Ein K-theoretischer Zugang zu den Fusionsregeln konformer Quantenfeldtheorien

Dissertation von Andreas Recknagel

Bonn, August 1993

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Auch sechzig Jahre nach den ersten Arbeiten von Heisenberg, Dirac und Pauli zur Quantenfeldtheorie kann dieses Gebiet der theoretischen Physik je nach Standpunkt als weitgehend oder in Teilen unverstanden bezeichnet werden. Zwar verzeichnen die Lagrange-Modelle der Elementarteilchenphysik große Erfolge bei der Vorhersage von experimentellen Ergebnisse, doch dazu müssen in den Rechnungen immer wieder ad-hoc-Rezepte benutzt werden, was ebenso auf konzeptuelle Schwächen des Lagrange'schen Zugangs hinweist wie die offenbar unüberwindlichen Schwierigkeiten beim Versuch, Quantengravitation in diesem Rahmen zu beschreiben.
Gewissermaßen am anderen Ende der Skala steht der Ansatz der algebraischen Quantenfeldtheorie, entwickelt in den fünfziger und sechziger Jahren von Haag, Kastler und Borchers. Dieser Zugang zeichnet sich durch mathematische Rigorosität und große konzeptuelle Geschlossenheit aus, fast ebenso sehr aber durch Schwierigkeiten bei der Behandlung konkreter physikalischer Probleme.

Anfang der achtziger Jahre eröffneten sich neue Möglichkeiten mit der Entdeckung konformer Quantenfeldtheorien in zwei Dimensionen durch Belavin, Polyakov und Zamolodchikov [*BPZ*]. Wenn auch deren physikalisches Anwendungsfeld naturgemäß nicht bei "realistischen" Elementarteilchenmodellen, sondern eher in der Stringtheorie sowie bei kritischen Phänomenen der Festkörperphysik zu suchen ist, vereinen sie doch konkrete Aussagekraft mit Exaktheit und bilden darüberhinaus ein ideales Terrain, verschiedenste mathematische Methoden zu erproben. Die beim Studium von CFT erzielten Fortschritte sind enorm, so groß, daß ernsthaft an einer vollständigen Klassifikation dieser Modelle gearbeitet werden kann, und so groß, daß man erwarten darf, auch fürs Verständnis nicht konform invarianter QFT Wesentliches lernen zu können sowie neuartige, allgemein einsetzbare Techniken zu entdecken.

Die vorliegende Arbeit versteht sich als ein kleiner Beitrag zu diesem Programm, neue Konzepte für die QFT zu entwickeln, und zwar nicht-Lagrange'sche. Dazu sollen insbesondere Ideen aus der mathematischen Theorie der Operator-Algebren herangezogen werden, einem Gebiet, dessen Verbindung zur Quantenphysik geradezu klassisch ist und von den Arbeiten von Neumanns über die der Haag'schen Schule [*Ha*] bis zu Connes' Projekt "nicht-kommutative Geometrie" [*Co*] reicht.
Erstaunlicherweise relativ unbeachtet geblieben ist in der theoretischen Physik bislang die Vielzahl von Invarianten und Funktoren, die bei der Untersuchung von C^*-Algebren eingesetzt werden – eingesetzt werden müssen, da dieses Gebiet vor ähnlich komplizierte technische Probleme stellt wie die QFT. Bei den großen Erfolgen, die in der Mathematik durch die Verwendung von zwar vereinfachenden, die Struktur aber eben teilweise bewahrenden Funktoren erzielt werden können, wäre es sehr erstaunlich, wenn nicht wenigstens in einigen dieser Invarianten auch wichtige physikalische Information über die mit den Operator-Algebren verbundene QFT destilliert bliebe. Tatsächlich tauchen einige "invariante Objekte" von Operator-Algebren in physikalischen Untersuchungen auf – etwa der Jones-Index [*Lo*], die modularen Operatoren von Tomita-Takesaki und in ganz speziellen Anwendungen sogar die K_0-Gruppe [Be, Ev, EG] –, jedoch eher "verstreut", ein systematischer Einsatz gar der funktoriellen Eigenschaften operator-algebraischer Invarianten steht noch aus.

Eine Hauptschwierigkeit bei der Umsetzung eines derartigen Programms ist dabei versteckt schon angeklungen: Welche C^*-Algebra ist zu welcher QFT zu assoziieren? Die nächsten Fragen werden danach schon leichter zu lösen sein: Welche Invariante ist dazu geeignet, welche physikalische Struktur abzubilden?

Da es dem Autor an weiterreichenden Kenntnissen gebricht, kommen als zu behandelnde QFT nur konform invariante in Frage. Hier sind genügend viele Techniken entwickelt, um den ersten Teil der Aufgabe zumindest in Form einer einigermaßen gut fundierten Hypothese beantworten zu können: Die bestimmte Klasse von C^*-Algebren, die charakteristisch im Umfeld von CFT auftauchen, ist die der AF-Algebren. Diese Vorstellung läßt sich von verschiedenen Seiten her begründen, eine präzise und bewiesene Formulierung des allgemeinen Zusammenhangs von CFT und AF-Algebren muß aber leider zukünftiger Forschung überlassen bleiben. Vorausgesetzt, dieses Problem wird noch gelöst, darf man hoffen, auf solche Weise charakteristische Daten eines konformen Modells in Form von Diagrammen kodieren zu können und damit vielleicht einmal zu einer Klassifikation rationaler CFT ganz ähnlich der der einfachen Lie-Algebren durch Dynkin-Diagramme zu gelangen.

So wie in einem Dynkin-Diagramm manche konkrete Information über die zugehörige Lie-Algebra nur sehr indirekt enthalten ist, wird auch die Rekonstruktion vieler CFT-Daten aus Bratteli-Diagrammen recht umständlich sein. Das trifft aber sicher nicht auf alle Eigenschaften einer CFT zu: Hier wirken sich eben die operator-algebraischen Invarianten aus. Konzentriert man sich auf AF-Algebren, so kommt nur einer der vielen Funktoren wirklich in Betracht, nämlich die K_0-Gruppe der C^*-Algebra. Diese Invariante ist, jedenfalls nach geringfügigem "Aufpolieren", immerhin schon fein genug, um AF-Algebren bis auf Isomorphie zu klassifizieren. Allerdings soll unser Hauptaugenmerk nicht auf dieser Eigenschaft liegen, sondern eben auf der Funktorialität von K_0. Um die voll ausnützen zu können, greift diese Arbeit auf Konzepte zurück, die in der Algebraischen QFT entwickelt worden sind, vor allem auf die Idee, Superauswahl-Sektoren einer QFT durch Endomorphismen einer Observablen-Algebra zu beschreiben.
"Projiziert" man nun diese Begriffe funktoriell auf das Niveau der K_0-Gruppe, geht viel von ihrem Informationsgehalt verloren, nicht aber der über die Fusionsregeln der QFT, sie können in der K_0-Gruppe wiedergefunden werden. Besser gesagt: Sie "könnten", wenn nur die Algebra-Endomorphismen von Doplicher, Haag und Roberts bekannt wären, aber deren Konstruktion gelingt nur in ganz wenigen schlichten Fällen. Man geht also den umgekehrten Weg: Zu einer gegebenen AF-Algebra $\mathcal{A}$ berechne die K_0-Gruppe und dort die Fusionsregeln der CFT, die "zu $\mathcal{A}$ gehört", auch ohne Kenntnis der DHR-Endomorphismen.
Es stellt sich heraus, daß der große Nachteil des Algebraischen Zugangs gegenüber den "konventionellen" Methoden, nämlich wenig konkrete Ergebnisse produzieren zu können, mit Hilfe der K_0-Invariante teilweise ausgeglichen wird: In einer Reihe von Beispielen können so in äußerst simpler Manier $\mathcal{W}$-Algebra-Fusionsregeln abgeleitet werden, die sonst nur mit großem Aufwand oder noch gar nicht zu berechnen waren.

Dieser Erfolg und die Neuheit des Konzeptes müssen im Moment als Rechtfertigung genügen, diesen neuen mathematischen Ansatz hier niederzulegen, obwohl noch Lücken in der Beweisführung existieren. Von physikalischem Interesse dürften darüberhinaus einige Aspekte der neuen Pfadraum-Realisierungen von CFT-Höchstgewichts-Moduln sein. Nach ersten Ergebnissen in [*Rö*] darf man hoffen, so einen großen Schritt in Richtung einer Darstellung der gesamten Virasoro-Algebra "auf dem Gitter" machen zu können, ein Problem, an dem seit langem im wesentlichen vergeblich gearbeitet wird. Wegen des Zusammenhangs der konformen Symmetrie mit Skalenhypothese und Kontinuums-Limes läßt ein Weiterverfolgen des AF-Bildes von CFT sowie ein genaueres Studium auch der Quasiteilchen-Strukturen in konformen Charakterfunktionen tiefere Einsichten in das Verhältnis von konformen zu integrablen QFT und zu statistischen Modellen erwarten.
Eine Operation der konformen Gruppe auf der AF-Algebra sollte es zudem ermöglichen, eine lokale Netz-Struktur im Sinne der Algebraischen QFT zu rekonstruieren, so daß für eine vollständige Beschreibung von CFT durch AF-Algebren im wesentlichen nur noch die Angabe der (lokalisierten) Algebra-Endo-

morphismen fehlt, die den Superauswahl-Sektoren entsprechen. Wegen der speziellen Form der K_0-Gruppen-Endomorphismen, die in dieser Arbeit konstruiert werden, scheint ein "Liften" derselben zu Algebra-Morphismen möglich zu sein, die in dieser Form zwar noch nicht den DHR-Axiomen genügen, aber vielleicht schon von rein mathmatischem Interesse sind, nämlich bei der Konstruktion von Einbettungen von Subfaktoren mit Jones-Index größer als 4.

Da alles in allem dieses "Experiment" mit dem Einsatz von operator-algebraischen Funktoren in der QFT einigermaßen positiv verlaufen ist, darf man vielleicht auch vor der abschließenden Klärung der offengebliebenen Fragen schon daran denken, daß sich andere quantenfeldtheoretische Probleme mit ähnlichen, eventuell etwas elaborierteren Methoden angehen lassen.

Der folgende Text ist auf breitere Verständlichkeit angelegt, und da "Werkzeuge" aus recht verschiedenen Gebieten herangezogen werden, nehmen die einführenden Teile der Arbeit einen ziemlich großen Raum ein. Im ersten Kapitel habe ich versucht, Begriffe aus der CFT zusammenzustellen, die vor allem in Kapitel IV bei der Konstruktion von Pfadraum-Darstellungen und im Anhang benutzt werden, aber auch in Abschnitt V.3 zur Interpretation der Ergebnisse der neuen K-theoretischen Methode unerläßlich sind. Das zweite Kapitel will einen groben Einblick in die Ideen der Algebraischen QFT geben, wobei es auf die teils ziemlich komplizierten Einzelheiten gar nicht so sehr ankommen soll, weil später ohnehin ein eher freier Gebrauch von den grundlegenden Konzepten dieser Theorie gemacht wird. Einige mathematische Begriffe aus dem Gebiet der C^*-Algebren werden im dritten Kapitel nachgereicht und andere wie AF-Algebren und natürlich die K_0-Gruppe, die für das Weitere wesentlich sind, ausführlich erläutert.

Die eigentlich neuen Ergebnisse sind ab Kapitel IV zu finden. Dort werden die bisher existierenden Argumente für die Hypothese zusammengetragen, daß AF-Algebren eine besondere Rolle im Zusammenhang mit CFT spielen. Finden lassen sich derartige Hinweise im Gebiet von zwei-dimensionalen Gittermodellen aus der statistischen Physik sowie neueren diskreten Approximationen von CFT, den sog. Gitter-WZW-Modellen, die beide per constructionem mit Limites endlich-dimensionaler Systeme zu tun haben und in natürlicher Weise zu AF-Algebren führen. Zum anderen spielen Pfadalgebren jedoch auch in konformen QFT selbst eine Rolle, wo sie einerseits im DHR-Zugang auftreten (hier sogar ganz allgemein im Zusammenhang mit niedrig-dimensionalen QFT), andererseits können für eine Reihe von konkreten Modellen L_0-graduierte Isomorphismen von den Höchstgewichts-Darstellungen zu Pfadräumen angegeben werden, wie in Abschnitt IV.4 ausführlich beschrieben wird. Auf die eventuell zugrundeliegenden physikalische Strukturen, vor allem die Quasiteilchen-Struktur der behandelten Charaktere, wird kurz eingegangen; auch als Ergänzung dazu kann der Anhang verstanden werden, der sich mit der Herleitung von Dilogarithmus-Identitäten für die zentrale Ladung aus konformen Charakterfunktionen befaßt.

Bei einem Teil dieser Pfadraum-Realisierungen tauchen überraschenderweise die Fusionsgraphen der zugrundeliegenden CFT auf, ein Phänomen, das höchstens im Zusammenhang mit den Überlegungen des fünften Kapitels naheliegend erscheinen kann. In diesem Teil der Arbeit wird aus Ingredienzen des DHR-Zugangs zur QFT, der AF-Algebra-Hypothese und den Eigenschaften des K_0-Funktors das Verfahren entwickelt, mit dem CFT-Fusionsregeln aus der K_0-Gruppe einer AF-Algebra extrahiert werden können. Um die Methode leicht handhabbar zu machen, werden in Abschnitt V.2 einige zusätzliche Kriterien aufgestellt, die sich im wesentlichen aus einfachen Analogiebetrachtungen zwischen dem Aufbau der Algebraischen QFT und den Beispielen aus Kapitel IV ergeben. Das Verfahren ist danach einfach genug, um im na"chsten Abschnitt auf die nach IV.4 zu bestimmten CFT assoziierten Pfadalgebren angewandt zu werden, und erweist sich dabei zum Teil als effektiver als die üblichen Verfahren zur Bestimmung der Fusionsregeln. Insbesondere sind die tatsächlich auszuführenden Rechnungen so simpel, daß man sagen kann, der etwas große Aufwand beim Erarbeiten dieser K-theoretischen Methode lohnt sich am Ende doch.

Im sechsten Kapitel sollen nur noch einmal die wesentlichen Schritte der Arbeit resümiert werden, mit einem besonderen Gewicht auf noch zu schließenden Beweislücken und auch auf weiteren Möglichkeiten, die der hier beschrittene Weg erschließt.

Was an dieser Arbeit gelungen ist, hätte kaum gelingen können ohne die vielfältige Unterstützung, die mit zuteil wurde:

Allen voran möchte ich meinem Doktorvater und Meister Prof. Werner Nahm danken. Seine vielen inspirierenden Ideen, seine Hilfe bei allen Problemen mit oder am Rande der Promotion und seine fachliche wie menschliche Aufgeschlossenheit waren schlicht unschätzbar.

Sehr viel profitiert habe ich auch von der Bonner Arbeitsgruppe mit Ralph Blumenhagen, Wolfgang Eholzer, Michael Flohr, Andreas Honecker, Ralf Hübel, Ralf Kaufmann, Johannes Kellendonk, Albrecht Kliem, Steffen Mallwitz, Michael Rösgen, Sonia Stanciu, Michael Terhoeven, Raimund Varnhagen und Hessamaddin Arfaei, José Figueroa-O'Farrill, László Fehér, Nourredine Mohammedi. Nicht nur hat die Teamarbeit viele wissenschaftliche Aufgaben enorm erleichtert – wobei im Zusammenhang mit dieser Dissertation meine Kollaboration mit Johannes Kellendonk und Michael Rösgen über K-Theorie und Pfaddarstellungen und die mit Michael Terhoeven über Dilogarithmus-Identitäten hervorzuheben sind –, ebenso wichtig war das gute persönliche Klima in der Gruppe.

Eine große Hilfe waren mir Rat und Ermutigung durch die Herren Profs. R. Flume, G. von Gehlen und V. Rittenberg aus Bonn, D. Buchholz und K. Fredenhagen aus Hamburg sowie die Unterstützung von Prof. J. Fröhlich von der ETH Zürich.

Finanziell gefördert wurde ich während meiner Promotion vom Max-Planck-Institut für Mathematik und vom Graduiertenkolleg am Mathematischen Institut der Universität Bonn.

Herzlich bedanken für "nichtwissenschaftlichen Beistand" aller Art möchte ich mich bei meinem Freund Christian Barheine.

Der größte Dank schließlich gilt meinen lieben Eltern, für alles.

I. Grundbegriffe der Konformen Quantenfeldtheorie

Konforme Quantenfeldtheorien tragen ihren Namen zu Recht: Es ist die Kovarianz unter der *konformen Gruppe*, bestehend aus den Koordinatentransformationen $x \mapsto x'$ der zugrundeliegenden $(d+1)$-dimensionalen Raumzeit, die deren Metrik nur um einen positiven Faktor ändern

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x) \ , \tag{1.1}$$

die CFT unter allen QFT auszeichnet. Ist $g_{\mu\nu}$ Minkowski'sch, so enthält die konforme Gruppe gerade die Transformationen, die die kausale Struktur (Einteilung in zeit-, raum- und lichtartige Vektoren) bewahren, darunter natürlich auch die Poincaré-Gruppe mit $\Omega(x) = 1$.

Für $d > 1$ ist die konforme Gruppe endlich-dimensional, so daß sich konforme QFT nicht prinzipiell von nur relativistischen unterscheiden. In zwei Raumzeit-Dimensionen dagegen sind alle holomorphen oder antiholomorphen Koordinatentransformationen zugelassen, genauer: Gl. (1.1) ist äquivalent zu den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

$$\partial_1 \epsilon_1 = \partial_2 \epsilon_2 \, , \quad \partial_1 \epsilon_2 = -\partial_2 \epsilon_1$$

an die Komponenten einer infinitesimalen Veränderung $x' = x + \epsilon$; man führt komplexe Argumente $z = x_1 + i x_2$, $\bar{z} = x_1 - i x_2$ ein (für $\epsilon, \bar{\epsilon}$ analog) und sieht sofort, daß tatsächlich alle Paare von Transformationen

$$z \mapsto f(z) \, , \quad \bar{z} \mapsto \bar{f}(\bar{z}) \tag{1.2}$$

mit holomorphen bzw. antiholomorphen Funktionen $f, \bar{f}$ Gl. (1.1) respektieren.
Die zugehörige unendlich-dimensionale Lie-Algebra heißt *Witt-Algebra* und besitzt die Generatoren

$$l_n = z^{n+1} \partial_z \tag{1.3}$$

(für den sog. *links-chiralen Anteil*), die auch als die der Lie-Algebra von $\mathrm{Diff}(S^1)$ aufgefaßt werden können – diese Kompaktifizierung des Raumes (der Lichtkegel) fällt übrigens nicht vom Himmel, sondern ist in der CFT unumgänglich, für genauere Erläuterungen s. z.B. [*N3*]. (Wenn man will, kann man auch von einer Raumzeit $\mathbb{R} \times S^1$ mit kompaktifiziertem Raum ausgehen, um z.B. Infrarotdivergenzen von vornherein auszuschalten; die Lichtkegelkoordinaten sind dann nat"urlich ebenfalls periodisch.)

In der QFT haben nur Strahlen im Hilbertraum physikalische Bedeutung, daher müssen stets auch projektive Darstellungen der Kovarianz-Gruppe betrachtet werden, oder alternativ Darstellungen der *zentralen Erweiterung* $\widetilde{\mathrm{Diff}(S^1)} \times \widetilde{\mathrm{Diff}(S^1)}$; die zugehörige Lie-Algebra ist die direkte Summe zweier Kopien der *Virasoro-Algebra* $\mathit{Vir} \times \overline{\mathit{Vir}}$, erzeugt von Generatoren L_n, $n \in \mathbb{Z}$, mit Vertauschungsrelationen

$$[L_m, L_n] = (n-m) L_{m+n} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0} \tag{1.4}$$

(ganz genauso für den rechts-chiralen Anteil $\langle \bar{L}_n \rangle$, der mit allen L_n kommutiert), in denen ein zentrales Element c vorkommt: $[c, L_n] = 0$ für alle n. Die Generatoren L_0, $L_{\pm 1}$ spannen die Lie-Algebra der sog. kleinen konformen Gruppe SU(1,1) auf, die zu den Möbius-Transformationen auf $\bar{\mathbb{C}}$ isomorph ist.

Die L_n können außerdem als Moden eines Quantenfeldes, nämlich des *Energie-Impuls-Tensors* aufgefaßt werden, der ja der zu allgemeinen Koordinaten-Transformationen gehörige Noether-Strom ist:

$$T(z, \bar{z}) = T(z) + \bar{T}(\bar{z})$$

mit

$$T(z) = \sum_n z^{n-2} L_n \ , \quad \bar{T}(\bar{z}) = \sum_n z^{n-2} \bar{L}_n \ . \tag{1.5}$$

Damit läßt sich weiter zeigen, daß $L_0 + \bar{L}_0$ der Energie-Operator der Theorie und $L_0 - \bar{L}_0$ der Impuls ist. Meist werden die chiralen Hälften des Modells gesondert untersucht, L_0 heißt dementsprechend "konformer Hamiltonian".

In der CFT geht man normalerweise nicht von einer "zu quantisierenden" klassischen Lagrange-Dichte aus, die dann natürlich invariant unter konformen Transformationen sein müßte, sondern implementiert die konforme Symmetrie direkt auf den Objekten der Quantentheorie: Sowohl der Hilbertraum als auch der Raum der Felder sind Darstellungs-Moduln der Virasoro-Algebra. Da der Energie-Operator L_0 nach unten beschränkt sein soll, kommen als (chirale) Darstellungsräume nur *Höchstgewichts-Darstellungen* in Frage (eigentlich: "Tiefstgewichts-Darstellungen", aber die vorige Bezeichnung hat sich eingebürgert), das sind Vektorräume, in denen es einen Höchstgewichts-Vektor $|h\rangle$ mit

$$\begin{aligned} L_0|h\rangle &= h|h\rangle \\ L_n|h\rangle &= 0 \quad \text{für } n < 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

gibt ($h \in \mathbb{C}$). Der von allen Vektoren

$$L_{m_1} \cdots L_{m_n}|h\rangle \tag{1.7}$$

mit $m_1 \geq \ldots \geq m_n > 0$, der sog. Poincaré-Birkhoff-Witt-Basis, aufgespannte Raum wird *Verma-Modul* $V_{h,c}$ genannt (das zentrale Element c aus (1.4) ist hier einfach als komplexe Zahl dargestellt: *zentrale Ladung*).

$V_{h,c}$ ist in dem Sinne die "größte" Höchstgewichts-Darstellung zum Paar (c, h), als zu jeder anderen irreduziblen Höchstgewichts-Darstellung $M_{h,c}$ eine Surjektion

$$V_{h,c} \longrightarrow M_{h,c} \longrightarrow 0$$

existiert. In $M_{h,c}$ gibt es i.a. *singuläre Vektoren* $|s\rangle$, die wie $|h\rangle$ ebenfalls von allen L_n mit $n < 0$ annihiliert werden, aber auf einem höheren Energieniveau liegen: $L_0|s\rangle = (h+N)|s\rangle$, $N > 0$. Der Verma-Modul über $|s\rangle$ ist ein invarianter Unterraum, muß also herausgeteilt werden, wenn $M_{h,c}$ irreduzibel werden soll. Anders ausgedrückt: In $M_{h,c}$ sind manche der Vektoren (1.7) linear abhängig, in die Relationen gehen h und die zentrale Ladung c ein.

Die irreduziblen Darstellungen der Virasoro-Algebra sind schon von Feigin und Fuks vollständig klassifiziert worden [*FF*], unter den besonders interessanten (denen mit besonders vielen "Lücken" der gerade beschriebenen Art) befinden sich die Darstellungen, die zu den *minimalen Modelle* gehören; deren zentrale Ladungen sind von der Form

$$c(p, p') = 1 - 6\frac{(p-p')^2}{pp'} \ , \tag{1.8}$$

$p, p' \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ teilerfremd. Etwas mehr zu diesen CFT weiter unten.

Es bleibt festzuhalten, daß der Hilbertraum $\mathcal{H}$ einer CFT stets die Gestalt

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i,\bar{\imath}} \mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_{\bar{\imath}} \tag{1.9}$$

hat, wobei $\mathcal{H}_i$ ($\mathcal{H}_{\bar{\imath}}$) irreduzible Höchstgewichts-Darstellungen von *Vir* ($\overline{Vir}$) mit Höchstgewichten h_i ($h_{\bar{\imath}}$) sind, $i, \bar{\imath}$ aus bestimmten Indexmengen. Darunter befindet sich stets eine Vakuumdarstellung $\mathcal{H}_0$ mit einem unter konformen Transformationen invarianten Höchstgewichtsvektor $|0\rangle$. Das Tensorprodukt in (1.9) rührt natürlich daher, daß die Symmetrie-Algebra in zwei unabhängige Kopien der Virasoro-Algebra zerfällt.

In konform kovarianten QFT trägt auch der Raum aller lokalen Feldoperatoren eine Darstellung der Virasoro-Algebra (oder einer größeren chiralen Symmetrie-Algebra, s.u.), es existiert sogar ein Isomorphismus zum Hilbertraum der Theorie, nämlich (vgl. etwa [Gin, N])

$$|v_\phi\rangle = \lim_{z \to 0} \phi(z)|0\rangle \ . \tag{1.10}$$

Der gesamte Feldraum spaltet daher analog zu $\mathcal{H}$ in eine Summe von (Tensorprodukten von) Höchstgewichts-Darstellungen auf, den sog. *konformen Familien* $[\phi_i]$, die über einem *primären Feld* $\phi_i(z,\bar{z})$ aufgebaut sind. Primäre Felder korrespondieren mittels (1.10) zu Höchstgewichtsvektoren, können aber auch direkt als Feldoperatoren charakterisiert werden, und zwar über ihr Verhalten unter konformen Transformationen: Sie skalieren bei Koordinatenwechseln (1.2) wie

$$\phi_i(z,\bar{z}) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{h_i} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{h}_i} \phi_i(f(z), \bar{f}(\bar{z}))\,, \tag{1.11}$$

wodurch die (links- und rechtschiralen) *konformen Dimensionen* h_i und $\bar{h}_i \in \mathbb{C}$ eingeführt sind. Für lokale Felder muß der Spin $h_i - \bar{h}_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ sein. Die anderen Felder in der Darstellung $[\phi_i]$ – Linearkombinationen aus Ableitungen und sog. Normalgeordneten Produkten von ϕ_i und dem Energie-Impuls-Tensor, siehe dazu weiter unten – verhalten sich bei Umparametrisierungen (1.2) komplizierter.
Da konforme Transformationen aber von dem Quantenfeld $T(z,\bar{z})$ erzeugt werden, kann man noch eine ganz andere Definition von primären Feldern geben, für die aber zunächst das in der CFT zweite entscheidende Konzept neben der konformen Invarianz einzuführen ist, nämlich die *Operatorprodukt-Entwicklung* (OPE) zweier Quantenfelder.

Allgemein ist man in der QFT besonders an der Berechnung von *n-Punkt-Funktionen* $\langle\phi_1(x_1)\cdots\phi_n(x_n)\rangle$ interessiert, Vakuumerwartungswerten von Produkten aus n Feldoperatoren. Kennt man alle möglichen n-Punkt-Funktionen einer Theorie, ist diese gelöst, da nach allgemeinen Theoremen daraus alle anderen wichtigen Größen rekonstruiert werden können. Typisch für QFT ist, daß diese Funktionen singulär werden, wo zwei der Argumente x_i zusammenfallen. Einer Idee von K. Wilson zufolge kann diese Singularität nun durch die OPE ausgedrückt werden: Innerhalb einer Korrelations-Funktion gilt demnach im Limes $x_1 \longrightarrow x_2$ (für $|x_1| > |x_2|$)

$$\phi_i(x_1)\phi_j(x_2) = \sum_k C_{ij}^k(x_1 - x_2)\phi_k(x_2)\ , \tag{1.12}$$

wobei die ϕ_k weitere Operatoren der QFT sind und die ganze Divergenz in den *Strukturfunktionen* $C_{ij}^k(x_1 - x_2)$ steckt. Naheliegend, aber doch sehr restriktiv ist es zu fordern, daß die OPE *assoziativ* ist, d.h.

$$\sum_k C_{ij}^k(x_1 - x_2)C_{kl}^m(x_2 - x_3) = \sum_k C_{ik}^m(x_1 - x_3)C_{jl}^k(x_2 - x_3)\ . \tag{1.13}$$

(1.13) ist zur “crossing symmetry” der 4-Punkt-Funktionen äquivalent [BPZ]. Kann man diesen sog. “bootstrap” in der Weise lösen, daß alle Strukturfunktionen auf endlich viele bekannte zurückgeführt werden, ist die ganze QFT “integriert”.

Genau dies ist für viele CFT möglich. Zunächst zurück zu den primären Feldern $\phi_i(z,\bar{z})$: (1.11) ist, da der Energie-Impuls-Tensor konforme Transformationen generiert, äquivalent $[BPZ]$ zu der besonders einfachen OPE

$$T(z)\phi_i(w,\bar{w}) = \frac{h_i}{(z-w)^2}\phi_i(w,\bar{w}) + \frac{\partial_w \phi(w,\bar{w})}{(z-w)} + reg \ , \tag{1.14}$$

wobei reg für Terme steht, die im Limes $z \to w$ keine Singularität haben. Analoges gilt für die OPE von ϕ_i mit dem rechts-chiralen Anteil $\bar{T}(\bar{z})$. Durch Cauchy-Integration kann man aus (1.14) die Kommutatoren

$$[L_n, \phi_i(w,\bar{w})] = w^{-n}(w\frac{\partial}{\partial w} - (n-1)h_i)\phi_i(w,\bar{w}) \tag{1.15}$$

und nach Einführung einer Modenentwicklung $\phi_i(z) = \sum_n z^{n-h_i}\phi_{i,n}$ weiter

$$[L_n, \phi_{i,m}] = (m - (h_i - 1)n)\phi_{i,n+m} \tag{1.16}$$

ableiten.
Man beachte, daß der Energie-Impuls-Tensor selbst nicht primär ist, sondern die OPE

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{(z-w)} + reg \tag{1.17}$$

hat, was nach doppelter Cauchy-Integration zur Virasoro-Algebra zurückführt. $T(z)$ gehört als sog. sekundäres Feld zur konformen Familie des (trivialerweise primären) Einsoperators, ist aber immerhin noch *quasi-primär*, d.h. (1.15) gilt wenigstens für $n = 0, \pm 1$. Aus der Kovarianz unter Skalentransformationen folgt sofort, daß die Strukturfunktionen in der OPE zweier quasi-primärer Felder von der Form $C_{ij}^k(z-w) \sim (z-w)^{h_k - h_i - h_j}$ sein müssen.
Wegen der OPE- bzw. Kommutatorrelationen (1.14,15) lassen sich n-Punkt-Funktionen beliebiger Felder auf die der zugehörigen primären zurückführen, darüberhinaus überträgt sich jegliche Relation zwischen den Virasoro-Moden in einer irreduziblen Darstellung $M_{h,c}$ in Differential-Gleichungen an die Korrelations-Funktionen: *konforme Ward-Identitäten*. Diese reichen oft dazu aus $[BPZ, DF]$, alle Korrelatoren zu bestimmen, insbesondere aber kann so festgestellt werden, welche konforme Familien $[\phi_k]$ in der OPE zweier (primärer) Felder ϕ_i, ϕ_j überhaupt vorkommen. Diese Information wird in den sog. *Fusionsregeln* abstrahiert:

$$\phi_i \times \phi_j = \sum_k N_{ij}^k \ \phi_k \tag{1.18}$$

ϕ_i steht hier nurmehr symbolisch für die Höchstgewichts-Darstellung mit Gewicht h_i, die N_{ij}^k sind positive ganze Zahlen: $N_{ij}^k > 0$ besagt, daß in der OPE $C_{ij}^k(z-w) \neq 0$ ist – zur Bedeutung von Fusionskoeffizienten ≥ 2 siehe $[Fu]$ oder die konzeptionellere Definition von Fusion im Rahmen der Algebraischen QFT, s. Kapitel II.
Die N_{ij}^k können zu *Fusionsmatrizen* $N_i = (N_{ij}^k)_{jk}$ zusammengefaßt werden, die wegen der Assoziativität der OPE miteinander vertauschen:

$$N_i N_j = N_j N_i \tag{1.19}$$

Zur Vakuumdarstellung $[\phi_0]$, aufgebaut über dem Einsoperator, gehört als Fusionsmatrix die Einheitsmatrix $N_{0j}^k = \delta_{j,k}$. Zudem existiert in einer CFT zu jedem primären Feld ϕ_i ein eindeutiges *konjugiertes* $\phi_{\bar{\imath}}$ mit der Eigenschaft, daß in beider OPE die Vakuumdarstellung vorkommt, genauer: $N_{ij}^0 = \delta_{\bar{\imath},j}$ (Existenz eines "Antiteilchens"). Mit diesen Axiomen – eventuell ergänzt um einige weitere speziellere Forderungen

– kann man Fusionsringe ganz abstrakt definieren und deren Klassifikation angehen, siehe etwa [*CPR*] zu Resultaten in dieser Richtung.

"Handlich" sind die Fusionsmatrizen N_i natürlich nur, wenn sie endlich groß sind, die OPE der CFT also mit nur endlich vielen Höchstgewichts-Darstellungen konsistent ist. Solche CFT heißen *rational* – es läßt sich zeigen, daß hier wirklich die charakteristischen Parameter c und alle h_i rationale Zahlen sind. Nur in diesen Fällen besteht die Chance, alle Korrelationsfunktionen zu berechnen – daher beschränken sich auch alle Klassifikations-Vorhaben zunächst auf rationale CFT.

Diese Aufgabe wäre schon nach den Arbeiten von Feigin und Fuks [*FF*] sowie dem für die Physik bahnbrechenden Artikel von Belavin, Polyakov und Zamolodchikov [*BPZ*] im wesentlichen abgeschlossen gewesen, ginge es nur um rationale Theorien mit der Virasoro-Algebra als ganzer chiraler Symmetrie-Algebra. Hier findet man vor allem die minimalen Modelle mit zentraler Ladung (1.8) und den endlich vielen Höchstgewichten

$$h_{r,s}^{(p,p')} = \frac{(rp - sp')^2 - (p-p')^2}{4pp'} \tag{1.20}$$

mit $1 \leq r \leq p'$, $1 \leq s \leq p$. Für diese Modelle sind die Fusionsregeln [*BPZ*] und sogar Integraldarstellungen für die Korrelationsfunktionen [*DF*] bekannt, darüberhinaus so gut wie alles, was sonst noch in CFT von Interesse ist. Daneben treten nur noch einige Virasoro-rationale Modelle mit zentraler Ladung $c = 1$ auf, ebenfalls sehr gut bekannt [*Gin*]. Es gibt aber darüberhinaus viele rationale CFT auch mit $c > 1$, in denen weitere, nicht aus dem Energie-Impuls-Tensor ableitbare chirale Felder vorkommen; es ist dann die davon aufgespannte "Symmetrie"-Algebra (genauer zwei Kopien davon), die auf dem Hilbertraum und dem Raum aller lokalen Felder irreduzibel dargestellt ist. "Symmetrie" steht in Anführungszeichen, weil diese Algebren i.a. nicht zu Gruppen von (Raumzeit-)Transformationen aufintegriert werden können, wie dies für die Virasoro-Algebra möglich ist und auch noch für die chiralen Algebren der *Wess-Zumino-Witten*-Modelle (WZW), in denen außer dem Virasoro-Feld noch Ströme (mit konformer Dimension 1) als Konstituenten auftreten. Diese Algebren sind die zu einer halb-einfachen Lie-Gruppe gehörigen Kac-Moody-Algebren, deren Darstellungstheorie gut bekannt ist, so daß auch WZW-Modelle weitestgehend verstanden und klassifiziert sind [*GO*, *Kac*].

Nicht zu irgendwelchen (Schleifen-)Gruppen "liften" lassen sich bislang die sog. *$\mathcal{W}$-Algebren*, die seit [*Za1*] untersucht werden. Zur Definition muß zuerst der Begriff des *Normalgeordneten Produkts* (NOP) zweier quasi-primärer Felder eingeführt werden. Solche Operatoren $N(\phi_i, \phi_j)$ stehen in der OPE von ϕ_i und ϕ_j in den bisher vernachlässigten regulären Termen, insbesondere ist

$$\phi_i(z)\phi_j(w) = \; sing \; + C_{ij}^N \, N(\phi_i, \phi_j)(w) + O(z-w) \ ,$$

wobei sich die Fourier-Moden des NOP wie folgt aus denen von ϕ_i und ϕ_j zusammensetzen:

$$N(\phi_i, \phi_j)_m = \sum_{l<h_j} \phi_{i,m-l}\phi_{j,l} + \sum_{l \geq h_j} \phi_{j,l}\phi_{i,m-l} \tag{1.21}$$

Diesem Feld kann zwar die konforme Dimension $h_i + h_j$ zugeschrieben werden, aber man stellt leicht fest, daß das so definierte NOP zweier quasi-primärer Feld i.a. nicht wieder quasi-primär ist, also nicht einmal unter der von $L_0, L_{\pm 1}$ erzeugten kleinen konformen Gruppe ein wohldefiniertes Transformationsverhalten hat. Jedoch läßt sich (i.a.) – durch Addieren von (Ableitungen von) Feldern derselben Dimension – eine Projektion von $N(\phi_i, \phi_j)$ auf ein eindeutig bestimmtes quasi-primäres NOP $\mathcal{N}(\phi_i, \phi_j)$ angeben, dessen

etwas komplizierte Gestalt in [*N1*, *Blu*] zu finden ist.
Mithilfe der Ableitungs- und der Normalordnungs-Operation (mit $T(z)$) kann man auch eine quasiprimäre Basis der über einem primären Feld aufbauenden konformen Familie konstruieren, wie schon oben angedeutet.

Für $\mathcal{W}$-Algebren $\mathcal{W}(2, \delta_1, \ldots, \delta_n)$ wird diese Prozedur nur verallgemeinert: Aus dem Energie-Impuls-Tensor T sowie weiteren chiralen primären Feldern $W^{(i)}$ mit konformen Dimensionen $\delta_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$ erzeugt man durch die Ableitungsoperation und Bilden sämtlicher NOP eine unendlich-dimensionale Lie-Algebra, deren Kommutatoren aber nicht mehr schon in den Moden der erzeugenden Felder $W^{(i)}$ schließen, sondern erst nach Hinzunahme der Moden aller NOP, im Unterschied etwa zu den Kac-Moody-Algebren. Die freien Parameter der $\mathcal{W}$-Algebra wie die zentrale Ladung und die Strukturkonstanten im Kommutator (äquivalent: im singulären Teil der OPE) zweier erzeugender Felder werden durch die Gültigkeit der Jacobi-Identitäten (äquivalent zur Assoziativität der OPE) eingeschränkt; nach Lösung dieser Konsistenzgleichungen – endlich vieler, da man nur die OPE dreier $W^{(i)}$-Felder auf Assoziativität hin untersuchen muß, für alle NOP ist sie dann automatisch richtig, s. [*N1*] – bleibt typischerweise entweder nur die zentrale Ladung frei (sog. "generisch existierende" $\mathcal{W}$-Algebren), oder es werden sogar c und alle Strukturkonstanten auf bestimmte Zahlenwerte festgelegt.
Beispiele und weitere Details sind in den Arbeiten [*Blu*, *KW*, *Dip*] zu finden. Dort und in [*Va*, *Eho*] werden zudem auch die Höchstgewichts-Darstellungen diskutiert, die zusammen eine rationale CFT bilden.
Neben diesem systematischen Konstuktionsverfahren, das lediglich von den Daten $\delta_1, \ldots, \delta_n$ und konformer Kovarianz ausgeht, existieren noch andere Methoden: Generisch existierende $\mathcal{W}$-Algebren erhält man aus den Casimir-Operatoren von Kac-Moody-Algebren, gebildet als NOP der Ströme (s. z.B. [*Bai*]), ebenso bei der Quantisierung von klassischen $\mathcal{W}$-Algebren [*Feh*]. $\mathcal{W}$-Algebren mit festgelegtem c dagegen treten z.B. bei "Uminterpretationen" von rationalen CFT auf, in denen sog. *simple currents* oder *abelsche Sektoren* mit ganz- oder halbzahliger konformer Dimension δ_s vorkommen: Simple currents sind primäre Felder, deren Fusion mit anderen Feldern immer nur eine Darstellung auf der rechten Seite erzeugt, also eine Permutation der Fusionsring-Basis induziert. Man kann zeigen, daß bei $\delta_s \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+$ dieses primäre Feld lokal relativ zu allen Observablen ist und daher selbst zur chiralen Symmetrie-Algebra hinzugefügt werden kann. Dieses Phänomen trifft man bei vielen der Virasoro-minimalen Modelle an, die also eine (größere) $\mathcal{W}$-Symmetrie enthalten, und es wird in den Kapiteln IV und V noch eine wichtige Rolle spielen.

Das neben der konformen Invarianz und der OPE (oder dem NOP) dritte wesentliche Konzept, das vor allem bei Klassifikations-Fragen entscheidende Bedeutung erhält, ist das der *modularen Invarianz*. In [*N2*] wurde allgemein bewiesen, daß n-Punkt-Funktionen in CFT auf Mannigfaltigkeiten beliebigen Geschlechts stets Modulformen sind. Eine gängigere, nicht gleichermaßen strenge Beweisführung geht davon aus, daß die CFT auf einem Torus definiert ist. (CFT auf beliebigen Riemann'schen Flächen müssen in der Stringtherie betrachtet werden; ebenso natürlich sind Tori vom Standpunkt zwei-dimensionaler Gittermodelle.) Der Torus kann als Parallelogramm in $\mathbb{C}$ mit Ecken bei 0, 1, τ und $\tau + 1$ dargestellt werden, τ in der oberen komplexen Halbebene. Die *Zustandssumme* (das *Vakuumfunktional*) der CFT auf dem Torus ist dann mit $q = e^{2\pi i \tau}$ durch

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}}\, q^{L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12}} = \sum_{i,\bar{\imath}} N_{i,\bar{\imath}} \chi_i(q) \bar{\chi}_{\bar{\imath}}(\bar{q}) \tag{1.22}$$

gegeben, s. etwa [*Gin*]; die Faktorisierung von $Z(\tau, \bar{\tau})$ in die sog. *Charaktere*

$$\chi_i(\tau) = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_i} q^{L_0 - \frac{c}{24}} \tag{1.23}$$

und $\bar{\chi}_{\bar{\imath}}(\bar{\tau})$ – die $N_{i,\bar{\imath}}$ sind Vielfachheiten – kommt natürlich von der der Symmetrie-Algebra. Die Transformationen, die das von τ erzeugte Gitter in $\mathbb{C}$, damit auch die konforme Struktur des Torus sowie die Zustandssumme $Z(\tau, \bar{\tau})$ invariant lassen, spannen die *modulare Gruppe* PSL(2,$\mathbb{Z}$) auf, die auch als von den Generatoren $T : \tau \mapsto \tau + 1$ und $S : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ mit den Relationen $S^2 = (ST)^3 = 1$ erzeugt gedacht werden kann.
Die Zustandssumme einer CFT muß also *modular invariant* sein, und wenigstens für rationale Modelle ist das nur möglich, wenn die Charaktere $\chi_i(\tau)$ selbst schon eine (endlich-dimensionale) Darstellung von PSL(2,$\mathbb{Z}$) bilden: Es existiert eine unitäre Matrix S mit

$$\chi_i(-\frac{1}{\tau}) = \sum_j S_{ij}\chi_j(\tau) \ . \tag{1.23}$$

T operiert auf den Charakteren ohnehin diagonal,

$$\chi_i(\tau + 1) = \exp\{2\pi i(h_i - \frac{c}{24})\}\chi_i(\tau) \ , \tag{1.24}$$

und Invarianz von $Z(\tau, \bar{\tau})$ unter T ist gewährleistet, sobald $h_i - \bar{h}_i \in \mathbb{Z}$. Die Forderung nach Invarianz unter S dagegen führt zu raffinierten Einschränkungen an die Kombinationen $N_{i,\bar{\imath}}$ der links- und rechtschiralen Anteile der CFT, die gelöst werden können, wenn man die Charaktere sowie ihre modularen Transformationseigenschaften kennt. Für die SU(2)-WZW-Modelle wurden diese Probleme in [*CIZ*] erledigt, ebenso für die Virasoro-minimalen Modelle, deren Charakterfunktionen durch

$$\chi_{r,s}^{(p,p')}(\tau) = \frac{q^{-c/24}}{\prod_{l>0}(1-q^l)} \sum_k \left(q^{a(k)} - q^{b(k)}\right) \tag{1.25}$$

mit $a(k) = h^{(p,p')}_{r+2pk,s}$ und $b(k) = h^{(p,p')}_{r+2pk,-s}$, $k \in \mathbb{Z}$, gegeben sind. (1.25) ergibt sich relativ leicht, wenn erst die Lage der singulären Vektoren in den Darstellung en über den Höchstgewichten $h^{(p,p')}_{r,s}$ bekannt ist [*FF*].

Erstaunlicherweise wurde 1988 von E. Verlinde ein Zusammenhang zwischen den von vornherein so unterschiedlichen Begriffen Fusionsregeln (OPE) und modularer Invarianz formuliert [*V*]: Verlinde vermutete, daß die "S-Matrix die Fusionsregeln diagonalisiert", d.h.

$$N_{ij}^k = \sum_l \frac{S_{il}S_{jl}S^{-1}_{lk}}{S_{0l}} \ ; \tag{1.26}$$

ein erster Beweis wurde in [*MoS*] versucht, seither auch einige in der mathematischen Literatur gegeben. Mittels (1.26) lassen sich alle Eigenwerte der Fusionsmatrizen N_i durch die S-Matrix-Elemente ausdrücken; für die sog. *Quantendimension* $D_i = \lambda_0(i)$ eines primären Feldes – den eindeutig bestimmten größten Eigenwert von N_i – gilt

$$D_i = \frac{S_{i0}}{S_{00}} \ . \tag{1.27}$$

Aus dem modularen Transformations-Verhalten der Charaktere leitet man leicht ab – s. [*DV, Fu*] und auch im Anhang –, daß

$$D_i = \lim_{q \to 1^-} \frac{\chi_i(\tau)}{\chi_0(\tau)} \tag{1.28}$$

gilt; da $\chi_i(\tau)$ ja die Entartung des Energiespektrums einer Darstellung mißt, gibt D_i also an, "wie groß" der Höchstgewichts-Modul von ϕ_i gegenüber der Vakuumdarstellung ist.

Beim Studium von CFT ist stößt man auf ein Vielzahl weiterer Phänomene, auf die hier nicht eingegangen wurde. Zu den wichtigsten gehört die besondere *Statistik* von Quantenfeldern in zwei Dimensionen, die durch Darstellungen nicht der Permutations-, sondern der *Zopfgruppe* beschrieben wird. Zopfgruppen-Statistik wurde in [*Fr*] direkt anhand von Korrelationsfunktionen diskutiert, eine recht effektive Beschreibung ist auch im Rahmen der Algebraischen QFT möglich, s. Kapitel II. Ebenso bedeutend, und nicht ganz unabhängig von der Statistik, ist der Zusammenhang von CFT und drei-dimensionalen *Topologischen QFT* sowie zu Invarianten von 3-Mannigfaltigkeiten [W]. Andere bemerkenswerte Techniken aus der CFT sind die sog. *free-field-Konstruktion*, vgl. [DF] oder [Fe], letzteres unter Einsatz von BRST-Cohomologie, die *Coset-Konstruktion* von [GKO], die es erlaubt, aus WZW-Modellen andere rationale CFT abzuleiten, sowie *Vertexoperator-Darstellungen*. Zu diesen Fragen, und für detailliertere Angaben zu den hier angeprochenen Themen, sei auf [N, Gin, AGS] und die Originalliteratur verwiesen.

CFT ist nicht nur als schier unerschöpfliches Anwendungsfeld neuer mathematischer Methoden interessant, sondern hat auch einige direkte physikalische Relevanz. Neben den ursprünglichen Beweggründen, CFT zu betrachten – String-Theorien, in denen CFT als "Vakua" auftreten, und Phasenübergänge zweiter Ordnung in zwei-dimensionalen Gittermodellen – wird in jüngerer Zeit immer öfter versucht, die in der CFT gewonnenen Erfahrungen bei der Lösung von Fragen aus anderen Gebieten einzusetzen, so (einigermaßen naheliegend) bei der Konstruktion neuer integrabler (massiver) QFT in zwei Dimensionen, aber auch (eher überraschend) bei Phänomenen aus der Festkörperphysik wie der Hochtemperatur-Supraleitung und dem Quanten-Hall-Effekt.

II. Zur Algebraischen Quantenfeldtheorie

In diesem Kapitel sollen kurz die wichtigsten Begriffe des Zugangs zur QFT erläutert werden, wie er von Haag, Kastler und Borchers in den 60er Jahren vorgeschlagen wurde. Da wir in dieser Arbeit nur einige wenige Ideen der Algebraischen QFT einsetzen werden, kann – und schon aus Platzgründen muß – diese Einführung natürlich eher stichwortartig ausfallen. Genaueres ist aus [*Ha*], aus [*Bu*], sowie Originalarbeiten wie [*DHR*, *FRS*, *Re1*] zu entnehmen.

Die Bezeichnung "Algebraische QFT" rührt daher, daß hier durchgehend quantenfeldtheoretische Fragestellungen in der mathematischen Sprache von C^*-Algebren formuliert wurden. Wesentliche Merkmale sind außerdem das Gewicht, das auf einen axiomatischen und mathematisch wohldefinierten Aufbau gelegt wird, sowie die Konsequenz, mit der physikalische "first principles" umgesetzt werden.
Das herausragende dieser Prinzipien ist es, in der Theorie allein von beobachtbaren Größen auszugehen und unphysikalische Hilfsobjekte – auch z.B. Punktfelder, die eventuell gar noch eich-variant sind (Quarkfelder) – zunächst aus dem Spiel zu lassen. Von diesem Standpunkt muß naturgemäß auch jeglicher Quantisierung, so kanonisch sie auch sei, von "zugrundeliegenden" klassischen Feldtheorien eine Absage erteilt werden, denn schließlich ist die Quantentheorie das Primäre, Klassisches muß sich erst im Limes $\hbar \to 0$ ergeben.

Es ist nicht so verwunderlich, daß diese konzeptuelle Klarheit der Algebraischen QFT mit großen Schwierigkeiten bei der Behandlung "realistischer" Probleme einhergeht, sind es doch gerade die wirkungsquerschnitts-trächtigen Lagrange-Modelle, die in der Hochenergiephysik Erfolge feiern. Die stärksten Resultate des algebraischen Zugangs liegen statt dessen bisher in der Klärung grundlegender Fragen in allgemeinem Rahmen, wie beim Spin-Statistik-Theorem, CPT-Theorem, Klassifizierung von Superauswahl-Strukturen, weniger in der Störungsrechnung.

Modelle, die schneller den Algebraischen Methoden zugänglich sind, kommen in der CFT vor. In mancher Hinsicht scheinen diese sogar wie geschaffen für den Algebraischen Ansatz: Es handelt sich um genuine Quantentheorien, Lagrange-Dichten sind in den meisten Fällen nicht einmal konkret bekannt. Dafür zeigen sie eine reiche Superauswahl-Struktur (Virasoro-Höchstgewichts-Darstellungen), die Fusions-Regeln spielen eine zentrale Rolle, ebenso "topologische" zwei-dimensionale Effekte wie die Zopfgruppen-Statistik. All das kann im Rahmen der Algebraischen QFT sauber und in großer Allgemeinheit untersucht werden – zumal die erwähnte Problematik der "Punktfelder" wegen der konformen Kovarianz offenbar weniger schwer wiegt.

Im Zuge der Untersuchung zwei-dimensionaler QFT zeigen sich denn auch die großen Stärken dieses Zugangs. Die aufgezählten "CFT-Spezialitäten" entpuppen sich großen Teils als allgemeine Phänomene in zwei Raumzeit-Dimensionen, die dazu noch in den abstrakten Axiomen schon implizit angelegt sind [*FRS*] – übrigens ebenso wie einige der neueren mathematischen Ergebnisse aus der Theorie der Operator-Algebren. Das berechtigt vielleicht zu der Hoffnung, im algebraischen Zugang den geeigneten Rahmen zu sehen, in dem schließlich die vollständige Klassifikation aller konformen oder gar integrablen QFT gelingen könnte, auch wenn die Identifikation konkreter Modelle immer noch schwierig ist. Von derart hochgreifenden Zielen abgesehen kann man jedenfalls erwarten, daß einige der Methoden von [*DHR*, *FRS*] auch mehr oder weniger unabhängig vom axiomatischen Rahmen in der QFT an Bedeutung gewinnen werden, etwa im Zusammenhang mit Connes' operator-algebraischer Geometrisierung von Modellen der Teilchenphysik.

II.1 Haag-Kastler-Axiome

Auf die Prinzipien der speziellen Relativitätstheorie und der Quantenmechanik bauend lassen sich die nachstehenden allgemeinen Forderungen an die Struktur einer QFT aufstellen.

Lokale Observablen: "Messungen" können – aus praktischen Gründen und wegen der Unschärferelation – nur in endlichen Gebieten des Minkowski-Raums $R^{1,d}$ ausgeführt werden. Daher sollte man besser nicht von unphysikalischen Idealisierungen wie Punktfeldern ausgehen, sondern eher von einer Zuordnung – einem *Netz lokaler Algebren* –

$$\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O})\,, \tag{2.1}$$

die einem Gebiet die (von-Neumann-)Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ zuweist, die von den in $\mathcal{O}$ meßbaren Observablen erzeugt wird; man stellt sich die die Elemente von $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ als beschränkte Operatoren auf einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}_0$ vor (zu manchen mathematischen Begriffen siehe Kapitel III). Dabei genügt es, gewisse "elementare" Raumzeit-Gebiete zu betrachten, etwa den kausalen Schatten eines Raumgebietes ("Labors"); diese *Doppelkegel* (Karos in $1+1$ Dimensionen) sind der Schnitt eines Vorwärts- und eines Rückwärts-Lichtkegels mit dem Labor als raumartiger Basis. Die lokale Observablen-Algebra eines beliebigen Raumzeit-Gebietes $\mathcal{B}$ definiert man dann durch

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}) := \overline{\bigcup_{\mathcal{O}\subset\mathcal{B}} \mathcal{A}(\mathcal{O})}\ ;$$

die Vereinigung erstreckt sich über alle Doppelkegel im Inneren von $\mathcal{B}$, dann wird noch der C^*-Abschluß gebildet (s. III.1). Die C^*-Algebra

$$\mathcal{A} := \overline{\bigcup_{\mathcal{O}\subset R^{1,d}} \mathcal{A}(\mathcal{O})} \tag{2.2}$$

heißt *globale Observablen-Algebra*.

Das Netz lokaler Algebren muß einigen mehr odere weniger offensichtlichen Axiomen genügen: [*HK*]

Isotonie: Für zwei Doppelkegel mit $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ gilt $\mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(O_2)$. Mit den Inklusionen als Algebren-Homomorphismen kann die globale Algebra $\mathcal{A}$ dann auch als induktiver Limes aller lokalen Algebren $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ definiert werden, da die Doppelkegel in $R^{1,d}$ ja ein gerichtetes System (s. [*La*] oder Kapitel III) bilden.

Kausalität: Raumartig zueinander liegende Messungen beeinflussen sich nicht, also müssen Observable $A \in \mathcal{A}$, die im kausalen Komplement

$$\mathcal{O}' = \{y \in R^{1,d} \,|\, (x-y)^2 \le 0 \ \forall x \in \mathcal{O}\}$$

von $\mathcal{O}$ lokalisiert sind, mit denen in $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ vertauschen:

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2' \implies \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)'\ , \tag{2.3}$$

wobei der Strich $'$ an einer Algebra deren Kommutante in $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ bezeichnet.

Haag-Dualität: Man fordert in Verschärfung von (2.3)

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}) = \mathcal{A}(\mathcal{O}')'\ . \tag{2.4}$$

Diese Eigenschaft ist in manchen QFT-Netzen ohnehin erfüllt, abstrakt läßt sie sich als Maximalitäts-Forderung and die loklen Observablen-Algebren interpretieren – je größer eine Algebra, desto kleiner natürlich ihre Kommutante. Darüberhinaus ist (2.4) als technische Voraussetzung in vielen Beweisen unverzichtbar.

Wenn die lokalen Algebren $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ wie oben schon als Unteralgebren von $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ definiert werden, ist der nötige Hilbertraum $\mathcal{H}_0$, der die Zustände des Quantensystems beschreibt, automatisch vorhanden. Sonst könnte man die $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ als abstrakte C^*-Algebren einführen und müßte zusätzlich die Existenz einer Referenz-Darstellung π_0 von $\mathcal{A}$ und der lokalen Observablen-Algebren auf $\mathcal{H}_0$ fordern. Diese Daten bestimmen dann den *Vakuumsektor*. Die *Vakuum-Darstellung* π_0 sei irreduzibel und nach Möglichkeit treu; letztere Forderung muß manchmal fallengelassen werden – und mit ihr dann die Möglichkeit, die lokalen Observablen-Algebren gleich mit den von-Neumann-Unteralgebren $\pi_0(\mathcal{A}(\mathcal{O})) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$ zu identifizieren.

Da man (mindestens) relativistische QFT betrachten will, ist die Existenz einer *Kovarianz-Gruppe* G, die die Poincaré-Gruppe enthält, vorausgesetzt samt einer Operation auf der Raumzeit ($\mathcal{O} \mapsto g\mathcal{O}$) sowie auf der Observablen-Algebra ($A \mapsto \alpha_g(A)$ für $A \in \mathcal{A}$), so daß

$$\mathcal{A}(g\mathcal{O}) = \alpha_g(\mathcal{A}(\mathcal{O})) \ .$$

Zudem soll G auch auf $\mathcal{H}_0$ unitär dargestellt sein ($\xi \mapsto U_0(g)\xi$ für $\xi \in \mathcal{H}_0$) und ein invarianter zyklischer Vektor $\Omega \in \mathcal{H}_0$ existieren, das *Vakuum*; diese Operationen muß wiederum mit α_g verträglich sein:

$$\pi_0(\alpha_g(A)) = U_0(g)\pi_0(A)U_0(g)^*$$

Das Spektrum des Erzeugers der Translationen, also des Energie-Operators, soll im Vorwärts-Lichtkegel liegen: Man sagt, das Vakuum ist eine *kovariante Darstellung positiver Energie*.

Über die genannten Axiome hinaus werden manchmal noch weitere Forderungen an die lokalen Algebren gestellt, namentlich die sog. *Nuklearitäts-Bedingung* [*BW*], die viele wichtige Konsequenzen hat; z.B. kann man aus ihr und einigen zusätzlichen Annahmen (insbesondere der Existenz eines Skalenlimes) ableiten, daß die von-Neumann-Algebren $\pi_0(\mathcal{A}(\mathcal{O}))$ stets (hyperfinite) Faktoren von Typ III_1 sind, vgl. [*BDF*]. Diese Universalitätsausssage über die lokalen Algebren zeigt nebenbei, daß erst die relative Lage derselben im Netz eine entscheidende Charakterisierung einer bestimmten QFT liefern kann.

In einigen Fällen läßt sich aus der gewohnteren Formulierung mit Wightman-Feldern ein Haag-Kastler-Netz konstruieren und so auch der Zusammenhang zum algebraischen Zugang herstellen; für manche "Anwendungen" jedoch müssen die obigen Axiome leicht modifiziert werden, was meist auch ohne größere Schwierigkeiten möglich ist.

II.2 Endomorphismen

Bisher wurde nur die Struktur der Observablen-Algebra diskutiert, die als im Vakuumsektor definiert gedacht werden kann. Da man im axiomatischen Zugang zur QFT nicht von unbeobachtbaren ladungstragenden Feldern ausgehen will, muß man zusätzlich zur Vakuumdarstellung π_0 noch andere inäquivalente Darstellungen π_i auf Hilberträumen $\mathcal{H}_i$ einführen, zwischen denen die Observablen nicht vermitteln können: Zustände aus verschiedenen $\mathcal{H}_i$ interferieren nicht miteinander. Eine Klasse von unitär äquivalenten, und damit physikalisch nicht unterscheidbaren Darstellungen wird als *Superauswahl-Sektor* bezeichnet.

Die Observablen-Algebra $\mathcal{A}$ hat allerdings eine Fülle inäquivalenter Darstellungen, die, ließe man sie alle als quantenfeldtheoretische Superauswahl-Sektoren zu, ein völlig unübersichtliches Bild schüfen und die Aussagekraft des axiomatischen Zugangs erheblich schwächten. Die "Kunst" besteht also darin, ein geeignetes *Kriterium* zu finden, das einerseits möglichst viele "pathologische" Sektoren ausscheidet, andererseits so viele "interessante" wie möglich umfaßt. Der wichtigste Lösungsvorschlag für dieses Problem stammt von Doplicher, Haag und Roberts [*DHR*] und führt zu einer – verglichen mit den konventionellen Ansätzen – völlig überraschenden Charakterisierung von Superauswahl-Sektoren durch *Endomorphismen* der Observablen-Algebra.

Das *DHR-Kriterium* beschränkt die Untersuchung auf die Darstellungen π_i, die *lokalisiert* sind in dem Sinne, daß es für jeden genügend großen Doppelkegel $\mathcal{O}$ einen unitären Operator $V : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_i$ gibt mit

$$\pi_i(A) = V\pi_0(A)V^* \quad \forall A \in \mathcal{A}(\mathcal{O}') \ . \tag{2.5}$$

Außerdem soll auch auf $\mathcal{H}_i$ eine Darstellung der Kovarianzgruppe mit denselben Bedingungen an das Spektrum des Energieoperators gegeben sein. (2.5) hat zur Folge, daß der zur Darstellung π_i gehörige Zustand sich bei großen raumartigen Entfernungen immer mehr dem Vakuumzustand annähert, s. [*Ha*]. Die vom DHR-Kriterium erfaßten Superauswahl-Sektoren beschreiben also lokalisierte Ladungen (z.B. Baryon-Zahl) und "Wechselwirkungen" endlicher Reichweite (Mesonphysik), nicht aber die langreichweitigen Kräfte der Elektrodynamik – zumindest nicht in der obigen Formulierung, die aber daraufhin mit einigem Aufwand modifiziert werden kann, s. [*BF*].
Für das Kommende von entscheidender Bedeutung ist, daß man mittels (2.5) eine Abbildung

$$\rho_i(A) := V^*\pi_i(A)V$$

der globalen Observablen-Algebra definieren kann, die u.a. folgende Eigenschaften hat:

ρ_i ist ein <u>*-Endomorphismus der Algebra $\mathcal{A}$</u>, d.h. ist linear und verträgt sich mit der Multiplikation und der *-Operation.

Zudem ist ρ_i im Doppelkegel $\mathcal{O}$ <u>lokalisiert</u>: $\rho_i(\mathcal{A}(\mathcal{O}_1)) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_1)$ für $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$ und $\rho_i|_{\mathcal{A}(\mathcal{O}')} = id$. (Für den Beweis all dieser Tatsachen wird z.B. Haag-Dualität gebraucht.)

Durch $\tilde{\pi_i} := \pi_0 \circ \rho_i$ wird eine <u>Darstellung von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{H}_0$</u> definiert, die unitär äquivalent zu π_i auf $\mathcal{H}_i$ ist.

ρ_i ist <u>transportierbar</u>, d.h. für jeden Translations-Vektor $x \in R^{1,d}$ existiert ein zu ρ_i unitär äquivalenter Endomorphismus ρ_i^x, der in $\mathcal{O} + x$ lokalisiert ist.

ρ_i ist eine <u>Isometrie</u>, d.h. $\| \rho_i(A) \| = \| A \| \ \ \forall A \in \mathcal{A}$. Insbesondere sind die DHR-Endomorphismen damit injektiv.

ρ_i ist <u>irreduzibel</u>, d.h. $\rho_i(\mathcal{A})' \cap \mathcal{A} = \mathbb{C} \cdot \mathbf{1}$, wenn π_i eine irreduzible Darstellung von $\mathcal{A}$ ist.

Der Einsatz von Endomorphismen gestattet es, im Prinzip alle physikalische Information über die QFT aus den im Vakuumsektor eingeführten beobachtbaren Größen zu extrahieren. Im nachhinein kann man übrigens auch eine größere *Feldalgebra* einführen [*DHR*], die die Observablen-Algebra $\mathcal{A}$ und geladene Felder enthält, also eher den üblicherweise in der QFT verwendeten Objekten entspricht.

Ein wesentlicher Vorteil dieser Formulierung ist es aber, daß zwanglos und mathematisch sauber die *Komposition* zweier Sektoren definiert werden kann, was letztlich zu den *Fusionsregeln* führt:

Der Sektor, der aus der Addition zweier Ladungen entsteht, wird durch die Hintereinanderausführung der beiden zugehörigen DHR-Endomorphismen beschrieben. Liefert also etwa Anwenden von ρ eine Erhöhung der Baryonenzahl um 1, so ist $\rho^2 = \rho \circ \rho$ der Sektor mit Baryonenzahl 2. Wir haben damit folgendes *Produkt* von Darstellungen:

$$\pi_i \times \pi_j := \pi_0 \circ (\rho_i \circ \rho_j)$$

Sind ρ_i und ρ_j lokalisiert und transportierbar, so auch $\rho_i \circ \rho_j$. Verloren geht aber i.a. die Irreduzibilität der Darstellungen π_i und π_j; Ausreduktion in irreduzible Unterdarstellungen (die automatisch wieder lokalisierten und transportierbaren Endomorphismen entsprechen) liefert die Fusionsregeln

$$[\rho_i] \times [\rho_j] = \bigoplus_k N_{ij}^k \, [\rho_k] \tag{2.6}$$

mit Vielfachheiten $N_{ij}^k \in \mathbb{Z}_+$ der Unterdarstellungen π_k. In (2.6) wurde bereits zu Äquivalenzklassen von Endomorphismen, also Superauswahl-Sektoren, übergegangen. Das ist wichtig, um das Produkt kommutativ zu machen, denn i.a. gilt "nur"

$$\rho_i \circ \rho_j = Ad_{\epsilon(\rho_i, \rho_j)} \circ (\rho_j \circ \rho_i) \tag{2.7}$$

mit einem unitären (und lokalen) Operator $\epsilon(\rho_i, \rho_j) \in \mathcal{A}$, der *Statistik-Operator* genannt wird [*DHR*]. $\epsilon(\rho_i, \rho_j)$ vertritt in der Algebraischen QFT die Phasenfaktoren, die sonst vor Korrelatoren $\langle \psi_i(x) \psi_j(y) \rangle$ beim Vertauschen der beiden Felder mit Ladungen i und j auftauchen.

Das Endomorphismen-Bild von [*DHR*] ermöglicht es, die in einer QFT realisierbaren Statistiken allgemein zu untersuchen und, in vier Dimensionen, auch zu klassifizieren. Man konnte so in der Algebraischen QFT nicht nur die "üblichen" Resultate wie Spin-Statistik-, CPT-Theorem etc. beweisen, sondern auch, daß die Superauswahl-Struktur mit Fusionsregeln (2.6) stets das Dual einere Gruppe ist – mehr Details und Literaturangaben dazu sind in [*Ha*] zu finden.

II.3 Niedrig-dimensionale Quantenfeldtheorien

Natürlich zeichnen sich auch im Algebraischen Zugang QFT in niedrigen Raumzeit-Dimensionen durch eine Reihe besonderer Phänomene aus. "Niedrig-dimensional" heißt dabei ein- oder zwei-dimensional, wenn man mit dem DHR-Kriterium arbeitet, oder auch drei-dimensional, wenn die Analyse von [*BF*] zugrundegelegt wird. Der Vorteil der Algebraischen QFT liegt dabei darin, daß diese Situationen ohne Einführung neuer Begriffe studiert werden können.

Eines der wichtigsten dieser Phänomene – die hier nur ganz knapp umrissen werden sollen, da die Original-literatur sehr gute Darstellungen bietet, z.B. in [*FRS, Lo, Re*] – ist sicher das Auftreten von Zopfgruppen-Statistik anstelle der Permutationsgruppen-Statistik aus vier-dimensionalen QFT. Im DHR-Zugang lassen sich die Zopfgruppen-Relationen ziemlich leicht aus den Eigenschaften des Statistik-Operators $\epsilon(\rho_i, \rho_j)$ in (2.7) ableiten [*FRS*], wobei insbesondere dessen Homotopie-Invarianz eingeht: $\epsilon(\rho_i, \rho_j)$ ändert sich nicht, wenn die Lokalisierungsgebiete von ρ_i und ρ_j stetig deformiert werden. Da raumartig zueinander lokalisierte Ladungen vertauschen und in drei oder mehr Dimensionen das raumartige Komplement eines Doppelkegels zusammenhängend ist, läßt sich zeigen, daß hier $\epsilon(\rho_i, \rho_j)$ ganz unabh"ngig von $\mathcal{O}_i$ und $\mathcal{O}_j$ ist, während über R^2 oder R (Lichtkegel) noch eingeht, ob $\mathcal{O}_i$ links oder rechts von $\mathcal{O}_j$ liegt (das raumartige Komplement eines Karos bzw. Intervals hat zwei Zusammenhangs-Komponenten). Mit "etwas Algebra" schließlich beweist man, daß für die speziellen Statistik-Operatoren $\epsilon_\rho := \epsilon(\rho, \rho)$ – Vertauschen zweier gleich geladener Sektoren –

$$\epsilon_\rho \rho(\epsilon_\rho)\epsilon_\rho = \rho(\epsilon_\rho)\epsilon_\rho\rho(\epsilon_\rho)$$

gilt und zudem, außer für R oder R^2, noch $\epsilon_\rho^2 = 1$. Die zu jedem Superauswahl-Sektor assozierten unitären Operatoren $\sigma_i^{(\rho)} := \rho^{i-1}(\epsilon_\rho)$ erfüllen dann

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad \text{für } |i-j| > 1$$
$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$$

– und in drei oder mehr Dimensionen noch $\sigma_i^2 = 1$. Sie bilden also eine Darstellung der Zopfgruppe – bzw. der Permutationsgruppe – innerhalb der lokalen Algebren. Die allgemeineren Statistik-Operatoren $\epsilon(\rho_i, \rho_j)$ können entsprechend zu Zöpfen aus "gefärbten Fäden" in Verbindung gebracht werden, s. [*Re1*]. In Abschnitt IV.3 werden noch einige andere Aspekte der Statistik-Operatoren vorgestellt.

Die Darstellungen der Zopfgruppe, die in der QFT vorkommen, lassen sich mit Hilfe sog. *Links-Inverser* und *Markov-Spuren* genauer analysieren [*FRS*, *Re*], durch die man jedem Superauswahl-Sektor ρ insbesondere einen *Statistik-Parameter* $\lambda_\rho \in \mathbb{C}$ zuordnen kann; dessen Betrag $d_\rho = |\lambda_\rho|$ stimmt mit der in Kapitel I eingeführten Quantendimension überein, und auch die ganzen Axiome an den Fusionsring einer rationalen QFT können in diesem Rahmen – nicht nur für CFT – bewiesen werden.

In engem Zusammenhang mit den Zopfgruppen-Darstellungen in der Observablen-Algebra treten Einbettungen von Subfaktoren auf; in [*Lo*] und auch [*FRS*] wurde der Jones- bzw. Kosaki-Longo-Index der Einbettung

$$\rho(\mathcal{A}(\mathcal{O})) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O})$$

mit der Quantendimension des Superauswahl-Sektors verküpft: Es gilt einfach

$$\mathrm{Ind}\,[\rho(\mathcal{A}(\mathcal{O})), \mathcal{A}(\mathcal{O})] = d_\rho^2 \ ,$$

so daß sich die Restriktionen an die möglichen Index-Werte – s. [*GHJ*] oder auch Gl. (3.2) – auf die Quantendimensionen übertragen.

Ein anderes Phänomen, das zunächst bloß ein technisches Detail zu sein scheint, tritt bei QFT auf dem Kreis zutage, also etwa bei den chiralen Hälften konformer Modelle. Die elementaren "Doppelkegel" sind hier schlicht Intervalle $I \subset S^1$, die dann raumartig getrennt sind, wenn sie sich nicht schneiden. Die Menge aller eigentlichen Intervalle von S^1 bildet aber kein gerichtetes System (etwa gibt es zum oberen Halbkreis und zum unteren Halbkreis kein echtes Intervall $I \subset S^1$, das diese beiden umfaßt), so daß die globale Observablen-Algebra $\mathcal{A}$ nicht wie in (2.2) als induktiver Limes definiert werden kann. Statt dessen muß man die sog. *universelle Algebra* $\mathcal{A}_{univ}$ einführen [*FRS2*], die tatsächlich eine interessantere Struktur als $\mathcal{A}_{glob}$ in höher-dimensionalen QFT hat. Insbesondere wurde in [*FRS2*] bewiesen, daß $\mathcal{A}_{univ}$ ein nicht-triviales Zentrum besitzt, in dem "Observablen" liegen, die eine Darstellung der Fusionsregeln bilden. Die Bedeutung dieser Tatsache ist noch ungeklärt.

Zu den bemerkenswerten Eigenschaften ein-dimensionaler Netze gehört schließlich noch die besondere Rolle der modularen Operatoren aus der Tomita-Takesaki-Theorie, s. z.B. [*SZ*]. Ausgehend von früheren

Arbeiten wurden sie in [*Bo*, *Wi*] mit der CPT-Transformation und vor allem mit der Aktion der kleinen konformen Gruppe SU(1,1) identifiziert. In [*Wi*] wurden zudem Argumente dafür gegeben, daß sich aus geeigneten modularen Operatoren ein ganzes Haag-Kastler-Netz rekonsturieren läßt.

Auch wenn konforme Theorien wegen ihrer interessanten Superauswahl-Struktur von vornherein näher am DHR-Zugang liegen als die Lagrange-Theorien der Teilchen-Physik, ist es dennoch auch hier schwierig, konkrete Modelle im Rahmen der Algebraischen QFT zu behandeln. Einige Ideen für "Übersetzungsregeln" zwischen der üblichen Formulierung von CFT und Algebraischer QFT findet man in [*Fu2*]. Vollständig analysiert werden konnte bisher eigentlich nur die abelsche U(1)-WZW-Theorie in [*BMT*] (s. auch [*CE*]); immerhin nur einige wenige offene Fragen bestehen noch bei der Untersuchung des Ising-Modells [*MaS*] und den Level-1-WZW-Modellen [*FGV*], vor allem was die Lokalisierung der Endomorphismen angeht. Bestimmte Charakteristika dieser Konstruktionen werden in Abschnitt IV.3 noch für uns von Interesse sein.

III. C^*-Algebren und K-Theorie

Im letzten Kapitel wurden bereits einige allgemeine Begriffe aus der Theorie der Operator-Algebren benutzt, deren Definition noch nachzureichen ist. Darüberhinaus werden im folgenden besondere Hilfsmittel genauer behandelt, die es erlauben, aus dem abstrakten DHR-Formalismus, unter einigen vereinfachenden Zusatzannahmen, eine recht effektive Methode für Berechnungen in konkreten Modellen zu gewinnen. Diese Hilfsmittel sind AF-Algebren und vor allem die K_0-Invariante einer C^*-Algebra. Natürlich kann auch die Theorie der Operator-Algebren hier nur höchst rudimentär wiedergegeben werden; Details findet man z.B. in [*BR, SZ*] (zu Operator-Algebren allgemein), in [*Eff*] (zu AF-Algebren) und in [*Bla*] (zur K-Theorie von Operator-Algebren).

III.1 Allgemeine Begriffe

Der grundlegende Begriff ist der der *C^*-Algebra*: Eine Algebra $\mathcal{A}$ über $\mathbb{C}$ heißt C^*-Algebra, wenn
i) sie eine anti-lineare Involution * trägt;
ii) eine Norm $\| \,.\, \|$ existiert, bzgl. der $\mathcal{A}$ ein Banachraum ist;
iii) die sog. C^*-Eigenschaft $\| A^*A \| = \| A \|^2 \;\; \forall A \in \mathcal{A}$ gilt.

Beispiele für kommutative C^*-Algebren sind die stetigen Funktionen über lokal-kompakten Hausdorff-Räumen $C(X)$ (mit Supremums-Norm), nicht-abelsche C^*-Algebren bilden etwa die beschränkten Operatoren $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ($dim \mathcal{H} > 1$; mit Operator-Norm). Insbesondere ist $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = M_n(\mathbb{C})$ für $dim \mathcal{H} = n$, und mit einigem Aufwand läßt sich zeigen, daß jede endlich-dimensionale C^*-Algebra isomorph zu einer direkten Summe von Matrix-Algebren ist (siehe z.B. [*GHJ*]), was weiter unten noch von Bedeutung sein wird.
Ein allgemeines Strukturtheorem besagt, daß jede C^*-Algebra isomorph zu einem geeigneten $C(X)$ oder zu einer Unteralgebra in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist [*BR*].

Von vornherein als Unteralgebren von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ gegeben ist eine zweite wichtige Klasse von Operator-Algebren, nämlich *von-Neumann-Algebren*. Hier wird Abgeschlossenheit bzgl. der "schwachen Topologie" verlangt, d.h. $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist eine von-Neumann-Algebra, wenn jede schwach konvergente Folge von Operatoren $(A_n)_n \subset \mathcal{M}$ ihren Grenzwert in $\mathcal{M}$ hat: Aus $\lim_n \langle \psi | A_n | \phi \rangle = \langle \psi | A | \phi \rangle$ für alle $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$ und ein $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ folgt schon $A \in \mathcal{M}$.

Da Abgeschlossenheit bzgl. der Konvergenz von Matrixelementen stets die bzgl. der Konvergenz in der Operator-Norm nach sich zieht, ist jede von-Neumann-Algebra insbesondere eine C^*-Algebra, aber i.a. nicht umgekehrt. Bemerkenswert ist, daß die topologische Charakterisierung über schwache Limiten durch eine rein algebraische ersetzt werden kann: $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist eine von-Neumann-Algebra genau dann, wenn $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$. Dieses von Neumann'sche Bikommutanten-Theorem vereinfacht den Umgang mit dieser Klasse von Operator-Algebren drastisch und gibt zudem ein einfaches Konstruktionsverfahren an die Hand: Zu jeder unter der *-Operation abgeschlossenen Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist die Kommutante $\mathcal{S}' \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine von-Neumann-Algebra, ebenso die Doppelkommutante $\mathcal{S}''$, die noch dazu $\mathcal{S}$ selbst enthält.

An dieser Stelle läßt sich übrigens auch die "Ungereimtheit" im DHR-Zugang verstehen, daß nur die lokalen Algebren $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ als von-Neumann-Algebren, die globale Observablen-Algebra aber als C^*-Abschluß des induktiven Limes definiert wird: Die schwache Topologie verlangt die Existenz einer Hilbertraum-Darstellung, oder eines Zustandes, der zwar lokal ausgezeichnet ist ($\mathcal{A}(\mathcal{O})$ ist in der Vakuum-Darstellung gegeben), nicht aber global. Wollte man daher die globale Observablen-Algebra als von-Neumann-Abschluß einführen, müßte man willkürlich einen (globalen) Zustand auswählen, was im axiomatischen Zugang lieber vermieden wird.

Die von-Neumann-Algebren $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ sind noch genauer – wenigstens unter einigen Zusatzannahmen, die wohl stets in der CFT erfüllt sind – sogar *Faktoren*, d.h. ihr Zentrum $Z(\mathcal{A}(\mathcal{O})$ (die Elemente, die mit allen anderen kommutieren) ist trivial. Man teilt Faktoren in drei *Typen* ein, die z.B. durch ihren "Inhalt" an *Projektoren* ($p \in \mathcal{M}$ mit $p^2 = p = p^*$) unterschieden werden können.
Man schreibt $q \leq p$ für zwei Projektoren in $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, wenn $q\mathcal{H} \subset p\mathcal{H}$; $q \sim p$, falls es ein $V \in \mathcal{M}$ (partielle Isometrie) gibt mit $q = VV^*$, $p = V^*V$; und man sagt schließlich, q sei *feiner* als p, wenn es einen Projektor $q' \in \mathcal{M}$ mit $q' \sim q$, $q' \leq p$ gibt.

Ein Faktor ist vom Typ I, wenn er *minimale* Projektoren ungleich Null enthält (solche, zu denen es keine echt feineren außer der Null gibt). Dann ist schon $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ für einen endlich-dimensionalen (Typ I_n) oder unendlich-dimensionalen (Typ I_∞) Hilbertraum.
Ein Faktor ist vom Typ II, wenn er keine minimalen, aber doch solche Projektoren enthält, die echt feiner als $\mathbf{1}$ sind.
Ein Faktor ist vom Typ III, wenn für jeden Projektor $p \neq 0$ gilt $p \sim \mathbf{1}$.

Für die Feineinteilung innerhalb der einzelnen Typen (II_1 und II_∞ bzw. III_0, III_λ für $0 < \lambda < 1$ und III_1) verweisen wir auf die Literatur.

Von V.F.R. Jones wurden Einbettungen eines Faktors in einen anderen (vom gleichen Typ) untersucht [*Jo*]. Man gelangt zu einer Klassifikation durch den sog. *Jones-Index* der Einbettung: Sind $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ Faktoren vom Typ II_1 – d.h. es existieren normierte Spuren – auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$, so kann der Index als das Verhältnis

$$\mathrm{Ind}\,[\mathcal{N}, \mathcal{M}] := \frac{dim_{\mathcal{N}}(\mathcal{H})}{dim_{\mathcal{M}}(\mathcal{H})}$$

der sog. *Kopplungskonstanten* eingeführt werden, die wiederum etwas über die Beziehung einer von-Neumann-Algebra und ihrer Kommutante in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ aussagen: Zur Definition von $dim_{\mathcal{M}}(\mathcal{H})$ gibt man sich einen beliebigen Vektor $0 \neq \xi \in \mathcal{H}$ vor und bezeichnet mit p bzw. q die Projektoren auf die Unterräume $\overline{\mathcal{M}\xi}$ bzw. $\overline{\mathcal{M}'\xi}$; es gilt $p \in \mathcal{M}'$ und $q \in \mathcal{M}$. Ist $\mathcal{M}$ – und $\mathcal{M}'$ ebenfalls – vom Typ II_1, existieren eindeutige Spuren [*GHJ*] und man kann den Quotienten

$$dim_{\mathcal{M}}(\mathcal{H}) := \frac{\mathrm{tr}_{\mathcal{M}}(q)}{\mathrm{tr}_{\mathcal{M}'}(p)}$$

bilden, der von der Wahl von ξ unabhängig ist. Ist $\mathcal{M}'$ von Typ II_∞, setzt man $dim_{\mathcal{M}}(\mathcal{H}) := \infty$.
Man beachte, daß der Index die "relative Lage" von $\mathcal{N}$ in $\mathcal{M}$ beschreibt, nicht die "relative Größe": Da es sich um unendlich-dimensionale Algebren handelt, kann durchaus $\mathcal{N}$ isomorph zu $\mathcal{M}$ sein, obwohl $d \neq 1$.

In [*Ko*] konnte der Index auch für eine Einbettung von Faktoren vom Typ III definiert werden – in anderer Weise natürlich, da diese von-Neumann-Algebren keine Spur besitzen. Wie in II.3 erwähnt, hängt diese oft auch als Kosaki-Longo-Index bezeichnete Invariante [*Lo*] eng mit den statistische Dimensionen von Superauswahl-Sektoren in zwei-dimensionalen QFT zusammen.

III.2 AF-Algebren

Ein wichtiges Verfahren zur Konstruktion von Einbettungen von Subfaktoren geht von besonderen C^*-Algebren aus, den sog. *AF-Algebren* (AF für "approximately finite dimensional"). Im nächsten Kapitel werden Argumente für die zentrale Vermutung dieser Arbeit gegeben, daß dieser Typ von C^*-Algebren eng mit konform invarianten Quantenfeldtheorien verknüpft ist. Zunächst aber zur Definition:
Eine C^*-Algebra $\mathcal{A}$ heißt AF-Algebra, wenn sie eine dichte Unteralgebra enthält, die wiederum der induktive Limes von endlich-dimensionalen C^*-Algebren ist:

$$\mathcal{A} = \overline{\varinjlim \mathcal{A}^{(n)}} \; , \quad \mathcal{A}^{(n)} = \bigoplus_{j=1}^{k_n} M_{d_j}(\mathbb{C}) \; . \tag{3.1}$$

Im Unterschied zum Haag-Kastler-Netz lokaler Observablen-Algebren sind die Homomorphismen zwischen verschiedenen $\mathcal{A}^{(n)}$ hier nicht bloß Inklusionen, sondern Einbettungsmorphismen $\phi^{(n)} : \mathcal{A}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{A}^{(n+1)}$ – wobei hier der Einfachheit halber angenommen wurde, daß zwischen je zwei aufeinander folgenden Algebren eine Einbettung gegeben ist – zu gerichteten Systemen allgemeinerer Art s. $[La]$ oder $[Eff]$. Den induktiven Limes bildet man einfach, indem man $\mathcal{A}^{(n)}$ und $\phi^{(n)}(\mathcal{A}^{(n)})$ identifiziert.
Wegen des oben erwähnten Eindeutigkeits-Satzes über endlich-dimensionale C^*-Algebren hat man nicht allzu viele Möglichkeiten für die Einbettungen: Für jeden Faktor $M_{d_j}(\mathbb{C})$ von $\mathcal{A}^{(n)}$ ist $\phi^{(n)}(M_{d_j}(\mathbb{C}))$ wieder eine Multimatrix-Algebra, deren Faktoren "zur Gänze" in denen von $\mathcal{A}^{(n+1)}$ liegen müssen. Bis bis auf unitäre Äquivalenz kann $\phi^{(n)}$ daher durch eine *Einbettungs-Matrix* $\Phi^{(n)}$ beschrieben werden, eine $k_{n+1} \times k_n$ Matrix über $\mathbb{Z}_+$, deren Eintrag $\Phi^{(n)}_{ij}$ angibt, wie oft der j te Faktor von $\mathcal{A}^{(n)}$ in den i ten von $\mathcal{A}^{(n+1)}$ kopiert wird.

Die Information über die einzelnen *Etagen* $\mathcal{A}^{(n)}$ eines solchen *Turmes* von endlich-dimensionalen Algebren kann in einem sog. *Bratteli-Diagramm* festgehalten werden. Für $\mathcal{A}^{(n)}$ wie in (3.1) zeichnet man k_n Punkte nebeneinander, die eine Markierung d_j für die Dimension des jeweiligen Faktors $M_{d_j}(\mathbb{C})$ tragen. Die Punkte zweier aufeinanderfolgender Etagen verbindet man mit Linien, die die Einbettungen symbolisieren, vgl. Abb. 3.1. Wenn nicht gesondert erwähnt, sollen alle Einbettungen unital sein, $\phi^{(n)}(\mathbf{1}^{(n)}) = \mathbf{1}^{(n+1)}$, so daß die Markierungen der höheren Etagen aus denen der ersten und den Linien im Bratteli-Diagramm eindeutig hervorgehen.
Man beachte, daß verschiedene Bratteli-Diagramme durchaus denselben induktiven Limes beschreiben können: Z.B. läßt sich durch "telescoping" – Zusammenschalten einiger aufeinanderfolgender Einbettungen – der Graph des Diagramms ohne Einfluß auf $\varinjlim \mathcal{A}^{(n)}$ verändern.

Ein in der Physik häufiger anzutreffender Typ von AF-Algebren sind die zu einem Graphen $\mathcal{G}$ assoziierten *Pfad-* oder *String-Algebren* $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ – vgl. insbesondere $[Oc, Pa, FRS]$. Zur Konstruktion betrachtet man zunächst die Pfadräume $\mathcal{P}^{(n)}(\mathcal{G}, i, j)$ über $\mathcal{G}$, aufgespannt von allen Wegen der Länge n, die entlang der Kanten von $\mathcal{G}$ vom Vertex i zum Vertex j führen. Dieser Vektorraum wird zum Hilbertraum, wenn je verschiedene Pfade per definitionem orthonormiert werden. Zu einem Paar ξ_1, ξ_2 von Pfaden in $\mathcal{P}^{(n)}(\mathcal{G}, i, j)$ – einem sog. "String" – läßt sich ein linearer Operator $A(\xi_1, \xi_2)$ definieren durch

$$A(\xi_1, \xi_2)\xi_3 := \delta_{\xi_2, \xi_3}\, \xi_1 \; .$$

Die von den $A(\xi_1, \xi_2)$ erzeugte Algebra $\mathcal{A}^{(n)}(\mathcal{G}, i, j)$ ist einfach $M_N(\mathbb{C})$, wobei $N = dim\, \mathcal{P}^{(n)}(\mathcal{G}, i, j)$. Zu $\mathcal{P}^{(n)}(\mathcal{G}, i)$ (alle Pfade der Länge n von i aus mit beliebigem Endpunkt) gehört dann eine direkte

Summe von $M_{N_j}(\mathbb{C})$, $j = 1, \ldots, |\mathcal{G}|$, zwei Operatoren zu zwei Strings mit verschiedenen Endpunkten kommutieren.
Das Verlängern von Pfaden induziert natürliche Einbettungen der Algebra $\mathcal{A}^{(n)}(\mathcal{G})$ in $\mathcal{A}^{(n+1)}(\mathcal{G})$ (hier seien jetzt alle Anfangspunkte zugelassen), so daß man als String-Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ ein induktives System erhält, dessen Bratteli-Diagramm auf jeder Stufe aus dem ursprünglichen Graphen besteht (vgl. nochmals Abb. 3.1). Insbesondere sind die Einbettungsmatrizen $\Phi^{(n)}$ alle durch die Adjazenzmatrix $C_{\mathcal{G}}$ gegeben, also die $|\mathcal{G}| \times |\mathcal{G}|$ Matrix über $\mathbb{Z}_+$, deren ij ter Eintrag angibt, wieviele Kanten vom Vertex i zum Vertex j führen.
Man beachte, daß i.a. die Bratteli-Diagramme von AF-Algebren nicht in dieser Weise *stationär* zu sein brauchen. Alle mit CFT verbundenen Beispiele des nächsten Kapitels sind aber wenigstens periodisch ($\Phi^{(n+K)} = \Phi^{(n)}$ für ein K).

Da AF-Algebren einerseits relativ einfache C^*-Algebren sind, andererseits aber doch genügend reiche Strukturen aufweisen, werden sie recht häufig in der Theorie der Operator-Algebren als Ausgangspunkt komplizierterer Konstruktionen bemüht, beispielsweise bei Jones' Konstruktion von Einbettungen von Subfaktoren (s. [*GHJ*]): Man startet von einer Folge von *Temperley-Lieb-Jones-Projektoren* e_i, $i \in \mathbb{Z}_+$, die den Relationen ($\tau \in \mathbb{C}$)

$$\begin{aligned} e_i^2 &= e_i \\ e_i e_{i\pm 1} e_i &= \tau e_i \\ e_i e_j &= e_i e_j \ \text{ für } |i-j| > 1 \end{aligned} \tag{3.2a}$$

genügen. Für

$$\tau^{-1} \in \{4\cos^2(\frac{\pi}{q})\,|q \geq 3 \text{ ganz}\,\} \cup [4, \infty] \tag{3.2b}$$

bildet $M_N := \langle e_1, \ldots, e_N \rangle$ eine endlich-dimensionale C^*-Algebra, und der Turm $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ ist eine AF-Algebra. Indem man geeignete von-Neumann-Abschlüsse bildet, kann man $M := \langle 1, e_1, e_2, \ldots \rangle$ bzw. $N := \langle 1, e_2, e_3, \ldots \rangle$ zu Faktoren vom Typ II_1 oder auch zu Faktoren vom Typ III machen; die Einbettung $N \subset M$ hat dann den Index τ^{-1}.
Während die diskrete Serie von Index-Werten aus (3.2b) vollständig durch Superauswahl-Sektoren rationaler CFT reproduziert werden kann (schon durch die Quantendimensionen der primären Felder, die zu den fundamentalen Darstellungen von SU(2)-WZW-Theorien gehören), ist relativ wenig darüber bekannt, welche Werte aus dem kontinuierlichen Anteil von (3.2b) in rationalen CFT vorkommen.

Dies ist nur ein Beispiel für das Auftreten von AF-Algebren als technische Hilfsmittel in der Theorie der Operator-Algebren, wohl das prominenteste sowohl wegen seines Zusammenhangs mit Knoteninvarianten als auch aufgrund der Herkunft der Temperley-Lieb-Algebra aus der Theorie integrabler statistischer Modelle [*Ba*].
Naheliegend ist nun die Frage, ob sich ein Überblick über alle möglichen AF-Algebren gewinnen läßt. Da die Bratteli-Diagramme allein keinen zuverlässigen Aufschluß über die Isomorphie zweier AF-Algebren geben, muß man andere Invarianten konstruieren, die eine Klassifikation leisten können.

III.3 *K*-Theorie

Diese 1976 von Elliott [*Ell*] unter dem Namen *Dimensionsgruppe* eingeführte Invariante ist die K_0-*Gruppe*. Im Unterschied zu "numerischen" Invarianten wie dem Jones-Index handelt es sich hier um einen

Funktor von der Kategorie der C^*-Algebren in die der abelschen Gruppen. Elliotts Dimensionsgruppen sind das erste Glied einer langen Reihe von Funktoren – höhere K-Gruppen, Ext, Kasparovs bivariante KK-Gruppen etc. – die inzwischen zum Standard-Handwerkszeug in der Theorie der Operator-Algebren gehören, wenn es darum geht, komplizierte Strukturfragen zu vereinfachen.

Die Konstruktion der K_0-Gruppe $K_0(\mathcal{A})$ einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ (die der Einfachheit halber unital sei, siehe [*Bla*] zum allgemeinen Fall) geht von den *Projektoren* $p \in \mathcal{A}$, $p^2 = p = p^*$, aus, die ja schon bei der Einteilung von Faktoren in verschiedene Typen eine Rolle spielten. Hier nun bildet man zuerst die Menge $Proj(\mathcal{A})$ der *Äquivalenzklassen* $[p]$, wobei $p \sim p'$, wenn es $x, y \in \mathcal{A}$ gibt mit $p = xy$, $p' = yx$. (Im Fall von AF-Algebren führt unitäre Äquivalenz $p \sim_u p'$ gdw. $p' = upu^*$ für ein unitäres $u \in \mathcal{A}$ zum gleichen Resultat.)
Manche dieser Äquivalenzklassen können addiert werden: Sind p und q orthogonal, $pq = qp = 0$, so ist auch $p + q$ ein Projektor, und man definiert $[p] + [q] := [p + q]$.
Die Addition zweier beliebiger Projektor-Klassen wird möglich, wenn man mit $M_\infty(\mathcal{A})$ an Stelle von $\mathcal{A}$ startet, der sog. *stabilen Algebra* über $\mathcal{A}$, gebildet aus allen endlichen Matrizen mit Einträgen in $\mathcal{A}$ – genauer gesagt ist $M_\infty(\mathcal{A})$ der induktive Limes all dieser Matrixalgebren, wobei $x \in M_n(\mathcal{A})$ mit $diag(x, 0) \in M_{n+1}(\mathcal{A})$ identifiziert wird. Da $diag(p, 0)$ und $diag(0, p)$ in $M_2(\mathcal{A})$ unitär äquivalent und gleichzeitig orthogonal sind, ist die Addition beliebiger Klassen von Projektoren in $Proj(M_\infty(\mathcal{A}))$ wohldefiniert: Man erhält eine *abelsche Halbgruppe*.
Im letzten Schritt zur Gruppe $K_0(\mathcal{A})$ benutzt man die *Grothendieck-Konstruktion*, d.h. man führt formale Differenzen oder negative Elemente wie bei der Vervollständigung der natürlichen Zahlen zu $\mathbb{Z}$ ein. Im allgemeinen Fall kann es vorkommen, daß bei diesem Konstruktionsschritt verschiedene Projektorklassen zusammenfallen ("Kürzung"), man vergleiche dasselbe Phänomen bei der toplogischen K^0-Gruppe der 2-Sphäre: In $K^0(S^2)$ gehören das nicht-triviale Tangentialbündel von S^2 und das triviale zwei-dimensionale Bündel zur selben K^0-Klasse, da Addition des Normalenbündels jeweils zum selben Resultat führt. Bei AF-Algebren treten derlei Komplikationen aber nicht auf [*Bla*].

<u>Beispiele:</u> Der Zusammenhang zur topologischen K-Theorie ist durch $K_0(C(X)) = K^0(X)$ gegeben, X ein kompakter Hausdorff-Raum: Anstelle eines Vektorbündels E über X kann man ebensogut das Bündel der Schnitte $\Gamma(E)$ betrachten, das ein projektiver Modul über $C(X)$ ist und daher einem Projektor in $M_\infty(C(X))$ entspricht.
Man beachte, daß die topologische K^0-Gruppe eine kanonische Produktoperation trägt, da Vektorbündel tensoriert werden können. Diese Ringstruktur hat für beliebige (nicht-kommutative) C^*-Algebren kein Pendant in $K_0(\mathcal{A})$.

Für eine Matrixalgebra $\mathcal{A} = M_m(\mathbb{C})$ ist $Proj(\mathcal{A}) = \{0, 1, \ldots, m\}$, da die Klasse eines Projektors einfach durch seinen Rang bestimmt ist. m vertritt die Klasse der $\mathbf{1}$ in $\mathcal{A}$. Die stabile Algebra $M_\infty(\mathcal{A}) = M_\infty(\mathbb{C})$ ist jedoch von m unabhängig, und man sieht sofort, daß $Proj(M_\infty(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}_+$ sowie $K_0(M_m(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$ für alle m gilt.

Für von-Neumann-Algebren $\mathcal{M}$ ist die K_0-Gruppe keine ausgesprochen feine Invariante, da diese $\mathcal{M}$ "zu groß" sind: Entweder gibt es zu viele Projektoren, oder zu viele Projektoren sind äquivalent und somit $Proj(\mathcal{M})$ zu klein. Insbesondere gilt $K_0(\mathcal{M}) = 0$ für Faktoren vom Typ III (alle Projektoren sind äquivalent zu 0 oder $\mathbf{1}$, und diese beiden Klassen fallen bei der Grothendieck-Konstruktion auch noch zusammen: "Kürzung").

Einige abstrakte Eigenschaften von K_0 sind für uns besonders interessant, da sie es ermöglichen, $K_0(\mathcal{A})$ für AF-Algebren leicht zu berechnen. Man [*Bla*] beweist das folgende:

i) $K_0 : C^* \longrightarrow Ab$ ist ein *kovarianter Funktor*: Zu jedem *-Homomorphismus $\rho : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ von C^*-Algebren gehört ein Homomorphismus $\rho_* : K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow K_0(\mathcal{B})$ der K_0-Gruppen, kanonisch definiert durch $\rho_*([p]) = [\rho(p)]$ und lineare Fortsetzung auf den ganzen $\mathbb{Z}$-Modul $K_0(\mathcal{A})$. Wenn ρ und ρ' unitär äquivalent sind, dann ist $\rho_* = \rho'_*$.

ii) K_0 respektiert *direkte Summen*: $K_0(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = K_0(\mathcal{A}) \oplus K_0(\mathcal{B})$

iii) K_0 respektiert *induktive Limites*: $K_0(\varinjlim \mathcal{A}^{(n)}) = \varinjlim K_0(\mathcal{A}^{(n)})$

Mithilfe dieser Tatsachen läßt sich z.B. sofort die K_0-Gruppe eines Turmes von Algebren hinschreiben: Für Multimatrix-Algebren $\mathcal{A}^{(n)}$ wie in Gl. (3.1) gilt wegen $K_0(M_m(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$ und *ii)* einfach $K_0(\mathcal{A}^{(n)}) = \mathbb{Z}^{k_n}$; die Einbettungen der Algebren $\phi^{(n)} : \mathcal{A}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{A}^{(n+1)}$ induzieren Gruppen-Homomorphismen $\phi_*^{(n)} : \mathbb{Z}^{k_n} \longrightarrow \mathbb{Z}^{k_{n+1}}$, die einfach durch die $k_{n+1} \times k_n$ Einbettungsmatrizen gegeben sind: $\phi_*^{(n)} = \Phi^{(n)}$.
Aus dem Bratteli-Diagramm einer AF-Algebra erhält man also den Turm der K_0-Gruppe schlicht dadurch, daß man alle Punkte mit $\mathbb{Z}$ identifiziert. Es bleibt nur noch, den induktiven Limes der Gruppen zu bilden – vgl. auch Abb. 3.2.
Man beachte, daß man auf diese Weise eigentlich nur die K_0-Gruppe des induktiven Limes berechnet, ohne Berücksichtigung des C^*-Abschluß; Elliott konnte jedoch zeigen, daß

$$K_0\big(\varinjlim \mathcal{A}^{(n)}\big) = K_0\big(\overline{\varinjlim \mathcal{A}^{(n)}}\big)$$

gilt, man für die K-Theorie von AF-Algebren also topologische Fragestellungen außer acht lassen kann.

Die K_0-Gruppe einer C^*-Algebra besitzt über die genannten Eigenschaften hinaus noch eine *Ordnungsstruktur:* $K_0(\mathcal{A})$ enthält eine additiv abgeschlossene Teilmenge $K_0(\mathcal{A})_+$, *positiver Kegel* genannt, die $K_0(\mathcal{A})$ erzeugt:

$$K_0(\mathcal{A})_+ - K_0(\mathcal{A})_+ = K_0(\mathcal{A}) \ , \quad K_0(\mathcal{A})_+ \cap (-K_0(\mathcal{A})_+) = 0 \ .$$

Für $x, y \in K_0(\mathcal{A})$ definiert man $x \geq y :\Leftrightarrow x - y \in K_0(\mathcal{A})_+$. Ein Homomorphismus ρ_* zweier K_0-Gruppen heißt *positiv*, wenn $\rho_*(K_0(\mathcal{A})_+) \subset K_0(\mathcal{B})_+$ gilt. Das ist in unseren Fällen für alle K_0-Homomorphismen der Fall, die von Algebra-Homomorphismen ρ herkommen, da die ja Projektoren in Projektoren abbilden und $Proj(\mathcal{A})$ wiederum den positiven Kegel erzeugt.

Bei endlich-dimensionalen C^*-Algebren kann für $K_0(\mathcal{A})_+$ einfach $Proj(M_\infty(\mathcal{A}))$ genommen werden – also $K_0(\mathcal{A})_+ = (\mathbb{Z}_+)^k$, wenn $\mathcal{A}$ aus k einfachen Matrixfaktoren besteht –, aber ebenso hat z.B. auch die Menge $(\mathbb{Z}_{>0})^k \cup \{0\}$ alle definierenden Eigenschaften eines positiven Kegels.
Der positive Kegel einer AF-Algebra läßt sich genau wie die K_0-Gruppe als induktiver Limes der $K_0(\mathcal{A}^{(n)})_+$ erklären. Demnach gehört ein Element $x^{(n)} \in K_0(\mathcal{A}^{(n)})$ zu $K_0(\mathcal{A})_+$, wenn es eine Zahl N gibt, so daß

$$\phi_*^{(n+N-1)} \cdots \phi_*^{(n)}(x^{(n)}) \in K_0(\mathcal{A}^{(n+N)})_+ \ . \tag{3.3}$$

Die von den Einbettungen $\phi^{(n)}$ induzierten $\phi_*^{(n)}$ sind natürlich positive Homomorphismen.
Wenn das Bratteli-Diagramm einer AF-Algebra stationär ist mit symmetrischer Einbettungsmatrix C zwischen allen aufeinanderfolgenden Etagen (was etwa bei einer Stringalgebra über einem nicht-orientierten Graphen der Fall ist), dann reduziert sich die Berechnung von $K_0(\mathcal{A})_+$ auf die des *Perron-Frobenius-Eigenvektors* v_C: Dies ist der Eigenvektor zum größten Eigenwert von C mit lauter positiven Einträgen

(was v_C bis auf Skalierung mit einer positiven Zahl eindeutig bestimmt, siehe [*GHJ*]). Die Bedingung (3.3) von oben ist dann gleichbedeutend damit, daß $x^{(n)}$ eine positive Komponente in Richtung v_C hat:

$$K_0(\mathcal{A})_+ = \{x^{(n)} \in K_0(\mathcal{A}^{(n)}) \mid x^{(n)} = 0 \text{ oder } \langle x^{(n)} \mid v_C\rangle > 0\}/\sim\ , \tag{3.4}$$

wobei $\sim$ die Identifikation von $x^{(n)}$ und $\phi^{(n)}(x^{(n)})$ im induktiven Limes symbolisiert und für die endlich-dimensionalen Algebren die positiven Kegel $K_0(\mathcal{A}^{(n)})_+ = (\mathbb{Z}_{>0})^{k_n} \cup \{0\}$ gewählt wurden; $\langle .|.\rangle$ schließlich steht für das Standard-Skalarprodukt im euklidischen Raum.

Ein weiteres Merkmal der K_0-Gruppe ist schließlich die Existenz einer sog. *Ordnungseinheit*, eines speziellen Elements u in $K_0(\mathcal{A})_+$, das ganz $K_0(\mathcal{A})$ erzeugt. Die Menge $\Gamma := \{x \in K_0(\mathcal{A})_+ \mid x \leq u\}$ heißt *Skala* von $K_0(\mathcal{A})$.
Im unitalen Fall kann $u = [\mathbf{1}]$ gewählt werden: Dies zeigt, daß die Ordnungseinheit Information über die ursprüngliche "Größe" von $\mathcal{A}$ festhält, die beim Übergang zu $M_\infty(\mathcal{A})$ in der K_0-Konstruktion zunächst verlorenging. K_0-Homomorphismen ρ_* mit $\rho_*(u_{\mathcal{A}}) = u_{\mathcal{B}}$ heißen *ordnungs-unital* (und sind automatisch positiv).

Das wesentliche Theorem von Elliott besagt nun, daß die K_0-Gruppe mit positivem Kegel und Ordnungseinheit eine AF-Algebra bis auf Isomorphie festlegt:

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ AF-Algebren und σ ein ordnungs-unitaler Isomorphismus von $K_0(\mathcal{A})$ und $K_0(\mathcal{B})$. Dann existiert ein Algebra-Isomorphismus $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ mit $\phi_* = \sigma$.

Ist σ nur positiv, so gilt noch *stabile Isomorphie*: $M_\infty(\mathcal{A}) \cong M_\infty(\mathcal{B})$.
Für endlich-dimensionale C^*-Algebren kann man sogar noch explizitere Aussagen über den Zusammenhang von K_0- und Algebra-Homomorphismen machen. Bei [*Bla, Eff*] findet man folgende Aussage:

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ endlich-dimensionale C^*-Algebren. Ist σ ein ordnungs-unitaler Homomorphismus von $K_0(\mathcal{A})$ nach $K_0(\mathcal{B})$, dann gibt es einen *-Homomorphismus $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ mit $\phi_* = \sigma$, der bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig ist. ϕ ist injektiv, wenn $\mathit{ker}\,\phi_* \cap K_0(\mathcal{A})_+ = 0$.

Für endlich-dimensionale C^*-Algebren ist die K_0-Invariante also sogar fein genug, um auch noch *-Homomorphismen bis auf unitäre Äquivalenz zu klassifizieren.

Über diese erste und einfachste K-theoretische Invariante von Operator-Algebren hinaus lassen sich weitere K-Gruppen definieren, die allerdings für uns keine Rolle spielen werden, da wir uns ausschließlich auf AF-Algebren konzentrieren, die schon durch K_0 klassifiziert werden.
Von den *höheren K-Gruppen* tritt für C^*-Algebren nur die *K_1-Gruppe* auf (im Gegensatz etwa zur algebraischen K-Theorie beliebiger Ringe). Sie kann durch

$$K_1(\mathcal{A}) = K_0(S\mathcal{A})$$

mit der sog. *Einhängung*

$$S\mathcal{A} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{A} \mid f \text{ stetig mit } \lim_{x\to\pm\infty} \| f(x) \| = 0\}$$

definiert werden; ein vielleicht anschaulicheres Bild liefert die Beschreibung von $K_1(\mathcal{A})$ als Quotient von $\mathrm{GL}_\infty(\mathcal{A})$ nach der Zusammenhangskomponente der Eins, s. [*Bla*]. Für AF-Algebren ist $K_1(\mathcal{A}) = 0$, ganz allgemein gilt über $\mathbb{C}$ *Bott-Periodizität* der Länge 2: $K_n(\mathcal{A}) = K_{n+2}(\mathcal{A})$, wobei natürlich $K_n(\mathcal{A}) := K_0(S^n\mathcal{A})$.

Noch allgemeinere Funktoren sind die *bivarianten KK-Gruppen* von Kasparov: Zu je zwei C^*-Algebren $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ (eventuell mit einigen zusätzlichen Eigenschaften) wird eine abelsche Gruppe $KK(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ assoziiert, so daß die Zuordnung kontravariant im ersten und kovariant im zweiten Argument ist. Dieser Funktor findet vielfältige Anwendungen, z.B. bei nicht-kommutativen Verallgemeinerungen des Atiyah-Singer-Index-Theorems, und enthält andere wichtige Funktoren als Spezielfälle, insbesondere die K-Gruppen: $K_0(\mathcal{A}) = KK(\mathbb{C}, \mathcal{A})$, wobei jedoch die Ordungsstruktur von K_0 sich nicht auf andere KK-Gruppen überträgt.

Die allgemeine Definition von $KK(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ kann hier nicht gegeben werden, da sie sehr viel Vorbereitung benötigt [*Bla*, *JT*]. Sind jedoch $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei AF-Algebren, so ergibt sich die Kasparov'sche schon aus den K_0-Gruppen:

$$KK(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = Hom(K_0(\mathcal{A}), K_0(\mathcal{B}))$$

Da Homomorphismen komponiert werden werden können, existiert hier ein Produkt

$$KK(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \times KK(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \longrightarrow KK(\mathcal{A}, \mathcal{C}) ,$$

das jedoch bloß ein Sonderfall des Kasparov'schen *Schnittprodukts* ist; diese sehr wichtige Eigenschaft zeichnet KK-Theorie vor anderen Funktoren aus der Theorie der Operator-Algebren aus. Da wir uns weiter unten mit Endomorphismen von K_0-Gruppen von AF-Algebren beschäftigen werden, insbesondere mit deren Multiplikationsregeln, kann man sagen, daß wir gewissermaßen schon Anwendungen der KK-Theorie in der CFT studieren.

IV. AF-Algebren und Konforme Quantenfeldtheorie

In seiner vollständigen Form erweist sich der DHR-Formalismus als viel zu kompliziert, um damit Ergebnisse bei der Untersuchung konkreter Modelle der CFT zu erzielen, von ganz wenigen Ausnahmen abgesehen. Dabei ist sein axiomatischer Aufbau, der zunächst daraufhin angelegt ist, ganz allgemeine Eigenschaften von QFT zu studieren, eher hinderlich. Will man nun aber die konzeptuellen Errungenschaften des algebraischen Zugangs nicht völlig aufgeben, liegt es nahe, an einigen Stellen Zusatzannahmen in den Formalismus einzuführen, die zwar das Untersuchungsfeld einengen, aber dafür erlauben, mit den Objekten konkreter umzugehen.

Ein natürlicher Ansatzpunkt für derartige modell-charakterisierende Vereinfachungen ist die Observablen-Algebra: So wie in der gewohnten Formulierung von CFT ein Modell zuallererst durch die Angabe der zugehörigen "Symmetrie-Algebra" spezifiziert wird, ist auch im algebraischen Zugang eine Theorie durch ihr Netz von lokalen Observablen-Algebren mit zugehöriger universeller Algebra $\mathcal{A}$ wesentlich bestimmt. Und wie in der üblichen Formulierung der CFT die "Symmetrie-Algebra" stets eine $\mathcal{W}$-Algebra ist, könnte man vermuten, daß analog die DHR-Observablen-Algebra $\mathcal{A}$ zu einer bestimmten Klasse von Operator-Algebren in Verbindung steht, deren Auftreten für CFT charakteristisch ist.

Die für alles Weitere *entscheidende Hypothese* ist, daß diese Klasse die der *AF-Algebren* ist, und daß man im DHR-Zugang die "wahre" Observablen-Algebra durch eine geeignete AF-Algebra ersetzen kann, die immer noch wesentliche Information über die betrachtete CFT trägt.

Die genaue Beziehung zwischen dieser *charakteristischen AF-Algebra* und etwa $\mathcal{A}_{univ}$ von [*FRS2*] ist noch unklar, dementsprechend kann die AF-Hypothese im Moment auch nicht allgemein bewiesen werden. Jedoch werden im folgenden einige rechtfertigenden Beispiele für die Bedeutung von AF-Algebren in oder im Umkreis der CFT aufgezählt, die aus recht verschiedenen Bereichen kommen: aus der Physik der 2- und 1-dimensionalen Gittermodelle, aus allgemeinen Überlegungen in der algebraischen Quantenfeldtheorie selbst, sowie aus konkreten Rechnungen in Zusammenhang mit Virasoro-minimalen Modellen.

IV.1 Kritische Gittermodelle

Es ist eine in der Physik allgemein akzeptierte Vorstellung, daß Phasenübergänge zweiter Ordnung in statistischen Systemen durch Skaleninvarianz, ja sogar konforme Invarianz ausgezeichnet sind. Dies stellt eine der Motivationen für das Studium von CFT dar, die demnach die kritischen Punkte von zwei-dimensionalen statistischen Modellen im Kontinuums-Limes beschreiben: Insbesondere geben CFT über die kritischen Exponenten von Ordnungsparametern Aufschluß, die sich aus den konformen Dimensionen der Höchstgewichts-Darstellungen berechnen lassen, s. z.B. [*Gin*] und dortige Literaturhinweise.
Im Gebiet zwei-dimensionaler statisticher Modelle stehen weit entwickelte Rechenmethoden zur Verfügung – Transfer-Matrizen, Yang-Baxter-Gleichung, Bethe-Ansatz, Ausnützen der Äquivalenz zu eindimensionalen Quanten-Spinketten, s. dazu [*Ba*] –, so daß diese Theorien sehr detailliert studiert werden können. Es stellt sich dabei heraus, daß "auf dem Gitter" weit mehr der für CFT typischen mathematischen Strukturen realisiert sind als nur konforme Dimensionen und die zentrale Ladung (die z.B. in die sog. "finite size"-Beiträge zur Freien Energie eingeht), und zwar oft sogar in einer besser kontrollierbaren Form als in den kontinuierlichen QFT selbst.

Eine wichtige Klasse innerhalb der recht verschiedengestaltigen zwei-dimensionalen kritischen Modellen sind die IRF Modelle ("interaction round a face"), bei denen je vier Spinwerten a, b, c, d an den Ecken einer Gitterplakette ein (noch von weiteren Parametern abhängiges) Boltzmann-Gewicht $w(a, b, c, d)$ zugewiesen wird; die Zustandssumme ist dann

$$Z = \sum_{\mathrm{conf}} \prod_{\langle a,b,c,d\rangle} w(a, b, c, d)\,,$$

wobei sich die Summe über alle erlaubten Spin-Konfigurationen auf dem Gitter ersteckt. Diese Auswahl wird bei den von Andrews, Baxter und Forrester eingeführten und von Pasquier verallgemeinerten ADE-Modellen [ABF, FB, Pa] von einem Dynkin-Diagramm des Typs A, D, E bestimmt: Die Spins nehmen Werte auf dem Graphen an, so daß die Werte von auf dem Gitter benachbarten Punkten auch auf dem Graphen durch eine Kante verbunden sein müssen. Anders ausgedrückt: Die auf einer eindimensionalen Kette erlaubten Konfigurationen sind durch Pfade auf dem Dynkin-Diagramm gegeben.
Diesen IRF-Modelle wurden viele interessante Eigenschaften nachgewiesen: Huse konnte einige kritische Exponenten berechnen und zeigen, daß die Phasenübergänge von den unitären Virasoro-minimalen Theorien beschrieben werden [Hu]. Außerdem läßt sich auf den Kettenkonfigurationen eine Energiegewichtung definieren [ABF, FB, Ri], mit deren Hilfe das Energiespektrum durch konforme Charakterfunktionen ausgedrückt werden kann, auch weg von der kritischen Temperatur. (Auf den Vergleich dieser Pfadraum-Graduierung mit der in IV.4 eingeführten wird später noch kurz eingegangen, ebenso auf die Möglichkeit, Darstellungen der Virasoro-Algebra auf dem Gitter zu definieren). Mit anderen Methoden konnte Pasquier sogar einen Zusammenhang von ADE-Gittermodellen und der ADE-Klassifikation modular invarianter Partitionsfunktionen nach [CIZ] herstellen und darüberhinaus die Existenz algebraischer Strukturen wie Jones-Einbettungen, Quantengruppen-Symmetrien usw. aufzeigen, die für CFT typisch sind [Pa].

Bei näherem Hinsehen stellt sich heraus, daß es – hauptsächlich wegen der Unklarheiten im Konzept des Kontinuums-Limes – schwierig ist, die strukturellen Ähnlichkeiten zwischen Gittermodellen und CFT mathematisch rigoros auf den Punkt zu bringen. Für unsere Zwecke sind aber diese Beobachtungen genug, um immerhin ein Auswahlkriterium für die in der CFT "wichtigen" Operator-Algebren nahezulegen: Da die kritischen Daten der ABF- bzw. Pasquier-Modelle in erster Linie von den "Zulässigkeits"-Graphen kontrolliert werden, darf man erwarten, daß ganz analog die zugehörige Pfad-AF-Algebra für die CFT bestimmend ist.

Solange der Status von Skalenhypthese und Kontinuums-Limes nicht abschließend geklärt ist, kann natürlich auch über den Zusammenhang von IRF-Pfadalgebra und CFT bloß spekuliert werden. Es ist aber amüsant, wie Ideen gerade des Algebraischen Zugangs zur QFT sich relativ zwanglos in die IRF-Modelle hineininterpretieren lassen: Die Einbettungen endlich-dimensionaler Pfad-Konfigurations-Räume kommen vom Verlängern endlicher eindimensionaler Quantenketten her, dementsprechend die Einbettungen der Etagen in der Pfadalgebra von Einbettungen kleinerer Gittergebiete in größere: Die AF-Algebra bietet also gleich eine isotone Netz-Struktur. Weiterer Untersuchung wert wäre auch die formale Ähnlichkeit zwischen der sog. Vertex-IRF-Korrespondenz, s. z.B. [Pa, PS], und dem Verhältnis von Observablen- zu Feld-Algebra in der DHR-Theorie: Die Observablen- bzw. Pfad-Algebra ist jeweils in einer größeren Algebra eingebettet und durch ihre Invarianz unter einer Symmetrietransformation gekennzeichnet, die von einer Quantengruppe herkommt.

IV.2 Sankt-Petersburg-Algebren

Auch hinter dieser erst neuerdings gebräuchlichen Bezeichnung – eine Referenz an L. Faddeevs Schule in St. Petersburg – verbirgt sich ein Ansatz zur diskreten Approximation von CFT im Kontinuum, allerdings von anderer Art: Die Modelle werden von Anfang an auf ein-dimensionalen, chiralen "Gittern" formuliert, und zwar in algebraischer Sprache, nicht als statistisches System. Die ursprüngliche Motivation für die Untersuchung dieser Modelle bestand darin, die in CFT "versteckten" Quantengruppen-Symmetrien besser zu verstehen, sie expliziter sichtbar zu machen $[AFS]$. Da zunächst nur WZW-Modelle betrachtet wurden, wird häufig der Name *Gitter-WZW-Algebren* verwendet.

Im einfachsten Beispiel, das eine Approximation der abelschen WZW-Theorie liefert, startet man zur Konstruktion dieser Algebren mit einer Triangulierung $\mathcal{T}_N$ des Kreises S^1 in N Intervalle I_j, $j = 1, \ldots, N$, $N \geq 3$, und ordnet jedem Intervall einen Operator u_j zu. $\mathcal{U}_N$ sei die von den u_i erzeugte *-Algebra mit folgenden Relationen $[FG, Ga]$:

$$u_{j+N} = u_j \ , \ \ u_j^* = u_j^{-1} \tag{4.1}$$

$$u_j u_{j+1} = q\, u_{j+1} u_j \ , \quad u_i u_j = u_j u_i \ \text{für} \ |i-j| > 1 \tag{4.2}$$

$$u_j^p = 1 \tag{4.3}$$

Dabei ist $q \in \mathbb{C}$ eine $p$te Einheitswurzel: $q^p = 1$. Die Relationen (4.1) gewährleisten die Periodizität und die Unitarität der Generatoren u_j, während (4.2) die entscheidende Beziehung ist, um von einer Diskretisierung der U(1)-WZNW-Algebra sprechen zu können: Führt man eine natürliche Zahl k sowie einen Operator $J(x)$ ein durch

$$q = e^{i\pi/2k} \ , \quad u_j = e^{2\pi i \epsilon J(\epsilon j)/k} \ ,$$

so erhält man aus der Entwicklung von (4.2) nach Potenzen von k^{-1} und ϵ in niedrigster Ordung die Vertauschungsrelation der U(1)-Stromalgebra

$$[J(x), J(y)] = \frac{k}{4\pi i}\delta'(x-y) \ .$$

Zur Relation (4.3) schließlich ist zu bemerken, daß man mit (4.1-2) leicht zeigen kann, daß u_j^p jedenfalls im Zentrum von $\mathcal{U}_N$ liegt und in irreduziblen Dartellungen also durch eine komplexe Zahl repräsentiert wird, die mit (4.3) zu 1 festgelegt ist. (4.3) macht explizit klar, daß $\mathcal{U}_N$ eine endlich-dimensionale C^*-Algebra ist.

Um AF-Algebren zu erhalten, müssen Einbettungen verschiedener $\mathcal{U}_M$ gegeben sein; tatsächlich tauchen diese ganz natürlich beim Übergang zu feineren Triangulierungen ("besseren Approximationen der U(1)-Stromalgebra") auf: Ist $\mathcal{T}_{N'}$ eine Verfeinerung der Triangulierung $\mathcal{T}_N$, so liefert

$$\begin{aligned} &\mathcal{U}_N \longrightarrow \mathcal{U}_{N'} \\ &u_j \mapsto u'_{j+r} \cdots u'_j \quad \text{falls} \quad I_j = I'_{j+r} \cup \ldots \cup I'_j \end{aligned} \tag{4.4}$$

eine Injektion der zugehörigen C^*-Algebren. Bemerkenswert ist die Ähnlichkeit dieser Einbettungsvorschrift zur Blockspin-Transformation von Gittermodellen nach Kadanoff: Man darf von einer (inversen) diskreten Renormierungsgruppen-Transformation sprechen. Da die Triangulierungen von S^1 ein gerichtetes System definieren, kann man den induktiven Limes

$$\mathcal{U}_\infty := \varinjlim_{\mathcal{T}} U_N \tag{4.5}$$

bilden, der hier eine algebraische Version des Kontinuums-Limes darstellt und zudem Renormierungsgruppen-Invarianz im obigen Sinne explizit garantiert: Diese Eigenschaft aber charakterisiert u.a. konform invariante Quantenfeldtheorien. Über die St. Petersburg-Algebren gelangt man so zu einer weiteren Interpretation der Rolle von AF-Algebren in der CFT, die eng mit der Renormierungsgruppe verknüpft ist.

In $[FG, Ga]$ ist angedeutet, wie konforme Transformationen auf den Algebren $\mathcal{U}_N$ und damit auch auf dem induktiven Limes $\mathcal{U}_\infty$ implementiert werden können: Wendet man einen Diffeomorphismus $D \in \mathrm{Diff}_+(S^1)$ auf eine Triangulierung $\mathcal{T}_N$ an, erhält man eine zweite, gleichlange $\mathcal{T}_N'$, und die zugehörige Einbettung (4.4) wird ein Isomorphismus der Algebren (ein "Shift" der Generatoren). In gewissem Sinne kann sogar eine "Sugawara-Konstruktion" angegeben werden $[Ga]$, wenigstens für das U(1)-Gittermodell. Nicht-abelsche Verallgemeinerungen werden ebenfalls studiert, z.B. mit einer Art free-field-Konstruktion, jedoch sind die Ergebnisse noch nicht sehr weitreichend.

Einigermaßen schwierig ist es, die explizite Gestalt des Bratteli-Diagramms festzustellen, das zu $\mathcal{U}_\infty$ und den Einbettungen (4.4) gehört, da man zu diesem Zwecke eine konkrete Realisierung der Relationen (4.1-3) durch Matrizen benötigte. Mit relativ wenig Aufwand kann man aber zu einer naheliegenden Vermutung für das Bratteli-Diagramm gelangen:
Zunächst stellen wir fest, daß $dim\,\mathcal{U}_N = p^N$ ist, da jedes Wort in den Generatoren in die Form $x = c \cdot u_1^{n_1} \cdots u_N^{n_N}$ mit $c \in \mathbb{C}$, $n_j = 0, \ldots, p-1$ gebracht werden kann. Als nächstes bestimmen wir die Dimension des Zentrums $Z(\mathcal{U}_N)$: Mit den Relationen (4.1-3) zeigt man leicht, daß $u_i x = q^{n_{i+1}-n_{i-1}} x u_i$ ist, x vertauscht also genau dann mit allen Generatoren, wenn $n_1 = n_3 = \ldots$ und $n_2 = n_4 = \ldots$ gilt. Wegen der Periodizität folgt, daß $dim\,Z(\mathcal{U}_N) = p$ für ungerades N, aber $dim\,Z(\mathcal{U}_N) = p^2$ für gerades N. $\mathcal{U}_N$ zerfällt also in p bzw. p^2 Matrixfaktoren, und die naheliegendste Zerlegung ist

$$\mathcal{U}_N \cong \bigoplus_{i=1}^{p} M_{p^{\frac{N-1}{2}}}(\mathbb{C}) \qquad (4.6.a)$$

für N ungerade bzw.

$$\mathcal{U}_N \cong \bigoplus_{i=1}^{p^2} M_{p^{\frac{N-2}{2}}}(\mathbb{C}) \qquad (4.6b)$$

für N gerade. Bisher konnte ich noch keinen allgemeinen Beweis dafür finden, daß die Faktoren in $\mathcal{U}_N$ alle gleich groß sind, für manche Werte von p (z.B. für $p = 4$) ist das jedoch die einzige Möglichkeit; aus Gründen der Universalität ist die Zerlegung (4.6) also ausgezeichnet.
Unklar ist auch, wie die Einbettungen aufeinanderfolgender Etagen $\mathcal{U}_N \subset \mathcal{U}_{N+1}$ aussehen, die (unter Rotationen) "invarianteste" Form ist im periodischen Bratteli-Diagramm von Abb. 4.1 gezeigt. Die Rechnungen in Abschnitt V.3 dürfen als Bestätigung für diese vermutete Struktur des $\mathcal{U}_N$-Turmes angesehen werden.

IV.3 AF-Algebren in der Algebraischen Quantenfeldtheorie

Wichtige Hinweise auf die möglichen Rolle von AF-Algebren in der CFT findet man schon im algebraischen Zugang zur QFT nach $[DHR]$. In den Arbeiten $[FRS, Re]$ wird gezeigt, daß die statistischen Eigenschaften von primären Feldern in Pfadräumen "kodiert" sind, die zu den Fusionsgraphen von Superauswahl-Sektoren gehören. Eine Verallgemeinerung dieses Ansatzes $[Re2]$ führt darüberhinaus zu einer Methode, die "Quantensymmetrien" von zwei-dimensionalen QFT mit Zopfgruppen-Statistik zu studieren und, damit eng zusammenhängend, eine Feldalgebra im Sinne von DHR zu konstruieren.

Wie in Kapitel II erwähnt, spielen die Statistik-Operatoren $\epsilon(\rho_i,\rho_j)$ eine bedeutende Rolle im Aufbau der Algebraischen QFT. $\epsilon(\rho_i,\rho_j)$ ist ein Spezialfall eines sog. *Intertwiners*: Diese Algebraelemente bilden den Vektorraum

$$(\rho_i|\rho_j) := \{T \in \mathcal{A} \mid \rho_i(A)T = T\rho_j(A)\ \forall A \in \mathcal{A}\}\,,$$

der für rationale QFT endlich-dimensional ist – und zwar gilt $dim(\rho_i\rho_j|\rho_k) = N_{ij}^k$ mit den Fusionskoeffizienten auf der rechten Seite. Man beachte, daß $(\rho|\rho) = \rho(\mathcal{A})'$. Falls ρ_j irreduzibel ist, definiert $T^*S =: \langle T,S\rangle \cdot \mathbf{1} \in (\rho_j|\rho_j)$ ein Skalarprodukt auf $(\rho_i|\rho_j)$.

In $[FRS]$ wurden die Hilberträume $(\rho_i\rho^n|\rho_j)$ für irreduzible Endomorphismen ρ_i,ρ_j und einen festgehaltenen Endomorphismus ρ, $n \geq 0$, betrachtet. Es konnte gezeigt werden, daß diese Räume isomorph zu den Pfadräumen über dem Fusionsgraphen von ρ sind, die Pfade der Länge n vom Vertex i zum Vertex j enthalten, vgl. $[Oc]$, III.2. Andererseits liefern diese Intertwiner alle sog. "R-Matrizen", die Vertauschungen geladener Felder beschreiben, s. dazu auch $[Fr, AGS]$. Die Statistik ist also in Pfadräumen und den zugehörigen Stringalgebren festgehalten. Ähnliche Ergebnisse wurden im "üblichen Rahmen" in $[BG, GS]$ erzielt.

Etwas schneller zu AF-Algebren gelangt man, wenn man sich auf die speziellen Intertwiner $(\rho_i|\rho_i)$ konzentriert. Zunächst bemerken wir, daß mit $T \in (\rho_i|\rho_j)$ und einem beliebigen Endomorphismus von $\mathcal{A}$

$$\rho\rho_i(A)\rho(T) = \rho(\rho_i(A)T) = \rho(T\rho_j(A)) = \rho(T)\rho\rho_i(A)$$

gilt, also $\rho(T) \in (\rho\rho_i|\rho\rho_j)$; ρ induziert eine Einbettung

$$(\rho_i|\rho_j) \subset (\rho\rho_i|\rho\rho_j)\ .$$

Zum anderen ist leicht zu sehen, daß $(\rho_i|\rho_i)$ nicht nur ein Hilbertraum, sondern sogar eine *-Unteralgebra von $\mathcal{A}$ ist. Damit läßt sich zu jedem irreduziblen DHR-Endomorphismus ein Turm endlich-dimensionaler C^*-Algebren

$$\mathbb{C} = \rho_i(\mathcal{A})' \subset \rho_i^2(\mathcal{A})' \subset \rho_i^3(\mathcal{A})' \subset \ \cdots \tag{4.8}$$

assoziieren. Der Statistik-Operator $\epsilon_{\rho_i} = \epsilon(\rho_i,\rho_i)$ liegt in der ersten nicht-trivialen Etage $\rho_i^2(\mathcal{A})'$. Schließt man diese AF-Algebra zum II_1-Faktor $\mathcal{R}_i$ ab, erhält man eine Einbettung $\rho_i(\mathcal{R}_i) \subset \mathcal{R}_i$, deren Index durch das Quadrat der Quantendimension von ρ_i gegeben ist $[FRS]$.

Der Turm (4.8) zum Endomorphismus $\rho = \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_n$ (Summe über alle Superauswahl-Sektoren der QFT) statt zu einem irreduziblen ρ_i liefert eine universellere AF-Algebra $\mathcal{M}$, die in $[Re2]$ unter der Bezeichnung "master symmetry algebra" als Ausgangspunkt für eine Rekonstruktion der DHR-Feldalgebra in einer QFT mit Zopfgruppen-Statistik dient und im Prinzip die Daten über alle Quantensymmetrien der Theorie enthält.

Die Bratteli-Diagramme des Turmes (4.8) entstehen durch Iteration des Fusionsgraphen von ρ_i – bzw. für $\mathcal{M}$ der direkten Summe aller in der QFT vorkommenden Fusionsgraphen.

Aus dem Gesagten kann man schließen, daß in jeder niedrig-dimensionalen QFT Pfadräume und AF-Algebren natürlich auftreten und eine ausgezeichnete Rolle für die Statistik und die Quantensymmetrien des Modells spielen. Wohlgemerkt in jeder solchen QFT, nicht nur in konform invarianten. Aus der Erfahrung heraus, daß Statistik und Quantensymmetrien gerade in CFT besonders wichtig sind und die ganze

Struktur einer Theorie schon wesentlich bestimmen, darf man aber erwarten, daß die AF-Unteralgebra $\mathcal{M}$ von $\mathcal{A}$ und die Türme (4.8) schon die wichtigsten Informationen über das Modell enthalten, daß vielleicht sogar die gesamte globale Observablen-Algebra $\mathcal{A}$ und das Haag-Kastler-Netz in einer modell-unabhängigen Weise aus diesen AF-Algebren gewonnen werden können.

Eine gewisse Bestätigung erfährt diese Idee durch die Beispiele – von der U(1)-WZW-Diskussion in $[BMT]$ abgesehen –, in denen ein konformes Modell im Rahmen des DHR-Zugangs behandelt werden konnte, nämlich das Ising-Modell in $[MaS]$ und, darauf aufbauend, die WZW-Modelle mit Level 1 in $[FGV]$. Dort starten die Konstruktionen von der AF-Algebra, die aus zwei Kopien der Pfadalgebra über dem A_3-Dynkin-Diagramm besteht; dieser Graph ist gleichzeitig der einzige interessante Fusionsgraph in den betrachteten CFT. Daß in $[MaS, FGV]$ relativ leicht (globale Vorformen der) DHR-Endomorphismen angegeben werden konnten, liegt allerdings daran, daß diese spezielle AF-Algebra gleichzeitig eine unendlich-dimensionale Lie-Algebra ist, erzeugt im wesentlichen von Bilinearen in den Moden eines freien reellen Fermions ("Majorana-Algebra"). Als AF-Algebra-Generatoren kann man andererseits zwei unabhängige Folgen von Temperley-Lieb-Jones-Projektoren E_i^{NS}, E_i^R (Neveu-Schwarz- und Ramond-Sektor) wählen, die jeweils die Relationen (3.2) mit $\tau = \frac{1}{2}$ erfüllen. Auf diesen Erzeugern wirken die Endomorphismen von $[MaS]$ übrigens in einfacherer Weise: Neben $\rho_0 = id$ für die Vakuum-Darstellung und einem weiteren Automorphismus ρ_1 ist $\rho_{\frac{1}{2}}$ mit

$$\rho_{\frac{1}{2}}(E_i^{NS}) = E_{i+1}^R\,, \quad \rho_{\frac{1}{2}}(E_i^R) = E_{i+1}^{NS} \tag{4.9}$$

und der Fusionsregel $[\rho_{\frac{1}{2}}] \times [\rho_{\frac{1}{2}}] = [\rho_0] \oplus [\rho_1]$ der interessante Sektor.
Zwar lassen wie gesagt diese Arbeiten noch einige Fragen in Bezug auf die Lokalisierungs-Eigenschaften offen, aber insgesamt ist festzuhalten, daß hier so gut wie alle Facetten der CFT aus einer geeigneten AF-Algebra rekonstruiert werden können, was natürlich unsere AF-Algebra-Hypothese unterstützt.

IV.4 Pfaddarstellungen minimaler Modelle

In diesem Abschnitt wird ein anderer Zusammenhang von konformen Modellen und AF-Algebren vorgestellt, der fürs Folgende noch wichtiger ist als die vorigen allgemeinen Überlegungen, da jetzt konkreten CFT bestimmte Pfadalgebren zugeordnet werden. Diese Verbindung wird hergestellt, indem Pfadraum-Realisierungen von Virasoro-Höchstgewichts-Moduln konstruiert werden, genauer: Man findet (markierte) Graphen $\mathcal{G}$ und kann auf $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ einen Energie-Operator L_0 derart definieren, daß die Dimensionen der L_0-Eigenräume mit denen in den irreduziblen Höchstgewichts-Moduln übereinstimmen. Man darf daraus schließen, daß die zugehörige Pfad-AF-Algebra eine Darstellung der ganzen Virasoro-Algebra ist – zumindest, daß die L_n durch AF-Algebra-Elemente approximiert werden. Da der Energie-Impuls-Tensor die Observablen-Algebra erzeugt, sind in diesen Fällen wirklich die am Anfang des Kapitels propagierten AF-Modelle konformer QFT präsent – von Lokalitäts-Fragen noch abgesehen.
Bei den Feldtheorien, für die bislang solche Pfaddarstellungen bekannt sind, handelt es sich um minimale Modelle der Virasoro-Algebra mit zentraler Ladung $c(p,p')$ (vgl. Kapitel I), wobei eine der beiden teilerfremden Zahlen p, p' gerade ist. Darunter findet sich die Serie mit

$$c(2,p) = -\frac{(3p-4)(p-3)}{p}\,, \tag{4.10}$$

$p \geq 5$ ungerade. Diese nicht-unitären Modelle sollen zunächst gesondert diskutiert werden, nicht nur, weil sie in mancherlei Hinsicht sehr einfach sind, sondern auch, weil in gewissem Sinne "Bausteine" der komplizierteren minimalen Modelle bilden.

Die CFT mit $c(2,p)$ und Darstellungen $\mathcal{H}_j$ zu den konformen Dimensionen

$$h_j = \frac{-j(p-2-j)}{2p}, \quad j = 0, 1, \ldots, K \tag{4.11}$$

mit $p = 2K+3$ sind rational (die Fusion "schließt" innerhalb dieser Darstellungen) und im Prinzip in allen Details bekannt, insbesondere was die Lage der Nullvektoren in den Höchstgewichts-Moduln anlangt: Sie kann der Kac'schen Determinantenformel oder den Charakterformeln von Rocha-Caridi – abgeleitet aus den Einbettungsdiagrammen von Virasoro-Verma-Moduln – entnommen werden. Ein anderer Zugang zu den irreduziblen Darstellungen dieser Modelle wurde in $[FNO]$ beschritten: Wegen des Isomorphismus zwischen Feldern und Zuständen führt die Existenz von Nullfeldern zu "Lücken" im Verma-Modul. Für $c(2,5) = -\frac{22}{5}$ etwa verschwindet das normalgeordnete Produkt $\Lambda = \mathcal{N}(L,L)$ und spannt im Raum der Felder das sog. *annihilierende Ideal* des Modells auf. Auf einen Höchstgewichts-Zustand angewandt und in L_n-Moden ausgeschrieben liefert $\Lambda = 0$ – bzw. das Verschwinden anderer normalgeordneter Produkte des Energie-Impuls-Tensors in anderen $c(2,p)$-Modellen – lineare Abhängigkeiten zwischen Vektoren der Poincaré-Birkhoff-Witt-Basis. Feigin, Nakanishi und Ooguri konnten so zeigen, daß $\mathcal{H}_j$ durch alle die Vektoren

$$L_{m_1} L_{m_2} \cdots L_{m_n} |h_j\rangle \tag{4.12}$$

– $|h_j\rangle$ ist der Höchstgewichts-Vektor – aufgespannt wird, in denen die Virasoro-Monome den Beschränkungen $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_n \geq 1$ und außerdem

$$m_i - m_{i+K} \geq 2 \tag{4.13}$$

für $1 \leq i \leq n-K$ sowie

$$\#\{m_i = 1\} \leq j \tag{4.14}$$

unterliegen. Die sog. "Differenz-Zwei-Bedingung" (4.13) charakterisiert das Modell $c(2,p)$, während die Anfangsbedingung (4.14) – die besagt, daß höchstens die letzten j der m_i in (4.12) gleich 1 sind – den Superauswahl-Sektor $\mathcal{H}_j$ festlegt.

Um zu beweisen, daß keine weiteren linearen Abhängigkeiten existieren wurde in $[FNO]$ auf die sog. Andrews-Gordon-Identitäten für Potenzreihen zurückgegriffen und damit gezeigt, daß die L_0-Charaktere auf der Basis (4.12) mit den bekannten nach Rocha-Caridi (1.25) übereinstimmen. Alternativ müßte es auch genügen, wenn man wüßte, daß in den $c(2,p)$-Modellen tatsächlich jeweils nur ein primäres Nullfeld auftritt.

Wenn wir die Ergebnisse von $[FNO]$ einfach als gegeben hinnehmen, können wir aus der Bedingungen (4.12-14) eine Pfaddarstellung der Virasoro-Höchstgewichts-Moduln ableiten. Wie sich zeigen wird, sind die zugrundeliegenden Graphen für die $c(2,p)$-Theorien erstaunlicherweise Fusions-Graphen bestimmter primärer Felder $[KR]$.

Zunächst schreibt man die L-Monomen aus der Darstellung zum Höchstgewicht $|h_j\rangle$ eindeutig in Folgen um:

$$L_M^{a_M} \ldots L_1^{a_1} |h_j\rangle \;\mapsto (a_0, a_1, \ldots, a_M, 0, \ldots) \tag{4.15}$$

Die a_k, $k > 0$ geben also die Potenz an, mit der L_k in einem Basisvektor auftritt, während a_0 als "Dummy-Variable" dazu dient, den Superauswahl-Sektor zu indizieren; alle Folgen sollen sich schließlich bei 0 "einpendeln". Dieser Folgenraum erbt natürlich auch die Energie-Graduierung der Virasoro-Darstellung, nämlich

$$L_0(a_0, a_1, \ldots, a_M, 0, \ldots) = \big(h(a_0) + \sum_{i=0}^{M} i a_i\big) \cdot (a_0, a_1, \ldots, a_M, 0, \ldots)\,, \tag{4.16}$$

und ebenso übertragen sich die Einschränkungen (4.13-14) an die L-Monome in entpsrechende an die Folgenglieder a_i: Die "Differenz-Zwei-Bedingung" wird zu

$$a_i + a_{i+1} \leq K \quad \forall i \geq 0\,, \tag{4.13$'$}$$

– insbesondere folgt $a_i \in \{0, 1, \ldots, K\}$ –, während die Anfangsbedingung einfach

$$a_1 \leq j\,. \tag{4.14$'$}$$

lautet.

Folgen, die diesen Bedingungen genügen, lassen sich auch als Pfade auf einem geeigneten Graphen mit von 0 bis K numerierten Vertices erhalten, dessen Gestalt aus den Restriktionen an die a_k abgelesen werden kann. Wegen (4.13') muß es in diesem Graphen $\mathcal{T}(K+1)$ genau dann eine Kante zwischen zwei (nicht unbedingt verschiedenen) Vertices geben, wenn die Summe ihrer Markierungen höchstens K ist. Das heißt aber, daß die $(K+1) \times (K+1)$-Adjazenzmatrix von $\mathcal{T}(K+1)$ durch

$$C_K = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \iddots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

gegeben ist, wenn die Zeilen und Spalten nach der Markierung geordnet werden. Abb. 4.2 zeigt einige dieser Graphen; man sieht, daß die Numerierung $l(j)$ der Vertices j recht "anschaulich" ist: $l(j) =$ (Gesamtzahl der Vertices) $-$ (Anzahl der von j ausgehenden Kanten).

In dieser Beschreibung der Virasoro-Moduln der $c(2,q)$-Modelle gehören alle die Pfade zur Darstellung mit h_j (vgl. (4.11)), die am Vertex mit Markierung $a_0 = K - j$ anfangen und nach endlich vielen Schritten auf dem mit 0 markierten "sitzenbleiben" (beachte, daß dieser Vertex stets mit sich selbst verbunden ist, gemäß (4.13')). Für jedes der besonders einfachen Virasoro-minimalen Modelle mit zentraler Ladung $c(2,q)$ ist also ein Graph gefunden, der gestattet, alle irreduziblen Höchstgewichts-Moduln als Pfadräume über diesem Graphen zu interpretieren, wobei die jeweiligen Energie-Operatoren L_0 in Gleichung (4.16) definiert sind.

Es bleibt der zweite Teil der Behauptung zu bestätigen, nämlich daß diese Graphen auch noch als Fusions-Graphen in dem entsprechenden Modell vorkommen, und zwar zu dem Feldes mit der kleinsten konformen Dimension

$$h_{\min} = -\frac{K(K+1)}{2p} \tag{4.18}$$

gehören. Ist das erst einmal gezeigt, kann man sich bei der im nächsten Kapitel zu diskutierenden Methode, Fusionsregeln aus der K_0-Invariante abzuleiten, einige Rechnerei sparen.

Zum einen kann man direkt von den Fusionsregeln der minimalen Modelle ausgehen, wie sie bei [BPZ] stehen: Für die $c(2,p)$-Modelle gilt

$$\phi_{(r,1)} \times \phi_{(s,1)} = \sum_{t=|r-s|+1}^{min\{r+s-1,2p-1-r-s\}} \phi_{(t,1)} \tag{4.19}$$

mit $1 \leq r,s \leq q-1,\ r,s,t$ ungerade. Die Indizes j der irreduziblen Höchstgewichts-Moduln in (4.11) hängen mit der gebräuchlicheren "conformal grid" Notation von (4.19) mittels

$$j = min\{r-1, p-r-1\} \tag{4.20}$$

zusammen. Wegen des min in der Summe von Gl. (4.19) muß man allerdings eine Anzahl von Fallunterscheidungen treffen, die die Rechnungen langwierig machen. Es empfiehlt sich daher, auf einige der in [CPR] erzielten Resultaten über sog. polynomiale Fusionsalgebren zurückzugreifen; solche Fusionsringe besitzen ein Feld ϕ derart, daß alle anderen Generatoren als Polynome $\phi_i = p_i(\phi)$ geschrieben werden können. Insbesondere sind die $c(2,p)$-Modelle von diesem Typ: wählt man $\phi = \phi_1$ (d.h. $\phi_{(p-2,1)}$ in der üblichen Notation) dann sind die $p_i(x)$ die Čebyshev-Polynome zweiter Art

$$\begin{aligned} &\check{p}_0(x) = 1\,, \quad \check{p}_1(x) = x\,, \\ &\check{p}_i(x) = x\check{p}_{i-1}(x) - \check{p}_{i-2}(x) \quad \text{für } 2 \leq i \leq K\,, \end{aligned} \tag{4.21}$$

die Fusionsregeln von ϕ_1 lauten

$$\begin{aligned} &\phi_1 \times \phi_0 = \phi_1\,, \quad \phi_1 \times \phi_K = \phi_{K-1} + \phi_K\,, \\ &\phi_1 \times \phi_i = \phi_{i-1} + \phi_{i+1} \quad \text{für } i = 1, \ldots, K-1\,. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Im zugehörigen Fusionsgraph $\mathcal{G}_1 = A_{p-1}/\mathbb{Z}_2$ – dem Tadpole-Graph, vgl. Abb. 4.3 – repräsentiert der Vertex j das Feld ϕ_j ($j = 0, \ldots, K$, vom freien Ende an gezählt), allerdings ist bequemer, die Punkte nach ihrer Markierung $l(j) = K - j$ zu numerieren. Dann ist die Adjazenzmatrix von $\mathcal{G}_1$ durch

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \ddots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}\,. \tag{4.23}$$

gegeben. Mit derselben Anordnung der Vertizes sind die Fusionsmatrizen der anderen Felder $C_i = \check{p}_i(C_1)$. Die Behauptung, daß die Graphen von oben die Fusionsgraphen von $\phi_{\min}$ sind, ist also klar, wenn nur

$$C_K = \check{p}_K(C_1) \tag{4.24}$$

gilt. Das aber läßt sich in der Eigenvektor-Basis leicht beweisen:
C_1 hat die nicht-entarteten Eigenwerte $\lambda^{(m)} = 2\cos(\frac{m\pi}{q})$, $1 \leq m \leq q-1$, m ungerade, mit den Eigenvektoren $x^{(m)}$

$$x^{(m)} = \begin{pmatrix} \check{p}_K((\lambda^{(m)})) \\ \check{p}_{K-1}((\lambda^{(m)})) \\ \vdots \\ \check{p}_0(\lambda^{(m)}) \end{pmatrix}$$

Dabei ist $\check{p}_{K+1}(\lambda^{(m)}) = \check{p}_K(\lambda^{(m)})$. Die r te Komponente von $C_K x^{(m)}$ ist

$$\sum_{l=0}^{K+1-r} \check{p}_{K-l}(\lambda^{(m)}) .$$

Gl. (4.24) folgt dann wegen $C_K x^{(m)} = \check{p}_K(\lambda^{(m)}) x^{(m)}$ aus

$$\sum_{l=0}^{s} \check{p}_{K-l}(\lambda^{(m)}) = \check{p}_K(\lambda^{(m)}) \check{p}_s(\lambda^{(m)}) \tag{4.25}$$

für $s = 0, \ldots, K$, alle m, was wiederum durch Induktion bewiesen werden kann: (4.25) ist richtig für $s = 0, 1$, und sei korrekt bis zu s; dann gilt $\check{p}_{s+1}\check{p}_K = \check{p}_1\check{p}_s\check{p}_K - \check{p}_{s-1}\check{p}_K$, sowie

$$\begin{aligned} \check{p}_1(\lambda^{(m)})\check{p}_K(\lambda^{(m)})\check{p}_s(\lambda^{(m)}) &= \sum_{l=0}^{s} \check{p}_{K+1-l}(\lambda^{(m)}) + \sum_{l=0}^{s} \check{p}_{K-1-l}(\lambda^{(m)}) \\ &= \sum_{l=0}^{s-1} \check{p}_{K-l}(\lambda^{(m)}) + \check{p}_{K+1}(\lambda^{(m)}) + \sum_{l=1}^{s+1} \check{p}_{K-l}(\lambda^{(m)}) . \end{aligned}$$

Benutzt man die Induktionsannahme für $s-1$ in der ersten Zeile und $\check{p}_{K+1}(\lambda^{(m)}) = \check{p}_K(\lambda^{(m)})$, erhält man die Aussage für $s+1$.

Für die anderen minimalen Modelle mit zentraler Ladung $c(p', p)$, p oder p' gerade, existieren ebenfalls L_0-graduierte Pfaddarstellungen [*KRV*], aber hier treten nicht einfach irgendwelche Fusionsgraphen aus dieser CFT auf. Statt dessen setzen sich die benötigten Graphen als Produkt zweier Bausteine zusammen, von denen einer jeweils aus der $c(2, p)$-Serie von Abb. 4.2 ist. Dieses Phänomen unterstreicht einmal mehr die ausgezeichnete Stellung dieser recht einfachen Theorien, die insbesondere unter allen minimalen Modellen der Virasoro-Algebra die einzigen ohne "simple currents" sind. Bei den nun zu untersuchenden $c(2\nu, p)$-Modellen dagegen existieren stets abelsche Sektoren, deren konforme Dimensionen $\delta_s = \frac{(\nu-1)(p-2)}{2}$ noch dazu halb- oder ganzzahlig ist. Das aber bedeutet, wie in Kapitel I erwähnt, daß diese Virasoro-minimalen Modelle in Wirklichkeit eine größere Symmetrie-Algebra $\mathcal{W}(2, \delta)$ haben. Es ist daher nur folgerichtig, daß in allen diesen Fällen Pfadraumdarstellungen nur für die Charaktere χ_i von simple-current-invarianten primären Feldern (also ϕ_i mit Fusion $\phi_i \times \phi_s = \phi_i$) gefunden wurden oder für Summen $\chi_i + \chi_j$ von Charakteren zu Feldern in einem simple-current-Orbit (d.h. $\phi_i \times \phi_s = \phi_j$), die zusammen einen W-Algebra-Charakter χ_i^W bilden.

Die Konstruktion der Pfadräume zu den $c(2\nu, p)$-Modellen wurde in [*KRV*] vorgeführt. Ausgangspunkt sind Umformungen der Charakterfunktionen mit Hilfe von Partitionsidentitäten: Aus dem Rocha-Caridi-Ausdruck (1.25) erhält man für die speziellen Charaktere $\chi_{\nu,m}^{(2\nu,p)}$ leicht

$$\chi_{\nu,m}^{(2\nu,p)}(q) = q^{\beta_{\nu,m}} \prod_{l>0} (1-q^l)^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\frac{\nu p}{2}k^2 + \frac{2\nu m - p\nu}{2}k} ,$$

$\beta_{\nu,m} = \frac{c(2\nu,p)}{24} - h_{\nu,m}^{(2\nu,p)}$, was man mittels der Jakobi'schen Tripel-Produkt-Identität weiter umschreiben kann:

$$\chi_{\nu,m}^{(2\nu,p)}(\tau) = q^{\beta_{\nu,m}} \prod_{\substack{k \not\equiv 0, \pm\nu m \mod \nu p' \\ k>0}} (1-q^k)^{-1} \tag{4.26}$$

Wesentlich ist die Beobachtung, daß diese Charakterfunktion in zwei einfachere faktorisiert, nämlich in einen Charakter des $(2\nu,3)$-Modells und in einen der oben diskutierten $c(2,p)$-Charaktere,

$$\chi^{(2\nu,p)}_{\nu,m}(q) = \chi^{(2\nu,3)}_{\nu,1}(q)\chi^{(2,p)}_{1,m}(q^\nu)\,, \tag{4.27}$$

letzterer mit veränderter Energie-Gewichtung. (4.27) läßt sich leicht verifizieren, wenn man die Restriktionen an den Multiplikationsindex k in (4.26) ausschreibt; um die Richtigkeit der Vorfaktoren q^{β_i} muß man sich nicht einmal explizit kümmern, da diese nach einem Lemma in [*Kac*] eindeutig durch die Forderung bestimmt sind, daß alle χ_i Modulfunktionen sind.

Mit der Faktorisierung (4.27) ist der größte Schritt hin zu einer Pfadraum-Darstellung der Charaktere (4.26) auch schon geschafft: Der zugrundeliegende Graph $\mathcal{G}(2\nu,p)$ wird das Tensorprodukt $\mathcal{G}(2\nu,p) = \mathcal{T}(\frac{p-1}{2}) \otimes \mathcal{B}(\nu)$ zweier einfacherer sein (gemeint ist natürlich, daß die Adjazenz-Matrix von $\mathcal{G}$ das Tensorprodukt derer von $\mathcal{T}$ und $\mathcal{B}$ ist). $\mathcal{T}(\frac{p-1}{2})$ ist wieder der Graph des $c(2,p)$-Faktors, Abb. 4.2, und $\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{T}(\frac{p-1}{2})}} q^{L_0^\beta}$ ergibt $\chi^{(2,p)}_{1,m}(q)$ wie oben, während $\mathcal{B}(\nu)$ die $\nu\times\nu$ Adjazenz-Matrix

$$\mathcal{B}(\nu) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

hat: Die ν Vertizes von $\mathcal{B}(\nu)$ tragen Markierungen von 0 bis $\nu-1$, jeder Vertex ist mit jedem (einschließlich sich selbst) verbunden, siehe Abb. 4.4. Wird auf dem Pfadraum $\mathcal{H}_{\mathcal{B}(\nu)}$ über $\mathcal{B}(\nu)$, d.h. auf dem Raum aller $\{0,\dots,\nu-1\}$-Folgen $(m_i)_i$, ein L_0-Operator wie bisher durch $L_0^{(\beta)}(m_i) = (\beta + \sum_i im_i)(m_i)$ definiert, dann sieht man sofort, daß

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{B}(\nu)}} q^{L_0^{(\beta)}} = q^\beta \prod_{i\geq 1}\Big(\sum_{j=0}^{\nu-1} q^{ij}\Big) = q^\beta \prod_{k\not\equiv 0,\pm\nu \mod 3\nu} (1-q^k)^{-1}$$

für passendes β den Charakter $\chi^{(2\nu,3)}_{\nu,1}$ in (4.26) reproduziert. Die Markierungen des Produktgraphen werden nun so gewählt, daß die Spur von q^{L_0} faktorisiert: Die Pfade über $\mathcal{G}(2\nu,p)$ sind dann bijektiv durch die Folgen $(l_i)_i$ dargestellt mit

$$l_i = \nu m_i + n_i,\; m_i + m_{i+1} \leq \frac{p-1}{2} - 1,\; 0 \leq m_i,\; 0 \leq n_i \leq \nu - 1\,.$$

Man erkennt den Beitrag des $\mathcal{B}(\nu)$-Graphen (n_i) sowie den des $\mathcal{T}(\frac{p-1}{2})$-Graphen mit veränderter Energie-Gewichtung (νm_i). Die Anfangsbedingung $m_0 = \frac{p-1}{2} - m$ stellt sicher, daß

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{G}(2\nu,p)}} q^{L_0^{(\beta_0)}} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{T}(\frac{p-1}{2})}} q^{\nu L_0^{(\beta_1)}} \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_{\mathcal{B}(\nu)}} q^{L_0^{(\beta_2)}} = \chi^{(2\nu,p)}_{\nu,m}(q)$$

gilt, wenn alle β_i geeignet gewählt werden.

Auf diese Weise können auch für die Virasoro-minimalen Modelle mit zentraler Ladung $c(2\nu,p)$ L_0-graduierte Pfad-Darstellungen angegeben werden, zumindest für diejenigen Charaktere, die $\mathcal{W}$-invariant sind ($\phi_i \times \phi_s = \phi_i$). Darüberhinaus lassen sich so auch Summen (und Differenzen) von Charakteren darstellen, die zusammen eine Darstellung der $\mathcal{W}$-Algebra $\mathcal{W}(2,\delta_s)$ ausmachen, vgl. [*KRV*]. Dieses (angenehm) überraschende Phänomen, daß die AF-Algebren-Darstellungen der Virasoro-minimalen Modelle schon von der maximal erweiterten Symmetrie-Algebra “weiß”, wird sich im nächsten Kapitel noch eindrucksvoller manifestieren.

Zum Schluß sei noch auf den *Quasiteilchen-Aspekt* der oben diskutierten Charaktere hingewiesen. Man benutzt die sog. Andrews-Gordon-Identitäten, das sind Verallgemeinerungen der bekannteren Rogers-Ramanujan-Identitäten [*Br*], um die Potenzreihe aus Gl. (4.26) in die folgende Form zu bringen, s. [*KRV*]:

$$\chi_{\nu,m}^{(2\nu,p)}(\tau) = \sum_{n_1,\ldots,n_K \geq 0} \frac{q^{N_1^2+\cdots+N_K^2+N_{\nu m}+\cdots+N_K+\beta_{\nu,m}}}{(q)_{n_1}\cdots(q)_{n_{K-1}}(q^{\gamma_\nu})_{N_K}} \tag{4.29}$$

Dabei ist $K = (\nu p' + \gamma_\nu)/2$, $N_i = n_i + \ldots + n_K$ und $(q)_n = (1-q)\cdots(1-q^n)$. γ_ν schließlich ist gleich 2, wenn ν gerade ist, sonst gleich 1: Insbesondere ergeben sich also für die $c(2,p)$-Modelle die Andrews-Gordon-Identiäten selbst, siehe dazu auch im Anhang. Die Summenform (4.29) stimmt nun überein mit manchen “Partitionsfunktionen” statistischer Systemen (eindimensionaler Quantenketten) [*Ke*], wo die Aufspaltung in unabhängige Summationsvariablen eine ganz natürliche Erklärung als Anregungsspektrum einer Kollektion von K verschiedenen Quasiteilchen hat. Der Name dieser Anregungen ist insofern gerechtfertigt, weil deren Energien und “Impulse” bestimmten Dispersionsrelationen genügen und sogar verallgemeinerte Pauli-Prinzipien auftreten.
Im Exponenten von (4.29) läßt sich die quadratische Form in den n_i mit Hilfe von Matrizen ausdrücken – vgl. den Anhang –, die dann wiederum “Symmetrien” des Massenspektrums von integrablen zwei-dimensionalen QFT beschreiben, die Störungen der obigen CFT sind [*Za2*].
Erstaunlicherweise enthält also die Quasiteilchen-Form (4.29) der konformen Charaktere Informationen über nicht-konforme, aber “verwandte” Theorien. Die genauen Zusammenhänge sind leider noch nicht geklärt, auch nicht, ob es ein allgemeines Verfahren gibt, um die Matrix im Exponenten von (4.29) – oder auch (A.8) – etwa aus der Adjazenz-Matrix des Graphen zu berechnen, der eine Pfadraum-Darstellung der Höchstgewichts-Darstellungen der CFT liefert. Die Überlegungen in [*Rö*] lassen jedoch erwarten, daß das möglich ist: Dort konnten die Quasiteilchen-“Sektoren” in den Pfadräumen wiedergefunden werden und – wichtiger noch – dazu ausgenutzt werden, um eine Aktion der $L_{\pm 1}$-Virasoro-Generatoren auf den Pfaden zu definieren; leitendes Prinzip dabei war die Forderung, daß die Quasiteilchen-Sektoren von der Virasoro-Operation respektiert werden sollten.
Wie im Anhang gezeigt wird, führen Ausdrücke der Form (4.29) für Charaktere einer CFT außerdem zu Dilogarithmus-Formeln für die zentrale Ladung, eventuell sogar für die Höchstgewichte.

Ich hoffe, daß es mir in diesem Kapitel gelungen ist, die Hauptthese dieser Arbeit einigermaßen zu untermauern, daß nämlich unter allen C^*-Algebren es die AF-Algebren sind, welche “typischerweise” im Kontext von konformen QFT auftreten. Leider bleibt dies nach wie vor nur eine Hypothese, für die es zwar mannigfache Hinweise gibt; aber die sind andererseits fast zu verschiedenartig, als daß auch nur die präzise Formulierung einer Vermutung möglich wäre, von einem strengen Beweis ganz zu schweigen. Ein solcher wäre wohl noch am ehesten aus der Richtung der Algebraischen QFT zu erhoffen, da dieses Gebiet als einziges unter den genannten sowohl mit der Sprache der Operator-Algebren wie mit quantenfeldtheoretischen Konzepten arbeitet. Zu neuen Entwicklungen dürften jedoch auch die im letzten Abschnitt diskutierten Pfaddarstellungen führen, nicht zuletzt wegen ihres Zusammenhangs mit Quasiteilchenstrukturen, also statistischen Modellen und integrablen Störungen von CFT.

Geht man trotz der noch unsicheren Beweislage einmal davon aus, daß in der Observablen-Algebra einer

CFT eine AF-Algebra enthalten ist, die dieses Modell charakterisiert, so kann man aus den aufgeführten Beispielen ferner herauslesen, daß nicht nur der induktive Limes der endlich-dimensionalen C^*-Algebren von Interesse ist, sondern vielmehr in den Etagen selbst sowie den einzelnen Einbettungen physikalische Information versteckt ist: In den ADE-Gittermodellen entsprechen endliche Pfade (Algebren) endlichen Kettenabschnitten; die Einbettungen beim Übergang zu größeren endlichen Gittern erinnern stark an die Netzstruktur der lokalen Observablen-Algebren im Haag-Kastler-Bild. In den AF-Algebren, die bei den Gitter-WZW-Modellen vorkommen, stehen die Einbettungen für (inverse) Blockspin-Transformationen bei Verfeinerung der Kreistriangulierung und hängen so auch mit der Operation der konformen Gruppe zusammen. Dies wiederum findet Parallelen in den konkreten Pfadraumrealisierungen der Charaktere minimaler Modelle in $[KR, KRV]$, wo die L_0-Graduierung mit der Pfadlängen-Graduierung "gekoppelt" ist, wenigstens in folgendem schwachen Sinne: Die Virasoro-Generatoren L_n bilden Pfade der Länge k in solche der Länge $k + N(n)$ ab, wobei der endliche Shift $N(n)$ durch die Markierungen bestimmt wird. Vom Standpunkt der CFT ist also nicht so sehr die AF-Algebra, als vielmehr die Turmstruktur (das Bratteli-Diagramm) von Bedeutung.
Abschließend sei bemerkt, daß alle bisher aufgetretenen Bratteli-Diagramme stationär oder zumindest periodisch waren, was ebenfalls ein charakteristisches Merkmal für die zu rationalen CFT "assoziierten" AF-Algebren sein dürfte.

V. Fusionsregeln in der K_0-Gruppe

Nach all den Einführungen und Vorüberlegungen der letzten Kapitel sind wir nun in der Lage, quantenfeldtheoretische Probleme mit K-theoretischen Methoden anzugehen. Genauer soll unser Interesse der Superauswahl-Struktur von CFT gelten, die auf der Grundlage der DHR-Theorie diskutiert wird. Wie schon vorher angedeutet, ist dieser Formalismus allerdings so kompliziert, daß er in seiner vollständigen Form bisher nur in ziemlich simplen Modellen angewandt werden konnte, weshalb wir darauf angewiesen sind, zusätzliche vereinfachende Annahmen einzuführen sowie unsere Ziele bescheidener zu fassen. Am Ende wird man eher von "inspirierenden Anleihen" bei der Algebraischen QFT als von Untersuchungen "im Rahmen" dieses Zugangs sprechen müssen. Die Vereinfachungen bestehen zunächst in der Verwendung von AF-Algebren anstelle beliebiger, zumindest unbestimmt bleibender Operator-Algebren, sodann werden so weit wie möglich K-theoretische Methoden ausgenutzt. Wenn man sich von den im letzten Kapitel gesammelten Beispiele leiten läßt, kann man weitere Bedingungen aufstellen, die schließlich ausreichen, aus dem DHR-Programm und der Funktorialität der K_0-Gruppe ein recht effektives Verfahren abzuleiten, um die Fusionsregeln von CFT zu berechnen. Nachdem in Abschnitt V.1 die prinzipiellen Ideen vorgestellt und in V.2 mit Hilfe einiger Zusatzforderungen ein generelles Konstruktionsverfahren eingeführt worden sind, enthält der Abschnitt V.3 explizite Rechnungen anhand einer Serie von Beispielen sowie einige Kommentare.

V.1 DHR-Zugang und Funktorialität von K_0

Die erste Idee, die wir aus der Algebraischen QFT übernehmen, ist natürlich die, daß es eine C^*-Algebra gibt, die das in Frage stehende Modell beschreibt. Jedoch wird im folgenden die lokale Netz-Struktur, die ja ein ganz wesentliches Element des Haag'schen Ansatzes ist, praktisch vernachlässigt werden und nur die globale oder universelle Observablen-Algebra zur Debatte stehen. Mehr noch: Wir werden uns auf den Standpunkt stellen, daß ein gut Teil der Information über das Modell schon in einer AF-Unteralgebra $\mathcal{A}$ dieser globalen C^*-Algebra steckt, und daher gleich mit diesem $\mathcal{A}$ starten. Beispiele kann man aus den im vorigen Kapitel beschriebenen Quellen beziehen.

Obwohl diese Reduktion schon eine erhebliche Vereinfachung bringt, ist es doch immer noch nicht möglich, die Superauswahl-Sektoren der "AF-Observablen-Algebra" direkt zu berechnen, selbst wenn man alle Lokalisierungs-Eigenschaften von $[DHR]$ außer acht läßt – was man ohnehin tun muß, solange die AF-Algebra keine lokale Struktur trägt. Wenn die AF-Algebra zugleich eine Lie-Algebra ist (wie die "Majorana-Algebra" des Ising-Modells und der Level-1-WZW-Theorien $[MaS, FGV]$, vgl. IV.3), kann man natürlich die quantenfeldtheoretische Darstellungstheorie auf die bekannte der Lie-Algebra zurückführen, und es ist nicht mehr allzu schwer, auch passende (globale) Endomorphismen zu finden. Im allgemeinen jedoch lassen sich AF-Algebren nicht als Lie-Algebren "umdeuten", und man wird höchstens noch ein paar sehr einfache Endomorphismen zu erraten in der Lage sein. Um mehr über die Superauswahl-Struktur zu erfahren, muß man die Situation zuerst weiter vereinfachen.

In Kapitel III wurde dargelegt, daß die Theorie der Operator-Algebren für diesen Fall ein Hilfsmittel bereitstellt, das buchstäblich für AF-Algebren geschaffen ist: die K_0-Gruppe. Diese Invariante ist immerhin fein genug, derartige C^*-Algebren zu klassifizieren, und daher darf man erwarten, in ihr auch einen Teil des physikalischen Gehaltes von $\mathcal{A}$ wiederzufinden.

Der große Vorteil von K_0 gegenüber anderen Invarianten wie etwa dem Jones-Index einer Inklusion von Faktoren oder dem modularen Operator aus der Tomita-Takesaki-Theorie, die beide auch physikalische Interpretationen haben, ist die *Funktorialität* dieser Gruppe. Sie erlaubt es, den Begriff des DHR-Endomorphismus auf das viel einfachere Niveau abelscher Gruppen herabzuprojizieren, und man wird so dazu geführt, die K_0-Gruppe und ihre Endomorphismen zu studieren, solange die Superauswahl-Sektoren selbst unzugänglich sind. Die besonderen Merkmale, die die DHR-Endomorphismen ρ_i unter beliebigen Algebra-Endomorphismen auszeichnen, übersetzen sich in Bedingungen an die für uns "interessanten" K_0-Endomorphismen. Von solchen K_0-Bildern der Superauswahl-Sektoren kann man immerhin noch erwarten, daß sie die volle Information über die Fusionsregeln tragen, denn diese hängen nicht von algebraischen Details ab, sondern registrieren lediglich Klassen von Darstellungen.

Die Kombination von Ideen der Algebraischen QFT mit der AF-Algebren-Hypothese sowie K-theoretischen Methoden legt im einzelnen folgenden Zugang zu den Fusionsregeln einer CFT nahe:

Statt der "tatsächlichen" Observablen-Algebra gehe von einer *AF-Algebra* $\mathcal{A}$ aus, die man sich als "wesentliche" Unteralgebra vorstellen mag. In allen Beispielen des Kapitels IV war $\mathcal{A}$ gleich durch ein (periodisches) Bratteli-Diagramm gegeben, so daß die geordnete K_0-Gruppe sofort hingeschrieben werden kann.

Die Superauswahl-Sektoren ρ_i der CFT (endlich viele für rationale Modelle) induzieren Endomorphismen ρ_{i*} der K_0-Gruppe $K_0(\mathcal{A})$, und zwar bildet, da zu unitär äquivalenten Algebra-Endomorphismen derselbe K_0-Endomorphismus gehört, K_0 wirklich gleich die Superauswahl-Sektoren ab, nicht nur einzelne Repräsentanten. Diese K_0-Endomorphismen besitzen besondere Eigenschaften:

i) Jeder DHR-Endomorphismus ρ_i bildet $Proj(M_\infty(\mathcal{A}))$ in sich ab; da diese Menge den positiven Kegel $K_0(\mathcal{A})_+$ erzeugt, können nur *positive* K_0*-Endomorphismen* von Superauswahl-Sektoren herkommen:

$$\rho_{i*}\big(K_0(\mathcal{A})_+\big) \subset K_0(\mathcal{A})_+ \tag{5.1}$$

ii) Die lokalisierten DHR-Endomorphismen sind bis auf unitäre Transformationen vertauschbar (2.7), demzufolge *kommutieren* die zugehörigen K_0-Endomorphismen:

$$\rho_{i*}\rho_{j*} = \rho_{j*}\rho_{i*} \tag{5.2}$$

Strenggenommen läßt sich (5.2) in unserem AF-Algebra-Bild nur als zusätzliche Forderung einführen, da in den Beweis von (2.7) lokale Eigenschaften eingehen, die wir ja von vornherein außen vor gelassen haben. Andererseits ist es physikalisch sinnvoll, auch von globalen Ladungen anzunehmen, daß sie bis auf "Phasen" vertauschen.

iii) Man kann erwarten, daß die *Fusionsregeln* der Superauswahl-Sektoren

$$\rho_i \circ \rho_j = \bigoplus_k N_{ij}^k \, \rho_k \tag{5.3}$$

auf K_0-Ebene reproduziert werden

$$\rho_{i*} \cdot \rho_{j*} = \sum_k N_{ij}^k \, \rho_{k*} \ , \tag{5.4}$$

denn die direkte Summe von Darstellungen in (5.3) geht in eine Summe von Projektoren in $M_\infty(\mathcal{A})$, also auch in $K_0(\mathcal{A})$ über. Dabei hat man aber zunächst keine Garantie dafür, daß die K_0-Gruppe auch fein genug ist, um die ganze Superauswahl-Struktur "injektiv" abzubilden: Zwar klassifiziert das Paar (K_0, K_{0+}) eine AF-Algebra bis auf stabile Isomorphie, aber über die "Auflösung" des Endomorphismen-Rings von $K_0(\mathcal{A})$, also von $KK(\mathcal{A},\mathcal{A})$ – vgl. III –, sind (mir) keine Theoreme bekannt – den endlich-dimensionalen Fall ausgenommen, dazu etwas mehr im Schlußkapitel.

Ein K-theoretisches Rezept zur Extraktion der "Fusionsregeln einer AF-Algebra" sieht nach den Punkten *i* - *iii* folgendermaßen aus: Berechne zuerst $K_0(\mathcal{A})$ und untersuche dann den Ring der positiven K_0-Endomorphismen $Hom_+(K_0(\mathcal{A}))$; wegen *ii* sind für uns nur kommutierende Teilmengen in $Hom_+(K_0(\mathcal{A}))$ interessant, und zwar maximale: Es ist naheliegend, nach dem größten "K_0-Fusionsring" zu suchen, der aus der K_0-Gruppe erhalten werden kann. Solange die DHR-Algebra-Endomorphismen selbst unbekannt sind, gehen wir bei diesem Rezept – ganz im Sinne der ursprünglichen Vorstellung, daß aus Invarianten von Operator-Algebren wissenswerte physikalische Information herauszulesen ist – einfach davon aus, daß der K_0-Funktor die Superauswahl-Struktur injektiv und surjektiv in $Hom_+(K_0(\mathcal{A}))$ abbildet. Die Annahme der Injektivität ist uns durch die "Auflösung" der verwendeten Invariante eigentlich aufgezwungen, die der Surjektivität entspricht der Hoffnung, dadurch dieselbe so gut wie möglich "auszunutzen". Für die im nächsten Abschnitt vorgestellten spezielleren K_0-Endomorphismen kann die Gültigkeit beider Hypothesen genauer untersucht werden.

V.2 Vereinfachende Zusatzkriterien

Während die geordnete K_0-Gruppe eines Bratteli-Diagramms einfach hingeschrieben werden kann, ist $Hom_+(K_0(\mathcal{A}))$ schon schwerer zu beherrschen – jedenfalls dann, wenn man wirklich zuerst den direkten Limes der $K_0(\mathcal{A}^{(n)})$ nehmen wollte. Es träten schon darum Komplikationen auf, weil sehr ähnliche Türme von Algebren oft zu recht verschiedenen induktiven Limites führen: Z.B. ist die K_0-Gruppe der über dem A_4-Dynkin-Diagramm aufgebauten Pfadalgebra isomorph zu $\mathbb{Z}^4$ (einfach weil die Adjazenz-Matrix C_{A_4} $\mathbb{Z}$-invertierbar ist), für A_3 ergibt sich eine Gruppe ganz anderen Typs, nämlich $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \oplus \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, zwei Kopien der Rings aller Polynome in $\frac{1}{2}$ über $\mathbb{Z}$ (siehe [*Eff*]). Solche Phänomene stehen einer einheitlichen Behandlung all dieser AF-Algebren natürlich kraß im Wege, von technischen Schwierigkeiten bei der Konstruktion von Endomorphismen solcher induktiver Limites ganz abgesehen.

Wie am Ende des letzten Kapitels festgestellt, sind es jedoch auch die Einbettungen der endlich-dimensionalen Algebren und nicht nur der induktive Limes, die für die CFT-Beschreibung relevant sind. Es liegt daher nahe, nur solche K_0-Endomorphismen in Betracht zu ziehen, die die Turmstruktur respektieren: Sind $\phi_*^{(n)} : K_0(\mathcal{A}^{(n)}) \longrightarrow K_0(\mathcal{A}^{(n+1)})$ die Einbettungen aufeinanderfolgender Etagen der K_0-Gruppe, so sollen die uns interessierenden *filtrierungs-erhaltenden* Endomorphismen ρ_* also aus Folgen $(\rho_*^{(n)})_n$ von Endomorphismen

$$\rho_*^{(n)} : K_0(\mathcal{A}^{(n)}) \longrightarrow K_0(\mathcal{A}^{(n)}) \tag{5.5}$$

bestehen, die mit den Einbettungen des Turmes verträglich sind, d.h.

$$\rho_*^{(n+1)} \cdot \phi_*^{(n)} = \phi_*^{(n)} \cdot \rho_*^{(n)} \tag{5.6}$$

für alle $n \geq 1$. Diese $\rho_*^{(n)}$ sind nun für jeden beliebigen Turm endlich-dimensionaler C^*-Algebren schlicht Matrizen über $\mathbb{Z}$.

Es sollte hinzugefügt werden, daß die "Auswahl" von filtrierungs-erhaltenden Endomorphismen ρ_* immer dann sogar alle K_0-Endomorphismen erfaßt, wenn die Einbettungsmatrizen $\Phi^{(n)}$ invertierbar sind: Nach Definition des induktiven Limes existiert zu jedem $x \in K_0(\mathcal{A})$ ein Repräsentant $x^{(n)}$ in irgendeiner Etage $K_0(\mathcal{A}^{(n)})$, ebenso zu $y := \rho_*(x)$ ein $y^{(k)} \in K_0(\mathcal{A}^{(k)})$; zu $y^{(k)}$ wiederum gibt es wegen der Invertierbarkeit aller $\Phi^{(l)}$ genau ein äquivalentes Element $y^{(n)} \in K_0(\mathcal{A}^{(n)})$, so daß $\rho_*^{(n)}(x^{(n)}) := y^{(n)}$ eine Zerlegung eines beliebigen K_0-Endomorphismus ρ_* in ein System filtrierungs-erhaltender $\rho_*^{(n)}$ definiert. Die Verträglichkeitsbedingung (5.6) stellt die Konsistenz dieser Definition bei verschiedener Wahl von n sicher.

Bezieht man sich auf die ADE-Gittermodelle in IV.1, können die $\rho_*^{(n)}$ sogar in gewissem Sinne mit den lokalisierten Endomorphismen von [*DHR*] verglichen werden: Endliche Abschnitte im AF-Turm gehören zu endlichen Gitterausschnitten, "filtrierungs-erhaltend" bedeutet damit nichts anderes als "die lokale Netz-Struktur respektierend".

Diese Analogie legt außerdem nahe, sich möglichst auf *stationäre* filtrierungs-erhaltende Endomorphismen zu beschränken, also solche mit

$$\rho_*^{(n+1)} = \rho_*^{(n)} , \tag{5.7}$$

zumindest wenn das Bratteli-Diagramm der AF-Algebra $\mathcal{A}$ stationär ist; schließlich wäre es unsinnig, wenn sich der Endomorphismus (die Darstellung) änderte, ginge man von einem Gittergebiet zu einem umfassenden größeren über.

Hinter diesen Überlegungen steckt immer stillschweigend die Idee von der Existenz zugehöriger echter Algebra-Endomorphismen. Zwar liegt im allgemeinenen Fall ein weiter Weg zwischen Abbildungen von K_0-Gruppen und "zugehörigen" Algebra-Morphismen, nicht so aber für endlich-dimensionale C^*-Algebren (vgl. III.3). Solange die $\rho_*^{(n)}$ die positiven Kegel $(\mathbb{Z}_+)^{k_n}$ in sich abbilden, lassen sie sich jedenfalls zu Morphismen von $M_\infty(\mathcal{A}^{(n)})$ liften. Dieser Lift ist nicht nur eindeutig bis auf unitäre Äquivalenz, sondern darüber hinaus auch noch injektiv, wenn nur kein Element $K_0(\mathcal{A}^{(n)})_+$ annihiliert wird, wenn also die *Matrix $\rho_*^{(n)}$ nur positive Einträge* hat. Da DHR-Endomorphismen stets injektiv sind, kann dies als weiteres Kriterium an die uns interessierenden K_0-Endomorphismen festgehalten werden.

An dieser Stelle lassen sich Injektivität und Surjetivität des K_0-Funktors neu kommentieren: Wegen des auf S. 26 zitierten Satzes werden für endlich-dimensionale Algebren tatsächlich je zwei nicht-äquivalente Algebra-Endomorphismen auf unterschiedliche K_0-Endomorphismen abgebildet (Injektivität), andererseits existiert hier wirklich zu jedem positiven K_0-Endomorphismus ein Lift in $M_\infty(\mathcal{A}^{(n)})$, der dann auch zur Superauswahl-Struktur gehört (Surjektivität), da ja das DHR-Kriterium alle durch Endomorphismen definierte Darstellungen zuläßt – mit den in unserem Rahmen noch nicht zugänglichen Vorbehalten in puncto Lokalisierbarkeit und Kovarianz.

Es ist nun umso einfacher, ein System von K_0-Endomorphismen zu finden, das Fusionsregeln reproduziert, je mehr der aufgezeigten zusätzlichen Restriktionen eingesetzt werden. Wirklich gut "kontrollierbar" ist die Konstruktion jedoch nur, wenn das Bratteli-Diagramm der AF-Algebra wenigstens periodisch ist. Der Einfachheit halber werden wir von nun an voraussetzen, daß wir es sogar mit stationären Systemen zu tun haben, was durch "telescoping" eines periodischen Diagramms immer erreicht werden kann. Sei also $\phi_*^{(n)} = C$ *dieselbe* $m \times m$ Einbettungs-Matrix über $\mathbb{Z}_+$ für alle $n \geq 0$.

Die erste entscheidende Einschränkung an die Matrizen $\rho_*^{(n)} \in M_m(\mathbb{Z})$ beziehen wir aus der Positivitäts-Bedingung (5.1): Die Komponenten bauen dann und nur dann einen positiven Endomorphismus ρ_* von

$K_0(\mathcal{A})$ auf, wenn gilt – mit $x^{(n)} \in K_0(\mathcal{A}^{(n)})$ –

$$\langle v_C \,|\, x^{(n)} \rangle > 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle v_C \,|\, \rho_*^{(n)}(x^{(n)}) \rangle > 0 \ , \tag{5.8}$$

da der Perron-Frobenius-Eigenvektor v_C von C ja den positiven Kegel von $K_0(\mathcal{A})$ bestimmt, vgl. (3.4). Ist C durch S diagonalisierbar, also $SCS^{-1} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, λ_1 der Perron-Frobenius-Eigenwert, dann ist (5.8) äquivalent zu

$$S\rho_*^{(n)}S^{-1} = \begin{pmatrix} r & 0 & \ldots & 0 \\ & & & \\ & * & & \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r > 0 \ . \tag{5.9}$$

Da die Einträge von S algebraische Zahlen sind, die von $\rho_*^{(n)}$ aber ganz, stecken in der ersten Zeile von (5.9) nicht nur $m-1$ Bestimmungsgleichungen an $\rho_*^{(n)}$, sondern tatsächlich $d \cdot (m-1)$, wobei d für den Grad der Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ durch die S_{ij} steht. Diese Bedingungen können, evtl. mit Rechnerunterstützung, ausgewertet werden und führen zu Ausdrücken der Art

$$\rho_*^{(n)} = \sum_{i=1}^{m'} r_i^{(n)} \epsilon_i \tag{5.10}$$

mit bestimmten über $\mathbb{Z}$ linear unabhängigen "Basis-Matrizen" $\epsilon_i \in M_m(\mathbb{Z})$ und ganzzahligen Koeffizienten $r_i^{(n)}$, die wegen (5.9) i.a. noch gewissen Restriktionen unterworfen sind, typischerweise $\langle v_c \,|\, r^{(n)} \rangle > 0$ für m der m' Koeffizienten.

Im nächsten Schritt ist innerhalb des von den ϵ_i aufgespannten Kegels nun eine maximale kommutierende Teilmenge M zu finden, da wegen (5.2) ja nur solche K_0-Endomorphismen für uns interessant sind. Man stellt fest, daß nur die Dimension eines solchen "Cartan-Unterrings" eindeutig bestimmt und gleich m ist, von den Mengen selbst kann es aber evtl. mehrere geben. (Der Begriff "Dimension" ist insofern gerechtfertigt, als man durch Tensorieren mit $\mathbb{Q}$ Vektorräume erhält; über $\mathbb{Z}$ linear unabhängige Matrizen bleiben es aber auch über $\mathbb{Q}$.)
Ein gutes Auswahlkriterium unter allen diesen M bietet die Forderung, daß die Einbettungsmatrix C selbst darin liegt; nur dann erlaubt es die Verträglichkeits-Bedingung (5.6), stationäre filtrierungs-erhaltende K_0-Endomorphismen aufzubauen. Dieser spezielle Cartan-Unterring M_C ist meist eindeutig bestimmt (jedenfalls etwa dann, wenn sich C diagonalisieren läßt mit lauter nicht-entarteten Eigenwerten) und kann, abgesehen von der Positivitätsbedingung, auch als die Schnittmenge der Kommutanten (in $M_m(\mathbb{Z})$) von C und allen (Basis-)Elementen $M_C = C' \cup \epsilon_1' \cup \ldots \cup \epsilon_{m-1}'$ charakterisiert werden.

Nicht nur M_C, alle diese Teilmengen M von positiven K_0-Endomorphismen sind abgeschlossen unter linearen Operationen (mit Koeffizienten, die Restriktionen entsprechend denen an die $r_i^{(n)}$ in (5.10) erfüllen) sowie unter Hintereinanderausführung (Matrizenmultiplikation), und wegen der Maximalität läßt sich das Produkt zweier Elemente stets wieder als Linearkombination der Basis-Matrizen $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_2$ schreiben; insbesondere gilt

$$\epsilon_i \cdot \epsilon_j = \sum_k N_{ij}^k \, \epsilon_k \tag{5.11}$$

mit ganzzahligen Entwicklungskoeffizienten N_{ij}^k, die wir natürlich gerne als Fusionsregeln interpretieren würden.

Das Besondere an einem Fusionsring ist jedoch die Existenz einer ausgezeichneten Basis ε_i, deren Entwicklungskoeffizienten den in Kapitel I aufgelisteten Axiomen genügen. Nach einem $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$-Basiswechsel zu $\tilde{\varepsilon}_i = \sum_{i'} g_{ii'}\varepsilon_{i'}$ mit neuen "Fusionsregeln"

$$\tilde{N}_{ij}^{k} = \sum_{i'j'k'} g_{ii'}g_{jj'}\, N_{i'j'}^{k'}\, g_{k'k}^{-1}$$

gehen diese Eigenschaften i.a. verloren. Will man nun eine solche ausgezeichnete Basis von M_C oder einem anderen Cartan-Unterring M finden, stößt man insofern auf Schwierigkeiten, als sich keines der Auswahlkriterien von [*DHR*] an die Endomorphismen, die die Gültigkeit der Fusionsregel-Axiome gewährleisten, direkt auf K_0-Niveau übertragen läßt: Weder liefert die Irreduzibilität $\rho_i(\mathcal{A})' = \mathbb{C}$ eines Superauswahl-Sektors eine K-theoretische Charakterisierung, noch kann die Extremalitätsbedingung, die innerhalb der konvexen Menge aller Algebra-Zustände die reinen auszeichnet (und zur Irreduzibilität äquivalent ist), auf die positiven K_0-Endomorphismen in M_C angewandt werden, da die extremalen Randpunkte von M_C typischerweise Matrizen mit irrationalen Einträgen sind und damit gar keine Endomorphismen der K_0-Gruppe.
Man ist also im Moment darauf angewiesen, die Fusionsregel-Axiome selbst als Auswahlkriterium für die "richtige" Basis von M_C zu verwenden, was nicht nur vom abstrakten Standpunkt aus unbefriedigend ist, sondern darüberhinaus zu zahlentheoretischen Problemen führt, die nur in einigen wenigen Fällen in voller Allgemeinheit gelöst werden können (Mit leichten Einschränkungen an die möglichen Basiswechsel g von oben kommt man ein gutes Stück weiter.) In diesen Beispielen hat sich gezeigt, daß die Axiome tatsächlich restriktiv genug sind, um die ε_i bis auf Permutationen eindeutig festzulegen. Dennoch ist es ein Mangel der propagierten K-theoretischen Methode zur Bestimmung der "Fusionsregeln einer AF-Algebra", daß ein allgemeiner Beweis für Existenz und Eindeutigkeit einer "Fusions-Basis" von M_C noch aussteht.

V.3 Beispiele

Wir wenden nun das in den beiden vorhergehenden Abschnitten ausgearbeitete Programm auf die AF-Algebren an, die in Kapitel IV bestimmten CFT zugeordnet werden konnten, bevorzugt auf die Pfadalgebren, die nach IV.4 zu Virasoro-minimalen Modellen korrespondieren. Da diese CFT im Prinzip vollständig bekannt sind, bilden sie ein ideales Versuchsfeld für unsere neue Methode. Zudem werden die etwas umständlich erscheinenden Zusatzkriterien aus V.2 in konkreten Beispielen um einiges klarer werden.

Beginnen wir mit den minimalen Modellen mit zentralen Ladungen $c(2,p)$, p ungerade. Zu ihnen gehören die Pfadalgebren über den Graphen $\mathcal{T}(\frac{p-1}{2})$ mit Adjazenz-Matrizen C_K wie in Gl. (4.17), wobei $p = 2K+3$. Die zu untersuchende K_0-Gruppe ist also ein stationäres System mit $K_0(\mathcal{A}^{(n)}) = \mathbb{Z}^{K+1}$ und Einbettungsmatrizen $\phi_*^{(n)} = C_K$, die alle $\mathbb{Z}$-invertierbar sind: In den $c(2,p)$-Modellen kann demnach wirklich jeder K_0-Endomorphismus als filtrierungs-erhaltendes System geschrieben werden.
Nimmt man alle die in V.2 angeführten Zusatzbedingungen zusammen, sucht also innerhalb der positiven $\rho_*^{(n)}$ gleich den besonderen Cartan-Unterring M_C, der C_K selbst enthält, dann braucht man nicht mehr zu rechnen: C_K ist das Kte Čebyshev-Polynom in C_1 aus Gl. (4.23), und die $K+1$ Matrizen $C_i = \check{p}_i(C_1)$, $i = 0,\dots,K$, sind linear unabhängig, so daß

$$M_C = \{ \sum_{i=0}^{K} r_i C_i \,|\, \langle \tilde{v}_C \,|\, r \rangle > 0 \} \qquad (5.12)$$

mit $r = (r_0, \ldots, r_K)$, $\tilde{v}_C = (1, \lambda_{PF}, \ldots, \check{p}_K(\lambda_{PF}))$ und $\lambda_{PF} = 2\cos(\frac{\pi}{p})$. Die Einschränkung an die Koeffizienten r_i in (5.12) ergibt sich sofort aus der Positivitätsbedingung (5.9).
Die Matrizen C_i sind auch schon eine (die?) ausgezeichnete Basis in M_C, deren Multiplikationstafel die Fusionsregeln des jeweiligen $c(2,p)$-Modells liefert (IV.4 und $[BPZ, CPR]$), ja sie stimmen bis auf eine Permutation der Zeilen und Spalten ($K+1 \to 1, K \to 2, \ldots, 1 \to K+1$) sogar mit der regulären Darstellung N_i der Fusionsregeln überein.

Dieses Ergebnis ist verallgemeinerbar: Kommt die Einbettungsmatrix C eines stationären Bratteli-Diagramms als Fusionsmatrix in einem bekannten Fusionsring vor, so bildet dieser Ring selbst eine Lösung für M_C samt Fusions-Basis, und der Vektor v_C, der in die Positivitätsbedingung eingeht, besteht dann aus den Quantendimensionen der zu den Fusionsmatrizen gehörenden primären Feldern.
Für die Eindeutigkeit der Lösung kann es dabei entscheidend sein, von welchem Fusionsgraphen man ausgeht: Zusammenhängende Graphen (d.h. unzerlegbare Fusionsmatrizen) charakterisieren M_C und dessen Basis natürlich stärker als etwa der total unzusammenhängende Fusionsgraph der Vakuumdarstellung, aus dem lediglich die Anzahl der primären Felder abgelesen werden kann.

Mit diesen Bemerkungen ist nebenbei die ganze Klasse von AF-Algebren behandelt, die in Abschnitt IV.3 vorgestellt wurden, also die Intertwiner-Algebren und Rehrens "master symmetry algebra" $\mathcal{M}$, die nach der DHR-Theorie in jeder zwei-dimensionalen QFT die statistische Eigenschaften beschreiben. $\mathcal{M}$ etwa ist eine Pfadalgebra über der direkten Summe aller Fusionsgraphen der QFT (stets zusammenhängend), und unser Cartan-Unterring wird demnach natürlich wieder von diesen Fusionsmatrizen aufgespannt, so daß man aus der K_0-Gruppe die ursprünglichen Fusionsregeln zurückgewinnt.

Auch wenn noch kein allgemeines Argument für die Eindeutigkeit der Basis $\epsilon_i = C_i$ von M_C existiert, kann sie in so einfachen Fällen wie dem $c(2,5)$-Modell explizit überprüft werden: Die einzige nicht-triviale Fusionsregel lautet hier $\epsilon_1 \cdot \epsilon_1 = \epsilon_0 + \epsilon_1$, $\epsilon_0 = id$; beim Übergang zu einer anderen $\mathbb{Z}$-Basis $\tilde{\epsilon}_0 = \epsilon_0$ (ein Einselement muß dabei sein), $\tilde{\epsilon}_1 = a\epsilon_0 \pm \epsilon_1$, $a \in \mathbb{Z}$, erhält man

$$\tilde{\epsilon}_1 \cdot \tilde{\epsilon}_1 = (1 - a^2 \mp a)\tilde{\epsilon}_0 + (2a \pm 1)\tilde{\epsilon}_1 ;$$

die Terme in den Klammern müssen positiv sein, und zudem verlangen die Axiome für den konjugierten Sektor $1 - a^2 \mp a = 1$. Als einzige Lösungen bleiben $\tilde{\epsilon}_1 = \epsilon_1$ oder $\tilde{\epsilon}_1 = \epsilon_0 - \epsilon_1$; letztere Matrix liegt aber nicht in M_C, da $\langle (1,-1) \,|\, (1, \lambda_{PF}) \rangle < 0$: Die Fusionsbasis von M_C ist im $c(2,5)$-Fall eindeutig bestimmt.
Indem wir uns von vornherein auf den Cartan-Unterring M_C konzentriert hatten, wurden die "Rechnungen" natürlich stark verkürzt. Der Vollständigkeit halber sollte aber noch diskutiert werden, wir der ganze Ring $Hom_+(K_0(\mathcal{A}))$ der positiven K_0-Endomorphismen aussieht. Dabei zeigt sich, daß für eine Reihe der $c(2,p)$-Modelle schon $M_C = Hom_+(K_0(\mathcal{A}))$ ist. Die Bedingung (5.9) an eine Komponente $\rho_*^{(n)}$ eines positiven Endomorphismus führt nämlich zu $K \cdot d$ Gleichungen an deren $(K+1)^2$ Einträge, wobei d hier einfach der Grad des Minimalpolynoms des Perron-Frobenius-Eigenwerts λ_{PF} von C_1 ist: Die Einträge der Diagonalisierungs-Matrix S sind Polynome in den (anderen) Eigenwerten $\lambda_i = 2\cos(\frac{(2i-1)\pi}{p})$, die wegen

$$\lambda_i = (-1)^{i-1}(\check{p}_i(\lambda_{PF}) - \check{p}_{i-2}(\lambda_{PF}))$$

aber $\mathbb{Z}$-linear von $1, \lambda_{PF}, \ldots, \check{p}_K(\lambda_{PF})$ abhängen. λ_{PF} genügt der Gleichung $\check{p}_K(\lambda_{PF}) - \check{p}_{K+1}(\lambda_{PF}) = 0$, und falls das Polynom auf der linken Seite irreduzibel ist, gilt $d = [\mathbb{Q}(\lambda_{PF}) : \mathbb{Q}] = K+1$. Das ist für $c(2,5)$ und $c(2,7)$ erfüllt (und mutmaßlich immer dann, wenn p eine Primzahl ist), wo zudem noch alle sich

ergebenden $K(K+1)$ Gleichungen an die Einträge von $\rho_*^{(n)}$ linear unabhängig sind, so daß $Hom_+(K_0(\mathcal{A}))$ die Dimension $(K+1)^2 - K(K+1) = K+1$ hat und daher mit M_C übereinstimmt.
Im Fall $c(2,9)$, also $K=3$, ist dagegen $\check{p}_4(x) - \check{p}_3(x) = (x-1)(x^3-3x-1)$ reduzibel und $d=3$, und $Hom_+(K_0(\mathcal{A}))$ hat 7 Freiheitsgrade. In der Tat findet man, daß alle Matrizen $\rho_*^{(n)}$ von der Form

$$\rho_*^{(n)} = \sum_{i=0}^{3} r_i C_i + \sum_{s=1}^{3} s_i \sigma_i \tag{5.13}$$

mit

$$C_i = \check{p}_i(C_1)\ , \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

wie zuvor und

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\ , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

positive K_0-Endomorphismen sind, wenn die Koeffizienten $(r_0 - r_2 + r_3) + (3r_3 + r_1)\lambda_{PF} + r_2\lambda_{PF}^2 > 0$ erfüllen, $s_i \in \mathbb{Z}$ beliebig. Die σ_i sind insofern "entartete" Freiheitsgrade, als sie den Perron-Frobenius-Eigenvektor v_C annihilieren, ohne C_i-Anteil ist $\rho_*^{(n)}$ daher nicht positiv. Außerdem besitzen diese Matrizen negative Einträge (können also nicht zu injektiven Morphismen von $M_\infty(\mathcal{A}^{(n)})$ geliftet werden), und sie kommutieren weder untereinander noch mit der Einbettungsmatrix C_3. Nach allen in V.2 zusammengetragenen Zusatzforderungen an die für uns interessanten K_0-Endomorphismen scheiden die σ_i also aus, auch wenn durchaus Cartan-Unterringe M existieren, die ein σ_i enthalten (aufgespannt etwa von $\check{p}_i(C_1 + \sigma_1)$, dann sogar mit denselben Fusionsregeln wie M_C).

Im Fall der nicht-unitären $c(2,p)$-Modelle läßt sich also tatsächlich aus der K_0-Gruppe der "charakteristischen" Pfadalgebra die Superauswahl-Struktur gewinnen, mit den altbekannten Ergebnissen. Sobald man sich darauf beschränkt, nur die spezielle maximale kommutierende Teilmenge M_C innerhalb aller filtrierungs-erhaltender positiver Endomorphismen zu untersuchen, ist kaum noch Rechenarbeit zu leisten.

Man wird dennoch einwenden, daß immerhin zunächst die zu den Modellen gehörigen graduierten Pfadräume ausfindig zu machen sind und die Fusionsregeln so insgesamt auf eine relativ komplizierte Weise (verglichen mit Nachlesen bei [*BPZ*]) ermittelt werden. Anders liegen die Dinge aber für die restlichen in IV.4 diskutierten Virasoro-minimalen Modelle mit zentraler Ladung $c(2\nu,p)$ – s. auch [*KRV*].

Die fraglichen Pfadalgebren sind hier über den Tensorprodukt-Graphen $\mathcal{T}(\frac{p-1}{2}) \otimes \mathcal{B}(\nu)$ aufgebaut, d.h. die Einbettungsmatrix C ist das Tensorprodukt dieser beiden Matrizen – vgl. Gl. (4.17) und danach. Man sieht sofort, daß diese Graphen nicht als Fusionsgraphen des Virasoro-minimalen Modells oder auch irgendeiner anderen CFT auftreten können, da sie kein "freies Ende" besitzen: keinen Vertex, von dem nur eine Kante ausgeht und der die Vakuum-Darstellung repräsentieren könnte. Für unsere K-theoretische Methode ist es jedoch bloß erleichternd, nicht aber notwendig, von einer Fusionsmatrix zu starten. Den Cartan-Unterring M_C kann man auch andernfalls bestimmen.

Ohne uns bei diesen Theorien noch mit Eindeutigkeitsfragen aufzuhalten – die hier noch komplizierter zu klären wären als bei den $c(2,p)$-Modellen –, suchen wir schlicht die nächstliegende Fusions-Basis von M_C. Dazu bemerkt man zunächst, daß sich der eine Bestandteil $\mathcal{B}(\nu)$ zerlegen läßt in

$$\mathcal{B}(\nu) = \mathbf{1}_\nu + \omega + \omega^2 + \ldots \omega^{\nu-1} \tag{5.14}$$

mit

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Permutationsmatrix ω ist diagonalisierbar mit den νten Einheitswurzeln als Eigenwerten, und es gilt dementsprechend

$$\omega^i \cdot \omega^j = \omega^{i+j} \ , \quad \omega^\nu = \mathbf{1}_\nu \ . \tag{5.15}$$

Als Fusionsmatrizen betrachtet beschreiben die ω^i eine Gruppe von simple currents isomorph zu $\mathbb{Z}_\nu$.

Mit dieser Zerlegung von $\mathcal{B}(\nu)$ läßt sich ganz leicht eine Basis des $(K+1)\cdot\nu$-dimensionalen Rings M_C mit $C = \mathcal{T}(\frac{p-1}{2}) \otimes \mathcal{B}(\nu)$ angeben ($p = 2K+3$), nämlich

$$\rho_{i,j} = C_i \otimes \omega^j \ , \tag{5.16}$$

wobei $C_i = \check{p}_i(C_1)$ wie bei den $c(2,p)$-Modellen. Alle $\rho_{i,j}$ sind positive filtrierungs-erhaltende K_0-Endomorphismen (eigentlich Komponenten davon), vertauschen mit der Einbettungsmatrix C, und die Zerlegung ihrer Produkte erfüllt alle Fusions-Axiome, da die C_i sowie die ω^j das tun und Fusionsringe tensoriert werden dürfen. $\rho_{0,0}$ ist das neue Einselement.

Die K_0-Gruppe führt also zu dem Resultat, daß die Fusionsregeln der $c(2\nu,p)$-Modelle durch das Tensorprodukt von $c(2,p)$- und $\mathbb{Z}_\nu$-Fusion gegeben sind – anscheinend im Widerspruch zu den BPZ-Erkenntnissen: Für das Ising-Modell $c(4,3)$ etwa stehen dort Fusionsregeln dreier Felder $\phi_0 = 1, \phi_1$ und ϕ_2 zu lesen

$$\phi_1 \times \phi_1 = \phi_0 + \phi_2 \ , \quad \phi_1 \times \phi_2 = \phi_1 \ , \quad \phi_2 \times \phi_2 = \phi_0 \ , \tag{5.17}$$

während sich mit $\nu = 2$ und $p = 3$ (daher $K = 0$, $C_0 = 1$) aus (5.16) "nur" eine $\mathbb{Z}_2$-Fusion ergibt:

$$\rho_{0,1} \times \rho_{0,1} = \rho_{0,0} \ . \tag{5.18}$$

(Für diesen einfachen Fall läßt sich übrigens noch leicht zeigen, daß dies wirklich die einzigen Fusionsregeln sind, die man mit der K-theoretischen Methode erhalten kann; die fehlende Übereinstimmung kann also nicht auf ungelöste Eindeutigkeitsprobleme abgewälzt werden.) Die Unstimmigkeit löst sich auf, wenn man bedenkt, daß das Ising-Modell vom Standpunkt der CFT einfach ein freies Fermion beschreibt, also mit der "$\mathcal{W}$-Algebra" $\mathcal{W}(\frac{1}{2},2)$ identisch ist. (5.18) sind aber die Fusionsregeln des freien Fermions, der maximalen chiralen Symmetrie-Algebra, die im Virasoro-minimalen Modell $c(4,3)$ verborgen ist.

Alle minimalen Modelle mit zentraler Ladung $c(2\nu,p)$, $\nu > 1$, enthalten im Gegensatz zu den $c(2,p)$-Modellen einen simple current, und zwar das primäre Feld $\phi_s = \phi_{(p-1,1)}$, das auch noch die halbzahlige konforme Dimension

$$\delta_s = \frac{(\nu-1)(p-2)}{2} \tag{5.19}$$

hat. ϕ_s kann daher als lokales chirales Feld aufgefaßt – d.h. es (anti-)kommutiert mit allen Observablen ohne störende Phasenfaktoren von der Zopfgruppen-Statistik – und zur chiralen Algebra mit hinzugenommen werden. Die maximale chirale Symmetrie-Algebra der $c(2\nu,p)$-Modelle enthält also nicht nur den Eneregie-Impuls-Tensor, sondern mindestens die (Super-)$\mathcal{W}$-Algebra $\mathcal{W}(2,\delta_s)$ – vgl. dazu auch [*Blu*].

Mit dieser Art von Algebra-Erweiterung lassen sich zwar keine radikal neuen rationalen CFT konstruieren – insbesondere sind ja die minimalen Modelle auch bzgl. der Virasoro-Algebra alleine schon rational –, aber dennoch ist es keineswegs leicht, die Fusionsregeln von $\mathcal{W}(2,\delta_s)$ mit zentraler Ladung $c(2\nu,p)$ mit den "üblichen" Mitteln herauszufinden. Unser K-theoretisches Vorgehen andererseits liefert die obige Aussage (5.16) über die Tensorprodukt-Struktur dieser Fusionsregeln nahezu sofort:

$$F_{\mathcal{W}(2,\delta_s)} = F_{c(2,p)} \otimes \mathbb{Z}_\nu \tag{5.20}$$

Dieses Ergebnis konnte in einigen Fällen mit auf anderen Wegen gewonnenen verglichen werden:
Das minimale Modell mit $c(4,5) = \frac{7}{10}$ ist gleichzeitig eine Theorie aus der unitären Serie der Super-Virasoro-Algebra $\mathcal{W}(2,\frac{3}{2})$, und aus der K-theoretischen Methode erhält man ebenso einen Fusionsring, der von einem erzeugenden Feld mit dem A_4-Dynkin-Diagramm als Fusionsgraph aufgespannt wird, wie mit anderen Techniken [*EH*].
Zu $c(4,7) = -\frac{13}{14}$ findet man einen Erzeuger mit A_6-Fusionsgraph in Übereinstimmung mit den $\mathcal{W}(2,\frac{5}{2})$-Resultaten in [*Va, EH*].
Kürzlich konnte in [*EH*] darüberhinaus allgemein gezeigt werden, daß die Virasoro-minimalen Modelle der zentralen Ladungen $c(4,p)$, p ungerade, stets die Fusionsregeln (5.20) und damit einen Generator

$$\phi_1 = C_1 \otimes \omega$$

des Fusionsrings mit A_{p-1} als Fusionsgraph besitzen.

Außer dieser Serie war es bislang noch möglich, die Fusion der $\mathcal{W}$-Algebra $\mathcal{W}(2,3)$ für $c = \frac{4}{5} = c(6.5)$ mit anderen Methoden zu ermitteln [*EF*]. Mit diesen ergibt sich wie aus (5.20) eine $\mathbb{Z}_3$-Graduierung des Fusionsringes, genauer erhält man zwei erzeugende primäre Felder, eines konjugiert zum anderen, die die Fusionsregeln der fundamentalen Darstellungen der SU(3)-WZW-Theorie mit Level 2 haben:

$$\phi_1 = C_1 \otimes \omega\ , \quad \phi_{\bar{1}} = C_1 \otimes \omega^2$$

Inzwischen konnte M. Rösgen auch eine Pfaddarstellung für die Charaktere des Virasoro-minimalen Modells $c(3,5)$ finden, das keine simple currents mit halbzahliger konformer Dimension enthält. Der zugrundeliegende Graph ist $\mathcal{T}(2) \otimes \mathcal{B}(2)$ wie beim $c(4,5)$-Fall, aber mit "verdoppelter" Energiegewichtung beim ersten Graphen (die Markierungen von $\mathcal{T}(2)$ sind 0 und 4). Die Fusion dazu ist die von [*BPZ*], wie erwartet.

Wenn auch noch etwas wenig Modelle bekannt sind, in denen K-theoretisch berechnete Fusionsregeln mit den Ergebnsissen anderer Methoden verglichen werden können, zeigen die Beispiele der $c(2\nu,p)$-Serie doch, daß die Pfadraum-Formulierung aus IV.4 und der K-theoretische Zugang zur Fusion durchaus neue Ergebnisse bringen können, und zwar bequemer als die konventionellen Methoden. Daß die Pfadalgebra und damit die K_0-Gruppe von vornherein die maximale (Super-)Symmetrie-Algebra des Modells "sehen", ist ein recht befriedigendes Merkmal, das auch bei etwaigen Klassifizierungs-Ansätzen, die sich aus dem neuen AF-Algebra-Bild ergeben könnten, von großem Nutzen sein dürfte.

Zum Abschluß seien noch einige weitere Bemerkungen angefügt, die letztlich auf die Universalität des neuen Verfahrens abzielen. Im letzten Kapitel wurden ja Hinweise auf die Rolle von AF-Algebren in der CFT zusammengetragen, die aus ganz verschiedenen Bereichen stammen, "getestet" wurde die K_0-Methode bis jetzt aber nur an den "rein quantenfeldtheoretischen" AF-Algebren: Aus denen, die sich wie Rehren's master symmetry algebra nach [*FRS*] aus dem algebraischen Zugang ergeben und die statistischen Eigenschaften zwei-dimensionaler QFT beschreiben, folgen nach dem im Anschluß an (5.12) Bemerkten automatisch die richtigen Fusionsregeln, und offenbar gilt das genauso für die Pfadalgebren, in denen der konforme Hamiltonian dargestellt ist.
Für die mit Gitterapproximationen verknüpften AF-Algebren dagegen ist die Situtation weniger klar. Zwar haben wir aus den IRF-Modellen von IV.1 durch Analogiebetrachtungen wirksame Kriterien an die für uns interessanten K_0-Endomorphismen gewonnen (Netzstruktur; filtrierungs-erhaltende, stationäre Systeme), aber die AF-Algebren selbst, die in diesen statistischen Modellen vorkommem, sind andere als die direkt aus der CFT für dieselben Theorien abgeleiteten: Nach [ABF, Hu] können die kritischen Punkte der über den A_n-Dynkin-Diagrammen aufgebauten IRF-Modelle mit den unitären Virasoro-minimalen Theorien der zentralen Ladungen $c(n, n+1)$ identifiziert werden, doch die zugehörigen Pfadräume sind definitiv verschieden von den in Abschnitt IV.4 ausgearbeiteten. Wendete man dennoch die Methode dieses Kapitels an, erhielte man aus der A_n-Pfadalgebren die Fusionsregeln der SU(2)-WZW-Modelle mit Level $n-1$ (denn das A_n-Diagramm ist gleichzeitig der Fusionsgraph des zur fundamentalen Darstellung assoziierten primären Feldes) anstelle der BPZ-Fusionsregeln der Virasoro-minimalen Modelle [*Rec*].

Die ergäben sich, wenn man mit – einer zusammenhängenden Hälfte des zerfallenden – Graphen $A_{n-1} \otimes A_n$ startete, was beim Ising-Modell zu $A_2 \otimes A_3 = A_3 \oplus A_3$ führte mit der Majorana-Algebra von [*MaS*] als zugehöriger Pfadalgebra! Schiebt man übrigens das nur periodische Bratteli-Diagramm über dem A_3-Graphen zu einem stationären zusammen (telescoping), kommt man zum Bratteli-Diagramm über $\mathcal{B}(2)$ wie oben.
Noch eine weitere, wohl eher zufällige Übereinstimmung ergibt sich für das $c = \frac{7}{10}$-Modell: Nach [ABF, Hu] gehört dazu das IRF-Modell über dem A_4-Graphen, der auch der (einzige zusammenhängende) Fusionsgraph der $\mathcal{W}(2, \frac{3}{2})$-Fusionsregeln ist, die man aus (5.20) erhält.

Der wesentliche Unterschied zwischen den IRF-Pfadräumen und denen aus Abschnitt IV.4 liegt meiner Meinung nach in der Zuordnung der Pfade zu Höchstgewichts-Darstellungen, in der L_0-Graduierung und in beider "Kompatibilität" mit den Einbettungen der endlich-dimensionalen Hilberträumen: Das Besondere an den Pfaddarstellungen von [*KR, KRV*] ist, daß diese beiden Eigenschaften als "lokale" Informationen gegeben sind, d.h. sie sind schon am Anfangsvertex bzw. nach endlich vielen Schritten abzulesen. Die ABF-Pfade dagegen sind zwangsweise unendlich lang, mit einem zwischen zwei Vertices oszillierenden Ende, das die Zugehörigkeit eines Pfades zu einem Virasoro-Modul und auch seine Energie festlegt. Daraus läßt sich ableiten, daß eine etwaige Darstellung aller Virasoro-Generatoren auf diesen Pfadräumen nicht durch AF-Algebra-Elemente aus endlich-dimensionalen Unteralgebren approximierbar ist, wie es wohl für die Pfaddarstellungen aus IV.4 möglich ist, vgl. die Bemerkungen am Ende jenes Abschnitts.
Es ist jedoch durchaus denkbar, daß die ABF-Pfaddarstellungen sich in solche auf anderen Graphen umschreiben lassen, so daß die Energie "lokal" definiert werden kann und man durch einige Operationen wie vielleicht telescoping der zugehörigen Bratteli-Diagramme zu den in IV.4 aufgetretenen Graphen gelangt.

"Bessere Resultate" (soll heißen: die richtigen Fusionsregeln) erhält man eventuell aus den ein-dimensionalen CFT-Approximationen der Gitter-WZW-Algebren. Wenn das in Abb. 4.1 gezeigte Bratteli-Diagramm tatsächlich die Einbettungen der U(1)-Gitter-Algebra richtig wiedergibt, was wie schon bemerkt noch genauer zu untersuchen bleibt, dann kommt man mit Hilfe der K_0-Gruppe zu einem Fusionsring aus p simple currents, in Übereinstimmung mit den bekannten Ergebnissen über WZW-Modelle. Vor der Berechnung der K_0-Endomorphismen sollte dabei zuerst aus dem periodischen Bratteli-Diagramm durch telescoping ein stationäres gemacht werden, das dann die Einbettungs-Matrix $\mathcal{B}(p)$ wie in (4.28) hat.

Eine "Erklärung" dieses besseren Verhaltens der St.-Petersburg-Algebren könnte wieder im Verhältnis von AF-Einbettungen und Aktion der konformen Transformationen gesucht werden: Bei den Gitter-WZW-Modellen operiert Diff(S^1) ja in einer Weise [FG], die mit den endlich-dimensionalen Algebren verträglich ist.

VI. Offene Fragen, Möglichkeiten

In den vorangegangenen Kapiteln wurde ein Verfahren erarbeitet, aus der K_0-Gruppe einer AF-Algebra direkt die Fusionsregeln der "zugehörigen" CFT zu berechnen. Einen wesentlichen Ausgangspunkt bildeten dabei Begriffe des Algebraischen Zugangs zur QFT, namentlich die Idee, Algebra-Endomorphismen zur Beschreibung von Superauswahl-Sektoren heranzuziehen. Ebenso wichtig war jedoch die Hypothese, daß anstelle der universellen Observablen-Algebra oder gar des ganzen Netzes lokaler Algebren man mit einer AF-Algebra arbeiten kann, genauer mit einem Turm endlich-dimensionaler C^*-Algebren, der zwar sicher nicht alle, aber eben doch einige charakteristische Eigenschaften einer CFT, ihr "topologisches Skelett", kodieren kann.
Für eine Serie von Beispielen, die insbesondere die meisten Virasoro-minimalen Modelle umfaßt, konnten solche AF-Beschreibungen etabliert werden, indem L_0-graduierte Isomorphismen zwischen den abstrakten Höchstgewichts-Moduln und bestimmten Pfadräumen konstruiert wurden. Für diese Theorien liefert die K-theoretische Methode einen sehr direkten und schnellen Zugang zu den Fusionsregeln der maximalen chiralen Symmetrie-Algebra, die in diesen Virasoro-Modellen versteckt ist.
Daß das neue Verfahren nicht nur auf die zu solchen Pfaddarstellungen gehörigen AF-Algebren anwendbar ist, zeigte sich anhand der Türme, die in modellunabhängigen Überlegungen der Algebraischen QFT in niedrigen Dimensionen auftauchen oder auch bei den Gitter-WZW-Modellen.

Schon in Kapitel V wurde eingeräumt, daß noch eine Reihe ungeklärter Detailprobleme bei der K-theoretischen Berechnung von Fusionsregeln offen bleiben. Einige davon dürften von allgemeinem Interesse sein, so vor allem die Frage, ob die ausgezeichnete Fusionsbasis eines Fusionsringes immer eindeutig ist. Versucht man, dies in Beispielen zu beantworten, stößt man jedoch rasch auf polynomiale Gleichungen und Ungleichungen, die wohl nicht ganz leicht zu beherrschen sind, schon gar nicht vom Autor.
Von grundsätzlicherer Bedeutung für unser Vorgehen sind aber noch andere Probleme: Bildet K_0 die Superauswahl-Struktur stets injektiv und surjektiv ab? Kann man überhaupt erwarten, daß sich in $Hom_+(K_0(\mathcal{A}))$ eines Turmes $\mathcal{A}$ endlich-dimensionaler Algebren irgendwelche Fusionsregeln wiederfinden lassen?

Wahrscheinlich können diese Fragen erst geklärt werden, wenn auch die zentrale AF-Algebra-Hypothese präzisiert und bewiesen werden kann. Falls das gelingen sollte, wird man dabei sicher auch Restriktionen an die in rationalen CFT realisierten AF-Türme finden, von denen einige wie die Periodizität des Bratteli-Diagramms schon weiter oben als Vermutungen formuliert wurden. Zusammengenommen sollten sich diese Kriterien dann in ganz neue Klassifikations-Ansätze ummünzen lassen.

Eine – wenigstens aus der Sicht der Algebraischen QFT – zentrale Frage ist natürlich die nach der lokalen Struktur der Observablen-Algebra. Man kann es zwar für einen Vorzug des K-theoretischen Zugangs zu den Fusionsregeln halten, daß keine lokalen Daten benötigt werden, doch wenn eine AF-Algebra eine CFT beschreiben soll, müssen auch diese letztlich aus dem Algebren-Turm zu extrahieren sein.
Fortschritte in dieser Richtung sollten sich aus der Operation der Virasoro-Generatoren $L_0, L_{\pm 1}$ auf den Pfadräumen von Abschnitt IV.4 ergeben, die von M. Rösgen konstruiert wurden [*Rö*]. Wenn diese Lie-Algebra-Generatoren zu einer Gruppen-Operation aufintegriert werden können – was eventuell Assozieren gewisser Limites von AF-Algebra-Elementen erfordert –, erhält man eine Darstellung von SU(1,1) auf der (erweiterten?) AF-Algebra und kann invariante Unteralgebren zu Transformationen studieren, die ein gegebenes Intervall von S^1 fest lassen. Solche Unteralgebren sollten dann relativ leicht mit den lokalen

Observablen-Algebren $\mathcal{A}(I)$ in Zusammenhang zu bringen sein.
Darstellungen der Virasoro-Generatoren auf Pfadräumen sind ohnehin von großem Interesse in der Theorie der statistischen Gittermodelle; dort sucht man schon seit langem nach "Relikten" der konformen Invarianz auch weg vom kritischen Punkt, aber nur beim Ising-Modell ist es bisher gelungen, die ganze Virasoro-Algebra auf den Gitter-Konfigurationen darzustellen. Zwar eignen sich die allermeisten der in IV.4 aufgetretenen Graphen nicht dazu, ein kritisches IRF-Modell zu konstruieren – jedenfalls wenn es nach der üblichen Meinung geht, wonach die Norm des zugrundeliegenden Graphen nicht größer als 4 sein darf –, aber dennoch darf man sich wohl auch von derartigen Darstellungen wertvolle Aufschlüsse erhoffen, die wegen des Zusammenhangs von Skalentransformationen und SU(1,1) vielleicht sogar neues Licht auf Kontinuums-Limes und Skalenhypothese werfen.

Um wieder in die Nähe der Algebraischen QFT zurückzukehren: Eine weitere Frage, die sich aufdrängt, ist die, ob sich auf dem Umweg über die in dieser Arbeit gefundenen K_0-Endomorphismen gar die DHR-Endomorphismen selbst rekonstruieren lassen, wenigstens eine nicht-lokalisierte Vorform. Anders ausgedrückt: Kann man die K_0-Endomorphismen zu AF-Algebra-Endomorphismen "liften"?
Wie schon in III.3 festgehalten, gilt für AF-Algebren zwar Elliotts Theorem über (ordnungs-unitale) Isomorphie der K_0-Gruppen, ob aber das Liften beliebiger positiver Gruppenhomomorphismen auch nur prinzipiell möglich ist, ist (mir) unbekannt. Jedoch waren die in Kapitel V betrachteten K_0-Endomorphismen ausnahmslos filtrierungs-erhaltend, zerfielen also in Systeme von Endomorphismen von K_0-Gruppen endlich-dimensionaler Algebren; nach dem gegen Ende von Abschnitt III.3 zitierten Satz können solche Abbildungen – unter gewissen Voraussetzungen – tatsächlich zu Algebra-Homomorphismen geliftet werden, und zwar bis auf unitäre Äquivalenz in eindeutiger Weise.
Eine der Voraussetzungen ist aber, daß der zu liftende K_0-Endomorphismus ordnungs-unital (oder skaliert) ist, was für die meisten unserer $\rho_{i*}^{(n)}$ nicht zutrifft: Nimmt man etwa das einfachste der Beispiele aus IV.4, die Pfadalgebra über dem 2-punktigen Tadpole-Graph, so ist

$$\rho_{1,*}^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ;$$

eine Ordnungseinheit $0 \neq (a,b)^t \in \mathbb{Z}^2$ wird also unter $\rho_{1*}^{(n)}$ auf $(a+b,a)^t \neq (a,b)^t$ abgebildet, so daß $\rho_{1*} : K_0(\mathcal{A}^{(n)}) \longrightarrow K_0(\mathcal{A}^{(n)})$ nicht einfach von einem Algebra-Endomorphismus $\rho_1^{(n)} : \mathcal{A}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{A}^{(n)}$ herkommen kann. Dagegen könnten derartige $\rho_{i*}^{(n)}$ noch K_0-Bilder von Homomorphismen $\tilde{\rho}_i^{(n)} : \mathcal{A}^{(n)} \longrightarrow M_k(\mathcal{A}^{(n)})$ der Algebra in eine Matrix-Amplifikation sein, was man der K_0-Abbildung nicht ansähe, da ja $K_0(\mathcal{A}) = K_0(M_k(\mathcal{A}))$ gilt – vgl. die Konstruktion von K_0.
Doch nicht genug mit dieser Komplikation: I.a. kann der Lift $\tilde{\rho}_i^{(n)} : \mathcal{A}^{(n)} \longrightarrow M_k(\mathcal{A}^{(n)})$ zudem auch nicht unital sein, was wieder an der Ordnungs-Einheit $u_{\mathcal{A}} = [\mathbf{1}_{\mathcal{A}}]$ festzustellen ist: Wäre nämlich $\tilde{\rho}_i^{(n)}$ unital, müßte $u_{\mathcal{A}}$ auf die Ordnungs-Einheit von $M_k(\mathcal{A}^{(n)})$ geworfen werden, die einfach $k \cdot u_{\mathcal{A}}$ ist; auch das ist für unsere K_0-Endomorphismen meist nicht erfüllt.
Besteht man dennoch darauf, die filtrierungs-erhaltenden K_0-Endomorphismen zu liften, hat man es also mit nicht-unitalen Homomorphismen von $\mathcal{A}$ nach $M_k(\mathcal{A})$ zu tun, mit "nicht-unitalen Amplimorphismen", um die Terminologie von $[SV]$ zu benutzen, wo solche Abbildungen bei der Behandlung von Spin-Modellen auf dem Gitter mit DHR-Methoden schon vorkamen. Einem Zusammenhang mit diesen Ergebnissen bleibt nachzugehen. Man kann darüber spekulieren, ob diese Schwierigkeiten an Bedeutung verlieren, wenn von-Neumann-Abschlüsse der beteiligten C^*-Algebren gebildet werden. Wenn ja, dann lassen sich aus unseren K_0-Endomorphismen vielleicht Einbettungen von Subfaktoren gewinnen, und zwar auch für Index größer als 4.

Vermerkt sollte werden – selbst wenn es nicht sonderlich überrascht –, daß auch was das Liften von K_0-Endomorphismen betrifft das Ising-Modell eine positive Ausnahme bildet. Hier "paßt" nämlich $\tilde{\rho}^{(n)}_{\frac{1}{2}}(\mathcal{A}^{(n)})$ von oben schon in $M_2(\mathcal{A}^{(n)})$ "hinein", und zwar "ganz genau"; in der "Ising-Algebra", die über $A_3 \oplus A_3$ aufgebaut ist, kann man aber die Identifikation $M_2(\mathcal{A}^{(n)}) = \mathcal{A}^{(n+2)}$ vornehmen, so daß man auf Umwegen tatsächlich eine unitale AF-Algebra-Selbstabbildung erhält. Will man diese konkret angeben, muß man beim Liften die unitäre Äquivalenz festlegen, wobei man sich von der Bedingung leiten lassen kann, daß $\tilde{\rho}_{\frac{1}{2}}$ möglichst einfach auf den Temperley-Lieb-Jones-Projektoren der AF-Algebra wirkt. Nach ziemlich langwierigen Rechnungen mit ausladenden Formeln reproduziert man so den Mack-Schomerus-Endomorphismus $\rho_{\frac{1}{2}}$, ebenso – nur etwas leichter – auch die beiden anderen (Auto-)Morphismen.

Nach diesem Exkurs ins Besondere sei noch ein letzter Ausblick gestattet: Nachdem der Versuch, aus AF-Algebren mit der K_0-Gruppe Fusionsregeln abzuleiten, alles in allem nicht ganz erfolglos war, darf man vielleicht gleich davon träumen, auch andere Strukturen von CFT aus anderen Invarianten einer dann etwas "vergrößerten" Algebra zu erhalten, oder gar davon, eine Hierarchie von Operator-Algebra-Klassen etablieren zu können, die einer von QFT-Klassen entspricht, samt einer Kollektion von Funktoren, die jeweils bestimmte Information aus den Algebren isolieren. Aber das ist ein weites Feld.

Anhang: Von Pfaddarstellungen zu Dilogarithmus-Identitäten

Zur Abrundung sei hier noch ein Kapitel über Dilogarithmus-Identitäten in der CFT angefügt, ein Thema, das zumindest lose mit den in Kapitel II eingeführten Pfadraum-Darstellungen zusammenhängt. Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist, daß die effektive zentrale Ladung $c_{\rm eff} = c - 24h_{\rm min}$ bei vielen CFT als Summe von Werten der Dilogarithmus-Funktion an bestimmten algebraischen Zahlen (die mit Jones-Indizes in Verbindung stehen) ausgedrückt werden kann. Dieses Ergebnis erhält man beim Studium des asymptotischen Verhaltens der Charakterfunktionen.

Man kann erwarten, daß das Auftreten der Dilogarithmus-Funktion in der CFT auf tieferliegende Strukturen hinweist, die insbesondere neue Verbindungen zu mathematischen Disziplinen wie der Geometrie von 3-Mannigfaltigkeiten und der Zahlentheorie einschließen.

Bevor wir uns konformen Charakteren zuwenden hier zunächst die Definition der Dilogarithmus-Funktion(en) (vgl. [*Le*]). Der *Euler'sche Dilogarithmus* ist gegeben durch

$$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} = -\int_0^z \frac{\log(1-w)}{w} dw \tag{A.1}$$

für $0 \leq z \leq 1$, der Name erklärt sich beim Vergleich mit der Taylor-Entwicklung von $\log(1-z)$. "Angenehmere" Eigenschaften hat die Modifikation

$$\mathrm{L}(z) = \mathrm{Li}_2(z) + \frac{1}{2}\log(z)\log(1-z)\,, \tag{A.2}$$

der sog. *Rogers-Dilogarithmus*: Er ist die eindeutig bestimmte meßbare Funktion mit $\mathrm{L}(1) = \frac{\pi^2}{6}$ (einem von gerade acht bekannten Funktionswerten des Dilogarithmus!) und

$$\mathrm{L}(w) + \mathrm{L}(z) + \mathrm{L}(1-wz) + \mathrm{L}\Big(\frac{1-w}{1-wz}\Big) + \mathrm{L}\Big(\frac{1-z}{1-wz}\Big) = 3\mathrm{L}(1)\,. \tag{A.3}$$

Diese *5-Term-Relation* zieht eine Reihe von einfacheren Funktionalgleichungen nach sich, die wichtigsten sind

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(1-z) &= \mathrm{L}(1) - \mathrm{L}(z)\,, \\ \mathrm{L}(z^2) &= 2\mathrm{L}(z) - 2\mathrm{L}\Big(\frac{z}{1+z}\Big)\,. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Für reelle Argumente $z > 1$ kann $\mathrm{L}(z)$ durch

$$\mathrm{L}(z) = 2\mathrm{L}(1) - \mathrm{L}(1/z)$$

in einer mit den Funktionalbeziehungen konsistenten Weise fortgesetzt werden, für $z < 0$ benutzt man

$$\mathrm{L}(z) = \mathrm{L}\Big(\frac{1}{1-z}\Big) - \mathrm{L}(1)\ .$$

Die 5-Term-Relation (A.3) ist geometrischen Ursprungs: Betrachte fünf verschiedene Punkte $p_0, \ldots, p_4$ in der kompaktifizierten komplexen Ebene $\hat{\mathbb{C}}$, die als Rand des (hyperbolischen) 3-Raum H^3 aufgefaßt wird, sowie die fünf (hyperbolischen) Tetraeder in H^3, die von je vier dieser Punkte aufgespannt werden. Die Volumina

$$Vol(p_0, \ldots, \widehat{p_i}, \ldots, p_4) =: D(z_i)$$

dieser Tetraeder hängen nur vom Doppelverhältnis ab (der einzigen konform invarianten Funktion von vier komplexen Zahlen, und SL(2,$\mathbb{C}$) ist gerade die Isometrie-Gruppe des hyperbolischen 3-Raums), also etwa von

$$z_4 = \frac{(p_0 - p_1)(p_2 - p_3)}{(p_0 - p_2)(p_1 - p_3)} \ .$$

Darüberhinaus sind diese Volumina natürlich auch untereinander verknüpft, und zwar durch die ganz ähnliche 5-Term-Relation

$$\sum_{i=0}^{4} (-1)^i D(z_i) = 0 \ , \tag{A.5}$$

die sich leicht in die Form (A.3) mit einer Null auf der rechten Seite bringen läßt. Kaum überraschend: $D(z)$ ist eine weitere Abart des Dilogarithmus, *Bloch-Wigner-Funktion* genannt und definiert durch

$$D(z) = \Im(\mathrm{Li}_2(z)) + \arg(1-z) \log |z| \tag{A.6}$$

mit $\arg(w) \in (-\pi, \pi]$. Wie schon aus der einfacheren Funktionalgleichung ersichtlich, hat $D(z)$ von allen Dilogarithmus-Funktionen in gewisser Hinsicht die schönsten Eigenschaften (wichtig vor allem in der Zahlentheorie und der algebraischen K-Theorie); diese Funktion tritt in den wichtigsten geometrischen Invarianten von 3-Mannigfaltigkeiten auf (vgl. etwa [*Zag*]), jedoch ist es zunächst die Rogers-Funktion, auf die man in der CFT stößt.

Um das zu zeigen, werden wir Charakterfunktionen $\chi_i(\tau) = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}_i} q^{L_0 - c/24}$, $q = e^{2\pi i \tau}$, untersuchen, insbesondere deren Divergenz für $q \to 1^-$. Bei der Herleitung der Dilogarithmus-Identitäten für c_{eff} vergleicht man abstrakte Folgerungen aus den modularen Transformationseigenschaften der $\chi_i(\tau)$ einerseits mit konkreten, aus Näherungsrechnungen gewonnenen Ergebnissen andererseits.

Wie in Kapitel I erläutert, bilden die Charaktere einer rationalen CFT eine endlich-dimensionale Darstellung der *modularen Gruppe* PSL(2,$\mathbb{Z}$), so daß insbesondere der Generator $S : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ auf den Charakteren wie

$$\chi_i(\tau) = \sum_j S_{ij} \chi_j \left(-\frac{1}{\tau} \right)$$

wirkt. Das macht man sich zunutze, um die Asymptotik von $\chi_i(\tau)$ für $q \to 1^-$ zu bestimmen: Mit $t := -i\tau \to 0^+$ gilt

$$\chi_j(\tau) = S_{j,\min}\, e^{\pi c_{\mathrm{eff}}/12t} \Big[1 + \sum_{k \neq \min} \frac{S_{j,k}}{S_{j,\min}}\, e^{-2\pi(h_k - h_{\min})/t} + \ldots \Big] \ , \tag{A.7}$$

die Klammer geht wegen $h_k > h_{\min}$ gegen 1 (falls keine zwei Darstellungen mit $h_{\min}$ existieren) und die Divergenz der Charaktere einer konformen Feldtheorie ist daher für alle primären Felder universell und durch c_{eff} bestimmt. (Daß die Quotienten konstant sind, konnte ja bei der Definition der Quantendimensionen in (1.27) ausgenutzt werden.)

Unabhängig von dieser eleganten, nur auf Modulformen anwendbaren Methode kann man die Asymptotik einer Potenzreihe natürlich auch – mehr oder weniger mühsam – mit Approximationsverfahren herausfinden, zumindest für Reihen einer bestimmten Form. In [*NRT*, *RS*] wurden Charaktere der Gestalt

$$\chi_i(\tau) = \sum_{n_1, \ldots, n_m \geq 0} \frac{q^{\mathbf{n} B \mathbf{n}^t + \mathbf{b}_i \mathbf{n}^t + \beta_i}}{(q)_{n_1} \cdots (q)_{n_m}} \ , \tag{A.8}$$

untersucht, wobei $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_m) \in N^m$, $B \in M_m(Q)$ symmetrisch, $\mathbf{b}_i \in Q^m$; im Nenner schließlich wurde die Abkürzung $(q)_k = (1-q)\cdots(1-q^k)$ verwendet.

Wie schon in Kapitel IV erwähnt, können z.B. die Charaktere der $c(2,p)$-Modelle in diese Form gebracht werden, indem verallgemeinerte Rogers-Ramanujan-Identitäten angewandt werden. B ist in diesen Fällen das Inverse der Cartan-Matrix des Kaulquappen-Graphen $A_{p-3}/\mathbb{Z}_2$. Die Summenform (A.8) hat außerdem eine direkte Interpretation als Anregungsspektrum der "Quasiteilchen" im Pfadraum, vgl. IV und [$R\ddot{o}$].

Das asymptotische Verhalten von (A.8) kann auf unterschiedliche Arten berechnet werden, im folgenden stellen wir die in [NRT] verwendete, auf [RS] fußende Methode vor.

Zunächst bemerken wir, daß die Divergenz von (A.8) nicht von $\mathbf{b}_i$ und β_i abhängt, die darum ohne Einschränkung zu Null gesetzt werden können. Es genügt, das Wachstum der Koeffizienten a_N in

$$\chi_i(\tau) = \sum_{\mathbf{n}\geq 0} \frac{q^{\mathbf{n}B\mathbf{n}^t}}{(q)_{\mathbf{n}}} = \sum_N a_N q^N$$

zu bestimmen: Wenn a_N wie $\exp\{2\sqrt{N\mathcal{L}}\}$ divergiert (was sich weiter unten gerade ergeben wird), dann gilt annähernd

$$\sum_N a_N q^N \simeq \int dN\, a_N q^N \sim \exp\{\mathcal{L}/2\pi t\}\,, \tag{A.9}$$

wobei die Summe durch ein Integral ersetzt und q durch $t = -i\tau$ ausgedrückt wurde; der weggelassene Proportionalitätsfaktor ist ein Gauß'sches Integral.

Die Koeffizienten a_N lassen sich mit dem Cauchy'schen Integralsatz wie

$$a_{M-1} = \oint \frac{dq}{2\pi i} \sum_{\mathbf{n}\geq 0} \frac{q^{\mathbf{n}B\mathbf{n}^t - M}}{(q)_{\mathbf{n}}} = \oint \frac{dq}{2\pi i} \sum_{\mathbf{n}\geq 0} \exp(f(q,\mathbf{n}))\,, \tag{A.10}$$

$$f(q,\mathbf{n}) = \log q(\mathbf{n}B\mathbf{n}^t - M) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_i} \log(1-q^k)$$

schreiben.

Die entscheidende Approximation besteht darin, Kreisintegral und Summe in (A.10) einfach durch den Wert des Integranden $\exp(f(q,\mathbf{n}))$ am Maximum zu ersetzen: *Sattelpunkts-Näherung*. Dieses eigentlich recht grobe Verfahren reicht hier tatsächlich aus – vgl. [RS] zu Fehlerabschätzungen.

Bevor der Sattelpunkt bestimmt werden kann, muß der Nenner umgeformt werden: Es gilt

$$-\sum_{k=1}^{n_i} \log(1-q^k) = \log q^{-\frac{1}{24}} \eta(\tau) + \sum_{k=n_i+1}^{\infty} \log(1-q^k)$$

mit der Dedekind'schen η-Funktion

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{k=1}^{\infty} (1-q^k)^{-1}\,,$$

deren asymptotisches Verhalten sofort aus dem wohlbekannten modularen folgt

$$\eta(-\frac{1}{\tau}) = \sqrt{-i\tau}\,\eta(\tau) \tag{A.11}$$

und insgesamt einen Faktor $m \cdot \mathrm{L}(1)$ zu dem von (A.8) beisteuert.
Die verbleibende Summe wird nun wiederum durch ein Integral approximiert, das sich nach der Substitution $q^k = w$ als Dilogarithmus zu erkennen gibt:

$$\sum_{k=n_i+1}^{\infty} \log(1-q^k) \simeq \int_{n_i+1}^{\infty} dk \log(1-q^k) = \frac{1}{\log q}\mathrm{Li}_2(q^{n_i+1})$$

Die für die führende Ordnung der Divergenz unerheblichen Korrekturterme bei diesem Übergang von der Summe zum Integral sind übrigens in der sog. *Euler-Maclaurin-Formel* berücksichtigt; der Nutzen dieser höheren Terme wird weiter unten noch kurz angesprochen werden.
Jetzt können die Sattelpunkts-Bedingungen bequem ausgewertet werden: $\partial_{n_i} f(q,\mathbf{n}) = 0$ führt mit $\xi_i := q^{n_i+1}$ zu

$$1 - \xi_i = \prod_{j=1}^{m} \xi_j^{2B_{ij}} \ , \tag{A.12}$$

einem Satz algebraischer Gleichungen, die auch in anderem physikalischen Kontext vorkommen, beim *thermodynamischen Bethe-Ansatz* (TBA). Diese Rechentechnik wird in integrablen QFT und kritischen Gittermodellen in zwei Dimensionen eingesetzt, wobei (A.12) sich im UV- bzw. Kontinuums-Limes am kritischen Punkt ergibt, also wieder Eigenschaften der "zugrundeliegenden" CFT beschreibt, siehe [*Za3*, *KM*, *BaR*] für detaillierte Erläuterungen.
Die verbleibende partielle Ableitung $\partial_q f(q,\mathbf{n}) = 0$ liefert jetzt

$$(\log q)^2 = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{m} \mathrm{L}(\xi_i) \, ,$$

und nimmt man noch die Divergenz (A.11) der η-Funktion hinzu und benutzt $\mathrm{L}(1-z) = \mathrm{L}(1) - \mathrm{L}(z)$, so hat man die Asymptotik der Koeffizienten im Charakter zu

$$a_N \simeq f(q,\mathbf{n})|_{s.p.} = \exp\{2\big(N\sum \mathrm{L}(1-\xi_i)\big)^{\frac{1}{2}}\} \tag{A.13}$$

bestimmt. Wegen (A.9) ergibt sich die folgende Dilogarithmus-Identität für die effektive zentrale Ladung aus dem Vergleich mit dem "modularen Ergebnis":

$$c_{\text{eff}} = \frac{1}{\mathrm{L}(1)}\sum_{i=1}^{m} \mathrm{L}(1-\xi_i) \ , \tag{A.14}$$

wobei die ξ_i die eindeutigen Lösungen der TBA-Gleichungen (A.12) mit $0 < \xi_i < 1$ sind.

In den Beispielen der minimalen Modelle $c(2,p)$ erhält man so die schon länger in der mathematischen Literatur bekannte Formel [*Le*, *Ki*]

$$\sum_{i=1}^{\frac{p-3}{2}} \mathrm{L}\Big(\frac{\sin^2\frac{\pi}{p}}{\sin^2\frac{(i+1)\pi}{p}}\Big) = \frac{\pi^2}{6}\frac{p-3}{p} \ ; \tag{A.15}$$

die Argumente des Dilogarithmus folgen aus den TBA-Gleichungen (A.12), wenn man für B^{-1} die Cartan-Matrix des Kaulquappen-Graphen der Ordnung $\frac{p-3}{2}$ nimmt.

Für die anderen minimalen Modelle der Virasoro-Algebra, für die in [*KRV*] Pfadraum-Darstellungen konstruiert werden konnten, lassen sich ebenfalls (zumindest einige) Charaktere in einer Summenform wie (A.8) angeben, die wiederum die Quasiteilchenstruktur der Modelle widerspiegelt, vgl. Kapitel IV. Trotz kleiner Abweichungen im Nenner von (4.29) gegenüber (A.8) kann die Näherung wie oben durchgeführt werden, allerdings stößt man auf keine neuen Dilogarithmus-Identitäten, sondern lediglich auf Umformungen von (A.15), siehe [*KRV*].

Darüberhinaus gibt es noch eine Reihe weiterer Beispiele von CFT, deren Charaktere eine Form ähnlich der in (A.8) haben, vor allem parafermionische Theorien, siehe z.B. [*Ke*, *Te1*]; manchmal treten in diesen Charakteren noch zusätzliche Restriktionen an die Summationsvariablen $\mathbf{n}$ auf.
Die enge Verknüpfung dieser Form der Charakterfunktionen mit "off-kritischen" Deformationen von CFT läßt sich besonders gut am Beispiel des Ising-Modells veranschaulichen: Hier gibt es zwei verschiedene Schreibungen für die Charaktere,s. z.B. [*Ke2*], eine mit nur einem Quasiteilchen ($B = \frac{1}{2} \equiv C^{-1}(A_1)$ in (A.8)) und eine mit acht ($B = C^{-1}(E_8)$), auf der anderen Seite existieren auch gerade zwei integrable massive Störungen der konformen $c = \frac{1}{2}$-Theorie, davon die eine mit einem massiven Teilchen, die andere mit acht, deren Massenverhältnis durch den Perron-Frobenius-Vektor der Cartan-Matrix von E_8 diktiert wird [*Za2*]. Wie der Zusammenhang zwischen Charakteren der Form (A.8) und integrablen Strörungen von CFT genau beschaffen ist, bleibt freilich noch zu klären.
Einige Überlegungen lassen vermuten, daß stets eine derartige Summenform existieren muß [*McC*], so daß eine Klassifikation dieser Potenzreihen umso wichtiger wäre. Tatsächlich lassen sich die modularen Transformations-Eigenschaften konformer Charaktere in Verbindung mit einer Verfeinerung der oben vorgestellten Näherungsrechnungen dazu benutzen, um Bedingungen an die in CFT möglichen Größen B, $\mathbf{b}_i$ und β_i aus (A.8) aufzustellen. In erster Linie müssen dabei die höheren Korrekturen in der Euler-Maclaurin-Formel beim Umschreiben des Nenners $(q)_\mathbf{n}$ beachchtet werden. Man stößt so auf einen Ausdruck für den Charakter, der als Vakuumfunktional einer null-dimensionalen QFT interpretiert und entsprechend berechnet werden kann: Störungsentwicklung in "Kopplungskonstanten" $(\log q)^k$, $k \geq -1$, liefert die "Quantenfluktuationen" im führenden asymptotischen Verhalten, die jedoch andererseits wegen der modularen Kovarianz in allen Ordnungen verschwinden müssen, was zu (unendlich vielen) Gleichungen an B, $\mathbf{b}_i$ und β_i führt. Da die "Wirkung" dieser "Feldtheorie" aber aus der Euler-Maclaurin- und Sattelpunkts-Entwicklung kommt und unendlich viele "Vertizes" enthält, sind die Feynman-Graphen, die man dafür zu berechnen hat, ziemlich kompliziert. In [*Te2*] konnte aber auf diese Weise gezeigt werden, daß die einzigen Charaktere von Typ (A.8) mit nur einem Quasiteilchen ($m = 1$) die bekannten des Ising-, des $c(2,5)$- und des $c(3,5)$-Modells sind (unter der Zusatzannahme, daß es zu fester Matrix B einen Charakter mit $\mathbf{b}_i = 0$ gibt).

Mit dem Dilogarithmus stößt man auf einige noch rätselhafte Verbindungen, deren eine die zu den Fusionsregeln von CFT ist. Die Argumente in (A.15) sind nicht einfach irgendwelche algebraischen Zahlen, sondern die inversen Quadrate der Quantendimensionen $D_i = S_{i0}/S_{00}$ der primären Felder des $c(2,p)$-Modells: Die S-Matrix ist hier durch

$$S_{ij} = \sqrt{\frac{4}{p}}(-1)^{i+j+(p-3)/2} \sin\Big(\frac{2\pi(i+1)(j+1)}{p}\Big) \tag{A.16}$$

gegeben, was bis auf Phasen mit der des Level-k-SU(2)-WZW-Modells übereinstimmt. Durch "Verdoppeln" von (A.15) erhält man denn auch Dilogarithmus-Identitäten für die zentrale Ladung dieser CFT.

Aber mehr noch: Setzt man "versuchsweise" statt $D_i = \lambda_0(i)$ andere Eigenwerte $\lambda_j(i)$ der Fusionsmatrizen N_i ein, so gehen diese Gleichungen in Dilogarithmus-Identitäten für die Höchstgewichte über, nämlich

$$\frac{1}{\mathrm{L}(1)} \sum_{i=2}^{k+1} \mathrm{L}\Big(\frac{1}{\lambda_j^2(i)}\Big) = c_k - 24h_{j-1}^{(k)} + 6(j-1)\ , \tag{A.17}$$

wobei

$$c_k = \frac{3k}{k+2} \quad \text{und} \quad h_{j-1}^{(k)} = \frac{j^2-1}{4(k+2)}\ , j = 1, \ldots, k+1$$

die zentrale Ladung bzw. die konformen Dimensionen der SU(2)- WZW-primären Felder sind. (Analoge Formeln gelten für die $c(2,p)$-Modelle, wenn man die konformen Familien geeignet umnumeriert.) Die Beziehung (A.17) wurde in [NRT] erstmals angegeben und für einige Fälle bewiesen, später gab Kirillov einen vollständigen Beweis [$Ki2$].
Aber auch für alle andere WZW existieren Vermutungen (und Teilbeweise) für Formeln, in denen die konformen Dimensionen durch den Dilogarithmus ausgedückt werden, wobei dessen Argumente wiederum eng mit den Fusionsregeln zusammenhängen [KN]. In den meisten Fällen ist es hier jedoch nötig, Korrekturterme in die Dilogarithmus-Identitäten aufzunehmen, deren Herkunft wahrscheinlich mit der Mehrdeutigkeit der analytischen Fortsetzung des Rogers-Dilogarithmus zu tun hat; jedenfalls kann man, nachdem diese Mehrdeutigkeiten explizit gemacht ist, auch einfachere Identitäten erhalten.

Das Erstaunliche an diesen Fusions-Dilogarithmus-Beziehungen ist der Zusammenhang zwischen ganz verschiedenen Kenngrößen konformer QFT, den sie stiften: Quantendimensionen (Jones-Indizes) auf der einen, zentrale Ladung und konforme Dimensionen auf der anderen Seite. Vielleicht läßt sich das im Rahmen der (Körper-)algebraischen K-Theorie am ehesten erklären, die hier automatisch ins Spiel kommt. Noch aber sind die strukturellen Prinzipien hinter diesen Verbindungen ebenso wenig verstanden wie die eher technische Frage, ob sich auch diese Dilogarithmus-Identitäten aus dem asymptotischen Verhalten der konformen Charaktere ableiten lassen.

Ein anderes Problem im Umkreis des Dilogarithmus, das enger mit dem in dieser Arbeit untersuchten "AF-Bild" von CFT zusammenhängt, stellt die Beziehung zwischen den Graphen, die die Pfadraum-Darstellungen des Kapitels II generieren, und den Matrizen B im Exponenten der Charaktere (A.8) dar. Eine allgemeine Klärung dieses Zusammenhangs liefert sicher ein konkretes Auswahlkriterium an die für rationale CFT relevanten AF-Algebren, was einen weiteren Schritt in Richtung einer Klassifikation rationaler konformer Quantenfeldtheorien bedeuten könnte.

Literaturangaben

[*BPZ*] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. B **241** (1984) 333

[*ABF*] G.E. Andrews, R.J. Baxter, P.J. Forrester, *Eight-vertex SOS model and generalized Rogers-Ramanujan-type identities*, J. Stat. Phys. **35** (1984) 193

[*AFS*] A. Alekseev, L. Faddeev, M. Semenov-Tian-Shansky, *Hidden quantum groups inside Kac-Moody algebras*, Commun. Math. Phys. **149** (1992) 335

[*AGS*] L. Alvarez-Gaumé, C. Gomez, G. Sierra, *Topics in conformal field theory*, in *Physics and Mathematics of Strings*, eds. L. Brink, D. Friedan, A.M. Polyakov, Singapore 1990

[*Ba*] R.J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, New York 1982

[*BaR*] V.V. Bazhanov, N.Yu. Reshetikhin, *Critical RSOS models and conformal field theory*, Int. J. Mod. Phys. A **4** (1989) 115

[*Bai*] F.A. Bais, P. Bouwknegt, M. Surridge, K. Schoutens, *Extensions of the Virasoro algebra constructed from Kac-Moody algebras using higher order Casimir invariants*, Nucl. Phys. B **304** (1988) 348

[*BDF*] D. Buchholz, C. D'Antoni, K. Fredenhagen, *The universal structure of local algebras*, Commun. Math. Phys. **111** (1987) 123

[*Be*] J. Bellissard, *K-Theory of C^*-Algebras in solid state physics*, in Lect. Notes in Pysics **257**, Springer 1886

[*BG*] J. de Boer, J. Goeree, *Markov traces and II_1-factors in conformal field theory*, Commun. Math. Phys. **139** (1991) 267

[*Bla*] B. Blackadar, *K-Theory for Operator Algebras*, MSRI Publ. 5, New York 1986

[*Blu*] R. Blumenhagen, M. Flohr, A. Kliem, W. Nahm, A. Recknagel, R. Varnhagen, *W-algebras with two and three generators*, Nucl. Phys. B **361** (1991) 255

[*BMT*] D. Buchholz, G. Mack, I.T. Todorov, *The current algebra on the circle as a germ of local field theories*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **5B** (1988) 20

[*Bo*] H.J. Borchers, *The CPT-theorem in two-dimensional theories of local observables*, Commun. Math. Phys. **143** (1992) 315

[*Br*] D.M. Bressoud, *Analytic and combinatorial generalizations of the Rogers-Ramanujan identities*, Memoirs of the Am. Math. Soc. No. **227** (1980) 24

[*BR*] O. Bratteli, D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, Vols. 1,2, New York, Berlin, 1987,1981

[*Bu*] D. Buchholz, Vorlesungsskript *Algebraische Quantenfeldtheorie*, Hamburg 1985

[*BW*] D. Buchholz, E. Wichmann, *Causal independence and the energy-level density of states in local quantum field theory*, Commun. Math. Phys. **106** (1986) 321

[*CE*] A. Connes, D.E. Evans, *Embeddings of U(1)-current algebras in non-commutative algebras of statistical mechanics*, Commun. Math. Phys. **121** (1989) 507

[*Co*] A. Connes, *Géométrie non commutative*, Paris 1990

[*CIZ*] A. Cappelli, C. Itzykson, J.-B. Zuber, Commun. Math. Phys. *The A-D-E Classification of Minimal and $A_1^{(1)}$ Conformal Invariant Theories*, Commun. Math. Phys. **113** (1987) 1

[*CPR*] M. Caselle, G. Ponzano, F. Ravanini, *Towards a classification of fusion rule algebras in rational conformal field theories*, Int. J. Mod. Phys. **B6** (1992) 2075-2090

[*DF*] V.S. Dotsenko, V.A. Fateev, *Four-point correlation functions and the operator algebra in 2d conformal invariant theories with central charge ≤ 1*, Nucl. Phys. B **251** (1985) 691

[*DHR*] S. Doplicher, R. Haag, J.E. Roberts, *Local observables and particle statistics I,II*, Commun. Math. Phys. **23** (1971) 199, **35** (1974) 49

[*Dip*] R. Blumenhagen, *W-Algebren in konformer Quantenfeldtheorie*, BONN-IR-91-06;
W. Eholzer, *Exzeptionelle und Supersymmetrische W-Algebren in Konformer Quantenfeldtheorie*, BONN-IR-92-10;
M. Flohr, *W-Algebren, Quasiprimäre Felder und Nicht-Minimale Modelle*, BONN-IR-91-30;
A. Kliem, *Konstruktion von W-Algebren*, BONN-IR-91-46;
A. Honecker, *Darstellungstheorie von W-Algebren und Rationale Modelle in der Konformen Feldtheorie*, BONN-IR-92-09;
R. Hübel, *Darstellungstheorie von W- und Super-W-Algebren*, BONN-IR-92-11;
M. Terhoeven, *Gepner Modelle und W-Algebren*, BONN-IR-92-20;
R. Varnhagen, *Darstellungstheorie von W-Algebren in konformen Quantenfeldtheorien*, BONN-IR-91-31

[*DV*] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, *Modular Invariance and the Fusion Algebra*, Nucl. Phys. **B5B** (Proc. Suppl.) (1988) 87

[*EF*] W. Eholzer, M. Flohr, private Mitteilung

[*Eff*] E.G. Effros, *Dimensions and C^*-algebras*, Reg. Conf. Ser. in Math. **46**, Amer. Math. Soc. 1980

[*EG*] D.E. Evans, J.D. Gould, *Dimension groups, embeddings and presentations of AF-algebras to solvable lattice models*, Mod. Phys. Lett. **A4** (1989) 1883

[*Eho*] W. Eholzer, M. Flohr, A. Honecker, R. Hübel, W. Nahm, R. Varnhagen, *Representations of $\mathcal{W}$-algebras with two generators and new rational models*, Nucl. Phys. B **383** (1992) 249

[*EH*] W. Eholzer, R. Hübel, *Fusion algebras of fermionic rational conformal field theories via generalized Verlinde formula*, preprint BONN-HE-93-05

[*Ell*] G.A. Elliott, *On the classification of inductive limits of sequences of semisimple finite-dimensional algebras*, Journal of Algebra **38** (1976) 29

[*Ev*] D.E. Evans, *C^*-algebraic methods in statistical mechanics and field theory*, Int. J. Mod. Phys. **B4** (1990) 1069

[*FB*] P.J. Forrester, R.J. Baxter, *Further exact solutions of the eight-vertex SOS model and generalizations of the Rogers-Ramanujan identities*, J. Stat. Phys. **38** (1985) 435

[*Fe*] G. Felder, *BRST Approach to Minimal Models*, Nucl. Phys. **B317** (1989) 215-236, Nucl. Phys. **B324** (1989) 548

[*Feh*] L. Fehér, L. O'Raifeartaigh, P. Ruelle, I. Tsutsui, A. Wipf, *On Hamiltonian reduction of the Wess-Zumino-Novikov-Witten theories*, Phys. Rep. **222** (1992) 1

[*FF*] B.L. Feigin, D.B. Fuks, *Invariant skew-symmetric differential operators on the line and Verma modules over the Virasoro algebra*, Funkt. Anal. Appl. **16** (1982) 114

[*FG*] F. Falceto, K. Gawedzki, *On Lattice Kac-Moody*, IHES preprint Juli 1992

[*FGV*] J. Fuchs, A. Ganchev, P. Vecsernyes, *Level 1 WZW superselection sectors*, Commun. Math. Phys. **146** (1992) 553

[*FNO*] B.L. Feigin, T. Nakanishi, H. Ooguri, *The annihilating ideals of minimal models* Int. J. Mod. Phys. **A7** Suppl. **1A** (1992) 217

[*Fr*] J. Fröhlich, *Statistics of fields. The Yang-Baxter equation and the theory of knots and links*, in *Non-perturbative quantum field theory*, eds. G. t'Hooft, A. Jaffe, G. Mack, P.K. Mitter and R. Stora, Plenum 1988

[*FRS*] K. Fredenhagen, K.H. Rehren, B. Schroer, *Superselection sectors with braid group statistics and exchange algebras I,II,* Commun. Math. Phys. **125** (1989) 201; Rev. Math. Phys. Special issue (1992) 111

[*Fu1*] J. Fuchs, *Quantum dimensions*, Commun. Theor. Phys. (Allahabad) **1** (1991) 59

[*Fu2*] J. Fuchs, *Algebraic conformal field theory*, Proceedings Gosen September 1991

[*Ga*] K. Gawedzki, *Quantum group symmetries in conformal field theory*, IHES preprint 1992; *CFT on the lattice*, Vortrag bei der DPG-Tagung, Mainz 1993

[*GHJ*] F.M. Goodman, P. de la Harpe, V.F.R. Jones, *Coxeter Graphs and Towers of Algebras*, MSRI Publ. 14, New York 1989

[*Gin*] P. Ginsparg, *Applied conformal field theory*, in E. Brézin, J. Zinn-Justin, eds., Les Houches, Session XLIX, 1988, Elsevier Science Publishers B.V., 1989

[*GKO*] P. Goddard, A. Kent, D.I. Olive, *Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebras*, Commun. Math. Phys. **103** (1986) 105

[*GO*] P. Goddard, D.I. Olive, *Kac-Moody and Virasoro algebras in relation to quantum physics*, Int. J. Mod. Phys. A **1** (1986) 303

[*GS*] C. Gomez, G. Sierra, *Towers of algebras in rational conformal field theory*, Int. J. Mod. Phys. A **6** (1991) 2045

[*Ha*] R. Haag, *Local Quantum Physics*, Berlin-Heidelberg 1992

[*HK*] R. Haag, D. Kastler, *An algebraic approach to field theory*, J. Math. Phys. **5** (1964) 848

[*Hu*] D.A. Huse, *Exact exponents for infinitely many new multicritical points*, Phys. Rev. **B 30** (1984) 3908

[*Jo*] V.F.R. Jones, *Index for subfactors*, Invent. math. **72** (1983) 1

[*JT*] K.K. Jensen, K. Thomsen, *Elements of KK-Theory*, Birkhäuser, Boston, 1991

[*Kac*] V.G. Kac, *Infinite dimensional Lie Algebras*, Cambridge University Press, 3rd edition 1990

[*Ke1*] R. Kedem, B. McCoy, *Construction of Modular branching functions from Bethe's equations in the 3-state Potts chain*, ITP-SB-92-56

[*Ke2*] R. Kedem, T.R. Klassen, B. McCoy, E. Melzer, *Fermionic quasiparticle representations for characters of* $G_1^{(1)} \times G_1^{(1)}/G_2^{(1)}$, ITP-SB-92-64, RU-92-51

[*Ki1*] A.N. Kirillov, *Identities for the Rogers dilogarithm function connected with simple Lie algebras*, J. Sov. Math. **52** (1989) 2450, (Zap. Nauch. LOMI **164** (1987) 121)

[*Ki2*] A.N. Kirillov, *Dilogarithm identities, partitions and spectra in conformal field theory*, preprint Isaac Newton Institute, Cambridge, Dezember 1992,

[*KM*] T.R. Klassen, E. Melzer, *Purely elastic scattering theories and their ultraviolet limit,* Nucl. Phys. **B338** (1990) 485-528

[*KN*] A. Kuniba, T. Nakanishi, *Spectra in conformal field theories from the Rogers dilogarithm*, preprint hep-th/9206034, SMS-042-92

[*Ko*] H. Kosaki, *Extension of Jones theory on index to arbitrary factors*, J. Funct. An. **66** (1986) 123

[*KR*] J. Kellendonk, A. Recknagel, *Virasoro representations on fusion graphs*, Phys. Lett. B **298** (1993) 329-334

[*KRV*] J. Kellendonk, M. Rösgen, R. Varnhagen, *Path spaces and W-fusion in minimal models*, BONN-HE-93-04, wird veröffentlicht in Int. J. Mod. Phys. A

[*KW*] H.G. Kausch, G.M.T. Watts, *A study of W-algebras using Jacobi identities*, Nucl. Phys. B **354** (1991) 740

[*La*] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley 1984

[*Le*] L. Lewin, *Polylogarithms and associated functions*, Elsevier North-Holland (1981)

[*Lo*] R. Longo, *Index for subfactors and statistics of quantum fields I,II*, Commun. Math. Phys. **126** (1989) 217, **130** (1990) 285

[*MaS*] G. Mack, V. Schomerus, *Conformal field algebras with quantum symmetry from the theory of superselection sectors*, Commun. Math. Phys. **134** (1990) 139

[*MoS*] G. Moore, N. Seiberg, *Polynomial equations for rational conformal field theories*, Phys. Lett. B **212** (1988) 451

[*N1*] W. Nahm, *Chiral algebras of two-dimensional chiral field theories and their normal ordered products*, in *Recent developments in conformal field theories*, Proc. Trieste Oktober 1989, Proc. 3 Reg. Conf. on Math. Phys., Islamabad 1989

[*N2*] W. Nahm, *A proof of modular invariance*, Int. J. Mod. Phys. A **6** (1991) 2837

[*N3*] W. Nahm, *Conformal quantum field theories in two dimensions*, World Scientific, in Vorbereitung

[*NRT*] W. Nahm. A. Recknagel, M. Terhoeven, *Dilogarithm identities in conformal field theories*, Bonn preprint BONN-HE-92-35, wird veröffentlicht in Mod. Phys. Lett. A

[*Oc*] A. Ocneanu, *Quantized groups, string algebras and Galois theory for algebras* in *Operator Algebras and Applications II*, London Math. Soc. vol. 135, Cambridge 1988; *Quantum symmetry, differential geometry of finite graphs and classification of subfactors*, University of Tokyo Seminary Notes 45, recorded by Y. Kawahigashi, July 1990; Talk given at the MPI, Bonn, October 1991

[*Pa*] V. Pasquier, *Two-dimensional critical systems labelled by Dynkin diagrams*, Nucl. Phys. **B285** (1987) 162; *Operator content of the ADE lattice models*, J. Phys. A: Math. Gen. **20** (1987) 5707; *Lattice derivation of modular invariant partition functions on the torus*, J. Phys. A: Math. Gen. **20** (1987) L1229; *Continuum limit of lattice models built on quantum groups,* Nucl. Phys. **B295** (1988) 491; *Ethiology of IRF models*, Commun. Math. Phys. **118** (1988) 355

[*PS*] V. Pasquier, H. Saleur, *Common structures between finite systems and conformal field theories through quantum groups*, Nucl. Phys. **B330** (1990) 523

[*Re1*] K.-H. Rehren, *Markov traces as characters for local algebras*, Nucl. Phys. B (Proc Suppl.) **18B** (1990) 259; *Braid group statistics*, Vortragsmanuskript der DPG-Frühjahrsschule "Geometry and Theoretical Physics", Bad Honnef 1990

[*Re2*] K.-H. Rehren, *Field operators for anyons and plektons*, Commun. Math. Phys. **145** (1992) 123

[*Rec*] A. Recknagel, *Fusion rules from algebraic K-theory*, Int. J. Mod. Phys. A **8** (1993) 1345

[*Ri*] H.A. Riggs, *Solvable lattice models with minimal and nonunitary critical behaviour in two dimensions*, Nucl. Phys. B **326** (1989) 673

[*Rö*] M. Rösgen, *Pfaddarstellungen Minimaler Modelle*, Diplomarbeit BONN-IR-93-24

[*RS*] B. Richmond, G. Szekeres, *Some formulas related to dilogarithms, the zeta function and the Andrews-Gordon identities*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **31** (1981) 362

[*SV*] K. Slachanyi, P. Vecsernyes, *Quantum symmetry and braid group statistics in G-spin models*, Budapest preprint KFKI-1992-08/8

[*SZ*] S. Stratila, L. Zsido, *Lectures on von Neumann algebras*, Bukarest-Tunbridge Wells 1979

[*Te1*] M. Terhoeven, *Lift of dilogarithm to partition identities*, preprint BONN-HE-92-36

[*Te2*] M. Terhoeven, *Dilogarithm identities, fusion rules and structure constants of CFTs*, preprint BONN-HE-93-24, Juli 1993

[*Va*] R. Varnhagen, *Characters and representations of new fermionic W-algebras*, Phys. Lett. **275B** (1992) 87

[*Ve*] E. Verlinde, *Fusion rules and modular transformations in 2d conformal field theory*, Nucl. Phys. **B300** (1988) 360

[*W*] E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Commun. Math. Phys. **121** (1989) 351

[*Wi*] H.-W. Wiesbrock, *New structures in von Neumann algebra theory and applications to physics*, FU Berlin preprint, Juni 1993

[*Za1*] A.B. Zamolodchikov, *Infinite additional symmetry in two-dimensional conformal quantum field theory*, Theor. Math. Phys. **65** (1986) 1205

[*Za2*] A.B. Zamolodchikov, *Integrable field theory from conformal field theory*, Adv. Studies in Pure Math. **19** (1989) 641

[*Za3*] Al.B. Zamolodchikov, *Thermodynamic Bethe ansatz in relativistic models: scaling 3-state Potts and Lee-Yang models*, Nucl. Phys. B **342** (1990) 695

[*Zag*] D. Zagier, *The remarkable dilogarithm (Number theory and related topics*, Papers presented at the Ramanujan colloquium, Bombay 1988, TIFR)