammen mit (3.3) folgt dann die Gültigkeit der Shubinformel. Im allgemeinen Fall können wir zur Gültigkeit von (3.2) nur folgendes sagen: Da P in einer der im letzten Abschnitt erläuterten physikalischen Darstellung der Projektion auf die Diagonale entspricht und daher $\mathrm{Tr} \circ \mathrm{P} = \mathrm{Tr}$ gilt, ist für beliebige $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$

$$\lim_{\Lambda \to \mathcal{T}} \frac{1}{|\Lambda^{(\bullet)}|} \mathrm{Tr}(\chi_\Lambda \pi_T(a)) = \lim_{\Lambda \to \mathcal{T}} \frac{1}{|\Lambda^{(\bullet)}|} \mathrm{Tr}(\chi_\Lambda \pi_T(\mathrm{P}(a))). \tag{4.20}$$

Daher folgt (3.2) schon für beliebige $a \in \mathcal{A}_\mathcal{T}$, wenn

$$\lim_{\Lambda \to \mathcal{T}} \frac{1}{|\Lambda^{(\bullet)}|} \mathrm{Tr}(\chi_\Lambda \pi_T(f)) = \mu(f) \tag{4.21}$$

für alle $f \in C(\Omega)$ gilt. Wir werden in Kapitel 7 ein Maß konstruieren, welches (4.21) erfüllt.

Die K_0-Gruppe von $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ ist im allgemeinen unbekannt, ebenso wie die Werte des durch obige Spur induzierten Zustandes auf derselben. Für ein invariantes Maß μ gilt aber immer

$$\mu(C(\Omega, \mathbb{Z})) \subset \mathrm{tr}_*(K_0(\mathcal{A}_\mathcal{T})), \tag{4.22}$$

wobei $C(\Omega, \mathbb{Z})$ die stetigen Funktion über Ω mit ganzzahligen Werten bezeichnet, so daß ein Teil der Werte durch ein invariantes (normiertes) Maß auf Ω bestimmt ist. Was die Substitutionskachelungen mit Ordnungssymmetrie betrifft, die wir im 7. Kapitel behandeln, so können wir dort nur die durch das Maß bestimmten Werte, also die linke Seite von (4.22) bestimmen. In allen uns bekannten Fällen, in denen wir auch die rechte Seite ausrechnen können, gilt aber, und zwar aus nicht direkt einsichtigen Gründen, in (4.22) sogar die Gleichheit!

Kapitel 5

Eindimensionale Kachelungen

Wir betrachten in diesem Kapitel eindimensionale Kachelungen, wobei wir zunächst größtenteils die Ergebnisse aus [?] reproduzieren. Nach einer allgemeinen Betrachtung spezialisieren wir uns kurz auf periodische Kachelungen, um danach ausführlicher auf aperiodische Kachelungen einzugehen, die sich durch lokal invertierbare Substitutionen ausdrücken lassen. Denn an diesen zeigt sich, wie sich die Werte der integrierten Zustandsdichte auf Lücken aus der Selbstähnlichkeitsstruktur gewinnen lassen. Die Methode, mit Hilfe von Pfadräumen die K_0-Gruppe direkt auszurechnen, weicht von derjenigen in [?] ab; wir erhalten so einen engeren Bezug zu den periodischen Approximanden.

Eine eindimensionale Kachelung ist eine Überdeckung von $\mathbb{R}$, die aus (punktierten) Intervallen besteht und deshalb total geordnet ist. Die Protokacheln sollen hier durch Buchstaben $\mathcal{B} = \{a_1, \cdots, a_n\}$ symbolisiert werden. Eine solche Kachelung ist deshalb eine zweiseitige Folge von Buchstaben, $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ und ein Muster entspricht einer in $\mathcal{T}$ auftretenden endlichen Buchstabensequenz. Hierbei sei der Buchstabe, dessen Punktierung auf dem Nullpunkt von $\mathbb{R}$ liegt, das nullte Folgenelement $\mathcal{T}_0$.
$\mathcal{T}^{(\bullet)}$ läßt sich ebenfalls ordnen und mit $\mathbb{Z}$ identifizieren, so daß

$$\mathcal{R} = \Omega \times \mathcal{G} \tag{5.1}$$

mit der Produkttopologie, wobei $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_h$, falls $\mathcal{T}$ h-periodisch ist, und $\mathcal{G} = \mathbb{Z}$, falls $\mathcal{T}$ aperiodisch ist. Damit geht einher, daß Ω im h-periodischen Fall genau h Elemente enthält, während es für aperiodische Kachelungen eine unendliche Menge ist. In beiden Fällen wird die Äquivalenzrelation durch einen Homöomorphismus φ erzeugt, der auf eine Folge durch Linksverschiebung wirkt, $(\varphi S)_n = S_{n+1}$. (Ω, φ) ist daher ein topologisches dynamisches System. Durch die Identifikation $(S, \varphi^{-k} S) \cong (S, k)$ wird aus (4.8)

$$f * g\,(S,k) = \sum_{m\in\mathcal{G}} f(S,m)\, g(\varphi^{-m}S, k-m), \tag{5.2}$$

so daß, in einer äquivalenten Formulierung, die Funktionen $\hat{f} : \mathcal{G} \longrightarrow C(\Omega)$ mit $\hat{f}(k)(S) = f(S,k)$ die Algebra $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ bilden mit dem Produkt

$$\hat{f} * \hat{g}\,(k) = \sum_{m\in\mathcal{G}} \hat{f}(m)\, \varphi_m^* \hat{g}(k-m) \tag{5.3}$$

und der Involution $\hat{f}^*(k) = \overline{\varphi_k^* \hat{f}(-k)}$. Hierbei ist $\varphi_m^* \hat{f} = \hat{f} \circ \varphi^{-m}$, die Operation von $\mathcal{G}$ auf $C(\Omega)$ durch Zurückholen. Es ist daher $\mathcal{A}_\mathcal{T} \cong C(\Omega) \times_\varphi \mathcal{G}$, ein verschränktes Produkt. (Insbesondere entspricht die reduzierte Norm der gewöhnlichen, da $\mathcal{G}$ mittelbar ist.) Wenn das dynamische System (Ω, φ) minimal ist, so ist $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ eine einfache C^*-Algebra. Sie kann auch als die C^*-Hülle der von $C(\Omega)$ und der Funktion $u : \mathcal{G} \to C(\Omega)$, $u(n) = \delta_{1n}$ - mit h-periodischem Deltasymbol für $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_h$ - erzeugten $*$-Algebra verstanden werden. u ist unitär - $u^{-1}(n) = \delta_{-1n}$ - und liefert durch Konjugation die Operation von φ, $u * \hat{f} * u^{-1} = \varphi^* \hat{f}$. Es läßt sich durch

$$u = \sum_{a_i a_j \text{ kommt in } \mathcal{T} \text{ vor}} \hat{e}_{a_i a_j, 1, 2} \tag{5.4}$$

ausdrücken, 1 bzw. 2 bedeute hier abkürzend die Punktierung des ersten bzw. zweiten Buchstabens im Wort $a_i a_j$. In einer Darstellung entspricht der Darsteller von u dem Translationsoperator und $u + u^*$ dem diskreten Laplace-Operator.

5.1 Periodische Kachelungen

Es sei $\mathcal{T}$ eine periodische Kachelung mit Periode h gegeben etwa durch periodische Wiederholung eines Wortes $a_1 \cdots a_h$. Dann ist die Verschiebungsoperation φ zwar transitiv, aber $\varphi^h \mathcal{T} = \mathcal{T}$. Deshalb besteht Ω aus einem Orbit von h Elementen, $\Omega = \mathcal{R}^T$, und es ist $\mathcal{A}_\mathcal{T} = \mathbb{C}^h \times_\varphi \mathbb{Z}_h \cong M_h(\mathbb{C})$. Wie im ersten Kapitel ausgeführt ist $K_1(M_h(\mathbb{C})) = \{0\}$ und für die K_0-Gruppe sowie die Werte des durch die Spur induzierten Zustandes erhält man

$$K_0(M_h(\mathbb{C})) = \mathbb{Z} \tag{5.5}$$

$$tr_* K_0(M_h(\mathbb{C})) = \frac{1}{h}\mathbb{Z}. \tag{5.6}$$

Die Darstellungen auf $\ell^2(\mathcal{R}^T) \cong \mathbb{C}^h$ sind für verschiedene $\mathcal{T}$ unitär äquivalent und es ist $e_{a_h a_1, 1, 2} = e_{a_1 \cdots a_h, h, 1}$. $u = \sum_{i=1}^h \hat{e}_{a_i a_i + 1, 1, 2}$, ist daher in dieser Darstellung der Translationsoperator auf einer geschlossenen Kette mit h Gliedern, die man aus der Kachelung durch periodische Identifikation erhält. $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ ist also die Observablenalgebra eines Systems über einer solchen Kette.

Wollen wir stattdessen eine Algebra konstruieren, die Translationen auf der Kachelung selbst enthält, so müssen wir anstelle des Operators $u : \mathbb{Z}_h \to C(\Omega)$ einen wählen, dessen h-te Potenz nicht gleich 1 ist, der aber mit den übrigen Elementen kommutiert. Algebraisch erreicht man dies, indem man die C^*-Algebra $C(\Omega) \times_\varphi \mathbb{Z}$ (mit gleichen φ) verwendet. Denn der Operator $\tilde{u} : \mathbb{Z} \to C(\Omega)$, $\tilde{u}(n) = \delta_{1n}$ entspricht in einer Darstellung gerade dem Translationsoperator auf $\mathcal{T}$ und seine h-te Potenz liegt im Zentrum der Algebra. Nun ist

$$C(\Omega) \times_\varphi \mathbb{Z} \cong M_h(C(S^1)) \tag{5.7}$$

unter Identifikation von $\tilde{u}$ mit der von $z \in S^1$ abhängigen $h \times h$-Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ z & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

und von den Elementen aus $C(\Omega)$ mit diagonalen, über S^1 konstanten Matrizen aus $M_h(\mathbb{C})$. Dieses Ergebnis entspricht dem, was man aus der Bloch-Analyse für Gittermodelle von eindimensionalen periodischen Festkörpern erwartet: Da der Schrödinger-Operator nur von den lokalen Mustern abhängt, kommutiert er mit Translationen um h Gitterplätze. Man zerlegt daher den gesamten Hilbertraum einer Darstellung in die Eigenräume der h-ten Potenz des Gittertranslationsoperators. Diese Eigenräume sind h-dimensional und enthalten die Wellenfunktionen, die bis auf die Phase, die dem Eigenwert zum Eigenraum entspricht, h-periodisch sind. Absorbiert man diese Phase in den Schrödinger-Operator, so kann er als Operator auf h-periodischen Wellenfunktionen verstanden werden und deshalb als $h \times h$-Matrix, deren Koeffizienten von S^1 abhängen. Wir halten hier fest, daß $C(\Omega) \times_\varphi \mathbb{Z}$ zwar unendlichdimensional, aber limial ist, d.h. alle seine irreduziblen Darstellungen endlichdimensional sind. Wie schon im ersten Kapitel angedeutet ist

$$K_0(M_h(C(S^1))) = \mathbb{Z}. \tag{5.8}$$

Auf $M_h(C(S^1))$ gibt es keine eindeutige (normierte) Spur; die Wahl derselben entspricht der Wahl eines (normierten) Maßes μ auf S^1,

$$\mathrm{tr}(a) = \frac{1}{h} \int_{S^1} \mathrm{Tr}(a(z))\, d\mu(z). \tag{5.9}$$

Für Projektoren p aus $M_h(C(S^1))$, also $p(z) \in M_h(\mathbb{C})$ ist aber $\mathrm{Tr}(p(z))$ konstant, so daß für alle diese Spuren

$$tr_* K_0(M_h(C(S^1))) = \frac{1}{h}\mathbb{Z}. \tag{5.10}$$

Das Gap-Labelling von Systemen auf einer periodischen Kachelung und das von Systemen auf der entsprechenden durch periodische Identifikation erhaltenen geschlossenen Kette sind daher im eindimensionalen gleich. Der Unterschied zeigt sich erst in der K_1-Gruppe. Diese wird durch die Klasse von $\tilde{u}$ erzeugt:

$$K_1(M_h(C(S^1))) = \mathbb{Z}. \tag{5.11}$$

5.2 Substitutionskachelungen

Es sei nun $\mathcal{T}$ eine aperiodische Kachelung und damit $\mathcal{G} = \mathbb{Z}$. Die K-Gruppen von $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ lassen sich mit Hilfe der exakten Pimsner-Voiculescu-Sequenz berechnen, falls die Operation von $\mathbb{Z}$ auf Ω topologisch transitiv ist. Wir zitieren die Ergebnisse aus [?] oder [?].

Theorem 2 *Sei Ω ein total unzusammenhängender kompakter metrischer Raum und φ ein topologisch transitiver Homöomorphismus von Ω und tr eine normierte Spur auf $C(\Omega) \times_\varphi \mathbb{Z}$. Dann gilt:*

1. $K_0(C(\Omega) \times_\varphi \mathbb{Z}) \cong C(\Omega, \mathbb{Z})/E_\varphi$, *wobei* $E_\varphi := \{f - f \circ \varphi^{-1} | f \in C(\Omega, \mathbb{Z})\}$
2. $K_1(C(\Omega) \times_\varphi \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$
3. $tr_*(K_0(C(\Omega) \times_\varphi \mathbb{Z}) = \mu(C(\Omega, \mathbb{Z}))$, *wobei μ das durch Einschränkung von tr auf $C(\Omega)$ definierte φ-invariante Maß ist.*

Der Erzeuger von $K_1(C(\Omega) \times_\varphi \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ ist $[u]$.
Im Theorem wurde das φ-invariantes Maß μ auf Ω durch eine Spur auf $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ bestimmt. (Die φ-Invarianz folgt wieder aus der Zyklizität der Spur.) Umgekehrt liefert jedes φ-invariante Maß μ durch $\mathrm{tr}(\hat{f}) = \int \hat{f}(0) d\mu$ eine Spur auf dem verschränkten Produkt. Wenn nun die h-periodischen Orbits für alle endlichen h μ-Maß 0 haben, so ist diese Spur die einzige, deren Einschränkung auf $C(\Omega)$ μ liefert [?]. Es gibt dann also eine bijektive Korrespondenz zwischen φ-invarianten Maßen Ω und Spuren auf $C(\Omega) \times_\varphi \mathbb{Z}$. In Bezug auf das Gap-Labelling stellt sich daher die Frage, wann so eine Spur mit derjenigen aus der rechten Seite der Shubin Formel übereinstimmt. Mit Hilfe des Birkhoff'schen Ergodentheorems läßt sich zeigen, daß dies der Fall ist, wenn das die Spur definierende Maß normiert und ergodisch ist [?]. Die Werte der integrierten Zustandsdichte auf Lücken sind daher durch ein ergodisches Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω bestimmt.

Die K_0-Gruppe $C(\Omega, \mathbb{Z})/E_\varphi$ sowie die Werte des Spurzustandes lassen sich unter gewissen zusätzlichen Annahmen an das System explizit angeben. Dies ist speziell für eine Klasse von selbstähnlichen Kachelungen der Fall, wobei sich die Selbstähnlichkeit dahingehend äußert, daß $\mathcal{T}$ Fixpunkt unter einer Substitution ist. Eine Substitution ist eine Abbildung $\rho : \mathcal{B} \longrightarrow \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{B}^k$, die also jedem Buchstaben $a \in \mathcal{B}$ ein Wort $\rho(a)$ zuweist, und auf Wörter durch $\rho(a_{i_1} \cdots a_{i_k}) = \rho(a_{i_1}) \cdots \rho(a_{i_k})$ fortgesetzt wird. Man kann sie deshalb auch als Abbildung von zweiseitigen Buchstabenfolgen $\rho : \mathcal{B}^\mathbb{Z} \to \mathcal{B}^\mathbb{Z}$ auffassen, wenn man zusätzlich vereinbart, wie sich das nullte Folgenglied unter ρ fortpflanzt. Wir legen hier fest, daß das nullte Folgenelement von $\rho(S) = \cdots \rho(S_0)\rho(S_1) \cdots$ gleich dem ersten Buchstaben von $\rho(S_0)$ ist.

Für ein Wort w bezeichne $w^<$ den ersten und $w^>$ den letzten Buchstaben und $|w|$ deren Gesamtanzahl. Wie in [?] beschränken wir uns auf Substitutionen, für die $|\rho^n(a)|$ für große n durch O^n mit einer Zahl $O > 1$ minorisiert wird sowie $\{a \in \mathcal{B} | \rho(a)^< = a\}$ mindestens einen Buchstaben, sagen wir a_1, enthält.[1] Weiterhin verlangen wir, daß ρ primitiv ist, d.h., daß für ein genügend großes L gilt $\forall a_i : \ a_j \in \rho^L(a_i)$. Primitivität stellt sicher, daß Ω unabhängig von der Wahl des Fixpunktes $\mathcal{T}$ ist und (Ω, φ) ein minimales dynamisches System liefert. Solche Substitionen werden in [?] behandelt. Mit Hilfe einer in [?] ausgearbeiteten Technik wird dort das (eindeutige) ergodische Maß und somit das Gap-Labelling bestimmt.

Wir wollen hier nun eine alternative Methode zur Berechnung der Gap-Labels vorstellen, die zwar nicht auf alle diese Substitutionen anwendbar ist, aber erstens in vielen

[1]Da $\rho^n(a)^<$ eine periodische Folge in n ist, gibt es immer ein k, so daß $\{a \in \mathcal{B} | \rho^k(a)^< = a\} \neq \emptyset$.

Fällen eine explizite Berechnung der K_0-Gruppe selbst ermöglicht (und nicht nur der Werte des Spurzustandes auf ihr), zweitens Grundlage der Analyse für Kachelungen in höheren Dimensionen ist und drittens einen deutlich engeren Bezug zu periodischen Approximanden hat. Zu diesem Zweck konstruieren wir eine stetige surjektive Abbildung Ξ von Ω auf den Pfadraum über dem Graphen, dessen Zusammenhangsmatrix der Substitutionsmatrix von ρ entspricht. Dies ist allerdings nur möglich, wenn

B1 ρ erkennbar (lokal invertierbar) ist.

Weiterhin läßt sich zeigen, daß diese Abbildung umkehrbar stetig ist, falls

B2 die Mengen $\{\rho(a)^<|a \in \mathcal{B}\}$ und $\{\rho(a)^>|a \in \mathcal{B}\}$ einelementig sind.

Die Abbildung Ξ

Wir wollen $\rho(S)$ einerseits als Folge von Buchstaben andererseits aber auch als Folge der Wörter $\rho(S_i)$ auffassen und so ein $\rho(a)$ als a-Deflation oder schlicht als Deflation bezeichnen[2]. Jeder Buchstabe von S kann damit eindeutig als Buchstabe einer bestimmten Deflation verstanden werden. Die Bestimmung derselben sowie seine Position in ihr ist aber im allgemeinen nur bei Kenntnis der globalen Position von S, d.h. bei Kenntnis der Position von S_0 in S möglich. Der Begriff der Erkennbarkeit von Substitutionen, der in [?] im Rahmen von einseitigen Folgen $\{S_i\}_{i\geq 0}$ eingeführt worden ist, charakterisiert nun die Substitutionen, bei denen eine solche Bestimmung auch ohne Kenntnis der globalen Position möglich ist. $\tilde{\mathcal{T}} = \rho^\infty(a_1)$ ist eine einseitige Folge, die Fixpunkt von ρ ist.

Definition 3 *Die Substitution ρ heißt erkennbar, falls es eine natürliche Zahl K gibt, so daß gilt: ist $\tilde{\mathcal{T}}_n$ Anfangsbuchstabe einer a_i-Deflation von $\rho(\tilde{\mathcal{T}})$ und $\tilde{\mathcal{T}}_n \cdots \tilde{\mathcal{T}}_{n+K-1} = \tilde{\mathcal{T}}_m \cdots \tilde{\mathcal{T}}_{m+K-1}$, so ist auch $\tilde{\mathcal{T}}_m$ Anfangsbuchstabe einer a_i-Deflation[3] von $\rho(\tilde{\mathcal{T}})$.*

Eine erkennbare Substitution muß aperiodisch sein, vorausgesetzt sie besteht aus mehr als einem Buchstaben. Eine erkennbare Substitution ist lokal invertierbar im folgenden Sinne: Sobald ein Wort aus $\tilde{\mathcal{T}}$ mindestens die Länge K hat, können wir entscheiden, ob sein Anfang einer gewissen a_i-Deflation entspricht, *ohne wissen zu müssen an welcher Position es vorkommt*. Durch Wahl geeignet langer Wörter, können wir dann immer einen Teil derselben als Deflationen identifizieren und diesen invertieren, indem wir ihn durch die entsprechenden Buchstaben ersetzen. Da dieses Verfahren, das wir auch als Inflation bezeichnen, nicht die Kenntnis der globalen Position des Wortes erfordert, ist es auch auf die Worte von (auch beidseitigen) Folgen anwendbar, die lokal von $\tilde{\mathcal{T}}$ ununterscheidbar sind. Es ist daher naheliegend, $\tilde{\mathcal{T}}$ so zu einer beidseitigen Folge $\mathcal{T}$ fortzusetzen, daß letztere lokal von $\tilde{\mathcal{T}}$ ununterscheidbar bleibt, d.h., so daß $\forall M \subset$

[2]Mit dieser Wortwahl, die für zweidimensionale Kachelungen geprägt worden ist, schließen wir uns der physikalischen Literatur an, vgl. [?]. In [?] ist jedoch dieser Prozeß mit dem Wort Inflation bezeichnet worden, welches sonst für den umgekehrten Prozeß gebraucht wird.

[3]In [?] wird nur verlangt, daß unter obiger Prämisse $\tilde{\mathcal{T}}_m$ Anfangsbuchstabe irgend einer Deflation von ρ sei. Dies impliziert aber schon, daß - evtl. nach Wahl eines größeres K's - diese Deflation aus demselben Buchstaben a_i gewonnen wurde.

$\mathcal{T} \exists n \in \mathbb{Z} : M - n \subset \tilde{\mathcal{T}}$. Da $\mathcal{T}$ auch Fixpunkt der Substitution sein soll, ist diese Fortsetzung unter der Bedingung B2 eindeutig.

Die Substitutionsmatrix (oder auch Deflationsmatrix) σ einer n-buchstabigen Substitution ρ ist die $n \times n$-Matrix mit Koeffizienten

$$\sigma_{ij} = \text{Anzahl der } a_j\text{'s in } \rho(a_i). \tag{5.12}$$

(Oft wird die transponierte Matrix so genannt, so aber entspricht σ der später zu verwendenden Einbettungsmatrix (5.24).) σ ist als Matrix primitiv, genau dann wenn ρ primitiv ist. Es besitzt dann einen eindeutigen, vom Betrag her größten Eigenwert (sein Perron Frobenius Eigenwert), der nicht degeneriert ist. Die Komponenten des zugehörigen Links- bzw. Rechts-Eigenvektors (sein Links- bzw. Rechts-Perron Frobenius Eigenvektor) können alle bis auf ein gemeinsames Vorzeichen strikt positiv gewählt werden.

Lemma 3 *Sei σ primitiv. Dann entspricht die i-te Komponente des auf $\sum_i \nu_i = 1$ normierten Links-Perron-Frobenius-Eigenvektors ν der Häufigkeit von a_i in $\mathcal{T}$.*

Beweis: Sei $H(a_i)$ die Häufigkeit von a_i in $\mathcal{T}$. Offenbar ist

$$H(a_i) = \sum_j \frac{\text{Anzahl der } a_i\text{'s in } \rho^k(a_j)}{|\rho^k(a_j)|} H(a_j) \tag{5.13}$$

für beliebiges k. Sei nun S eine Basistransformation, die σ diagonalisiert, $S\sigma S^{-1} = diag(\tau, \cdots)$, wobei τ der Perron-Frobenius-Eigenwert ist. Dann sind S_{1i} bzw. ${S^{-1}}_{i1}$ die (unnormierten) Komponenten des Links- bzw. Rechts-Perron-Frobenius-Eigenvektors und insbesondere ungleich 0. Da τ der vom Betrag her größte Eigenwert von σ ist folgt

$$\frac{\text{Anzahl der } a_i\text{'s in } \rho^k(a_j)}{|\rho^k(a_j)|} = \frac{{\sigma^k}_{ji}}{\sum_i {\sigma^k}_{ji}} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{{S^{-1}}_{j1} S_{1i}}{\sum_i {S^{-1}}_{j1} S_{1i}} = \nu_i \tag{5.14}$$

und damit die Behauptung. □

Da σ nur positive Koeffizienten hat, kann es als Zusammenhangsmatrix eines Graphen Σ aufgefaßt werden. Σ hat dann n Vertizes, deren Menge wir mit $\Sigma^{(0)}$ bezeichen. Sie entsprechen den Buchstaben. Weiterhin ist der i-te Vertex mit dem j-ten durch σ_{ji} Kanten verbunden, die von i nach j gerichtet sind und die der Übersicht halber abgezählt sein sollen. Die Menge dieser Kanten sei $\Sigma^{(1)}_{ji}$. Falls σ primitiv ist, ist Σ zusammenhängend. Wir bezeichnen den Anfang bzw. das Ende einer Kante κ mit $s(\kappa)$ bzw. $r(\kappa)$. Dann können wir zwei Kanten κ_1 und κ_2 aneinanderhängen, wir schreiben $\kappa_1 \circ \kappa_2$ oder kurz $\kappa_1\kappa_2$, falls sie aneinanderpassen, d.h. $r(\kappa_1) = s(\kappa_2)$.
Ein (endlicher oder unendlicher) Pfad über Σ ist eine (endliche oder unendliche) Folge von gerichteten Kanten, die aneinanderpassen. Die Abbildungen s und r sowie die Verknüpfung $\circ$ übertragen sich dann analog auf Pfade (r ist allerdings nur für endliche Pfade definiert). Es sei $\mathcal{P}_\Sigma$ der Raum aller unendlich langen Pfade über Σ. Mit $l(\gamma, \gamma') = \sup\{i \geq 0 | \forall j \leq i : \gamma_j = \gamma'_j\}$ wird durch $d(\gamma, \gamma') = \exp(-l(\gamma, \gamma'))$ eine

Metrik auf $\mathcal{P}_\Sigma$ definiert, die eine Topologie induziert, bezüglich der $\mathcal{P}_\Sigma$ total unzusammenhängend und kompakt ist. Letztere wird nämlich durch die durch endliche Pfade ξ parametrisierten Mengen

$$U_\xi = \{\xi \circ \gamma | \, \gamma \in \mathcal{P}_\Sigma, \, s(\gamma) = r(\xi)\} \tag{5.15}$$

erzeugt.

Mit Hilfe endlicher Pfade können wir die Positionen von Buchstaben in Deflationen und deren Iterierten kodieren: Wir ordnen dem l'ten Buchstaben a_i (von links nach rechts gezählt), welcher in der a_j-Deflation $\rho(a_j)$ auftritt, die l'te Kante κ_1 aus $\Sigma^{(1)}_{ji}$ zu. Betrachten wir nun $a_i \in \rho(a_j) \in \rho^2(a_k)$, so liefert die Position von a_j in $\rho(a_k)$ eine weitere, jetzt von j nach k gerichtete Kante κ_2. $\kappa_1\kappa_2$ bildet also einen Pfad der Länge zwei, welcher die Position von a_i in $\rho^2(a_k)$ kodiert. Analog wird die Position eines a_i in $\rho^n(a_j)$ durch einen Pfad der Länge n kodiert, der von i nach j läuft.
Daraus läßt sich eine Abbildung $\Xi : \Omega \to \mathcal{P}_\Sigma$ konstruieren: Sei $S \in \Omega$ und $S_0 \in \eta_1 \subset \eta_2 \subset \cdots \eta_n$ eine aufsteigende Kette von Mustern, die S approximieren, und die so groß gewählt sind, daß die Anzahl der Buchstaben rechts sowie die links von S_0 größer als K^n ist. Nun invertieren wir die Substitution auf η_n n-mal - η_n ist dazu gerade groß genug - und kodieren die Position von S_0 in jenem Teilstück durch einen Pfad $\Xi_n(S)$ der Länge n. Es ist klar, daß dann $\Xi_n(S)$ mit $\Xi_{n-1}(S)$ beginnt und daher $\{\Xi_n(S)\}_{n\geq 1}$ eine Cauchyfolge ist.

Definition 4 *$\Xi(S)$ ist der Grenzwert der oben definierten Folge $\{\Xi_n(S)\}_{n\geq 1}$.*

Theorem 3 *Ξ ist eine stetige surjektive Abbildung. Genau dann wenn $\{\rho(a)^< | a \in \mathcal{B}\}$ sowie $\{\rho(a)^> | a \in \mathcal{B}\}$ je ein Element enthalten, ist Ξ sogar ein Homöomorphismus.*

Beweis: Ξ ist stetig, falls $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : d(S, S') < \delta \Rightarrow d(\Xi(S), \Xi(S')) < \epsilon$, was dasselbe ist wie $\forall L > 0 \, \exists R > 0 : r(S, S') > R \Rightarrow l(\Xi(S), \Xi(S')) > L$. Dies folgt unmittelbar aus der Konstruktion, denn $l(\Xi(S), \Xi(S')) > L$ gdw. $\Xi_{L+1}(S) = \Xi_{L+1}(S')$ so daß zu gegebenem L schlicht $R = K^{L+1}e$ genommen werden kann, wobei e die Länge des längsten Intervalls ist.
Die Surjektivität von Ξ folgt aus der Kompaktheit von Ω: Sei $\tilde{\zeta} = \Xi(\mathcal{T})$. Zu gegebenem $\gamma \in \mathcal{P}_\Sigma$ sei $\{\gamma^{(n)}\}_{n\geq 0}$ eine Folge, deren n-te Folgenglieder in den ersten n Kanten mit denjenigen von γ übereinstimmen, für $m > n + m_0$ aber mit denjenigen aus $\tilde{\zeta}$ (Hierbei ist m_0 eine von der Substitution abhängige endliche Zahl, so daß dies möglich ist). Es gibt dann eine Folge $\{S^{(n)}\}_{n\geq 0}$ von translatierten Kachelungen von $\mathcal{T}$, so daß $\Xi(S^{(n)}) = \gamma^{(n)}$. Da Ω kompakt ist, enthält $\{S^{(n)}\}_{n\geq 0}$ eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert ein Urbild von γ ist.
Wenn alle Deflationen gleichen Anfangs- und gleichen Endbuchstaben haben, wir bezeichnen sie mit $a_<$ bzw. $a_>$, kommt $\rho(a) \in S$ immer in der Form $a_>\rho(a)a_<$ in S vor und, da S Fixpunkt ist, $\rho^n(a) \in S$ immer in der Form $\rho^{n-1}(a_>)\rho^n(a)\rho^{n-1}(a_<)$. Sei nun $\Xi(S) = \Xi(S')$. Dann haben S und S' zumindest ein Teilstück der Form $\rho^\infty(a)$ gemeinsam. Liegen beide Randbuchstaben von $\rho^\infty(a)$ im Unendlichen von S, d.h. approximiert $\rho^n(a)$ vollständig S, so ist $d(S, S') = 0$ und daher $S = S'$. Liegt aber einer der Ränder

im Endlichenvon S, so wird erst durch die Voraussetzung eindeutig, was jenseits des Randes folgt. Ist nämlich $\rho^n(a)^< = S_m$ für ein $m \in \mathbb{Z}^+$ und fast alle n, so wird S durch $\rho^n(a)\rho^n(a_<)$ approximiert und, da dasselbe für S' gilt, folgt wieder $d(S, S') = 0$. Im anderen Fall, $rho^n(a)^> = S_m$ für ein $m \in \mathbb{Z}^-$ und fast alle n, wird S durch $\rho^n(a_>)\rho^n(a)$ approximiert und mit demselben Argument $S = S'$. Ξ ist also injektiv und daher invertierbar. Wäre die Voraussetzung nicht erfüllt, indem z.B. zwei verschiedene Buchstaben $a_>$, $a'_>$ als rechte Buchstaben von Deflationen vorkommen könnten, so wäre, z.B. im letzten Fall $\Xi(\rho^n(a_<)\rho^n(a)) = \Xi(\rho^n(a'_<)\rho^n(a))$ für alle n, und daher Ξ nicht injektiv.
Ξ^{-1} ist stetig, falls $\forall R > 0\, \exists L > 0 : l(\xi, \xi') > L \Rightarrow r(\Xi^{-1}(\xi), \Xi^{-1}(\xi')) > R$. Wir hatten von unseren Substitutionen vorausgesetzt, daß $|\rho^n(a)|$ für beliebiges a mindestens wie O^n divergiert. Setzen wir daher $L = [\frac{\log R/e}{\log O}] + 2$, so hat das Muster $\rho^{L-1}(a_>)\rho^L(a)\rho^{L-1}(a_<)$ mit in $\rho^L(a)$ punktiertem Buchstaben mindestens Radius $O^{L-1}e \geq R$. Daher ist auch Ξ^{-1} stetig. □

Die zusätzlich gestellten Forderungen B1, B2 schränken die Substitutionen natürlich weiter ein. So ist die zweibuchstabige Thue Morse Substitution $a \mapsto ab$, $b \mapsto ba$ zwar erkennbar, Ξ aber kein Homöomorphismus. Insbsondere ist $\Xi(U_{aa,1}) = \bigcup_{k\geq 1, l\geq 1} U_{(ab)^k b^l a}$ - die 1 deute die Punktierung des ersten Buchstaben an und die Pfade über Σ sind hier durch die Folge der Vertizes a, b, die er durchläuft, beschrieben. Da dies eine unendliche disjunkte Vereinigung offener Mengen ist, kann $\Xi(U_{aa,1})$ keine kompakte Menge sein. Gleichzeitig ist $\Xi(U_{aa,1})$ das Bild einer kompakten Menge, weshalb Ξ kein Homöomorphismus sein kann.
Andererseits ist die zweite Forderung B2 nicht so restriktiv, wie sie auf den ersten Blick erscheint. Die sogenannten metallischen Substitutionen $\rho_k : a \mapsto a^k b$, $b \mapsto a$, $k \geq 1$ von denen der Fall $k = 1$ (der goldene, ihm liegen die Fibonaccizahlen zugrunde) der bekannteste ist, erfüllen B2 in dieser Form nicht. Sie sind aber erkennbar, denn b muß immer am Ende einer Deflation stehen, während a Anfangsbuchstabe ist, wenn entweder a^k folgt oder $a^{k-1}b$. Es kann daher $K = k + 2$ gewählt werden. Nun kommt es uns aber auf die Kachelungen an und nicht auf die Substitution. Jeder Fixpunkt von ρ_k ist auch einer von $\rho_k^2 : a \mapsto (a^k b)^k a$, $b \mapsto a^k b$, und ρ_k^2 hat dieselben Fixpunkte wie $\tilde{\rho}_k^2 : a \mapsto a(a^k b)^k$, $b \mapsto a^k b$, welches B2 erfüllt! Dieses Ergebnis ist nicht unmittelbar einsichtig, zeigt aber, daß wir sehr wohl die metallischen Kachelungen, d.h. die Fixpunkte unter ρ_k, mit unserer Methode behandeln können. Ein weiteres Beispiel liefern die Kachelungen, die Fixpunkt der (erkennbaren) period doubling Substitution $\rho : a \mapsto ab$, $b \mapsto aa$ sind. Sie sind auch Fixpunkt von $a \mapsto aaab$, $b \mapsto abab$. Schließlich wollen wir noch die Substitution $\rho : a \mapsto ab$, $b \mapsto abbbc$, $c \mapsto bc$ betrachten. (Wieder erfüllt erst das Quadrat von ρ B2.) Ihre Substitutionsmatrix entspricht einem direktem Summanden des Quadrates der Zusammenhangsmatrix zum Coxetergraph von E_6.[4] Diese Substitution ist ein Beispiel für eine Substitution, deren K_0-Gruppe mehr Generatoren hat, als die durch das Bild des Spurzustandes definierte Untergruppe von $\mathbb{R}$.

[4]Die Quadrate der Zusammenhangsmatrizen bipartiter Graphen haben immer Blockstruktur. Davon wird in [?], wo quasiperiodische Kachelungen zu ADE-Coxetergraphen betrachtet werden, entscheidend Gebrauch gemacht.

Berechnung der K_0-Gruppe im Falle $\Omega \cong \mathcal{P}_\Sigma$

Wir wollen nun die Bedingungen B1 und B2, die zur Identifikation von Ω mit $\mathcal{P}_\Sigma$ als topologische Räume hinreichend sind, voraussetzen. Wir bezeichnen dann die induzierte Operation von $\mathbb{Z}$ auf $\mathcal{P}_\Sigma$ ebenfalls mit φ.

Sei $\mathcal{P}_{\Sigma,i}^{(n)}$ die (endliche) Menge der Pfade der Länge n über Σ, die auf i enden und $\mathcal{P}_\Sigma^{(n)} = \bigcup_{i\in\Sigma^{(0)}} \mathcal{P}_{\Sigma,i}^{(n)}$. Falls von i nach j eine Kante läuft, können wir $\mathcal{P}_{\Sigma,i}^{(n)}$ einfach durch Anhängung dieser Kante in $\mathcal{P}_{\Sigma,j}^{(n+1)}$ einbetten: $\xi \mapsto \xi \circ \kappa$ ist eine injektive Abbildung von $\mathcal{P}_{\Sigma,i}^{(n)}$ in

$$\mathcal{P}_{\Sigma,j}^{(n+1)} = \bigcup_{i\in\Sigma^{(0)}} \bigcup_{\kappa\in\Sigma_{ji}^{(1)}} \mathcal{P}_{\Sigma,i}^{(n)} \circ \kappa, \tag{5.16}$$

wobei $\mathcal{P}_{\Sigma,i}^{(n)} \circ \kappa = \{\xi \circ \kappa | \xi \in \mathcal{P}_{\Sigma,i}^{(n)}\}$. Diese Einbettungsstruktur wird von φ in folgender Weise respektiert: Sei $\gamma \in \mathcal{P}_\Sigma$ ein auf i anfangender Pfad. Es gilt zwar nicht für alle $\xi \in \mathcal{P}_{\Sigma,i}^{(n)}$, daß $\varphi(\xi \circ \gamma) \in \mathcal{P}_{\Sigma,i}^{(n)} \circ \gamma$, aber für alle bis auf einen, den wir den größten, $\xi_{>,i}^{(n)}$, nennen. Dies folgt unmittelbar aus der Konstruktion von Ξ. Denn sei M ein zu $\rho^n(a_i)$ kongruentes Muster und $M \subset S$. Dann gilt $\Xi_n(\varphi(S)) \in \mathcal{P}_{\Sigma,i}^{(n)}$, solange ein anderer als der rechte Buchstabe in M markiert ist. $\xi_{>,i}^{(n)}$ kodiert also die Position von $\rho^n(a_i)^>$ in $\rho^n(a_i)$. Wir definieren nun für alle außer diesem Pfad $\varphi_n : \mathcal{P}_{\Sigma,i}^{(n)} \to \mathcal{P}_{\Sigma,i}^{(n)}$ durch

$$\varphi_n(\xi) \circ \gamma = \varphi(\xi \circ \gamma) \tag{5.17}$$

und auf diesem

$$\varphi_n(\xi_{>,i}^{(n)}) = \xi_{<,i}^{(n)}, \tag{5.18}$$

wobei $\xi_{<,i}^{(n)}$, der kleinste Pfad von $\mathcal{P}_{\Sigma,i}^{(n)}$, die Position von $\rho^n(a_i)^<$ in $\rho^n(a_i)$ kodiere. Die φ_n sind also durch die Verschiebungstransformation bis auf die extremalen Pfade definiert und dort so fortgesetzt, daß sie zyklisch werden.

Mit demselben Argument wie oben muß ein maximaler (minimaler) Pfad der Länge $n+1$ mit einem maximalen (minimalen) Pfad er Länge n anfangen. Daher ist φ_{n+1} durch φ_n bestimmt zusammen mit einer Abbildung der kleinsten Pfade von $\mathcal{P}_\Sigma^{(n)}$ auf die größten. Diese Abbildung kann auch aufgefaßt werden als eine Ordnung auf $\mathcal{P}_{\Sigma,j}^{(1)} = \bigcup_i \Sigma_{ji}^{(1)}$, nämlich diejenige, die durch die Reihenfolge der Buchstaben in $\rho(a_j)$ gegeben ist. Auf diese Weise läßt sich φ alleine durch diese Ordnung ausdrücken. Eine solche Transformation φ wird in [?] mit Verweis auf Versiks Arbeit [?] Versiktransformation genannt.

Mit $E_n := \{f - f \circ \varphi_n^{-1} | f \in C(\mathcal{P}_\Sigma^{(n)}, \mathbb{Z})\}$ ist

$$C(\mathcal{P}_\Sigma^{(n)}, \mathbb{Z})/E_n \cong \mathbb{Z}^{|\Sigma^{(0)}|} \tag{5.19}$$

als abelsche Gruppe, denn die charakteristischen Funktionen χ_ξ auf U_ξ, $\xi \in \mathcal{P}_\Sigma^{(n)}$, liefern Repräsentanten für Generatoren, und $\chi_\xi \sim_{E_n} \chi_{\xi'}$ gdw. $r(\xi) = r(\xi')$. Die Einbettung von Gruppen $\imath_n^{n+1} : C(\mathcal{P}_\Sigma^{(n)}, \mathbb{Z})/E_n \to C(\mathcal{P}_\Sigma^{(n+1)}, \mathbb{Z})/E_{n+1}$, die durch

$$\imath_n^{n+1}[\chi_\xi] = [\chi_{\{\xi\circ\kappa | s(\kappa)=r(\xi)\}}] = \sum_{j,\kappa\in\Sigma_{j,r(\xi)}^{(1)}} [\chi_{\xi\circ\kappa}] \tag{5.20}$$

beschrieben wird, ist daher wohldefiniert.

Theorem 4 *Es sei φ eine wie oben beschrieben durch eine Ordnung auf $\mathcal{P}^{(1)}_{\Sigma,j}$ definierte Transformation (Versiktransformation) auf $\mathcal{P}_\Sigma$. Dann ist*

$$\varinjlim C(\mathcal{P}^{(n)}_\Sigma, \mathbb{Z})/E_n = C(\mathcal{P}_\Sigma, \mathbb{Z})/E_\varphi \tag{5.21}$$

mit $\imath_n[\chi_\xi] = [\chi_{U_\xi}]$ für $\xi \in \mathcal{P}^{(n)}_\Sigma$.

Beweis: Wir zeigen zunächst die Wohldefiniertheit von $\imath_n$, sodann, daß Diagramm (2.10) kommutiert.
$\chi_\xi \sim_{E_n} \chi_{\xi'}$ impliziert $\exists k \in \mathbb{Z} : \varphi^k(\xi) = \xi'$ und daher $\varphi^k(U_\xi) = U_{\xi'}$. Andererseits hat $\exists k \in \mathbb{Z} : \varphi^k(U_\xi) = U_{\xi'}$ zur Folge, daß $\chi_{U_\xi} \sim_{E_\varphi} \chi_{U_{\xi'}}$, weshalb $\imath_n$ äquivalente Elemente in äquivalente überführt.
Aufgrund von

$$\imath_{n+1} \circ \imath^{n+1}_n[\chi_\xi] = \imath_{n+1}[\chi_{\{\xi\circ\kappa | r(\xi)=s(\kappa)\}}] = \sum_{\kappa\in\Sigma^{(1)}, r(\xi)=s(\kappa)} [\chi_{U_{\xi\circ\kappa}}] = [\chi_{U_\xi}] \tag{5.22}$$

ist auch $\imath_{n+1} \circ \imath^{n+1}_n = \imath_n$.
Zur Universalität von $C(\mathcal{P}_\Sigma,\mathbb{Z})/E_\varphi$ mit den angegebenen $\imath_n$ ist schließlich zu sagen, daß mit $[\chi_{U_\xi}] \mapsto [(0, \cdots, \overset{|\xi|'te}{[\chi_\xi]}, \cdots)]$ ein Isomorphismus auf die Standardrealisierung gegeben ist. □

Mit Hilfe der Isomorphie (5.19) läßt sich der induktive Limes direkt berechnen. Genauer wird $C(\mathcal{P}^{(n)}_{\Sigma,i}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{N^{(n)}_i}$ gegeben durch Identifikation der $N^{(n)}_i = |\mathcal{P}^{(n)}_{\Sigma,i}|$ Generatoren χ_ξ mit der Standardbasis. Bezeichnet $\Lambda_{N^{(n)}_i}$ das Wurzelgitter von $A_{N^{(n)}_i - 1}$, so ist mit demselben Isomorphismus $E_n \cong \Lambda_{N^{(n)}_i}$ und daher

$$C(\mathcal{P}^{(n)}_{\Sigma,i}, \mathbb{Z})/E_n \cong \mathbb{Z}^{N^{(n)}_i}/\Lambda_{N^{(n)}_i} \cong \mathbb{Z}. \tag{5.23}$$

Somit erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C(\mathcal{P}^{(n)}_\Sigma, \mathbb{Z})/E_n & \xrightarrow{\imath^{n+1}_n} & C(\mathcal{P}^{(n+1)}_\Sigma, \mathbb{Z})/E_{n+1} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \bigoplus_{i\in\Sigma^{(0)}} \mathbb{Z}^{N^{(n)}_i}/\Lambda_{N^{(n)}_i} & \xrightarrow{\sigma} & \bigoplus_{i\in\Sigma^{(0)}} \mathbb{Z}^{N^{(n+1)}_i}/\Lambda_{N^{(n+1)}_i}, \end{array} \tag{5.24}$$

und damit das folgende

Theorem 5 *Das gerichtete System $(C(\mathcal{P}^{(n)}_\Sigma, \mathbb{Z})/E_n, \imath^{n+1}_n)$ ist stationär und zwar isomorph zu $(\mathbb{Z}^{|\Sigma^{(0)}|}, \sigma)$.*

Die Werte des Spurzustandes und damit die möglichen Werte der integrierten Zustandsdichte auf Lücken können wir, da σ primitiv ist, von (3.6,2.15) abzulesen:

$$\mathcal{N}_H(E) \in \{\tau^{1-n}(z, \nu) | n > 0, z \in \mathbb{Z}^r\} \cap [0, 1], \tag{5.25}$$

wobei τ der Perron-Frobenius-Eigenwert und ν der auf $\sum_i \nu_i = 1$ normierte Links-Perron-Frobenius-Eigenvektor von σ ist. Was die geordnete K_0-Gruppe selbst angeht, so ist dies, falls σ über $\mathbb{Z}$ invertierbar ist, gerade $\mathbb{Z}^{|\Sigma^{(0)}|}$ mit der Ordnungsrelation (2.16).

Die Ergebnisse der Beispiele im einzelnen

Die Thue-Morse-Substitution $\rho: \ a \mapsto ab, \ b \mapsto ba$ hat die Substitutionsmatrix

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.26}$$

mit Perron-Frobenius-Eigenwert $\tau = 2$ und normiertem Links-Perron-Frobenius-Eigenvektor $\nu = \frac{1}{2}(1,1)$. Damit wird $\mathrm{tr}_* K_0(\mathcal{A}_\Sigma) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, aber, da Ξ nicht B2 erfüllt, ist dies lediglich eine Teilmenge von $\mu(C(\Omega, \mathbb{Z}))$. In der Tat ist $\mu(U_{aa,1}) = \frac{1}{3}$, was man mit anderen Methoden erkennt. Zur Berechnung der K_0-Gruppe nutzen wir das isomorphe gerichtete System $(\mathbb{Z}, 2id)$, denn $F = \Im(\sigma^2) \cong \mathbb{Z}$ und $\sigma^2|_F = 2id$. Damit erhalten wir $K_0(\mathcal{A}_\Sigma) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

Die metallischen Substitutionen $\rho_k: \ a \mapsto a^k b, \ b \mapsto a, \ k \geq 1$ haben die Substitutionsmatrizen

$$\sigma = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

mit Perron-Frobenius-Eigenwert $\tau = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ und normiertem Links-Perron-Frobenius-Eigenvektor $\nu = \frac{1}{\tau+1}(\tau, 1) = \frac{1}{k}(\tau - 1, k+1-\tau)$. Da σ über $\mathbb{Z}$ invertierbar ist, wird $K_0(\mathcal{A}_\Sigma) = \mathbb{Z}^2$ und $\mathrm{tr}_* K_0(\mathcal{A}_\Sigma) = \mathbb{Z} + \frac{\tau-1}{k}\mathbb{Z}$, also

$$\mathcal{N}_H(E) \in (\mathbb{Z} + \frac{\tau - 1}{k}\mathbb{Z}) \cap [0,1]. \tag{5.28}$$

tr_* ist injektiv.

Die period doubling Substitution $\rho: \ a \mapsto ab, \ b \mapsto aa$ hat Substitutionsmatrix

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.29}$$

mit Perron-Frobenius-Eigenwert $\tau = 2$ und normiertem Links-Perron-Frobenius-Eigenvektor $\nu = \frac{1}{3}(2,1)$. Damit wird

$$\mathcal{N}_H(E) \in \frac{1}{3}\mathbb{Z}_{[\frac{1}{2}]} \cap [0,1]. \tag{5.30}$$

Da aber $\frac{1}{2}\sigma^2$ keine ganzzahligen Koeffizienten hat, können wir die K_0-Gruppe nicht explizit angeben.

Die Substitutionsmatrix der E_6 zugeordneten Substitution $\rho: \ a \mapsto ab, \ b \mapsto abbbc, \ c \mapsto bc$ ist

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.31}$$

mit Perron-Frobenius-Eigenwert $\tau = 2 + \sqrt{3}$ und normiertem Links-Perron-Frobenius-Eigenvektor $\nu = \frac{1}{\tau+1}(1, \tau - 1, 1) = \frac{1}{6}(5 - \tau, 2\tau - 4, 5 - \tau)$. Damit wird $K_0(\mathcal{A}_\Sigma) = \mathbb{Z}^3$ und

$$\mathcal{N}_H(E) \in (\mathbb{Z} + \frac{\tau + 1}{6}\mathbb{Z}) \cap [0,1]. \tag{5.32}$$

tr_* ist also nicht injektiv.

Zusammenfassung

Zur physikalischen Interpretation dieser Berechnung der Gap-Label fassen wir noch einmal zusammen. Das gerichtete System, mit dessen Hilfe sich das Gap Labelling so einfach berechnen läßt, haben wir in zwei wesentlichen Schritten erhalten:

1. Aus der räumlichen Selbstähnlichkeit ergab sich die Konstruktion eines Pfadraumes, der in natürlicherweise eine Kette feiner werdender Partitionen auszeichnet: die n-te Partition von $\mathcal{P}_\Sigma$ besteht aus $\{U_\xi\}_{\xi\in\mathcal{P}_\Sigma^{(n)}}$.

2. Durch darauf abgestimmte Modifikation der Verschiebungstransformation φ erhielten wir die zyklischen Homöomorphismen φ_n und damit Approximanden für die K_0-Gruppe.

Versik hat in [?] Verschiebungstransformationen für beliebige minimale topologische dynamische Systeme (mit kompaktem total unzusammenhängenden Ω) analysiert, um zu zeigen, daß $C(\Omega)\times_\varphi\mathbb{Z}$ Unteralgebra einer AF-Algebra ist. Die von ihm dazu benutzten Ketten feiner werdender Partitionen von Ω sind jedoch nicht an eine weitere Struktur gekoppelt, so daß das entsprechende Bratteli-Diagramm im allgemeinen recht kompliziert aussehen kann. Erst in Kombination mit der Selbstähnlichkeit wird das gerichtete System stationär und dadurch berechenbar.

Als Korollar des obigen Resultates (5.24) erhält man, daß die K_0-Gruppen von $C(\Omega)\times_\varphi\mathbb{Z}$ und $\mathcal{A}_\Sigma$ gleich sind, obwohl die Algebren selbst nicht isomorph sind, denn $K_1(\mathcal{A}_\Sigma)=0$. In der Tat ist das Element u, dessen K_1-Klasse $K_1(C(\Omega)\times_\varphi\mathbb{Z})$ erzeugt, nicht in der AF-Algebra, es läßt sich aber (in einer physikalische Darstellung) durch Elemente derselben bezüglich der starken Topologie approximieren. Wir werden hierauf im sechsten Kapitel näher eingehen.

Putnam ist noch einen Schritt weiter gegangen [?]. Er hat nämlich gezeigt, daß $C(\Omega)\times_\varphi\mathbb{Z}$ approximierbar in der Normtopologie durch Algebren $\mathcal{A}^{(n)}$ der Form

$$\mathcal{A}^{(n)} = M_{n_1}(C(S^1))\oplus M_{n_2}(\mathbb{C})\oplus\cdots\oplus M_{n_k}(\mathbb{C}) \tag{5.33}$$

ist. Setzt man auch hier wieder die durch die Selbstähnlichkeit nahegelegte Kette von Partitionen an, so stellt sich heraus, daß die Unteralgebra von $\mathcal{A}^{(n)}$ der über S^1 konstanten Matrixelemente isomorph zu $\mathcal{A}_\Sigma^{(n)}$ ist[5], d.h. $n_i = N_i^{(n)}$! Es wird damit durchsichtig, wieso $C(\Omega)\times_\varphi\mathbb{Z}$ und $\mathcal{A}_\Sigma$ dieselbe K_0-Gruppe haben und an welcher Stelle der Erzeuger von $K_1(C(\Omega)\times_\varphi\mathbb{Z})$ ins Spiel kommt. Es ist aus physikalischem Blickwinkel naheliegend, die Elemente von $C(S^1)$ als Phasen aufzufassen, die den Eigenwerten der n_1-ten Potenz des Verschiebungsoperators eines eindimensionalen Systems mit Periode n_1 entspricht. Mit anderen Worten $M_{n_1}(C(S^1))$ ist die Algebra einer periodischen Approximation von $\mathcal{T}$ (mit Periode n_1) und $\mathcal{A}^{(n)}$ diejenige, die zusätzlich noch damit nicht zusammenhängende endliche Stücke der Länge n_i, $2\leq i\leq k$ beschreibt.

[5] Die Wahl des Summanden, in dem die Koeffizienten aus $C(S^1)$ vorkommen, muß zusätzlich gemacht werden.

Kapitel 6

Kartesische Produkte eindimensionaler Kachelungen

Die einfachsten mehrdimensionalen Kachelungen sind diejenigen, die sich als kartesische Produkte eindimensionaler auffassen lassen. Sie zeichnen sich dadurch aus, daß $\mathcal{T}^{(\bullet)}$ immerhin noch mit $\mathbb{Z}^d$, d die Dimension, identifiziert werden kann, weshalb die Gruppoid-C^*-Algebra wieder ein verschränktes Produkt wird. Die Anwendung sehr tiefliegender Theoreme aus der K-Theorie erlaubt es, das Gap Labelling dieser mehrdimensionalen Systeme vollständig und, wenn man die Werte der integrierten Zustandsdichte als Labels nimmt, auf einfache Weise durch dasjenige der eindimensionalen Komponenten auszudrücken. Dies ist in sofern erstaunlich als die Künnethformel, die die K-Gruppen von Tensorprodukten von C^*-Algebren mit denjenigen der einfachen Komponenten in Verbindung bringt, zunächst etwas wesentlich Komplizierteres liefert.

Was im letzten Kapitel nur angedeutet, kann in diesem Spezialfall bewiesen werden.

Theorem 6 *Seien $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ eindimensionale Kachelungen und (Ω_1, φ_1), (Ω_2, φ_2) die entsprechenden dynamischen Systeme. Es gilt*

$$C(\Omega_1 \times \Omega_2) \times_{\varphi_1 \times \varphi_2} \mathbb{Z}^2 \cong C(\Omega_1) \times_{\varphi_1} \mathbb{Z} \otimes C(\Omega_2) \times_{\varphi_2} \mathbb{Z}. \tag{6.1}$$

Beweis: Die Norm $\|\hat{f}\|_1 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \|\hat{f}(m)\|$ erfüllt die Kreuz-Norm-Bedingung, so daß der Homomorphismus $f \odot g \mapsto f * g : C_c(\Omega_1 \times \mathbb{Z}) \odot C_c(\Omega_2 \times \mathbb{Z}) \to C_c(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \mathbb{Z}^2)$, auf die Vervollständigung $\overline{C_c(\Omega_1 \times \mathbb{Z})}^1 \odot \overline{C_c(\Omega_2 \times \mathbb{Z})}^1$ bezüglich der $\|\cdot\|_1$-Norm fortgesetzt werden kann und weiterhin injektiv ist und dichtes Bild in $\overline{C_c(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \mathbb{Z}^2)}^1$ hat. Daher definiert die übliche C^*-Hülle von $\overline{C_c(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \mathbb{Z}^2)}^1$, ein C^*-Abschluß des algebraischen Tensorproduktes $C(\Omega_1) \times_{\varphi_1} \mathbb{Z} \odot C(\Omega_2) \times_{\varphi_2} \mathbb{Z}$. Da verschränkte Produkte kommutativer Algebren mit $\mathbb{Z}^r$ nuklear sind, sind alle möglichen C^*-Abschlüsse isomorph. $\square$

Die Erweiterung dieses Theorems auf mehrfache kartesische Produkte läßt sich genauso beweisen. Eine Konsequenz desselben ist auch, daß sich die Algebra $\mathcal{A}_{\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2}$ auf zweierlei Art interpretieren läßt, als Observablenalgebra eines Einteilchensystems über $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ oder als Observablenalgebra eines Zweiteilchensystems.

Da die verschränkten Produkte nuklear sind, lassen sich die K-Gruppen von $\mathcal{A}_{\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2}$ mit der Künnethformel berechnen, so daß

$$\begin{aligned} K_0(\mathcal{A}_\mathcal{T}) &\cong K_0(\mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}) \otimes K_0(\mathcal{A}_{\mathcal{T}_2}) \oplus K_1(\mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}) \otimes K_1(\mathcal{A}_{\mathcal{T}_2}) & (6.2)\\ K_1(\mathcal{A}_\mathcal{T}) &\cong K_0(\mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}) \otimes K_1(\mathcal{A}_{\mathcal{T}_2}) \oplus K_1(\mathcal{A}_{\mathcal{T}_1}) \otimes K_0(\mathcal{A}_{\mathcal{T}_2}) & (6.3)\end{aligned}$$

ist. Die K_0-Gruppen werden bei wachsender Dimension also immer komplizierter, da $K_1(C(\Omega) \times_\varphi \mathbb{Z})$ für topologisch transitives φ nicht trivial ist.

Dasselbe Resultat ließe sich auch durch Iteration der Pimsner-Voiculescu-Sequenz herleiten, wenn man wüßte, daß diese an entsprechender Stelle spaltet. Dies ist bei transitivem φ allgemein nur für $d_1 = d_2 = 1$ der Fall und wurde dafür auch in [?] und [?] so durchgeführt. Für höhere Dimensionen erfordert es jedoch zusätzliche Annahmen an die Substitution oder explizite Verifikation. Der zusätzliche, auf der rechten Seite von (6.2) auftretende, von dem Tensorprodukt der K_1-Gruppen stammende Generator ist in [?] explizit ausgerechnet worden. Er hat Spur 1 und spielt daher keine Rolle für das Gap-Labelling.

Was die Werte des Spurzustandes angehen, so läßt sich mit Hilfe einer in [?] aus der Pimsner-Voiculescu-Sequenz hergeleiteten exakten Sequenz für höhere Dimensionen folgendes beweisen:

Theorem 7 *Sei $\mathcal{T}$ ein d-faches kartesisches Produkt eindimensionaler Kachelungen $\mathcal{T}_i$, deren zugehörige Verschiebungstransformationen φ_i topologisch transitiv sind und tr eine Spur auf $\mathcal{A}_\mathcal{T} = C(\Omega) \times_\varphi \mathbb{Z}^d$, mit $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d$ und $\varphi = \varphi_1 \times \cdots \varphi_d$. Dann ist*

$$tr_* K_0(\mathcal{A}_\mathcal{T}) = \mu(C(\Omega, \mathbb{Z})), \tag{6.4}$$

wobei μ das durch tr definierte invariante Maß ist.

Beweis: Zum Beweis benötigen wir Theorem 3 aus [?], welches wir zunächst zitieren: Sei tr eine Spur auf $A \times_\alpha \mathbb{Z}$, A eine beliebige C^*-Algebra. Dann ist die Abbildung $\underline{\Delta}^\alpha_{\mathrm{tr}} : \ker(id - \alpha_*) \subset K_1(A) \to \mathbb{R}/\mathrm{tr}_*(K_0(A))$, die durch

$$\underline{\Delta}^\alpha_{\mathrm{tr}}([u]) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \mathrm{tr}(\dot{\xi}(t)\xi^{-1}(t))\; dt \;/\; \mathrm{tr}_*(K_0(A)) \tag{6.5}$$

unter Zuhilfenahme eines stückweise glatten Pfades $\xi : [0,1] \to GL(A)$ von 1 nach $u\,\alpha(u^{-1})$ definiert wird, ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus und die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{tr}_*(K_0(A)) \longrightarrow \mathrm{tr}_*(K_0(A \times_\alpha \mathbb{Z})) \xrightarrow{q} \underline{\Delta}^\alpha_{\mathrm{tr}}(\ker(id - \alpha_*)) \longrightarrow 0, \tag{6.6}$$

$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathrm{tr}_*(K_0(A))$ sei die kanonische Projektion, exakt (wir haben die Restriktion von tr auf A ebenfalls mit tr bezeichnet).
Wir wollen dieses Theorem auf $A = \mathcal{A}_{\mathcal{T}'} \otimes C(\Omega_d)$, $\alpha = \varphi_d$ mit $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_{d-1}$ anwenden, denn es ist $\mathcal{A}_{\mathcal{T}'} \otimes C(\Omega_d) \times_{\varphi_d} \mathbb{Z} = \mathcal{A}_\mathcal{T}$. Dazu müssen wir zuerst $\ker(id - \varphi_{d*}) \subset K_1(A)$ bestimmen. Repräsentanten von Elementen aus $K_1(A)$ sind invertierbare Funktionen $u : \Omega_d \to GL(\mathcal{A}_{\mathcal{T}'})$ und $\varphi_{d*}[u] = [\varphi_d^* u] = [u \circ \varphi_d^{-1}]$. Es ist daher $(id - \varphi_{d*})[u] = 0$ gdw. $u \sim u \circ \varphi_d^{-1}$. Aus der Transitivität von φ_d ergibt sich daher $\forall x, y \in$

$\Omega_d : u(x) \sim_{\mathcal{A}_{\mathcal{T}'}} u(y)$, wobei die Äquivalenz hier der Homotopieäquivalenz in $GL(\mathcal{A}_{\mathcal{T}'})$ entspricht. Im allgemeinen folgt aus der Existenz von Homotopien zwischen $u(x)$ und $u(y)$ noch nicht, daß man diese auch so wählen und zusammenkleben kann, daß man eine Homotopie in $GL(A)$ von der konstanten, durch ein festgehaltenes x_0 bestimmten Funktion $\tilde{u}(x) = u(x_0)$ nach u erhält, daß also $\tilde{u} \sim u$. Dies ist aber der Fall, wenn $\pi_1(\Omega_d) = 0$, also auch hier. Mit anderen Worten, jedes Element von $\ker(id - \varphi_{d*})$ kann durch ein über Ω_d konstantes repräsentiert werden und somit $\ker(id - \varphi_{d*}) \cong K_1(\mathcal{A}_{\mathcal{T}'})$. Da nun auch $\tilde{u}\varphi_d^*(\tilde{u}^{-1}) = 1$ ist, ist $\underline{\Delta}_{\mathrm{tr}}^{\varphi_d}([u]) = 0$, so daß nach (6.6) und mit (6.2)

$$\mathrm{tr}_* K_0(\mathcal{A}_{\mathcal{T}'} \otimes C(\Omega_d) \times_{\varphi_d} \mathbb{Z}) = \mathrm{tr}_* K_0(\mathcal{A}_{\mathcal{T}'} \otimes C(\Omega_d)) = \mu(C(\Omega_d, \mathbb{Z}))\, \mathrm{tr}_* K_0(\mathcal{A}_{\mathcal{T}'}) \quad (6.7)$$

und daher durch sukzessive Anwendung die Behauptung folgt. □

Hiermit ist das Gap-Labelling, insofern es sich auf die Werte der Spur bezieht, auf den eindimensionalen Fall zurückgeführt. Wir wollen dieses Ergebnis aus dem Blickwinkel der periodischen Approximation interpretieren, wobei wir uns der Einfachheit halber auf zweidimensionale Kachelungen beschränken. Bilden wir das Tensorprodukt der Putnamschen Approximanden, d.h. zweier Algebren der Form (5.33), so erhalten wir

$$M_{n_1 m_1}(C(\mathrm{T}^2)) \oplus \bigoplus_{i=2}^{l} M_{n_1 m_i}(C(S^1)) \oplus \bigoplus_{i=2}^{k} M_{n_i m_1}(C(S^1)) \oplus \bigoplus_{i,j \geq 2}^{l} M_{n_i m_j}(\mathbb{C}), \qquad (6.8)$$

als Approximation in Norm von $\mathcal{A}_{\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2}$. Hierbei ist $\mathrm{T}^2 \cong S^1 \times S^1$ der Torus, dessen Werte wieder als Phasen des nun zweidimensionalen Translationsoperators auf der periodischen Approximation interpretiert werden. Betrachtet man nun die Algebren der phasenunabhängigen Matrixelemente, so liefern sie offenbar eine AF-Algebra, deren K_0-Gruppe von derjenigen von $\mathcal{A}_{\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2}$ abweicht, deren Spurzustand auf der K_0-Gruppe aber dieselben Werte liefert. Die Abweichung der K_0-Gruppe hat ihren Ursprung im jeweils ersten Summanden von (5.33), wie aus (6.2) zu erkennen ist, und zeigt sich darin, daß $K_0(M_n(C(\mathrm{T}^2))) \cong \mathbb{Z}^2$ ist. Auf dem Torus gibt es nämlich nichttriviale Vektorbündel. Da aber der Spurzustand auf Projektoren zu trivialen wie zu nichttrivialen Bündeln nur von deren Dimension abhängt, ist $\mathrm{tr}_* K_0(M_n(C(\mathrm{T}^2)))$ nur isomorph zu $\mathbb{Z}$, und die Spurwerte stimmen überein. Hier zeigt sich, daß durch Beschränkung des Gap-Labellings auf die Spurwerte gegebenenfalls interessante Information verschenkt wird, nämlich die Charakterisierung von Schrödinger-Operatoren nach dem Kriterium, ob die Vektorbündel, auf die die Spektralprojektoren projizieren, trivial sind oder nicht.

Kapitel 7

Substitutionskachelungen mit Orientierungssymmetrie

Wir betrachten in diesem Abschnitt zweidimensionale Kachelungen mit Orientierungssymmetrie, für die eine lokal invertierbare Substitution (eine De-/Inflationsprozedur) definiert werden kann. Auf ähnliche Weise wie im ersten Abschnitt dieses Kapitels führt diese Substitution zu einer stetigen surjektiven Abbildung von Ω/G auf den Pfadraum, dessen Graph durch die Substitutionsmatrix bestimmt ist. Im Unterschied zum eindimensionalen Fall und den kartesischen Produkten hieraus ist Ω hier jedoch nicht der Abschluß des Orbits von $\mathcal{T}$ unter der Operation einer Gruppe und $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ kein verschränktes Produkt. Wir können daher die K-Gruppen dieser Algebra sowie die Werte eines Spurzustandes nicht berechnen. Jedoch läßt sich die Pfadraumstruktur nutzen, um ein invariantes Maß bzw. dessen Werte auf $C(\Omega, \mathbb{Z})$ zu berechnen. Daß damit nur ein Teil der K_0-Gruppe bestimmt ist, ist aus dem letzten Abschnitt klar. Kapitel 6 gibt aber auch berechtigte Hoffnung zur Annahme, daß die Werte der Spur auf Projektoren durch die Werte des invarianten Maßes auf $C(\Omega, \mathbb{Z})$ schon vollständig gegeben sind.

Die folgende Definition der Orientierungssymmetrie ist [?] entlehnt, allerdings so umformuliert, daß der Begriff der lokalen Isomorphieklasse nicht benötigt wird.

Definition 5 *Ein Element g von $O(2)$ heißt Orientierungssymmetrie von $\mathcal{T}$, falls $\forall r \geq 0\, \exists x \in I\!R^2 : M_r(g \cdot \mathcal{T}) = M_r(\mathcal{T} - x)$.*

Die Orientierungssymmetrien bilden eine Untergruppe G von $O(2)$, die für Kachelungen, die die in dieser Arbeit angenommene Voraussetzung von Lemma 1 erfüllen, endlich ist. Nach Konstruktion muß dann für jedes $g \in G$ mit T ebenfalls $g \cdot T \in \Omega$ sein. Also operiert G auf Ω sowie auf $\mathcal{R}$ und zwar stetig, denn $O(2)$ erhält die Metrik. Da wir die Symmetrie der Protokacheln durch die Markierung gebrochen haben gilt

$$U_{M,x} \cap U_{g \cdot M, g \cdot x} = \emptyset, \tag{7.1}$$

so daß es symmetrische Kachelungen nur bis auf Translation geben kann: Wir nennen T symmetrisch, wenn für ein $g \neq id$ gilt $g \cdot T \sim T$. Es bietet sich nun an, in einfachen physikalischen Modellen Operatoren zu betrachten, die G-invariant sind, d.h. Darsteller von Elementen aus $\mathcal{A}_\mathcal{T}^G$. Für sie gilt $f(g\cdot T, g\cdot S) = f(T,S)$. So werden lokale G-invariante Schrödinger-Operatoren durch Polynome in

$$\tilde{e}_{M,x,y} = \sum_{g\in G} e_{g\cdot M, g\cdot x, g\cdot y} \tag{7.2}$$

dargestellt. In diesem Zusammenhang ist es auch sinnvoll, den Orbitraum Ω/G zu betrachten, denn schließlich ist $C(\Omega)^G \cong C(\Omega/G)$. Da die Metrik invariant unter der Operation von G ist, ist die Quotientenmetrik $\tilde{d}([S],[S']) = \min\{d(S, g\cdot S')|g \in G\}$ mit der Quotiententopologie verträglich, $[\cdot]$ bezeichne hier Äquivalenzklassen unter G. Jedem Maß $\tilde{\mu}$ auf Ω/G kann dann durch

$$\tilde{\mu}([U_{M,x}]) = \mu(\bigcup_{g\in G} U_{g\cdot M, g\cdot x}) = |G|\,\mu(U_{M,x}) \tag{7.3}$$

ein G-invariantes Maß μ auf Ω zugeordnet werden und umgekehrt.

Der Faktor $|G|$, die Mächtigkeit von G, taucht in (7.3) auf, weil die Topologie von Ω durch (orientierte) Muster und nicht deren G-Orbits definiert wurde. Daher lassen sich verschieden orientierte Muster durch stetige Funktionen voneinander unterscheiden. Interessiert man sich indessen für Schrödinger-Operatoren, die Darsteller von Elementen aus $\mathcal{A}_\mathcal{T}^G$ sind, so müssen die Spuren der Spektralprojektoren immer Vielfache von $|G|$ (über $\mathrm{tr}_* K_0(\mathcal{A}_\Sigma)$) sein, liegen also in $\tilde{\mu}([U_{M,x}])$.

7.1 Die AF-Algebra $\mathcal{A}_\Sigma$

Die K_0-Gruppe von $\mathcal{A}_\mathcal{T}$, der Algebra, die die Observablen und insbesondere den Laplace-Operator enthält, ist uns leider nicht bekannt ebensowenig das Bild des durch die Spur induzierten Zustandes auf ihr. Nach (4.22) ist aber schon ein Teil der Werte des Zustandes durch das invariantes Maß auf der Hülle bestimmt, welches die den Zustand induzierende Spur definiert, und im Vergleich zu anderen höherdimensionalen Kachelung gibt uns Theorem 7 zu der Vermutung Anlaß, daß dies schon alle sind. Zur Berechnung der Werte des Maßes dient uns die AF-Algebra $\mathcal{A}_\Sigma$, die sich wie für eindimensionale Kachelungen aus der Selbstähnlichkeitsstruktur gewinnen läßt. Es ist im übrigen genau diese AF-Algebra, die A. Connes dem nichtkommutativen Raum der Penrose-Kachelungen zugeordnet hat.

Die hier betrachteten Kachelungen lassen sich außer durch andere Verfahren - z.B. der Projektionsmethode [?] - auch mit Hilfe einer Substitution (oder Deflationsprozedur) konstruieren. Sie sind dann, gegebenenfalls bis auf Anwendung einer Symmetrieoperation von G, Fixpunkte unter der Substitution. Es sei noch einmal daran erinnert, daß Protokacheln Kongruenzklassen unter der euklidischen Gruppe von $\mathbb{R}^2$ sind. Die Existenz einer Orientierungssymmetrie erfordert eine Unterscheidung zwischen Protokacheln, deren Menge wir mit $\mathcal{B} = \{[a_1], \cdots, [a_n]\}$ bezeichnen und den orientierten Protokacheln. Im höherdimensionalen ist eine Substitution eine Abbildung ρ, die jeder orientierten Protokachel a ein Muster $\rho(a)$ zuweist und sich auf Mustern iterativ so fortsetzen läßt, daß dabei überlappungsfreie lückenlose Muster entstehen. Wieder muß vereinbart werden, wie sich die Punktierung unter ρ verhält, d.h. in jeder a-Deflation ist eine Kachel auszuzeichnen, so daß bei Anwendung von ρ auf ein realisiertes a, dessen Punktierung auf x liegt, die Punktierung der ausgezeichneten Kachel in einer Realisierung von $\rho(a)$ auf x zu liegen kommt. Die Ergebnisse sind dabei unabhängig von einer konkreten Wahl. Wir fordern nun zusätzlich, daß die Substitution sich unter der Orientierungssymmetrie kovariant im Sinne von

$$\rho(g \cdot a) = g \cdot \rho(a), \tag{7.4}$$

für $g \in G$, verhält.

Deshalb läßt sich die Substitutionsmatrix σ wie vorher in Bezug auf die Protokacheln durch

$$\sigma_{ij} = \text{Anzahl der Repräsentanten von } [a_j] \text{ in } \rho(a_i), \tag{7.5}$$

und analog der Graph Σ, definieren. Alle betrachteten Substitutionen haben primitive Substitutionsmatrizen.

Analog zum eindimensionalen Fall betrachten wir nur Substitutionen, für die der innere Radius von $\rho^n(a)$ durch O^n für ein $O > 1$ minorisiert wird. Hierbei ist innere bzw. äußere Radius von (M, x) das Supremum aller r, für die $U_r(0)$ von einer Realisierung von M als Überdeckung, die x bei 0 hat, überdeckt wird, bzw. das Infimum aller r, für die $U_r(0)$ das von M Überdeckte enthält. Beide Begriffe hängen nicht von der Orientierung des Musters ab. Der innere Radius von M ist nun das Maximum über $x \in M^{(\bullet)}$ aller innerer Radien von (M, x).
Sei nun $\mathcal{T}$ Fixpunkt einer primitiven Substitution. Wieder können wir $\rho(\mathcal{T})$ sowohl als Kachelung von orientierten Protokacheln als auch als Kachelung von a-Deflationen auffassen.

Definition 6 *Die Substitution ρ heißt erkennbar, falls es eine reelle Zahl K gibt, so daß gilt: Sei der innere Radius von $(M, x) \subset (\mathcal{T}, y)$ größer gleich K und $(N, x) \subset (M, x)$ dasjenige bei y realisierte Muster in (M, x), welches der realisierten a_i-Deflation in $\rho(\mathcal{T})$ bei y entspricht - ein solches Muster steckt für hinreichend großes K immer in M. Dann folge aus $(M, x) \subset (\mathcal{T}, y')$ immer, daß (N, x) der a_i-Deflation (zum selben a_i) in $\rho(\mathcal{T})$ bei y' entspricht.*

Unter der Bedingung, daß

B1 ρ erkennbar ist,

ist die Substitution lokal invertierbar und es läßt sich wieder eine stetige surjektive Abbildung Ξ von Ω auf $\mathcal{P}_\Sigma$ konstruieren, nur das jetzt die Protokacheln gemäß ihrer Lage in der Substitution den verschiedenen Kanten von $\Sigma^{(1)}_{ji}$ zuzuordnen sind. Da die Symmetrie der Protokacheln durch die Punktierung gebrochen ist, ist die Lage einer Kachel in einer Deflation eindeutig definiert. Hiermit erhalten wir völlig analog zum eindimensionalen Fall

Theorem 8 *Ξ definiert eine stetige surjektive Abbildung von Ω auf $\mathcal{P}_\Sigma$.*

Beweis: Die Stetigkeit sowie die Surjektivität von Ξ, lassen sich wörtlich wie für Theorem 3 beweisen, wenn man nur K im Sinne der letzten Definition verwendet. □

Für Orientierungssymmetrien $g \in G$ ist $\Xi_n(S) = \Xi_n(g \cdot S)$, weshalb Ξ nicht injektiv sein kann. Wir gehen daher zu der auf dem Orbitraum Ω/G wohldefinierten Abbildung $\tilde{\Xi} : \Omega/G \to \mathcal{P}_\Sigma$, $\tilde{\Xi}([S]) = \Xi(S)$ über.

Wir benötigen noch ein Kriterium für die stetige Umkehrbarkeit von $\tilde{\Xi}$. Wenn M ein Muster einer Kachelung ist, so sind in der Regel einige der angrenzenden Kacheln eindeutig durch M bestimmt, d.h. die aus denjenigen Mustern $\tilde{M} \supset M$ bestehende Menge $< M >$, die neben M genau die Kacheln enthalten, die eine Ecke mit M gemeinsam haben, ist nicht allzu groß. Das Kriterium lautet nun:

B2 Es gibt ein n_0, so daß $<\rho^{n_0}(a)>$ für alle a einelementig ist.

Theorem 9 *$\tilde{\Xi}$ definiert eine stetige surjektive Abbildung von Ω/G auf $\mathcal{P}_\Sigma$, die unter der Voraussetzung B2 ein Homöomorphismus ist.*

Beweis: Stetigkeit und Surjektivität von $\tilde{\Xi}$ folgen direkt aus der Stetigkeit und Surjektivität von Ξ.
Da S Fixpunkt ist, folgt aus B2 wieder, daß $(\rho^\infty(a), x) \subset (S, 0)$ und $(\rho^\infty(a), x) \subset (S', 0)$ schon $d(S, S') = 0$ impliziert. Sei nun $\Xi([S]) = \Xi([S'])$. Dann existiert ein $g \in G$, so daß S und $g \cdot S'$ ein Teilstück der Form $(\rho^\infty(a), x)$ gemeinsam haben, nach oben Gesagtem also gleich sind.[1] Es ist also $[S] = [S']$ und daher $\tilde{\Xi}$ injektiv.
$\tilde{\Xi}^{-1}$ ist stetig, falls $\forall R > 0 \, \exists L > 0 : l(\xi, \xi') > L \Rightarrow \tilde{r}(\tilde{\Xi}^{-1}(\xi), \tilde{\Xi}^{-1}(\xi')) > R$, mit $\tilde{r}([S], [S']) = \max\{r(S, g \cdot S') | g \in G\}$. Setzen wir $L = [\frac{\log R}{\log \tau}] + n_0 + 1$, wobei τ der Skalierungsfaktor (Links-Perron-Frobenius-Eigenwert von σ) ist, so gibt es ein $\tilde{M} \in < \rho^L(a) >$, so daß der innere Radius von $(\rho^L(a), x)$ für $x \in \rho^L(a)^{(\bullet)}$ mindestens $\tau^{L-n_0-1} \geq R$ ist. Daher ist $\tilde{\Xi}^{-1}$ stetig. □

Das Theorem zeigt, daß unter der Voraussetzung B2 nicht nur $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ eine zu $\mathcal{T}$ kanonisch zugeordnete C^*-Algebra ist, sondern auch die Pfadalgebra $\mathcal{A}_\Sigma$. Hierbei ist es wichtig, daß $\mathcal{A}_\Sigma$, obwohl es mit Hilfe einer Substitution bestimmt wurde, weitgehend von der Wahl derselben unabhängig ist. Wir wissen ja, daß die $\mathcal{A}_\Sigma$ bestimmende Invariante, im Falle einer über $\mathbb{Z}$ invertierbaren Substitutionsmatrix, nur von den (normierten) Komponenten des Links-Perron-Frobenius-Eigenvektors von σ bestimmt wird. Diese haben - der Beweis im eindimensionalen Fall überträgt sich wörtlich - die geometrische Bedeutung der relativen Häufigkeiten der Protokacheln und müssen daher unabhängig von der Wahl einer Substitution sein.

Vergleich zwischen $\mathcal{A}_\Sigma$ und $\mathcal{A}_\mathcal{T}$

Ein so expliziter Zusammenhang zwischen $\mathcal{A}_\Sigma$ und $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ auf dem Niveau von C^*-Algebren wie im Fall der verschränkten Produkte ist uns hier nicht bekannt. Dennoch erweist sich die AF-Algebra auch hier als sehr nützlich, weil sie uns eine Spur liefern kann,

[1] Es dürfte klar sein, daß B2 wieder auch eine notwendige Bedingung für diesen Schluß ist.

die der rechten Seite der Shubinformel einen Sinn gibt, und überdies deren Eindeutigkeit garantiert. Dies ist nur deshalb möglich, weil im Rahmen der Darstellungstheorie ein sehr enger Zusammenhang zwischen $\mathcal{A}_\Sigma$ und $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ besteht, in gewissen Darstellungen sind die Elemente aus $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ nämlich durch solche aus $\mathcal{A}_\Sigma$ in der starken Topologie approximierbar. Hier zeigt sich der Einfluß von Spiegelachsen und Symmetriezentren.

Für das Folgende ist es wichtig zwischen regulären und singulären Kachelungen zu unterscheiden. Wir bezeichnen für $\xi \in \mathcal{P}_{\Sigma,i}^{(n)}$ mit M_ξ ein $\rho^n(a_i)$ repräsentierendes Muster und mit $x_\xi \in M_\xi^{(\bullet)}$ den Punkt, der dasjenige Polygon markiert, dessen Lage durch ξ in M_ξ kodiert ist.

Definition 7 *Eine Kachelung $T \in \Omega$ heißt regulär, wenn der innere Radius von $(M_{\Xi_n(T)}, x_{\Xi_n(T)})$ mit n divergiert.*

Reguläre Kachelungen werden daher im Sinne der Metrik durch die endlichen Teilstücke $(M_{\Xi_n(T)}, x_{\Xi_n(T)})$ approximiert. Für nicht reguläre (singuläre) Kachelungen ist dies a priori nicht so; erst B2 stellt sicher, daß die Folge obiger Muster die Kachelung eindeutig bestimmt.

Lemma 4 *Ist T symmetrisch, so ist es singulär.*

Beweis: Sei T symmetrisch, also $\exists x \in \mathbb{R}^2 : g \cdot T = T - x$. Da wir die Symmetrie der Polygon gebrochen haben, muß $x \neq 0$ sein. Dann ist $\Xi_n(T) = \Xi_n(T - x)$ und daher $x \notin M_{\Xi_n(T)}^{(\bullet)}$, denn sonst wäre $x = x_{\Xi_n(T-x)} = 0$. Folglich muß der innere Radius von $(M_{\Xi_n(T)}, x_{\Xi_n(T)})$ kleiner als $|x|$ sein.

Die AF-Algebra $\mathcal{A}_\Sigma$ läßt sich ebenso wie $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ als Gruppoid-C^*-Algebra eines durch eine Äquivalenzrelation definierten Gruppoiden auffassen. Ist T eine reguläre Kachelung und $S \sim T$, so unterscheiden sich die Pfade $\Xi(T)$ und $\Xi(S)$ nur an endlich vielen Stellen. Wir definieren daher $\gamma \sim \gamma'$ gdw. $\exists n_0 \, \forall n \geq n_0 : \gamma_n = \gamma'_n$. Ist hingegen T singulär, so muß dies nicht so sein, aber die Umkehrung gilt immer: $\gamma \sim \gamma' \Rightarrow \exists S \sim S' : \Xi(S) = \gamma, \Xi(S') = \gamma'$. Wir bezeichnen den entsprechenden Gruppoiden mit $\mathcal{R}_\Sigma$ und versehen ihn mit der Topologie, die durch die Mengen $U_\xi \times \{\zeta\}$ für $\zeta \in \mathcal{P}_{\Sigma,r(\xi)}^{(|\xi|)}$ erzeugt wird. Damit sind auch die $\mathcal{R}_\Sigma^\gamma$ diskret, so daß wir auf diesen ebenfalls das Punktmaß als Haarsystem haben. Die, für $\xi, \xi' \in \mathcal{P}_{\Sigma,i}^{(n)}$ definierten Funktionen $e_{\xi,\xi'} : \mathcal{R}_\Sigma \to \mathbb{C}$

$$e_{\xi,\xi'}(\gamma, \gamma') = \begin{cases} 1 \text{ falls } \exists \gamma'' : \gamma = \xi \circ \gamma'' \text{ und } \gamma' = \xi' \circ \gamma'' \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \tag{7.6}$$

liefern dann ein Erzeugendensystem einer topologischen $*$-Algebra, deren C^*-Abschluß (jede C^*-Norm führt hier zu demselben) gerade $\mathcal{A}_\Sigma$ ist. Die (4.13) entsprechenden Darstellungen sehen dann wie folgt aus: Auf den Wellenfunktionen $\phi \in \ell^2(\mathcal{R}_\Sigma^\alpha)$ operieren die Erzeuger $\pi_\alpha(e_{\xi,\xi'})$ durch $(\gamma \sim \alpha)$

$$(\pi_\alpha(e_{\xi,\xi'})\phi)(\gamma) = \begin{cases} \phi(\xi' \circ \gamma'') & \text{falls } \exists \gamma'' : \gamma = \xi \circ \gamma'' \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{7.7}$$

Die auf $\mathcal{R}^T$ eingeschränkte Abbildung $(T,S) \mapsto (\Xi(T),\Xi(S) : \mathcal{R}^T \to \mathcal{R}_\Sigma^{\Xi(T)}$ ist für reguläre T bijektiv. Dies erlaubt uns diese Darstellung mit den physikalischen Darstellungen von $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ zu vergleichen:

$$(\pi_T(e_{\xi,\xi'})\psi)(S) := (\pi_{\Xi(T)}(e_{\xi,\xi'})\psi \circ \Xi^{-1})(\Xi(S)) \tag{7.8}$$

$$= \begin{cases} \psi(\Xi^{-1}(\xi' \circ \gamma'')) & \text{falls } \exists\gamma'' : \Xi(S) = \xi \circ \gamma'' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{7.9}$$

$$= \begin{cases} \psi(S - g\cdot(x_{\xi'} - x_\xi)) & \text{falls } \Xi_n(S) = \xi \text{ und } \exists g : (g \cdot M_\xi, g\cdot x_\xi) \subset (S,0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{7.10}$$

Für singuläres T sei hierdurch eine Darstellung von $\mathcal{A}_\Sigma$ definiert. Man sollte hier kurz innehalten, um sich vor Augen zu führen, was das bedeutet. Aufgrund von (6.6) gibt es zu gegebenem S und ξ höchstens ein $g \in G$, welches $(g \cdot M_\xi, g \cdot x_\xi) \subset (S,0)$ erfüllt. Weiterhin folgt aus der Bedingung $\Xi_n(S) = \xi$, daß $\pi_T(e_{\xi,\xi'})$ nur dann eine Translation um $g\cdot(x'_\xi - x_\xi)$ ist, wenn Anfangs- und Endpunkt der Verschiebung in einer gemeinsamen n-fach iterierten Inflation liegen ($n = |\xi|$). Insbesondere gibt es Translationen über den Rand der n-fach iterierten Inflationen hinaus erst durch Darsteller mit Elementen aus $\mathcal{A}_\Sigma^{(n+1)}$. Dies zeigt, daß die Darsteller der G-invarianten Elemente $\tilde{e}_{M,x,y}$ i.a. nicht durch Elemente aus $\pi_T(\mathcal{A}_\Sigma)$ in der Normtopologie approximierbar sind. Stattdessen gilt das

Theorem 10 *Für reguläres T sind der starke Abschluß von $\pi_T(\mathcal{A}_\Sigma)$ und $\pi_T(\mathcal{A}_\mathcal{T}^G)$ gleich:*

$$\overline{\pi_T(\mathcal{A}_\Sigma)}^s = \overline{\pi_T(\mathcal{A}_\mathcal{T}^G)}^s. \tag{7.11}$$

Beweis: Sei T regulär und $\mathcal{P}_{M,x,x'}^{(n)} := \{(\xi,\xi') \in \bigcup_i \mathcal{P}_{\Sigma,i}^{(n)} \times \mathcal{P}_{\Sigma,i}^{(n)} | \exists g \in G : g\cdot M \subset M_\xi, g\cdot x = x_\xi, g \cdot x' = x'_\xi\}$. Dann definiert

$$\pi_T(\tilde{e}_{M,x,x'})^{(n)} = \sum_{(\xi,\xi') \in \mathcal{P}_{M,x,x'}^{(n)}} \pi_T(e_{\xi,\xi'}), \tag{7.12}$$

die n-te Approximation von $\pi_T(\tilde{e}_{M,x,x'})$. Da T regulär ist, $\exists n_0 \exists g : (g \cdot M, g \cdot x) \subset (M_{\Xi_{n_0}(S)}, x_{\Xi_{n_0}(S)})$. Daher gilt für alle $\psi \in \{\psi_{T-g\cdot(x'-x)} | x' \in M^{(\bullet)}\}$ - $\psi_S(S') = \delta_{SS'}$ bezeichne hier die übliche Basis - und $n \geq n_0$ schon $\pi_T(\tilde{e}_{M,x,x'})^{(n)}\psi = \pi_T(\tilde{e}_{M,x,x'})\psi$. $\pi_T(\tilde{e}_{M,x,x'})^{(n)}$ konvergiert daher in der starken Topologie gegen $\pi_T(\tilde{e}_{M,x,x'})$. Nun ist die Multiplikation als Abbildung von $\mathcal{B}_1(\ell^2(\mathcal{R}^T)) \times \mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{R}^T)) \to \mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{R}^T))$ stark stetig und da $\pi_T(\tilde{e}_{M,x,x'})^{(n)}$ alle Norm 1 haben sind alle Elemente der durch die $\pi_T(\tilde{e}_{M,x,x'})$ erzeugten topologischen Algebra im starken Abschluß von $\pi_T(\mathcal{A}_\Sigma)$. Der starke Abschluß jener topologischen Algebra ist aber gerade $\overline{\pi_T(\mathcal{A}_\mathcal{T}^G)}^s$. □

Die Regularität ist eine wesentliche Voraussetzung für das Theorem. Für Darstellungen der AF-Algebra insbesondere auf symmetrischen Kachelungen, die ja singulär sind, gibt es keine Darsteller für Translationen, die über die Spiegelachsen hinwegführen. Hier zeigt sich, daß die Spiegelachsen einer Kachelung sich algebraisch durch Vergleich der Algebra $\mathcal{A}_\Sigma$ mit $\mathcal{A}_\mathcal{T}$ beschreiben lassen. Es besteht sogar die Hoffnung, den Einfluß der Spiegelachsen auf das Spektrum eines generischen (dieselbe Symmetrie aufweisenden)

Operators durch Vergleich der beiden Algebren $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ und $\mathcal{A}_\Sigma$ evtl. mit K-theoretischen Mitteln zu klären. So könnten die zu erwartenden zusätzlichen Projektorklassen bzw. Generatoren der K_0-gruppe von $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$, die nicht schon durch $\mathcal{A}_\Sigma$ bestimmt sind, darüber Aufschluß geben.

7.2 Das Maß auf Ω/G

Ziel dieses Abschnittes ist die Berechnung der Werte des die Spur auf $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ definierenden Maßes auf $C(\Omega,\mathbb{Z})$, was nach (4.22) einen Teil der Werte des durch die Spur induzierten Zustandes bestimmt. Dabei nehmen wir an, daß das Maß dieselbe Symmetrie wie die Kachelung hat, also G-invariant ist. Wie schon gezeigt wurde (7.3), entspricht ein G-invariantes Maß auf Ω genau einem Maß $\tilde{\mu}$ auf Ω/G. Wir zeigen nun, daß sich $\tilde{\mu}$, falls die Substitution B2 erfüllt, vollständig durch die auf $\mathcal{A}_\Sigma$ existierende eindeutige normierte Spur bestimmen läßt, und diese Spur (3.2) erfüllt. Die Berechnung der nach (4.22) schon durch das Maß gegebenen Werte des Zustandes auf $K_0(\mathcal{A}_{\mathcal{T}})$ entspricht dann der Bestimmung von $\mathrm{tr}_* K_0(\mathcal{A}_\Sigma)$. Erfüllt die Substitution B2 nicht, so wird auf diese Weise immerhin noch ein Teil Werte bestimmt.

Wie im 2. Kapitel schon erwähnt, gibt es, falls σ primitiv ist, auf $\mathcal{A}_\Sigma$ eine eindeutige (normierte) Spur und daher ein eindeutiges $\mathcal{R}_\Sigma$-invariantes (normiertes) Maß auf $\mathcal{P}_\Sigma$, welches wir mit μ_Σ bezeichnen. Wir zeigen zunächst, daß diese Spur (3.2) erfüllt und daher für die Shubinformel gebraucht werden kann. Sei T eine reguläre Kachelung, die durch Teilstücke Λ_n approximiert wird, die n-Deflationen repräsentieren, für die also $\Lambda_n \cong M_{\Xi_n(T)}$ mit $(M_{\Xi_n(T)}, x_{\Xi_n(T)}) \subset (T,0)$ ist. Dann ist nämlich

$$\chi_{\Lambda_n} \pi_T(\mathcal{A}_{\mathcal{T}}^G) \chi_{\Lambda_n} = \pi_T(\mathcal{A}_{i_n}^{(n)}), \tag{7.13}$$

wobei wir kürzer $i_n = r(\Xi_n(T))$ geschrieben haben und $\mathcal{A}_{i_n}^{(n)}$ die i_n-te einfache Komponente der n-ten Approximation von $\mathcal{A}_\Sigma$ ist, vgl. (2.12).

Lemma 5 *Für $a \in \mathcal{A}_\Sigma$ gilt*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{|\Lambda_m^{(\bullet)}|} Tr(\chi_{\Lambda_m} \pi_T(a)) = tr(a), \tag{7.14}$$

wobei tr die eindeutige normierte Spur auf $\mathcal{A}_\Sigma$ ist.

Beweis: Sei $\chi_{i_n}^{(n)}$ der Projektor auf $\mathcal{A}_{i_n}^{(n)}$. Da zwei Spuren auf einfachen endlichdimensionalen C^*-Algebren proportional sind, gilt

$$\frac{1}{|\Lambda_n^{(\bullet)}|} \mathrm{Tr}(\chi_{\Lambda_n} \pi_T(a)) = \frac{\mathrm{Tr}(\pi_T(\chi_{i_n}^{(n)} a))}{\mathrm{Tr}(\pi_T(\chi_{i_n}^{(n)}))} = \frac{\mathrm{tr}^{(n)}(\chi_{i_n}^{(n)} a)}{\mathrm{tr}^{(n)}(\chi_{i_n}^{(n)})}, \tag{7.15}$$

und es bleibt zu zeigen, daß die rechte Seite im Limes $n \to \infty$ gegen $\mathrm{tr}(a)$ konvergiert, falls $a \in \mathcal{A}_\Sigma$. Da tr normstetig ist, dürfen wir uns auf $a \in \mathcal{A}_\Sigma^{(n)}$ für ein genügend großes n beschränken. Zerlege wieder $a = \sum_i a_i$ mit $a_i \in \mathcal{A}_i^{(n)}$. Dann ist

$$\mathrm{tr}^{(n+m)}(\chi_{i_{n+m}}^{(n+m)} h^m(a)) = \tau^{1-n-m} \nu_{i_{n+m}} \sum_j \sigma^m_{i_{n+m} j} \mathrm{Tr}(a_j), \tag{7.16}$$

was sich asymptotisch wie $\tau^{1-n}\nu_{i_{n+m}} \sum_j S^{-1}_{i_{n+m}1} S_{1j} \mathrm{Tr}(a_j)$ verhält, vgl. (5.14). Daher gilt

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{tr}^{(m)}(\chi^{(m)}_{i_m} a)}{\mathrm{tr}^{(m)}(\chi^{(m)}_{i_m})} = \lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{tr}^{(n+m)}(\chi^{(n+m)}_{i_{n+m}} \sigma^m(a))}{\mathrm{tr}^{(n+m)}(\chi^{(n+m)}_{i_{n+m}})} = \frac{\sum_j S_{1j}\mathrm{Tr}(a_j)}{\sum_j S_{1j}} = \mathrm{tr}(a), \tag{7.17}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Sei nun μ ein G-invariantes Maß auf Ω und $\tilde{\mu}$ das dadurch definierte auf Ω/G. Da $\tilde{\Xi}$ stetig ist induziert $\tilde{\mu}$ ein Maß $\hat{\mu}$ auf $\mathcal{P}_\Sigma$ durch

$$\hat{\mu}(U_\xi) = \tilde{\mu}(\tilde{\Xi}^{-1}(U_\xi)). \tag{7.18}$$

Wenn μ überdies $\mathcal{R}$-invariant ist, erhalten wir das

Theorem 11 *Sei μ ein G-invariantes $\mathcal{R}$-invariantes Maß auf Ω, der Hülle einer Substitutionskachelung. Dann ist*

$$tr_* K_0(\mathcal{A}_\Sigma) \subset \tilde{\mu}(C(\Omega/G, \mathbb{Z})), \tag{7.19}$$

und, falls die Substitution B2 erfüllt, $\tilde{\Xi}$ also stetig invertierbar ist, sind beide Mengen sogar gleich.

Beweis: Da $\gamma \sim \gamma' \Rightarrow \exists S \sim S' : \Xi(S) = \gamma, \Xi(S') = \gamma'$ ist folgt aus der $\mathcal{R}$-Invarianz von μ die $\mathcal{R}_\Sigma$-Invarianz von $\hat{\mu}$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Spur auf $\mathcal{A}_\Sigma$ ist daher $\hat{\mu} = \mu_\Sigma$. Für AF-Algebren gilt aber $\mathrm{tr}_* K_0(\mathcal{A}_\Sigma) = \mu_\Sigma(C(\mathcal{P}_\Sigma, \mathbb{Z}))$. Ist nun $\tilde{\Xi}$ ein Homöomorphismus, so identifiziert es $(\Omega/G, \tilde{\mu})$ und $(\mathcal{P}_\Sigma, \mu_\Sigma)$ als Maßräume. □

Ist also $\tilde{\Xi}$ stetig invertierbar, so ist nach Theorem 11 ein G-invariantes Maß auf Ω vollständig durch die Werte des Zustandes auf $K_0(\mathcal{A}_\Sigma)$ bestimmt. Das Maß einer Menge $[U_{M,x}]$ aus Ω/G entspricht dem Wert der eindeutigen Spur auf der charakteristischen Funktion von $\tilde{\Xi}([U_{M,x}])$ bzw. dem Wert des Zustandes auf der K_0-Klasse dieser charakteristischen Funktion.

Als konkrete Anwendung des Theorems berechnen wir das G-invariante Maß auf den Hüllen einiger Kachelungen. Für die Penrose-Kachelungen ist dies von A. Connes in [?] durchgeführt worden, allerdings ohne den Nachweis, daß die Topologie der Hülle mit der des durch die Substitution definierten Pfadraumes übereinstimmt.

Die Penrose-Kachelungen

Die Penrose-Kachelungen gehören zu den bekanntesten aperiodischen Kachelung. Penrose erfand sie vor der Entdeckung der Quasikristalle [?], angeregt durch eine Fragestellung aus der mathematischen Logik, nämlich ob es möglich sei, einen endlichen Satz von (dekorierten) Protokacheln samt einer lokalen Anpaßregel („matching conditions") anzugeben, so daß jede lückenlose Auslegung der Ebene mit diesen Protokacheln, die die Anpaßregel erfüllt, notwendig aperiodisch sein muß. Dieses Problem ist 1966 von R. Berger gelöst worden und er hat einen solchen Satz angegeben, der 20426 Protokacheln enthielt. R. Robinson fand einen Satz von sechs Protokacheln [?], eine

Penrose-Kachelung besteht aus nur zwei. Ein Teilstück einer Penrose-Kachelung ist in Abbildung 8.1 zu sehen. Bei diesem geschichtlichen Hintergrund ist es erstaunlich, daß eine dreidimensionale Erweiterung einer Penrose-Kachelung [?, ?, ?] ein idealisiertes Modell zur Beschreibung der räumlichen Struktur von Quasikristallen liefert, die im Röntgenbild Braggreflexe mit 10-zähliger Symmetrie aufweisen. Es gibt eine Menge Veröffentlichungen über die Penrose-Kachelungen, wir verweisen hier auf [?] und, mit näherem Bezug zur Physik der Quasikristalle, die diversen Artikel aus der Sammlung [?].

Eine Penrose-Kachelung ist Fixpunkt unter der in Abbildung 8.2 dargestellten Substitution, die Menge aller Penrose-Kachelungen entspricht dann der Hülle dieser Kachelung. Sie besteht, in der für uns geeignetsten Form, aus nur zwei gleichschenkligen Dreiecken, in denen Winkelvielfache von $\frac{\pi}{5}$ auftauchen. Die Substitution ist lokal invertierbar [?], was Grundlage zur Konstruktion der Abbildung Ξ ist, die für diese Kachelungen von Robinson angegeben worden ist, und sie erfüllt Bedingung B2. Letzteres wird deutlich, wenn man sich vor Augen führt, daß die Ränder der n-Deflationen der Dreiecke schon für $n \geq 2$ lokale Spiegelachsen liefern. Hiermit ist gemeint, daß alle Kacheln innerhalb einer n-Deflation, $n \geq 2$, die den Rand derselben berühren, an diesem Rand gespiegelt auch außerhalb vorkommen; zur Verdeutlichung haben wir unten links in Abbildung 8.1 die Umgebung der 2-Deflation des spitzwinkeligen Dreiecks angegeben. Unter sukzessiver Deflation sind dann auch die näheren Umgebungen der Ecken durch die Deflation eindeutig bestimmt, woraus B2 folgt. Hier führt das insbesondere dazu, daß die Ecken für $n \geq 4$ lokale Zentren fünfzähliger Symmetrie sind. Die Orientierungssymmetrie ist dagegen 10-zählig, auch wenn es keine 10-zähligen Muster gibt; dies ergibt sich aus der Definition, die im Hinblick auf die Beugungsbilder physikalisch sinnvoll erscheint. Neben Rotationen um Winkelvielfache von $\frac{\pi}{5}$ enthält sie auch Spiegelungen an Spiegelachsen längs der Kanten der Kacheln.
Wie sich aus Abbildung 8.2 erkennen läßt, in der auch der Einbettungsgraph der Substitution abgebildet ist, ist die Substitutionsmatrix gegeben durch

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.20}$$

und hat Perron-Frobenius-Eigenwert $\tau = t^2$ mit $t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (das Inverse des goldenen Schnittes) sowie normierten Links-Perron-Frobenius-Eigenvektor $\nu = (t-1, 2-t)$. Damit erhalten wir

$$tr_* K_0(\mathcal{A}_\Sigma) = \mathbb{Z} + t\mathbb{Z} \tag{7.21}$$

und $K_0(\mathcal{A}_\Sigma) = \mathbb{Z}^2$, denn die Substitutionsmatrix ist über $\mathbb{Z}$ invertierbar.

Die Ammann-Beenker-Kachelungen

Als weiteres Beispiel für eine Substitutionskachelung mit Orientierungssymmetrie betrachten wir nun die oktogonalen Kachelungen (Abbildung 8.3), die auch Ammann-Beenker-Kachelungen genannt werden und die den Elementen der Hülle eines Fixpunktes unter der in Abbildung 8.4 dargestellten Substitution entsprechen. Auch eine oktogonale Kachelung beschreibt die räumliche Struktur eines Quasikristalls, allerdings, der

Ordnungssymmetrie der Kachelung entsprechend, mit 8-zähliger Symmetrie im Röntgenbild. Wir verweisen hier ebenfalls zur näheren Beschreibung auf [?], wollen aber insbesondere den Artikel von Socolar [?] hervorheben, weil hier eine vergleichende Analyse der oktogonalen, der dodekagonalen sowie der Penrose-Kachelungen durchgeführt wurde.

Eine oktogonale Kachelung besteht aus zwei Protokacheln, einem 45^0-Rhombus und einem Quadrat. Ihre Orientierungssymmetrie ist 8-zählig, sie enthält allerdings nur Rotationen um $\frac{\pi}{4}$ und keine Spiegelungen, da das punktierte Quadrat nicht in der gespiegelten Form vorkommt. Die lokale Invertierbarkeit der Substitution erkennt man daran, daß ein zur Deflation des Rhombus kongruentes Muster tatsächlich nur als Rhombus-Deflation vorkommt und daher zur Inversion der Substitution zunächst diese Muster invertiert werden können. Die Substitution erfüllt aber B2 nicht. Vernachlässigte man die Punktierung, so wären auch hier die Ränder schon der 1-Deflationen lokale Spiegelachsen und die Ecken der 2-Deflationen lokale Zentren achtzähliger Symmetrie. Durch die Punktierung werden aber insbesondere die lokalen Symmetrien an den Ecken gebrochen, so daß es keine symmetrischen Muster gibt. Man überzeugt sich leicht, daß an jede Ecke einer n-Deflation mindestens ein Rhombus stößt, dessen Punktierung nicht durch die n-Deflation festgelegt ist. Bemerkenswert ist aber auch, daß dieses Problem nur an den Ecken auftritt, während der übrige Rand für $n \geq 2$ durch die n-Deflation bestimmt ist.
Die aus Abbildung 8.4 entnehmbare Substitutionsmatrix

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \tag{7.22}$$

ist über $\mathbb{Z}$ invertierbar. Sie hat Perron-Frobenius-Eigenwert $\tau = t^2$ mit $t = 1 + \sqrt{2}$ und normierten Perron-Frobenius-Eigenvektor $\nu = t^{-1}(t-1, 1) = (3-t, t-2)$. Also ist

$$tr_* K_0(\mathcal{A}_\Sigma) = \mathbb{Z} + t\mathbb{Z} \tag{7.23}$$

und $K_0(\mathcal{A}_\Sigma) = \mathbb{Z}^2$. Wie schon erwähnt, erfüllt die Substitution der Ammann-Beenker-Kachelungen Bedingung B2 nicht, weshalb obige Spurwerte a priori das Maß nicht vollständig bestimmen.

Die Socolar-Kachelungen

Der Vollständigkeit halber betrachten wir noch die dodekagonalen Kachelungen, die auch Socolar-Kachelungen genannt werden (Abbildung 8.5). Sie haben eine 12-zählige Orientierungssymmetrie, die neben Rotationen um $\frac{\pi}{6}$ auch Spiegelungen an den Symmetrieachsen der unpunktierten Kacheln enthält und sind in [?] ausführlich behandelt worden. Die in Abbildung 8.5 angegebene Substitution ist lokal invertierbar, erfüllt aber nicht B2. Ihre Substitutionmatrix ist gegeben durch

$$\sigma = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 12 \\ 4 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \tag{7.24}$$

und hat Perron-Frobenius-Eigenwert $\tau = t^2$ mit $t = 2 + \sqrt{3}$ und zugehörigem Links-Perron-Frobenius-Eigenvektor $\mu = \frac{1}{11}(2t - 5, 8 - t, 8 - t)$. Da $\det(\sigma) = -3$ ist, und $\frac{1}{3}\sigma^3$ keine ganzzahligen Koeffizienten hat, können wir die K_0-Gruppe hier nicht explizit angeben. Für die Werte des normierten Zustandes erhalten wir

$$tr_* K_0(\mathcal{A}_\Sigma) = \mathbb{Z} + \frac{t+3}{11}\mathbb{Z}, \tag{7.25}$$

als einen Teil der Werte des invarianten Maßes auf $C(\Omega, \mathbb{Z})$. tr_* kann hier, da $\det(\sigma) \neq 0$ ist, nicht injektiv sein.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

Es wurde zu gegebener Kachelung eine Algebra definiert, die diese im Sinne der nichtkommutativen Geometrie charakterisiert und der Observablenalgebra eines diskreten quantenmechanischen Systems entspricht, das im aperiodischen Fall über der Kachelung selbst, im periodischen über dem durch periodische Identifikation entstandenen Gittertorus definiert ist. Die K_0-Gruppe dieser Algebra bestimmt das Gap-Labelling entsprechender Schrödinger-Operatoren. Zur Behandlung von selbstähnlichen Kachelungen, die durch eine Substitution definiert werden können, wurde eine Methode ausgearbeitet und angewandt, die für eindimensionale Kachelungen in vielen Fällen neben den schon bekannten Werten des durch die Spur induzierten Zustandes auch eine explizite Berechnung der K_0-Gruppe ermöglicht. Diese Methode basiert auf der Konstruktion einer Abbildung, die die Hülle der Kachelung mit einem durch eine Substitution definierten Pfadraum identifiziert, und damit einer AF-Algebra, deren K_0-Gruppe in vielen Fällen explizit berechenbar ist. Für höherdimensionale Substitutionskachelungen entspricht diese K_0-Gruppe zwar nicht der vollen K_0-Gruppe der zur Kachelung assoziierten Algebra, sie liefert aber die Werte des Spurzustandes auf den Projektorklassen, die einen Repräsentanten in der Algebra der stetigen Funktion über der Hülle haben. Diese Werte sind durch ein Maß auf der Hülle der Kachelung bestimmt. Für kartesische Produkte von eindimensionalen Kachelungen, für die die K_0-Gruppen auf den eindimensionalen Fall zurückgeführt werden können und die Spurwerte vollständig berechenbar sind, liefert das Maß schon alle Werte, obwohl nicht alle Projektorklassen Repräsentanten in der Algebra der stetigen Funktion über der Hülle haben. Dies bestärkt uns in der Vermutung, daß auch für Kachelungen mit Orientierungssymmetrie das Gap-Labelling schon durch ein invariantes Maß auf der Hülle der Kachelung bestimmt ist.

Die beiden Bedingungen, die von der Substitution erfüllt werden müssen, damit die Hülle mit dem Pfadraum identifiziert werden kann, sind formuliert worden. Während die lokale Invertierbarkeit der Substitution unabdingbar ist, läßt sich bei Nichterfülltheit der anderen Bedingung B2 immerhin noch ein Teil der Spurwerte gewinnen.
Auf die Rolle der Orientierungsymmetrie ist eingegangen worden; nur falls es keine globalen Spiegelachsen und Symmetriezentren in der Kachelung gibt, ist der Translationsoperators durch Elemente aus der AF-Algebra in der starken Topologie approximierbar.

Neben der Berechnung der K_0-Gruppen einiger eindimensionaler Kachelungen ist inbesondere ein Beispiel angegeben worden, indem diese Gruppe mehr Generatoren enthält als das Bild des durch die Spur induzierten Zustandes auf ihr. Weiterhin ist das invariante Maß der Hülle einer Penrose-Kachelung vollständig sowie das einer Ammann-Beenker-Kachelung und einer Socolar-Kachelung größtenteils bestimmt worden.

Als direkte Fortsetzung der Untersuchungen dieser Arbeit ergibt sich die Fragestellung, wie das Maß auf der Hülle bestimmt werden kann, wenn die Abbildung $\tilde{\Xi}$ nicht stetig invertierbar ist, weil die Substitution zwar lokal invertierbar ist, nicht aber Bedingung B2 erfüllt. Dies soll hier noch im Ausblick angedeutet werden.

Gegebenenfalls läßt sich das Maß auf der Hülle durch zusätzliche Substitutionen weitgehender oder sogar vollständig bestimmen, denn jede lokal invertierbare Substitution liefert eine Kette von Partitionen inklusive der Maße dieser Mengen. Es läßt sich nämlich zeigen, daß lokal äquivalente Kachelungen mit gleicher Punktierung (als Teilmenge des $\mathbb{R}^n$) homöomorphe Hüllen und daher isomorphe Algebren haben. Jedoch müssen die durch die entsprechenden Substitutionen definierten AF-Algebren keineswegs isomorph sein. Da das Problem der Nichtinvertierbarkeit von $\tilde{\Xi}$ mit den Rändern der Deflationen zusammenhängt, scheint es besonders vielversprechend zu sein, dazu eine duale Substitution auf einer dualen Kachelung zu betrachten.
Die duale Kachelung wird zunächst für eine unpunktierte Kachelung als das Duale im graphentheoretischen Sinne definiert, d.h. die Vertizes werden zu Polygonflächen und die Polygonflächen zu Vertizes, und die Punktierung sodann von der ursprünglichen als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ übernommen. Die resultiernden Hüllen sind dann wieder homöomorph. Außerdem ist zu erwarten, daß auch die duale Kachelung Fixpunkt einer lokal invertierbaren Substitution ist, die man als eine duale Substitution bezeichnen könnte, wobei allerdings die Kompatibilität mit der Punktierung sicherzustellen ist. Diese Substitution muß natürlich denselben Perron-Frobenius-Eigenwert haben wie die ursprüngliche, liefert aber in der Regel einen anderen Graph. Sie definiert ebenfalls eine AF-Algebra, die, falls $\tilde{\Xi}$ nicht umkehrbar stetig ist, i.a. nicht isomorph zu $\mathcal{A}_\Sigma$ ist und zu weitgehender Bestimmung des Maßes genutzt werden kann.

Erste Ergebnisse für die Ammann-Beenker-Kachelungen weisen darauf hin, daß sich das angedeutete Programm so durchführen läßt, und erstens das Maß durch die beiden Substitutionen schon vollständig bestimmt ist und zweitens durch die duale Substitution keine neuen Werte zu (7.23) hinzukommen. Ersteres hängt damit zusammen, daß die Kacheln am Rande einer Deflation der ursprünglichen Kachelung, die nicht durch die Deflation festgelegt sind, nur an den Ecken (d.h. insbesondere auf Vertizes) liegen und daher im Inneren von Deflationen der dualen Kachelung liegen.

Im übrigen entspricht für eindimensionale Substitutionskachelungen die Zweibuchstaben-Substitution die in [?] neben der Buchstaben-Substitution, zur vollständigen Bestimmung des Maßes benutzt wird, gerade einer dualen Substitution.

Zum Abschluß listen wir noch einige Perspektiven und Fragestellungen, die diese Arbeit aufwirft, auf.

1. Die hier entwickelte Methode zur Bestimmung des Maßes auf der Hülle läßt sich auch auf höherdimensionale Kachelungen mit Orientierungssymmetrie anwenden. Es gibt Substitutionen zu der dreidimensionalen Erweiterung der Penrose-Kachelung, die aber wesentlich komplizierter ausfallen als im zweidimensionalen Fall.

2. Hätte man die K_0-Gruppe von $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ bestimmt, so könnte ein Vergleich mit derjenigen von $\mathcal{A}_\Sigma$ Rückschlüsse auf den Einfluß der Spiegelachsen auf das Spektrum und entsprechende Eigenzustände eines Schrödinger-Operators ermöglichen. Wir erwarten allerdings, daß sich dieser Einfluß in der integrierten Zustandsdichte selbst, aufgrund des verschwindenden Verhältnisses der Anzahl jener Kacheln, die eine Spiegelachse berandeN, zur Gesamtanzahl, nicht niederschlägt.

3. Die Putnamsche algebraische Form der periodischen Approximation eröffnet die Möglichkeit, die Spektralprojektoren der Schrödinger-Operatoren der einzelnen periodischen Approximanden einander zuordnen zu können. Dies sollte durch Nutzung einer Einbettungsstruktur möglich sein und ist für eine verläßliche Numerik im Grunde unersetzlich.

4. Analog zur Zuordnung von trivialen oder nichttrivialen Vektorbündeln zu den verschiedenen Elementen der K^0-Gruppe in der kommutativen Theorie sehen wir in der Charakterisierung des Spektrums eines Operators durch Elemente der zyklischen Kohomologie (nichtkommutative Chernklassen) eine fruchtbare Erweiterung des Gap-Labellings.

Danksagungen

Meinem Doktorvater Professor Werner Nahm danke ich für die Aufgabenstellung und die guten Ideen und Hinweise, die zur ihrer Ausführung beigetragen haben. Für fruchtbare Diskussionen bin ich Michael Baake und Martin Schlottmann aus Tübingen zu Dank verbunden, ebenso Le Tu Quoc Thang, der mir die Topologie auf der Hülle einer Kachelung erläutert hat. Die Überlegungen, die zur Anwendung der Künnethformel bei der Berechnung der K-Gruppen in sechsten Kapitel führten, habe ich größtenteils mit A. van Elst durchgeführt und möchte ihm für die Zusammenarbeit danken. Schließlich möchte ich die gute Atmosphäre in der Bonner Arbeitsgruppe von Professor Nahm rühmen und mich besonders bei Andreas Recknagel und Michael Rösgen für ihre Diskussionsbereitschaft herzlich bedanken.

Abbildungsverzeichnis

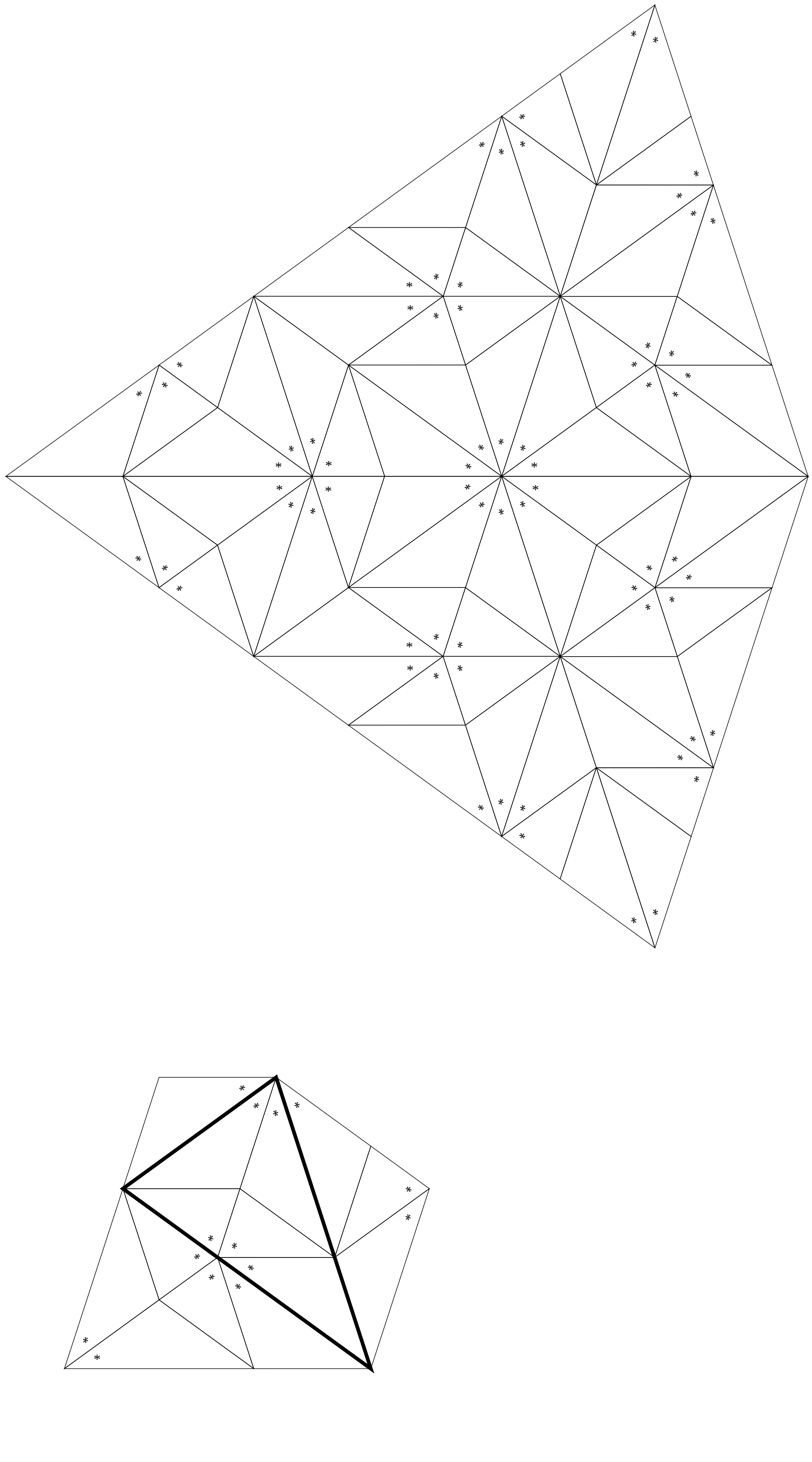

Abbildung 8.1: Teilstück einer Penrose-Kachelung. Unten links ist ein Muster gezeigt, welches schon durch die 2-Deflation des spitzwinkeligen Dreiecks bestimmt ist. Es treten deutlich die lokalen Spiegelachsen an den Rändern der Deflation hervor.

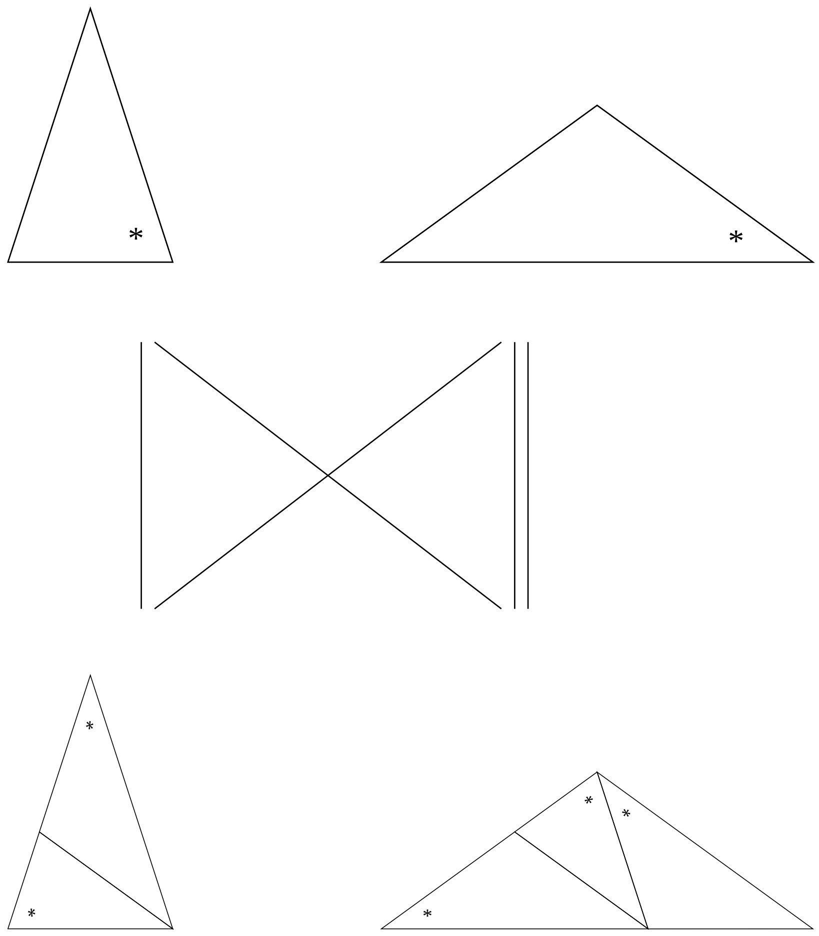

Abbildung 8.2: Substitution der Penrose-Kachelungen und der sich daraus ergebende Einbettungsgraph. Σ erhält man aus diesem Graph durch Identifikation übereinanderliegender Vertizes.

Abbildung 8.3: Teilstück einer Ammann-Beenker-Kachelung (aus [?]). Die Kacheln sind hier nicht punktiert, sondern durch Pfeile markiert. Die Punktierung ist aus dieser Markierung lokal ableitbar, wobei zu beachten ist, daß durch ihre symmetriebrechende Wirkung das Quadrat bei uns keine Spiegelsymmetrie besitzt.

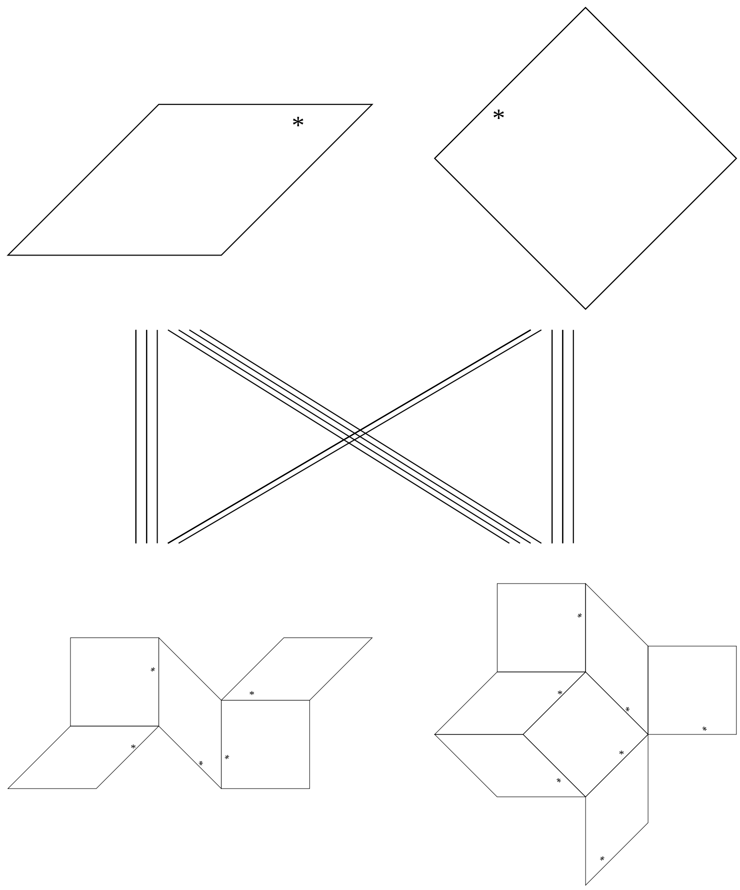

Abbildung 8.4: Substitution der Ammann-Beenker-Kachelungen und der sich daraus ergebende Einbettungsgraph.

Abbildung 8.5: Teilstück einer Socolar-Kachelung. Diese Abbildung ist [?] entnommen und weist anstelle einer Punktierung eine Markierung durch Pfeile auf. Die Punktierung ist aus dieser Markierung lokal ableitbar.

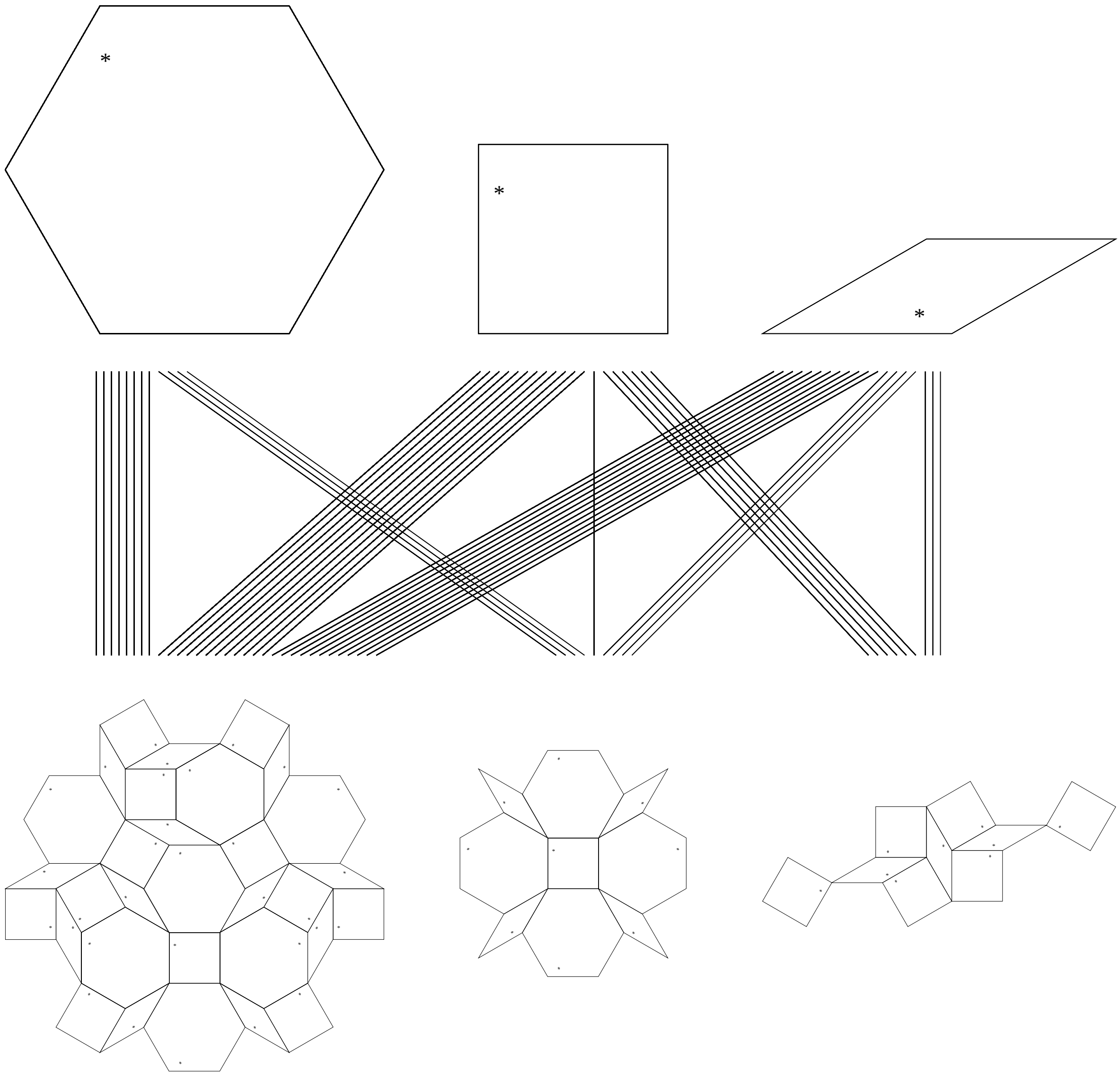

Abbildung 8.6: Substitution der Socolar-Kachelungen und der sich daraus ergebende Einbettungsgraph.