UNIVERSITÄT BONN
Physikalisches Institut

Auflösung der Hierarchie des rationalen sl(n)-Modells

von
Klaus Ruhlig

We construct Drinfel'd twists for the rational sl(n) XXX-model giving rise to a completely symmetric representation of the monodromy matrix.
We obtain a polarization free representation of the pseudoparticle creation operators figuring in the construction of the Bethe vectors within the framework of the quantum inverse scattering method. This representation enables us to resolve the hierarchy of the nested Bethe ansatz for the sl(n) invariant rational Heisenberg model. Our results generalize the findings of Maillet and Sanchez de Santos for sl(2) models.

Post address:
Nussallee 12
53115 Bonn
Germany

BONN-IR-2000-14
Bonn University
Oktober 2000
ISSN-0172-8741

UNIVERSITÄT BONN
Physikalisches Institut

Auflösung der Hierarchie des rationalen sl(n)-Modells

von
Klaus Ruhlig

Dieser Forschungsbericht wurde als Dissertation von der Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn angenommen.

Angenommen am:	21. 10. 2000
Referent:	Prof. R. Flume
Korreferent:	Prof. G. von Gehlen

Auflösung der Hierarchie des rationalen sl(n)-Modells

Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)
der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von
Klaus Ruhlig
aus
Bremen

Bonn 2000

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

1. Referent:	Prof. R. Flume
2. Referent:	Prof. G. von Gehlen
Tag der Promotion:	21. 10. 2000

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In der klassischen Mechanik bezeichnet man ein System, dessen Phasenraum $2N$-dimensional ist, nach Liouville als dann exakt lösbar, d.h. integrabel, wenn N Erhaltungsgrößen existieren, deren Poisson-Klammern miteinander verschwinden. Quantenmechanisch entspricht die Integrabilität eines Modells mit N Freiheitsgraden der Existenz von N miteinander kommutierenden Erhaltungsgrößen. Integrable Modelle besitzen daher eine ungewöhnlich große Anzahl an Symmetrien, welche in realistischen Theorien normalerweise nicht vorhanden ist. Sie können allerdings dazu dienen, grundlegende Eigenschaften eines physikalischen Systems zu modellieren. Wegen der exakten Lösbarkeit des integrablen Modells ist es dann möglich, die zugrundeliegende realistische Theorie besser zu verstehen.

Eines der am häufigsten behandelten integrablen Modelle ist das rationale Heisenberg-Modell einer Spin-Quanten-Kette zur Untersuchung magnetischer Phänomene [1]. Erweitert man die in diesem Modell vorhandene $sl(2)$-Symmetrie auf $sl(n)$, so gelangt man zum rationalen $sl(n)$-Modell, welches es ermöglicht, auch Systeme mit inneren Freiheitsgraden zu behandeln. Eine mögliche Lösungsstrategie dieser Modelle ist durch den Algebraischen Bethe-Ansatz gegeben, welcher von Takhtadzhan und Faddeev anhand des XYZ-Modells eingeführt wurde [2] und eine algebraische Variante der Methode von Bethe darstellt, die dieser bei der Lösung des rationalen Heisenberg-Modells verwendete [3]. Für das rationale $sl(n)$-Modell verwendet man hierbei die hierarchische Version des Algebraischen Bethe-Ansatzes von Kulish und Reshetikhin [4].

Eine besondere Schwierigkeit innerhalb des Algebraischen Bethe-Ansatzes stellt die komplizierte Abhängigkeit der darin verwendeten Operatoren von den lokalen Spin-Operatoren dar. Maillet und Sanchez de Santos [5] gelang es jedoch, mit Hilfe faktorisierender Drinfel'd Twists [6] eine vollkommen symmetrische Darstellung dieser Operatoren für das rationale bzw. trigonometrische Heisenberg-Modell anzugeben. Dies bedeutet z.B., daß die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren keine Polarisationswolken beinhalten, d.h. im Teilchenbild, die Wellenfunktionen, welche durch die Wirkung der Erzeugungsoperatoren auf das Vakuum entstehen, weisen keine virtuellen Teilchen-Antiteilchen-Paare auf. Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sind also ausschließlich aus Spin-Aufsteige- bzw. -Absteigeoperatoren aufgebaut. Damit unterscheiden sich die Quasi-Teilchen-Operatoren nur noch durch einen zusätzlichen diagonalen Faktor von den entsprechenden Operatoren im quasiklassischen Limes, dem Gaudin-Magneten [7].

Im Fall des rationalen Heisenberg-Modells entspricht die in [5] gefundene Darstellung der durch Sklyanins Funktionalen Bethe-Ansatz [8] gegebenen Form [9].

Die Ergebnisse in [5] wurden für jede endlich-dimensionale Darstellung des Yangian $Y(sl(2))$ verallgemeinert [9] und zur Berechnung von Formfaktoren [10] und thermodynamischen Größen

wie der spontanen Magnetisierung benutzt [11]. Weiterhin ergab sich aus dieser Arbeit auch die Lösung des inversen Streuproblems [10, 12, 13], d.h, die Darstellung der lokalen Spin-Operatoren in Form der Operatoren, welche im Algebraischen Bethe-Ansatz verwendet werden.
Eine weitere Schwierigkeit des hierarchischen Bethe-Ansatzes besteht in der komplizierten rekursiven Darstellung der Wellenfunktionen. Es zeigt sich jedoch, daß man im quasiklassischen Limes diese Rekursion für das rationale $sl(n)$-Modell auflösen kann [14]. Wegen der oben erwähnten Ähnlichkeit der Erzeugungsoperatoren im Heisenberg-Modell in der neuen Basis von Maillet und Sanchez de Santos zum quasiklassischen Limes dieser Operatoren, liegt es nahe zu vermuten, daß es möglich ist, die Hierarchie des rationalen $sl(n)$-Modells in einer auf dieses Modell verallgemeinerten neuen Basis ebenfalls aufzulösen. Der Beweis dieser Vermutung ist der Inhalt dieser Arbeit, welche auf dem Artikel [15] basiert.

Die Arbeit ist hierbei folgendermaßen gegliedert: In Kapitel 2 werden die Grundlagen des hierarchischen Bethe-Ansatzes für das $sl(n)$-Modell behandelt. Kapitel 3 erläutert das Konzept eines Drinfel'd Twists und dessen Auswirkung auf die Elemente der Monodromiematrix. Kapitel 4 beinhaltet die explizite F-Matrix und deren Inverses, und in Kapitel 5 werden die für die weiteren Rechnungen erforderlichen Elemente der $sl(n)$-Algebra und der Monodromiematrix in der F-Basis dargestellt. In Kapitel 6 wird dann mit diesen Operatoren die Hierarchie der Bethe-Wellenfunktion vollständig in $sl(2)$-Komponenten aufgelöst. Die Anhänge beschäftigen sich mit ergänzenden Hinweisen zur $sl(n)$-Algebra, der Pol-Struktur der $sl(2)$-Koeffizienten und dem inversen Streuproblem.

2 Der hierarchische Bethe-Ansatz

2.1 Das rationale sl(n)-Modell

Die Ausführungen in diesem Kapitel zum hierarchischen Bethe-Ansatz folgen im wesentlichen dem Artikel [4].

Das rationale $sl(n)$-Modell ist eine Verallgemeinerung des isotropen Heisenberg-Modells einer Spin-$\frac{1}{2}$-Kette mit kurzreichweitiger Wechselwirkung in der Form, daß man eine eindimensionale Kette mit N Plätzen hat, deren Zustandsraum an jedem Platz gleich $\mathbb{C}^n$ anstatt $\mathbb{C}^2$ ist. Der gesamte Zustandsraum $\mathcal{H}$ dieses Systems ist dann das Tensorprodukt der Zustandsräume der einzelnen Plätze:

$$\mathcal{H} = \otimes_{i=1}^{N} \mathcal{H}_i, \quad \mathcal{H}_i \cong \mathbb{C}^n . \tag{2.1}$$

Der Hamilton-Operator dieses Modells ist gegeben durch:

$$H = \epsilon \sum_{i=1}^{N} P_{i\,i+1} \quad \text{mit } \epsilon \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

wobei $(P_{i\,i+1})^{\alpha_i \alpha_{i+1}}_{\beta_i \beta_{i+1}} = \delta_{\alpha_i \beta_{i+1}} \delta_{\alpha_{i+1} \beta_i}$ der Permutationsoperator in den Räumen i und $i+1$ ist und nur dort nicht-trivial wirkt.
Für $\epsilon < 0$ erhält man im Limes $N \to \infty$ einen Ferromagneten und im Fall $\epsilon > 0$ einen Antiferromagneten. H reduziert sich für $n = 2$ auf den Hamilton-Operator des isotropen Heisenberg-Modells.

Um die Beziehung zur $sl(n)$-Algebra deutlicher zu machen, kann man H auch folgendermaßen schreiben:

$$H = \epsilon \sum_{i=1}^{N} \sum_{r,s=1}^{n} E^{(i)}_{r,s} E^{(i+1)}_{s,r}, \tag{2.3}$$

mit $(E^{(i)}_{r,s})^{\alpha_i}_{\beta_i} = \delta_{\alpha_i r} \delta_{\beta_i s}$, und $E^{(i)}_{r,s}$ wirkt nur im Raum i nicht-trivial. Die Operatoren $E^{(i)}_{r,s}$ sind hierbei verknüpft mit den Generatoren der $sl(n)$-Algebra (siehe Anhang A).

2.2 Die Yang-Baxter-Gleichung

Zur Lösung des rationalen $sl(n)$-Modells mit Hilfe des Algebraischen Bethe-Ansatzes betrachtet man die folgende, zum rationalen $sl(n)$-Modell assozierte, R-Matrix, welche eine nicht-triviale Abbildung $\mathbb{C}^n_{(i)} \otimes \mathbb{C}^n_{(j)} \to \mathbb{C}^n_{(i)} \otimes \mathbb{C}^n_{(j)}$ mit $\mathbb{C}^n_{(i)} \cong \mathbb{C}^n_{(j)} \cong \mathbb{C}^n$ darstellt, mit Spektralparameter λ:

$$R_{ij}(\lambda) = b(\lambda)\mathbb{1}_{ij} + c(\lambda)P_{ij}, \tag{2.4}$$

d.h., die Matrixelemente von R_{ij} lauten

$$(R_{ij}(\lambda))^{\alpha_i\alpha_j}_{\beta_i\beta_j} = b(\lambda)\delta_{\alpha_i\beta_i}\delta_{\alpha_j\beta_j} + c(\lambda)\delta_{\alpha_i\beta_j}\delta_{\alpha_j\beta_i}, \tag{2.5}$$

mit

$$b(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda+\eta}, \quad c(\lambda) = \frac{\eta}{\lambda+\eta}, \quad \eta \in \mathbb{C}. \tag{2.6}$$

In allen anderen Räumen $\mathcal{H}_k$ mit $k \neq i, j$ wirkt R_{ij} wie die Identität. Aus (2.5) wird deutlich, daß $R_{ij}(0)$ der Permutationsoperator P_{ij} ist.

Die Integrabilität dieses Modells wird dadurch ausgedrückt, daß R eine Lösung der Yang-Baxter-Gleichung

$$R_{12}(\lambda_1-\lambda_2)R_{13}(\lambda_1-\lambda_3)R_{23}(\lambda_2-\lambda_3) = R_{23}(\lambda_2-\lambda_3)R_{13}(\lambda_1-\lambda_3)R_{12}(\lambda_1-\lambda_2) \tag{2.7}$$

ist, welche in den drei Räumen $\mathbb{C}^n_{(1)} \otimes \mathbb{C}^n_{(2)} \otimes \mathbb{C}^n_{(3)}$ wirkt. Schreibt man die Matrixprodukte in den einzelnen Räumen explizit aus, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&(R_{12}(\lambda_1-\lambda_2))^{\alpha_1\,\alpha_2}_{m_1\,m_2}\,(R_{13}(\lambda_1-\lambda_3))^{m_1\,\alpha_3}_{\beta_1\,m_3}\,(R_{23}(\lambda_2-\lambda_3))^{m_2\,m_3}_{\beta_2\,\beta_3} \\
&= (R_{23}(\lambda_2-\lambda_3))^{\alpha_2\,\alpha_3}_{m_2\,m_3}\,(R_{13}(\lambda_1-\lambda_3))^{\alpha_1\,m_3}_{m_1\,\beta_3}\,(R_{12}(\lambda_1-\lambda_2))^{m_1\,m_2}_{\beta_1\,\beta_2}\,.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Weiterhin ist die R-Matrix unitär, d.h., es gilt die Beziehung

$$R_{21}(\lambda_2-\lambda_1)R_{12}(\lambda_1-\lambda_2) = 1. \tag{2.9}$$

Identifiziert man einen der beiden Indizes von R_{ij} mit einem physikalischen Raum $\mathcal{H}_i$ und den anderen Index mit einem nicht-physikalischen Hilfsraum $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}^n$, so gelangt man zu der Definition des Lax-Operators:

$$L_i(\lambda - z_i) = R_{0i}(\lambda - z_i), \tag{2.10}$$

wobei dem Hilfsraum ein Spektralparameter λ und dem physikalischem Raum ein lokaler Unordnungsparameter z_i zugeordnet wurde.

Aus der Yang-Baxter-Gleichung (2.7) folgt durch Identifikation der drei Räume mit einem Hilfsraum 0 und zwei physikalischen Räumen i und j für den Lax-Operator:

$$R_{ij}(z_i - z_j)L_j(\lambda - z_j)L_i(\lambda - z_i) = L_i(\lambda - z_i)L_j(\lambda - z_j)R_{ij}(z_i - z_j). \tag{2.11}$$

Betrachtet man stattdessen zwei verschiedene Hilfsräume 0 und $0'$ zusammen mit einem physikalischen Raum i, so ergibt sich

$$R_{00'}(\lambda - \lambda')L_i(\lambda - z_i)L'_i(\lambda' - z_i) = L'_i(\lambda' - z_i)L_i(\lambda - z_i)R_{00'}(\lambda - \lambda'). \tag{2.12}$$

Die Monodromiematrix erhält man aus einem geordneten Produkt der Lax-Operatoren im Hilfsraum:

$$T_{0,1\ldots N}(\lambda; z_1, \ldots, z_N) = L_N(\lambda - z_N) \cdots L_1(\lambda - z_1). \tag{2.13}$$

$T_{0,1\ldots N}(\lambda; z_1, \ldots, z_N)$ ist also eine $n \times n$ Matrix im Hilfsraum, deren Matrixelemente Operatoren im physikalischen Raum $\mathcal{H}$ sind.

Für die Lösung des Modells mit Hilfe des Algebraischen Bethe-Ansatzes benötigt man die Kommutatorrelationen zwischen den einzelnen Matrixelementen, die sogenannte Faddeev-Zamolodchikov-Algebra, von $T_{0,1\ldots N}(\lambda; z_1, \ldots, z_N)$, aufgefaßt als Matrix im Raum 0. Hierzu betrachtet man zwei Monodromiematrizen $T_{0,1\ldots N}(\lambda; z_1, \ldots, z_N)$ und $T_{0',1\ldots N}(\lambda'; z_1, \ldots, z_N)$, welche zu unterschiedlichen Hilfsräumen 0 und $0'$ aber zum gleichen physikalischen Raum $\mathcal{H}$ assoziiert sind. Da die Lax-Operatoren zu unerschiedlichen Hilfsräumen $L_i(\lambda - z_i)$ und $L'_j(\lambda' - z_j)$ für $i \neq j$ kommutieren, erhält man

$$L_N(\lambda - z_N)L'_N(\lambda' - z_N) \cdots L_1(\lambda - z_1)L'_1(\lambda' - z_1) = T_{0,1\ldots N}(\lambda; z_1, \ldots, z_N)T_{0',1\ldots N}(\lambda'; z_1, \ldots, z_N).$$

Aus (2.12) ergeben sich damit die Kommutatorrelationen für die Monodriematrixelemente:

$$\begin{aligned} & R_{00'}(\lambda - \lambda')T_{0,1\ldots N}(\lambda; z_1, \ldots, z_N)T_{0',1\ldots N}(\lambda'; z_1, \ldots, z_N) \\ = \; & T_{0',1\ldots N}(\lambda'; z_1, \ldots, z_N)T_{0,1\ldots N}(\lambda; z_1, \ldots, z_N)R_{00'}(\lambda - \lambda'). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Für die weiteren Überlegungen ist es nützlich, diese Gleichung in einer anderen Form zu schreiben. Hierzu führt man eine neue Matrix $\tilde{R}_{ij} = P_{ij}R_{ij}$ ein, wobei P_{ij} wieder der Permutationsoperator ist. Gleichung (2.14) kann man dann folgendermaßen ohne Angabe der Hilfsräume formulieren:

$$\tilde{R}(\lambda - \lambda')T(\lambda) \otimes T(\lambda') = T(\lambda') \otimes T(\lambda)\tilde{R}(\lambda - \lambda'), \tag{2.15}$$

wobei das Tensorprodukt durch $(X \otimes Y)^{\alpha_1\,\alpha_2}_{\beta_1\,\beta_2} = X^{\alpha_1}_{\beta_1} Y^{\alpha_2}_{\beta_2}$ gegeben ist, und die Parameter des physikalischen Raumes $\mathcal{H}$ nicht angegeben wurden.

Für die Lax-Operatoren lautet die entsprechende Umformulierung von (2.12):

$$\tilde{R}(\lambda - \lambda')L_i(\lambda - z_i) \otimes L_i(\lambda' - z_i) = L_i(\lambda' - z_i) \otimes L_i(\lambda - z_i)\tilde{R}(\lambda - \lambda'). \tag{2.16}$$

Bildet man die Spur der Monodromiematrix im Raum $\mathcal{H}_0$, so gelangt man zu der Transfermatrix:

$$t(\lambda; z_1, \ldots, z_N) = tr_0 T_{0,1\ldots N}(\lambda; z_1, \ldots, z_N). \tag{2.17}$$

Die Transfermatrix an der Stelle $\lambda = 0$ und $z_i = 0$ für alle i ergibt wegen $R_{ij}(0) = P_{ij}$ den Operator für eine zyklische Permutation, d.h., es gilt:

$$t(0; 0, \ldots, 0)e_1 \otimes \ldots \otimes e_{N-1} \otimes e_N = e_N \otimes e_1 \otimes \ldots \otimes e_{N-1}. \tag{2.18}$$

Daher ist der Impulsoperator P über den Logarithmus mit der Transfermatrix auf die folgende Art verknüpft:

$$P = \frac{1}{i} \ln\, t(0; 0, \ldots, 0). \tag{2.19}$$

Wegen $tr(A \otimes B) = trA \cdot trB$, der Invarianz der Spur unter Ähnlichkeitstransformationen und (2.15) kommutieren Transfermatrizen mit unterschiedlichem Spektralparameter miteinander:

$$[t(\lambda; z_1, \ldots, z_N), t(\lambda'; z_1, \ldots, z_N)] = 0. \tag{2.20}$$

Definiert man nun die Operatoren

$$\mathcal{C}_K = i \frac{\partial^K}{\partial \lambda^K} \ln t(\lambda)\Big|_{\lambda=0}, \tag{2.21}$$

mit $t(\lambda) = t(\lambda; 0, \dots, 0)$, so folgt hieraus wegen (2.20), daß diese Operatoren miteinander kommutieren:

$$[\mathcal{C}_K, \mathcal{C}_L] = 0, \quad \text{für alle } K, L. \tag{2.22}$$

Die Operatoren $\mathcal{C}_K$ sind für $k \leq N$ lokale Größen, d.h., sie beinhalten nur Wechselwirkungen endlicher Reichweite. Desweiteren ist

$$\mathcal{C}_1 = \frac{i}{\eta}\left(\sum_{i=1}^{N} P_{i\,i+1} - N\right). \tag{2.23}$$

Man kann daher den Hamilton-Operator (2.2) schreiben als

$$H = \epsilon\left(\frac{\eta}{i}\,\mathcal{C}_1 + N\right). \tag{2.24}$$

Der Hamilton-Operator kommutiert somit zusammen mit dem Impuls-Operator ebenfalls mit den Operatoren $\mathcal{C}_K$ und insbesondere mit der Transfermatrix selbst:

$$[H, t(\lambda)] = 0. \tag{2.25}$$

$t(\lambda)$ ist also ein erzeugendes Funktional für N lokale Erhaltungsgrößen. Dies ist der Grund, warum das rationale $sl(n)$-Modell ein integrables Modell darstellt.
Ausgangspunkt für diese Schlußfolgerung war die Gleichung (2.20), die wiederum, wie beschrieben, ihren Ursprung in der Yang-Baxter-Gleichung hat. Dies zeigt, auf welche Art die Yang-Baxter-Gleichung eine hinreichende Bedingung für die Integrabilität eines Modells liefert.

2.3 sl(n)-Invarianz der Monodromiematrix

Die $sl(n)$-Symmetrie des Modells wird deutlich in einer $sl(n)$-Invarianz der Monodromiematrix (siehe z.B. [16]). Aus der Gleichung

$$[E_{a,b}^{(j)}, P_{ij}] = -[E_{a,b}^{(i)}, P_{ij}] \tag{2.26}$$

für die Permutationsoperatoren ergibt sich die folgende Beziehung für die R-Matrix:

$$[E_{a,b}^{(j)}, R_{ij}] = -[E_{a,b}^{(i)}, R_{ij}]. \tag{2.27}$$

Da man aus den $E_{a,b}^{(i)}$ alle Elemente $s^{(i)}$ der $sl(n)$-Algebra konstruieren kann (siehe Anhang A), bedeutet dies, daß die R-Matrix invariant unter der infinitisemalen Transformation, die durch $s^{(i)} + s^{(j)}$ erzeugt wird, ist:

$$[s^{(i)} + s^{(j)}, R_{ij}] = 0. \tag{2.28}$$

Da die Lax-Operatoren direkt aus der R-Matrix folgen (2.10), sind diese invariant unter einer kombinierten Transformation im physikalischen und im Hilfsraum:

$$[s^{(i)} + s^{(0)}, L_i(\lambda - z_i)] = 0. \tag{2.29}$$

Wegen (2.13) besitzt die Monodromiematrix ebenfalls eine $sl(n)$-Symmetrie unter gleichzeitigen Transfomationen im Hilfsraum und im gesamten physikalischen Raum:

$$[s + s^{(0)}, T_{0,1\ldots N}(\lambda; z_1, \ldots, z_N)] = 0, \tag{2.30}$$

wobei $s = \sum_{i=1}^{N} s^{(i)}$ die Transformation im physikalischen Raum $\mathcal{H}$ erzeugt.

Schreibt man diese Relation explizit in den Matrixelementen T_{kl} der Monodromiematrix im Hilfsraum, so erhält man:

$$\Big([s^{(0)}, T_{0,1\ldots N}(\lambda; z_1, \ldots, z_N)]_0\Big)_{kl} = -[s, \Big(T_{0,1\ldots N}(\lambda; z_1, \ldots, z_N)\Big)_{kl}]_{\mathcal{H}}, \tag{2.31}$$

wobei $[s^{(0)}, T]_0$ den Kommutator im Hilfsraum bezeichnet

$$\Big([s^{(0)}, T]_0\Big)_{kl} = s^{(0)}_{km} T_{ml} - T_{km} s^{(0)}_{ml}, \tag{2.32}$$

und $[s, T_{kl}]_{\mathcal{H}}$ den Kommutator im physikalischen Raum

$$[s, T_{kl}]_{\mathcal{H}} = sT_{kl} - T_{kl}s. \tag{2.33}$$

Wertet man diese Beziehung speziell für den Fall $k = n$, $l = n$ und $s^{(0)} = E^{(0)}_{\alpha,n}$ bzw. $s = E_{\alpha,n} = \sum_{i=1}^{N} E^{(i)}_{\alpha,n}$ mit $\alpha < n$ aus, so ergibt sich:

$$T_{n\alpha} = [E_{\alpha,n}, T_{nn}]. \tag{2.34}$$

Dieser Zusammenhang zwischen der Monodromiematrix und den Symmetrieoperatoren $E_{\alpha,n}$ erlaubt es, $T_{n\alpha}$ allein durch Kenntnis des Operators T_{nn} und der Generatoren $E_{\alpha,n}$ zu erhalten. Diese Tatsache wird in Kapitel 5 benutzt, um die Operatoren $\tilde{T}_{n\alpha}$ in der neuen Basis zu berechnen.

2.4 Der hierarchische Algebraische Bethe-Ansatz

Es sollen nun die Eigenvektoren zum Hamiltonoperator konstruiert werden. Da dieser mit der Transfermatrix $t(\lambda)$ kommutiert (2.25), genügt es hierbei, sich auf die Suche nach den Eigenvektoren der Transfermatrix zu konzentrieren. Im folgenden sollen allgemein die Eigenwerte und Eigenvektoren von $t(\lambda; z_1, \ldots, z_N)$ berechnet werden.

Hierzu führt man einen Zustand niedrigsten Gewichts bzgl. $sl(n)$, ein sogenanntes lokales Vakuum, $v_n^{(i)} \in \mathcal{H}_i$ ein:

$$v_n^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

Aus der Gestalt der R-Matrix kann man die Wirkung des Laxoperators als Matrix im Hilfsraum auf dieses Vakuum berechnen. Für die einzelnen Matrixelemente erhält man die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} (L_i(\lambda - z_i))_{nn} v_n^{(i)} &= v_n^{(i)}, \\ (L_i(\lambda - z_i))_{kk} v_n^{(i)} &= b(\lambda - z_i) v_n^{(i)} \quad \text{für } k \neq n, \\ (L_i(\lambda - z_i))_{nk} v_n^{(i)} &= c(\lambda - z_i) E_{k,n}^{(i)} v_n^{(i)} \quad \text{für } k < n. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Alle anderen Operatoreinträge vernichten das Vakuum.

Das Vakuum, d.h. der Grundzustand, des gesamten physikalischen Raumes ist das Tensorprodukt der einzelnen Vakua $v_n^{(i)}$:

$$\Omega_N^{(n)} = \otimes_{i=1}^N v_n^{(i)}. \tag{2.37}$$

Die Wirkung der Monodromiematrix auf dieses Vakuum erhält man aus (2.13) und (2.36):

$$\begin{aligned} (T(\lambda; z_1, \ldots, z_N))_{kk} \Omega_N^{(n)} &= \prod_{i=1}^N b(\lambda - z_i) \Omega_N^{(n)} \quad \text{für } k \neq n, \\ (T(\lambda; z_1, \ldots, z_N))_{nn} \Omega_N^{(n)} &= \Omega_N^{(n)}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Bis auf $(T(\lambda; z_1, \ldots, z_N))_{nk}$ mit $k < n$ vernichten wieder alle anderen Matrixelemente das Vakuum.

Die Abhängigkeit der Operatoren von den Inhomogenitäten z_i wird im folgenden nicht mehr explizit angegeben.

Die Konstruktion eines Eigenvektors zur Transfermatrix soll nun am Beispiel $sl(3)$ illustriert werden.

Für den Lax-Operator ergibt sich dann aus den vorherigen Überlegungen als Matrix im Hilfsraum, angewendet auf das lokale Vakuum:

$$L_i(\lambda - z_i)v_3^{(i)} = \begin{pmatrix} b(\lambda - z_i) & 0 & 0 \\ 0 & b(\lambda - z_i) & 0 \\ c(\lambda - z_i)E_{1,3}^{(i)} & c(\lambda - z_i)E_{2,3}^{(i)} & 1 \end{pmatrix} v_3^{(i)}. \tag{2.39}$$

Die Monodromiematrix erhält bei Anwendung auf das Vakuum folgende Gestalt:

$$T(\lambda)\Omega_N^{(3)} = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^N b(\lambda - z_i) & 0 & 0 \\ 0 & \prod_{i=1}^N b(\lambda - z_i) & 0 \\ C_1(\lambda) & C_2(\lambda) & 1 \end{pmatrix} \Omega_N^{(3)}. \tag{2.40}$$

Verwendet man die Notation

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda) & B_1(\lambda) \\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda) & B_2(\lambda) \\ C_1(\lambda) & C_2(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{2.41}$$

für die Operatoreinträge von $T(\lambda)$, so hat man die folgende Wirkung dieser Operatoren auf das Vakuum:

$$A_{ab}(\lambda)\Omega_N^{(3)} = \delta_{ab} \prod_{i=1}^N b(\lambda - z_i)\Omega_N^{(3)}, \tag{2.42}$$

$$D(\lambda)\Omega_N^{(3)} = \Omega_N^{(3)}, \tag{2.43}$$

$$B_a(\lambda)\Omega_N^{(3)} = 0. \tag{2.44}$$

Die Konstruktion eines Eigenvektors zu $t(\lambda)$ ist gleichbedeutend mit der Suche nach einem Eigenzustand zu

$$t(\lambda) = A_{11}(\lambda) + A_{22}(\lambda) + D(\lambda). \tag{2.45}$$

Da das Vakuum ein Eigenvektor zu den in der Spur enthaltenden Operatoren ist, und alle anderen Monodromiematrixeinträge außer $C_1(\lambda)$ und $C_2(\lambda)$ das Vakuum vernichten, kann man die Operatoren $C_a(\lambda)$ als Erzeugungsoperatoren und die Operatoren $B_a(\lambda)$ entsprechend als Vernichtungsoperatoren ansehen. Daher wählt man als Ansatz für einen Eigenvektor einen Zustand, der durch Anwendung von $C_1(\lambda)$ und $C_2(\lambda)$ auf das Vakuum in der folgenden Art entsteht:

$$\Psi_3(\lambda_1,\ldots,\lambda_m;\Phi^{(2)}) = \Phi^{(2)}_{\alpha_1\ldots\alpha_m} C_{\alpha_1}(\lambda_1)\ldots C_{\alpha_m}(\lambda_m)\Omega_N^{(3)}, \tag{2.46}$$

mit Summation über gleichlautende Indizes. Diese Konvention wird auch in den folgenden Rechnungen benutzt.

Man benötigt nun noch die Faddeev-Zamolodchikov-Algebra von $A_{ab}(\lambda)$, $D(\lambda)$ und $C_a(\lambda)$, um die Wirkung von $t(\lambda)$ auf einen Vektor (2.46) zu berechnen. Diese ergibt sich aus (2.14) durch entsprechende Einschränkung der freien Indizes als:

$$A_{ab}(\lambda)C_c(\mu) = \frac{(R^{(2)}(\lambda-\mu))^{dp}_{bc}}{b(\lambda-\mu)} C_p(\mu)A_{ad}(\lambda) - \frac{c(\lambda-\mu)}{b(\lambda-\mu)} C_b(\lambda)A_{ac}(\mu), \tag{2.47}$$

$$D(\lambda)C_a(\mu) = \frac{1}{b(\mu-\lambda)} C_a(\mu)D(\lambda) - \frac{c(\mu-\lambda)}{b(\mu-\lambda)} C_a(\lambda)D(\mu). \tag{2.48}$$

Die Matrix $R^{(2)}$ ist hierbei analog zu R als

$$R^{(2)}_{ij}(\lambda) = b(\lambda)\mathbb{1}^{(2)}_{ij} + c(\lambda)P^{(2)}_{ij} \tag{2.49}$$

definiert, nur daß $R^{(2)}$ nun in $\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$ wirkt, d.h., die Matrixindizes nehmen nur noch die Werte 1 und 2 an.

Wendet man $A_{aa}(\lambda)$ und $D(\lambda)$ auf einen Vektor (2.46) an, so werden nach (2.47) und (2.48) analog zum gewöhnlichen Algebraischen Bethe-Ansatz (siehe z.B. [17, 18]) erwünschte und unerwünschte Terme, d.h., Terme, die zu einem Eigenvektor führen, und Terme, die zusätzlich zu der Eigenwertgleichung auftreten, entstehen.

Zuerst soll jetzt die Wirkung von $D(\lambda)$ auf (2.46) berechnet werden. Einen erwünschten Term erhält man, wenn man $D(\lambda)$ mit dem ersten Term in (2.48) an den $C_a(\lambda)$ vorbei ans Vakuum kommutiert. Dies ergibt den Term

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{b(\lambda_i-\lambda)} \Phi^{(2)}_{\alpha_1\ldots\alpha_m} C_{\alpha_1}(\lambda_1)\ldots C_{\alpha_m}(\lambda_m)\Omega_N^{(3)}. \tag{2.50}$$

Alle anderen Terme sind unerwünscht, da innerhalb der $C_a(\lambda)$ ein Parameter λ_i gegen λ ausgetauscht wird. Ein solcher Ausdruck ergibt sich z.B. bei Verwendung des zweiten Terms in

(2.48) am ersten $C_a(\lambda)$ und Verwendung des ersten bei allen anderen:

$$-\frac{c(\lambda_1-\lambda)}{b(\lambda_1-\lambda)}\prod_{i=2}^{m}\frac{1}{b(\lambda_i-\lambda_1)}\Phi^{(2)}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}C_{\alpha_1}(\lambda)C_{\alpha_2}(\lambda_2)\ldots C_{\alpha_m}(\lambda_m)\Omega_N^{(3)}. \tag{2.51}$$

Im nächsten Kapitel wird gezeigt, daß $\Psi_3(\lambda_1,\ldots,\lambda_m;\Phi^{(2)})$ invariant unter Vertauschungen innerhalb der Parameter $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ ist. Daher erhält man alle anderen Terme aus (2.51) durch Vertauschung von λ_1 mit einem λ_k.

Nun soll die Wirkung von $A_{aa}(\lambda)$ (Summation über $a=1,2$) auf (2.46) analysiert werden. Verwendet man wie bei $D(\lambda)$ nur den ersten Term der Relation (2.47), um $A_{aa}(\lambda)$ ans Vakuum zu kommutieren, so erhält man unter Benutzung der Beziehung (2.42):

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{N}b(\lambda-z_i)\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{b(\lambda-\lambda_j)}\ \Phi^{(2)}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}C_{p_1}(\lambda_1)\ldots C_{p_m}(\lambda_m)\Omega_N^{(3)}\\ \times\quad &(R^{(2)}(\lambda-\lambda_1))_{a\,\alpha_1}^{d_1\,p_1}(R^{(2)}(\lambda-\lambda_2))_{d_1\,\alpha_2}^{d_2\,p_2}\ldots(R^{(2)}(\lambda-\lambda_{m-1}))_{d_{m-2}\,\alpha_{m-1}}^{d_{m-1}\,p_{m-1}}(R^{(2)}(\lambda-\lambda_m))_{d_{m-1}\,\alpha_m}^{a\qquad p_m}.\end{aligned} \tag{2.52}$$

Dieser Ausdruck ergibt einen Eigenvektor zu $A_{aa}(\lambda)$, wenn die folgende zusätzliche Eigenwertgleichung mit Eigenwert $\Lambda(\lambda)$ erfüllt ist:

$$(R^{(2)}(\lambda-\lambda_1))_{a\,\alpha_1}^{d_1\,p_1}\ldots(R^{(2)}(\lambda-\lambda_m))_{d_{m-1}\,\alpha_m}^{a\,p_m}\Phi^{(2)}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}=\Lambda(\lambda)\Phi^{(2)}_{p_1\ldots p_m}. \tag{2.53}$$

Diese Gleichung kann man umformulieren, wenn man die Definitionen

$$\begin{aligned}L_i^{(2)}(\lambda)&=R_{0i}^{(2)}(\lambda),\\ T_m^{(2)}(\lambda)&=L_m^{(2)}(\lambda-\lambda_m)\ldots L_1^{(2)}(\lambda-\lambda_1),\\ t^{(2)}(\lambda)&=tr_0T_m^{(2)}(\lambda)\end{aligned} \tag{2.54}$$

einführt. Hiermit läßt sich (2.53) schreiben als:

$$t^{(2)}(\lambda)\Phi^{(2)}=\Lambda(\lambda)\Phi^{(2)}\quad\text{mit }\Phi^{(2)}\in\mathcal{H}^{(2)}=(\mathbb{C}^2)^{\otimes m}. \tag{2.55}$$

Es ergibt sich also das gleiche Eigenwertproblem wie zuvor, mit dem Unterschied, daß man nun m Gitterplätze im $sl(2)$-Fall betrachtet, wobei die Inhomogenitäten durch die Parameter $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ des $sl(3)$-Problems gegeben sind.

Zur Berechnung der zu $A_{aa}(\lambda)$ gehörenden unerwünschten Terme, benutzt man für das erste $C_a(\lambda)$ den zweiten Term in (2.47) und für alle weiteren den ersten Term. Dies ergibt den folgenden Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
& -\frac{c(\lambda-\lambda_1)}{b(\lambda-\lambda_1)}\prod_{i=1}^{N} b(\lambda_1-z_i)\prod_{j=2}^{m}\frac{1}{b(\lambda_1-\lambda_j)}\ \Phi^{(2)}_{\alpha_1\ldots\alpha_m} C_a(\lambda)C_{p_2}(\lambda_2)\ldots C_{p_m}(\lambda_m)\Omega_N^{(3)} \\
& \quad\times(R^{(2)}(\lambda_1-\lambda_2))^{d_2\,p_2}_{\alpha_1\,\alpha_2}(R^{(2)}(\lambda_1-\lambda_3))^{d_3\,p_3}_{d_2\,\alpha_3}\ldots(R^{(2)}(\lambda_1-\lambda_m))^{a\qquad p_m}_{d_{m-1}\,\alpha_m} \\
= \; & -\frac{c(\lambda-\lambda_1)}{b(\lambda-\lambda_1)}\prod_{i=1}^{N} b(\lambda_1-z_i)\prod_{j=2}^{m}\frac{1}{b(\lambda_1-\lambda_j)}\ \Phi^{(2)}_{\alpha_1\ldots\alpha_m} C_{p_1}(\lambda)C_{p_2}(\lambda_2)\ldots C_{p_m}(\lambda_m)\Omega_N^{(3)} \\
& \quad\times\delta_{d_1\alpha_1}\delta_{p_1 a}(R^{(2)}(\lambda_1-\lambda_2))^{d_2\,p_2}_{d_1\,\alpha_2}\ldots(R^{(2)}(\lambda_1-\lambda_m))^{a\qquad p_m}_{d_{m-1}\,\alpha_m}.
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

Wegen $(R^{(2)}(\lambda_1-\lambda_1))^{d_1\,p_1}_{a\,\alpha_1}=\delta_{d_1\alpha_1}\delta_{p_1 a}$ kann man dies auch schreiben als:

$$
-\frac{c(\lambda-\lambda_1)}{b(\lambda-\lambda_1)}\prod_{i=1}^{N} b(\lambda_1-z_i)\prod_{j=2}^{m}\frac{1}{b(\lambda_1-\lambda_j)}\ (t^{(2)}(\lambda_1))^{p_1\ldots p_m}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}\Phi^{(2)}_{\alpha_1\ldots\alpha_m} C_a(\lambda)C_{p_2}(\lambda_2)\ldots C_{p_m}(\lambda_m)\Omega_N^{(3)}.
\tag{2.57}
$$

Alle anderen unerwünschten Terme ergeben sich dann wie im Fall von $D(\lambda)$ durch Permutation von λ_1.

Faßt man diese Terme von $A_{aa}(\lambda)$ (2.57) und $D(\lambda)$ (2.51) zusammen, so folgen als Bedingungen an die $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ für das Verschwinden der störenden Ausdrücke wegen der Beziehung

$$
\frac{c(\lambda-\mu)}{b(\lambda-\mu)}=-\frac{c(\mu-\lambda)}{b(\mu-\lambda)}
\tag{2.58}
$$

die Gleichungen

$$
\prod_{i=1}^{N} b^{-1}(\lambda_k-z_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m}\frac{b(\lambda_k-\lambda_j)}{b(\lambda_j-\lambda_k)}\Phi^{(2)}=t^{(2)}(\lambda_k)\Phi^{(2)}\quad \text{für } k=1,\ldots,m.
\tag{2.59}
$$

Das $sl(2)$-Eigenwertproblem (2.55) löst man mit Hilfe des gewöhnlichen Bethe-Ansatzes. Dieser ergibt sich aus dem hierarchischen Fall für $n=2$. Das Vakuum ist dann durch (2.37) mit $N=m$ gegeben:

$$
\Omega_m^{(2)}=\otimes_{i=1}^{m} v_2^{(i)},\quad \text{mit } v_2^{(i)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\in\mathcal{H}_i^{(2)}=\mathbb{C}^2.
\tag{2.60}
$$

Die 2×2 Monodromiematrix definiert man als

$$
T_m^{(2)}(\lambda)=\begin{pmatrix}A^{(2)}(\lambda) & B^{(2)}(\lambda)\\ C^{(2)}(\lambda) & D^{(2)}(\lambda)\end{pmatrix},
\tag{2.61}
$$

und die Wirkung der Matrixeinträge auf das Vakuum ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} A^{(2)}(\lambda)\Omega_m^{(3)} &= \prod_{i=1}^{m} b(\lambda-\lambda_i)\Omega_m^{(2)}, \\ D^{(2)}(\lambda)\Omega_m^{(2)} &= \Omega_m^{(2)}, \\ B^{(2)}(\lambda)\Omega_m^{(2)} &= 0. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Man wählt als Ansatz für den Eigenvektor $\Phi^{(2)}$ zur Transfermatrix $t^{(2)}(\lambda) = A^{(2)}(\lambda) + D^{(2)}(\lambda)$ analog zum $sl(3)$-Fall

$$\Phi^{(2)} = C^{(2)}(\lambda_1^{(2)}) \dots C^{(2)}(\lambda_q^{(2)})\Omega_m^{(2)}. \tag{2.63}$$

Die Vertauschungsrelationen zwischen $A^{(2)}(\lambda)$ und $C^{(2)}(\lambda)$ bzw. $D^{(2)}(\lambda)$ und $C^{(2)}(\lambda)$ erhält man aus (2.14) für $n = 2$. Die für uns relevanten Beziehungen lauten:

$$A^{(2)}(\lambda)C^{(2)}(\mu) = \frac{1}{b(\lambda-\mu)}C^{(2)}(\mu)A^{(2)}(\lambda) - \frac{c(\lambda-\mu)}{b(\lambda-\mu)}C^{(2)}(\lambda)A^{(2)}(\mu), \tag{2.64}$$

$$D^{(2)}(\lambda)C^{(2)}(\mu) = \frac{1}{b(\mu-\lambda)}C^{(2)}(\mu)D^{(2)}(\lambda) - \frac{c(\mu-\lambda)}{b(\mu-\lambda)}C^{(2)}(\lambda)D^{(2)}(\mu). \tag{2.65}$$

Man führt nun die gleichen Schritte wie im $sl(3)$-Fall zuvor durch. Kommutiert man die Operatoren $A^{(2)}(\lambda)$ und $D^{(2)}(\lambda)$ mit Hilfe der jeweils ersten Terme in (2.64) und (2.65) an den $C^{(2)}(\lambda)$ vorbei, so gelangt man zu der Eigenwertgleichung

$$t^{(2)}(\lambda)\Phi^{(2)} = \Lambda(\lambda)\Phi^{(2)} \tag{2.66}$$

mit dem Eigenwert

$$\Lambda(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} b(\lambda-\lambda_i) \prod_{j=1}^{q} \frac{1}{b(\lambda-\lambda_j^{(2)})} + \prod_{j=1}^{q} \frac{1}{b(\lambda_j^{(2)}-\lambda)}, \tag{2.67}$$

unter der Voraussetzung, daß sämtliche unerwünschten Terme verschwinden. Zu diesen wird man geführt, wenn man beim Kommutieren zuerst den zweiten Term der Beziehungen (2.64) und (2.65) verwendet und danach nur noch den ersten Term. Wegen der Kommutatorrelation

$$[C^{(2)}(\lambda), C^{(2)}(\mu)] = 0 \tag{2.68}$$

ist sofort klar, daß die $sl(2)$-Wellenfunktion $\Phi^{(2)}$ symmetrisch unter Vertauschungen innerhalb der Parameter $\lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_q^{(2)}$ ist. Daher ergeben sich wieder alle anderen unerwünschten Terme durch Permutation der Parameter. Diese Terme verschwinden, wenn die Gleichungen

$$\prod_{i=1}^{m} b(\lambda_k^{(2)}-\lambda_i) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{q} \frac{b(\lambda_k^{(2)}-\lambda_i^{(2)})}{b(\lambda_i^{(2)}-\lambda_k^{(2)})} \tag{2.69}$$

für alle $k = 1, \ldots, q$ erfüllt sind.

Den Eigenwert zu $t(\lambda)$ im ursprünglichen $sl(3)$-Problem erhält man, wenn man die Eigenwerte für $A_{aa}(\lambda)$ (2.52) und $D(\lambda)$ (2.50) im $sl(3)$-Fall zusammenfaßt, und anschließend den $sl(2)$-Eigenwert (2.67) einsetzt. Bezeichnet man den Eigenwert mit $\tau(\lambda)$, d.h.,

$$t(\lambda)\Psi_3(\lambda_1, \ldots, \lambda_m; \Phi^{(2)}) = \tau(\lambda)\Psi_3(\lambda_1, \ldots, \lambda_m; \Phi^{(2)}), \tag{2.70}$$

so ergibt sich dieser zu

$$\begin{aligned} \tau(\lambda) &= \prod_{i=1}^{N} b(\lambda - z_i) \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{b(\lambda - \lambda_j)} \left\{ \prod_{i=1}^{m} b(\lambda - \lambda_i) \prod_{j=1}^{q} \frac{1}{b(\lambda - \lambda_j^{(2)})} + \prod_{j=1}^{q} \frac{1}{b(\lambda_j^{(2)} - \lambda)} \right\} \\ &\quad + \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{b(\lambda_i - \lambda)}. \end{aligned} \tag{2.71}$$

Setzt man in der Bedingung (2.59) für das Verschwinden der unerwünschten Terme im $sl(3)$-Fall die Eigenwertgleichung $t^{(2)}(\lambda_k)\Phi^{(2)} = \Lambda(\lambda_k)\Phi^{(2)}$ mit der Lösung $\Lambda(\lambda_k)$ aus (2.67) ein, so ergibt sich als Bedingung an die Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$

$$\prod_{i=1}^{N} b^{-1}(\lambda_k - z_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m} \frac{b(\lambda_k - \lambda_j)}{b(\lambda_j - \lambda_k)} = \prod_{j=1}^{q} \frac{1}{b(\lambda_j^{(2)} - \lambda_k)} \tag{2.72}$$

für alle $k = 1, \ldots, m$.

Damit hat man im $sl(3)$-Fall die Eigenwerte zur Transfermatrix $t(\lambda; z_1, \ldots, z_N)$ berechnet.

Im allgemeinen $sl(n)$-Fall wählt man für die Eigenfunktion $\Psi_n(N; \lambda_1, \ldots, \lambda_{m_1})$ zur Transfermatrix

$$t(\lambda; z_1, \ldots, z_N) = \sum_{k=1}^{n} T_{kk}(\lambda) \tag{2.73}$$

den Ansatz

$$\Psi_n(N; \lambda_1^{(1)}, \ldots, \lambda_{m_1}^{(1)}) = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_1}} \Phi^{(n-1)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{m_1}} T_{n\alpha_1}(\lambda_1^{(1)}) \ldots T_{n\alpha_{m_1}}(\lambda_{m_1}^{(1)})\, \Omega_N^{(n)}. \tag{2.74}$$

Die zur Auswertung der Wirkung von $T_{kk}(\lambda)$ auf eine Funktion (2.74) erforderlichen Kommutatorrelationen ergeben sich aus (2.7) für beliebiges n:

$$T_{ab}(\lambda)T_{nc}(\mu) = \frac{(R^{(n-1)}(\lambda - \mu))_{bc}^{dp}}{b(\lambda - \mu)} T_{np}(\mu)T_{ad}(\lambda) - \frac{c(\lambda - \mu)}{b(\lambda - \mu)} T_{nb}(\lambda)T_{ac}(\mu), \tag{2.75}$$

$$T_{nn}(\lambda)T_{na}(\mu) = \frac{1}{b(\mu - \lambda)} T_{na}(\mu)T_{nn}(\lambda) - \frac{c(\mu - \lambda)}{b(\mu - \lambda)} T_{na}(\lambda)T_{nn}(\mu), \tag{2.76}$$

mit $a, b, c < n$ und

$$R_{ij}^{(n-1)}(\lambda) = b(\lambda)\mathbb{1}_{ij}^{(n-1)} + c(\lambda)P_{ij}^{(n-1)}, \tag{2.77}$$

d.h., $R_{ij}^{(n-1)}(\lambda)$ wirkt im Raum $\mathbb{C}^{n-1} \otimes \mathbb{C}^{n-1}$.

Diese Relationen sind also vollkommen analog zu (2.47) und (2.48) im $sl(3)$-Fall. Man verfährt daher genau wie dort, mit dem Unterschied, daß für den Koeffizienten $\Phi_{\alpha_1 \dots \alpha_{m_1}}^{(n-1)}$ nun nicht direkt der gewöhnliche Bethe-Ansatz verwendet werden kann, sondern man stattdessen wieder einen Ansatz der Form (2.74) wählen muß. Dies setzt sich solange fort, bis man den $sl(2)$-Fall erreicht hat, d.h., es ergeben sich insgesamt $n-1$ Hierarchieebenen. Für $k = 2, \dots, n-2$ erhält man daher folgende Wellenfunktionen

$$\Phi^{(n-k+1)}(\lambda^{(i)}) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{m_k}} \Phi_{\alpha_1 \dots \alpha_{m_k}}^{(n-k)} T_{n\alpha_1}^{(n-k+1)}(\lambda_1^{(k)}) \dots T_{n\alpha_{m_k}}^{(n-k+1)}(\lambda_{m_k}^{(k)}) \, \Omega_{m_{k-1}}^{(n-k)}, \tag{2.78}$$

welche die Eigenwertgleichungen

$$t^{(n-k+1)}(\lambda)\Phi^{(n-k+1)}(\lambda^{(i)}) = \Lambda^{(k)}(\lambda)\Phi^{(n-k+1)}(\lambda^{(i)}) \tag{2.79}$$

mit $\Phi^{(n-k+1)} \in \mathcal{H}^{(n-k+1)} = (\mathbb{C}^{n-k+1})^{\otimes m_{k-1}}$ erfüllen, wobei

$$\begin{aligned} L_i^{(n-k+1)}(\lambda) &= R_{0i}^{(n-k+1)}(\lambda), \\ T_{m_{k-1}}^{(n-k+1)}(\lambda) &= L_{m_{k-1}}^{(n-k+1)}(\lambda - \lambda_{m_{k-1}}^{(k-1)}) \dots L_1^{(n-k+1)}(\lambda - \lambda_1^{(k-1)}), \\ t^{(n-k+1)}(\lambda) &= tr_0 T_{m_{k-1}}^{(n-k+1)}(\lambda). \end{aligned} \tag{2.80}$$

Der Eigenwert $\Lambda^{(k)}(\lambda)$ der Transfermatrix $t^{(n-k+1)}(\lambda)$ ergibt sich aus der folgenden Rekursionsrelation:

$$\Lambda^{(k)}(\lambda) = \Lambda^{(k+1)}(\lambda) \prod_{i=1}^{m_{k-1}} b(\lambda - \lambda_i^{(k-1)}) \prod_{j=1}^{m_k} \frac{1}{b(\lambda - \lambda_j^{(k)})} + \prod_{i=1}^{m_k} \frac{1}{b(\lambda_i^{(k)} - \lambda)}. \tag{2.81}$$

Der erste Term auf der rechten Seite dieser Beziehung entstammt hierbei dem Eigenwertproblem für den Anteil $\sum_{i=1}^{n-k} T_{ii}^{(n-k+1)}(\lambda)$ der Transfermatrix $t^{(n-k+1)}(\lambda)$, und der zweite Term wird erzeugt durch das entsprechende Problem für das Element $T_{n-k+1\, n-k+1}^{(n-k+1)}(\lambda)$.

Löst man in (2.81) die Rekursion auf und setzt das schon bekannte Ergebnis für den Eigenwert im $sl(2)$-Fall (2.67) ein, so erhält man für den Eigenwert $\tau(\lambda)$ der Transfermatrix

$t(\lambda; z_1, \ldots, z_N)$ schließlich:

$$
\begin{aligned}
\tau(\lambda) \;=\; & \prod_{i=1}^{N} b(\lambda - z_i) \prod_{j=1}^{m_1} \frac{1}{b(\lambda - \lambda_j^{(1)})} \left\{ \prod_{i=1}^{m_1} b(\lambda - \lambda_i^{(1)}) \prod_{j=1}^{m_2} \frac{1}{b(\lambda - \lambda_j^{(2)})} \left\{ \cdots \right.\right. \\
& \cdots \left\{ \prod_{i=1}^{m_{n-2}} b(\lambda - \lambda_i^{(n-2)}) \prod_{j=1}^{m_{n-1}} \frac{1}{b(\lambda - \lambda_j^{(n-1)})} + \prod_{j=1}^{m_{n-1}} \frac{1}{b(\lambda_j^{(n-1)} - \lambda)} \right\} \cdots \\
& \left.\left. \cdots \right\} + \prod_{i=1}^{m_2} \frac{1}{b(\lambda_i^{(2)} - \lambda)} \right\} + \prod_{i=1}^{m_1} \frac{1}{b(\lambda_i^{(1)} - \lambda)} \,.
\end{aligned}
\tag{2.82}
$$

Die Forderung, daß die unerwünschten Terme in jeder Stufe k der Hierarchie verschwinden, wird ausgedrückt durch die (2.59) entsprechenden Gleichungen für die $\lambda_j^{(k)}$:

$$
\prod_{i=1}^{m_{k-1}} b^{-1}(\lambda_j^{(k)} - \lambda_i^{(k-1)}) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{m_k} \frac{b(\lambda_j^{(k)} - \lambda_l^{(k)})}{b(\lambda_l^{(k)} - \lambda_j^{(k)})} \Phi^{(n-k)} = t^{(n-k)}(\lambda_j^{(k)}) \Phi^{(n-k)} \tag{2.83}
$$

für alle $j = 1, \ldots, m_k$.

Setzt man in (2.83) die Eigenwertgleichung $t^{(n-k)}(\lambda_j^{(k)})\, \Phi^{(n-k)} = \Lambda^{(k+1)}(\lambda_j^{(k)})\, \Phi^{(n-k)}$ ein und verwendet (2.81), so ergeben sich schließlich die folgenden Bethe-Ansatz-Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{N} b^{-1}(\lambda_j^{(1)} - z_i) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{m_1} \frac{b(\lambda_j^{(1)} - \lambda_l^{(1)})}{b(\lambda_l^{(1)} - \lambda_j^{(1)})} &= \prod_{i=1}^{m_2} \frac{1}{b(\lambda_i^{(2)} - \lambda_j^{(1)})}, \ldots, \\
\prod_{i=1}^{m_{k-1}} b^{-1}(\lambda_j^{(k)} - \lambda_i^{(k-1)}) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{m_k} \frac{b(\lambda_j^{(k)} - \lambda_l^{(k)})}{b(\lambda_l^{(k)} - \lambda_j^{(k)})} &= \prod_{i=1}^{m_{k+1}} \frac{1}{b(\lambda_i^{(k+1)} - \lambda_j^{(k)})}, \ldots, \\
\prod_{i=1}^{m_{n-2}} b(\lambda_j^{(n-1)} - \lambda_i^{(n-2)}) &= \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m_{n-1}} \frac{b(\lambda_j^{(n-1)} - \lambda_i^{(n-1)})}{b(\lambda_i^{(n-1)} - \lambda_j^{(n-1)})},
\end{aligned}
\tag{2.84}
$$

für alle Werte j in $\lambda_j^{(k)}$. Die letzte Zeile in (2.84) entspricht hierbei den gewöhnlichen Bethe-Ansatz-Gleichungen des $sl(2)$-Problems (2.69).

Damit hat man für den allgemeinen $sl(n)$-Fall ebenfalls die Eigenwerte zur Transfermatrix berechnet. Aus der Beziehung (2.24) folgen damit auch die Eigenwerte zum Hamiltonoperator H.

2.5 Permutationssymmetrie der Bethe-Wellenfunktion

Im folgenden soll gezeigt werden, daß die hierarchische Wellenfunktion (2.74)

$$\Psi_n(N;\lambda_1^{(1)},\ldots,\lambda_{m_1}^{(1)}) = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{m_1}} \Phi^{(n-1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{m_1}} T_{n\alpha_1}(\lambda_1^{(1)})\ldots T_{n\alpha_{m_1}}(\lambda_{m_1}^{(1)})\,\Omega_N^{(n)}, \tag{2.85}$$

mit der zu $\Phi^{(n-1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{m_1}}$ gegebenen Monodromiematrix (2.80)

$$T_{m_1}^{(n-1)}(\lambda) \;=\; L_{m_1}^{(n-1)}(\lambda-\lambda_{m_1}^{(1)})\ldots L_1^{(n-1)}(\lambda-\lambda_1^{(1)}), \tag{2.86}$$

invariant unter Permutationen der Parameter $\lambda_i^{(1)}$ ist [19]. Im $sl(2)$-Problem ist diese Tatsache offensichtlich, da die Operatoren $T_{21}(\lambda)$ miteinander kommutieren (2.68). Die entsprechenden Kommutatorrelationen für $sl(n)$ ergeben sich aus (2.15)

$$T_{n\,\alpha}(\lambda_1)T_{n\,\beta}(\lambda_2) = (\tilde{R}^{(n-1)}(\lambda_1-\lambda_2))_{\alpha\;\beta}^{m_1 m_2} T_{n\,m_1}(\lambda_2)T_{n\,m_2}(\lambda_1), \tag{2.87}$$

mit $\alpha,\beta<n$, d.h.,

$$[T_{n\alpha}(\lambda_1),T_{n\alpha}(\lambda_2)] = 0,$$
$$T_{n\alpha}(\lambda_1)T_{n\beta}(\lambda_2) = \frac{1}{b(\lambda_2-\lambda_1)}T_{n\beta}(\lambda_2)T_{n\alpha}(\lambda_1) - \frac{c(\lambda_2-\lambda_1)}{b(\lambda_2-\lambda_1)}T_{n\beta}(\lambda_1)T_{n\alpha}(\lambda_2)\,. \tag{2.88}$$

Man erkennt, daß die Operatoren $T_{n\alpha}(\lambda)$ nicht mehr miteinander kommutieren, wenn die Parameter α,β nicht übereinstimmen.

Betrachtet man nun eine allgemeine Permutation innerhalb der Parameter $\lambda_j^{(1)}$, so genügt es, sich auf elementare Transpositionen zu beschränken, da aus diesen sämtliche Permutationen konstruieren werden können.
Vertauscht man in (2.85) die Parameter $\lambda_i^{(1)}$ und $\lambda_{i+1}^{(1)}$, so ergibt sich die Wellenfunktion (Summationskonvention)

$$\Psi_n^i(N;\lambda_1^{(1)},\ldots,\lambda_{m_1}^{(1)}) = \Phi^{(n-1),i}_{\alpha_1\ldots\alpha_{m_1}} T_{n\alpha_1}(\lambda_1^{(1)})\ldots T_{n\alpha_i}(\lambda_{i+1}^{(1)})T_{n\alpha_{i+1}}(\lambda_i^{(1)})\ldots T_{n\alpha_{m_1}}(\lambda_{m_1}^{(1)})\,\Omega_N^{(n)}. \tag{2.89}$$

Der Index i an $\Phi^{(n-1),i}_{\alpha_1\ldots\alpha_{m_1}}$ deutet darauf hin, daß dieser Wellenfunktion die Monodromiematrix

$$T_{m_1}^{(n-1),i}(\lambda) \;=\; L_{m_1}^{(n-1)}(\lambda-\lambda_{m_1}^{(1)})\ldots L_{i+1}^{(n-1)}(\lambda-\lambda_i^{(1)})L_i^{(n-1)}(\lambda-\lambda_{i+1}^{(1)})\ldots L_1^{(n-1)}(\lambda-\lambda_1^{(1)}) \tag{2.90}$$

zugrundeliegt. Kommutiert man in (2.89) die Operatoren $T_{n\alpha_i}(\lambda_{i+1}^{(1)})$ und $T_{n\alpha_{i+1}}(\lambda_i^{(1)})$ miteinander, dann erhält man mit (2.87)

$$\begin{aligned}\Psi_n^i(N;\lambda_1^{(1)},\ldots,\lambda_{m_1}^{(1)}) \;=\; &\Phi^{(n-1),i}_{\alpha_1\ldots\alpha_{m_1}} T_{n\alpha_1}(\lambda_1^{(1)})\ldots(\tilde{R}^{(n-1)}(\lambda_{i+1}^{(1)}-\lambda_i^{(1)}))_{\alpha_i\;\alpha_{i+1}}^{m_1 m_2} T_{n\,m_1}(\lambda_i^{(1)})T_{n\,m_2}(\lambda_{i+1}^{(1)})\\ &\ldots T_{n\alpha_{m_1}}(\lambda_{m_1}^{(1)})\,\Omega_N^{(n)}.\end{aligned} \tag{2.91}$$

Um die Wirkung von $\tilde{R}$ auf $\Phi^{(n-1),i}_{\alpha_1\ldots\alpha_{m_1}}$ zu untersuchen, benutzt man die folgende Beziehung, welche aus der Yang-Baxter-Gleichung (2.7) resultiert:

$$\begin{aligned}&\tilde{R}^{(n-1)}_{i\,i+1}(\lambda^{(1)}_{i+1}-\lambda^{(1)}_{i})L^{(n-1)}_{i+1}(\lambda-\lambda^{(1)}_{i})L^{(n-1)}_{i}(\lambda-\lambda^{(1)}_{i+1})\\&=L^{(n-1)}_{i+1}(\lambda-\lambda^{(1)}_{i+1})L^{(n-1)}_{i}(\lambda-\lambda^{(1)}_{i})\tilde{R}^{(n-1)}_{i\,i+1}(\lambda^{(1)}_{i+1}-\lambda^{(1)}_{i})\,.\end{aligned} \tag{2.92}$$

Diese Gleichung liefert den Zusammenhang zwischen den Monodromiematrizen (2.86) und (2.90):

$$T^{(n-1)}_{m_1}(\lambda)\tilde{R}^{(n-1)}_{i\,i+1}(\lambda^{(1)}_{i+1}-\lambda^{(1)}_{i})=\tilde{R}^{(n-1)}_{i\,i+1}(\lambda^{(1)}_{i+1}-\lambda^{(1)}_{i})T^{(n-1),i}_{m_1}(\lambda). \tag{2.93}$$

Da der Koeffizient $\Phi^{(n-1),i}_{\alpha_1\ldots\alpha_{m_1}}$ durch (2.78) gegeben ist, folgt daraus mit $R_{ij}v^{(i)}_n\otimes v^{(j)}_n=v^{(i)}_n\otimes v^{(j)}_n$ die Beziehung zwischen $\Phi^{(n-1),i}_{\alpha_1\ldots\alpha_{m_1}}$ und $\Phi^{(n-1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{m_1}}$:

$$\Phi^{(n-1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{m_1}}=(\tilde{R}^{(n-1)}(\lambda^{(1)}_{i+1}-\lambda^{(1)}_{i}))^{\alpha_i\,\alpha_{i+1}}_{\beta_i\beta_{i+1}}\Phi^{(n-1),i}_{\alpha_1\ldots\beta_i\,\beta_{i+1}\ldots\alpha_{m_1}}. \tag{2.94}$$

Verwendet man diese Gleichung in (2.91), so ergibt sich:

$$\Psi^{i}_{n}(N;\lambda^{(1)}_{1},\ldots,\lambda^{(1)}_{m_1})=\Psi_n(N;\lambda^{(1)}_{1},\ldots,\lambda^{(1)}_{m_1}). \tag{2.95}$$

Die Wellenfunktion (2.85) ist also invariant unter Permutationen der Parameter $\lambda^{(1)}_j$. Diese Rechnungen gelten für jede Hierarchieebene der Wellenfunktion, d.h., die Wellenfunktion des hierarchischen Bethe-Ansatzes ist insgesamt invariant unter Vertauschungen der Parameter $\lambda^{(k)}_i$ innerhalb einer Hierarchieebene, unabhängig davon, ob die Parameter die Bethe-Ansatz-Gleichungen (2.84) erfüllen oder nicht.

2.6 Struktur der Erzeugungsoperatoren

Betrachtet man im $sl(2)$-Fall den Operator des Gesamtspins

$$S_3=\sum_{i=1}^{N}S^{(i)}_3=\sum_{i=1}^{N}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}_{[i]}, \tag{2.96}$$

so ergibt sich aus (2.30) der Kommutator des Erzeugungsoperators $T_{21}(\lambda)$ mit S_3:

$$[S_3,T_{21}(\lambda)]=T_{21}(\lambda). \tag{2.97}$$

$T_{21}(\lambda)$ ist also ein Aufsteigeoperator bzgl. der Eigenwerte zu S_3. Schreibt man den $sl(2)$-Lax-Operator in Form der lokalen Spin-Auf- und -Absteigeoperatoren $\sigma^{(i)}_+=E^{(i)}_{1,2}$ und $\sigma^{(i)}_-=E^{(i)}_{2,1}$

$$L_i(\lambda)=\begin{pmatrix}b(\lambda)\mathbb{1}_i+c(\lambda)E^{(i)}_{1,1}&c(\lambda)\sigma^{(i)}_-\\c(\lambda)\sigma^{(i)}_+&b(\lambda)\mathbb{1}_i+c(\lambda)E^{(i)}_{2,2}\end{pmatrix}, \tag{2.98}$$

so erkennt man aus der Definition der Monodromiematrix (2.13), daß $T_{21}(\lambda)$ jedoch nicht nur Aufsteigeoperatoren $\sigma_+^{(i)}$, sondern zusätzlich auch noch Absteigeoperatoren $\sigma_-^{(j)}$ in der Form sich gegenseitig kompensierender Faktoren $(\sigma_-^{(j)}\sigma_+^{(k)})$ enthält:

$$T_{21}(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \sigma_+^{(i)} \mathcal{M}_i + \sum_{i \neq j \neq k}^{N} \sigma_+^{(i)} (\sigma_-^{(j)} \sigma_+^{(k)}) \mathcal{M}_{ijk} + \text{ höhere Terme,} \tag{2.99}$$

wobei $\mathcal{M}_i$ und $\mathcal{M}_{ijk}$ diagonale Operatoren sind, welche in allen Räumen außer den indizierten wirken, und die höheren Terme immer mehr Faktoren $(\sigma_-^{(j)}\sigma_+^{(k)})$ enthalten.

Im allgemeinen Fall $n > 2$ bestehen die Erzeugungsoperatoren $T_{n\alpha}(\lambda)$ entsprechend nicht nur aus Operatoren $E_{a,b}^{(i)}$ mit $a < b$, sondern beinhalten zusätzlich auch noch Terme mit Operatoren $E_{a,b}^{(j)}$ mit $a > b$. In Kapitel 5 gelangt man durch eine Basistransformation zu einer Darstellung der Erzeugungsoperatoren, die diese Kompensationsterme nicht mehr aufweist.

Das inverse Problem, d.h., die Darstellung der lokalen Spin-Operatoren in Abhängigkeit von den Monodromiematrixelementen, wird im Anhang C behandelt.

3 Drinfel'd Twists

3.1 Allgemeine Definition eines Drinfel'd Twists

In diesem Unterkapitel wird ein kurzer Überblick über die für das Konzept des Drinfel'd Twists wichtigen mathematischen Definitionen gegeben. Sie entstammen im wesentlichen den Artikeln [6, 20] von Drinfel'd.

Definition 3.1 Unter einer Quasi-Bi-Algebra über k (In diesem Abschnitt wird angenommen, daß k ein Körper der Charakteristik 0 ist.) versteht man eine Menge $(A, \Delta, \epsilon, \Phi)$, wobei A eine assoziative k-Algebra mit Einheit ist, Δ ein Homomorphismus $A \to A \otimes A$ und Φ ein invertierbares Element in $A \otimes A \otimes A$, so daß

$$
\begin{aligned}
(id \otimes \Delta)\Delta(a) &= \Phi(\Delta \otimes id)\Delta(a)\Phi^{-1}, \quad a \in A, && (3.1)\\
(id \otimes id \otimes \Delta)\Phi(\Delta \otimes id \otimes id)\Phi &= (1 \otimes \Phi)(id \otimes \Delta \otimes id)\Phi(\Phi \otimes 1), && (3.2)\\
(\epsilon \otimes id) \circ \Delta &= id = (id \otimes \epsilon) \circ \Delta, && (3.3)\\
(id \otimes \epsilon \otimes id)\Phi &= 1. && (3.4)
\end{aligned}
$$

Einen Twist F innerhalb einer Quasi-Bi-Algebra definiert man nun folgendermaßen:

Definition 3.2 Gegeben sei ein invertierbares Element $F \in A \otimes A$, so daß $(\epsilon \otimes id)F = (id \otimes \epsilon)F = 1$. Setze

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Delta}(a) &= F\Delta(a)F^{-1}, \quad a \in A, && (3.5)\\
\tilde{\Phi} &= (1 \otimes F)(id \otimes \Delta)F\Phi(\Delta \otimes id)F^{-1}(F^{-1} \otimes 1). && (3.6)
\end{aligned}
$$

Die Menge $(A, \tilde{\Delta}, \epsilon, \tilde{\Phi})$ ist dann wieder eine Quasi-Bi-Algebra, welche aus $(A, \Delta, \epsilon, \Phi)$ durch den Twist F hervorgegangen ist. Nacheinanderausführen der Twists F_1 und F_2 ist hierbei äquivalent zum Twist $F_2 F_1$.

Definition 3.3 Unter einer Quasi-Hopf-Algebra versteht man eine Quasi-Bi-Algebra $(A, \Delta, \epsilon, \Phi)$ mit α, $\beta \in A$ und einem Antihomomorphismus S (Antipode) von A, so daß

$$
\sum_i S(b_i)\alpha c_i = \epsilon(a)\alpha, \quad \sum_i b_i \beta S(c_i) = \epsilon(a)\beta, \qquad (3.7)
$$

für $a \in A$ mit $\Delta(a) = \sum_i b_i \otimes c_i$, und

$$
\sum_i X_i \beta S(Y_i) \alpha Z_i = 1, \quad \text{mit } \Phi = \sum_i X_i \otimes Y_i \otimes Z_i, \qquad (3.8)
$$

$$\sum_j S(P_j)\alpha Q_j \beta S(R_j) \;=\; 1, \quad \text{mit } \Phi^{-1} = \sum_j P_j \otimes Q_j \otimes R_j. \tag{3.9}$$

Der Twist ist wie im Quasi-Bi-Algebra-Fall definiert, und die Eigenschaft Quasi-Hopf bleibt unter einem Twist erhalten.

Eine Quasi-Hopf-Algebra $(A, \Delta, \epsilon, \Phi)$ mit $\Phi = 1$ nennt man Hopf-Algebra. Dann ist die Co-Multiplikation co-assoziativ, d.h.,

$$(\Delta \otimes id)\Delta(a) = (id \otimes \Delta)\Delta(a), \quad a \in A. \tag{3.10}$$

Definition 3.3 Unter einer quasi-triangulären Quasi-Hopf-Algebra versteht man eine Menge $(A, R, \Delta, \epsilon, \Phi)$, wobei $(A, \Delta, \epsilon, \Phi)$ eine Quasi-Hopf-Algebra und $R \in A \otimes A$ ein invertierbares Element ist, so daß

$$\begin{aligned} \Delta'(a) &= R\Delta(a)R^{-1}, \quad a \in A, && (3.11)\\ (\Delta \otimes id)R &= \Phi_{321} R_{13} \Phi_{132}^{-1} R_{23} \Phi_{123}, && (3.12)\\ (id \otimes \Delta)R &= \Phi_{231}^{-1} R_{13} \Phi_{213} R_{12} \Phi_{123}^{-1}, && (3.13) \end{aligned}$$

mit $\Delta'(a) = \sigma \circ \Delta(a)$, wobei σ die Permutationsabbildung

$$\begin{aligned} \sigma : A \otimes A &\rightarrow A \otimes A, && (3.14)\\ a \otimes b &\rightarrow b \otimes a, \quad a, b \in A && (3.15) \end{aligned}$$

ist. Außerdem wurde folgende Notation für ein Element $B \in A^{\otimes N}$ eingeführt: Sei

$$B_{12\ldots N} = \sum_i b_i^1 \otimes b_i^2 \otimes \ldots \otimes b_i^N, \tag{3.16}$$

dann ist

$$B_{\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(N)} = \sum_i b_i^{\sigma(1)} \otimes b_i^{\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes b_i^{\sigma(N)}, \tag{3.17}$$

wobei $\sigma \in S_N$ eine Permutation der Indizes $1 \ldots N$ ist. Ist z.B. $R = \sum_i a_i \otimes b_i$, dann ist $R_{23} = \sum_i 1 \otimes a_i \otimes b_i$ und $R_{21} = \sum_i b_i \otimes a_i$.
Eine quasi-trianguläre Quasi-Hopf-Algebra heißt triangulär, wenn $R_{21}R_{12} = 1$.

Das Verhalten einer quasi-triangulären Quasi-Hopf-Algebra unter einem Twist ist genauso wie im Fall einer Quasi-Hopf-Algebra definiert, ergänzt durch die Definition des getwisteten Operators $\tilde{R}$:

$$\tilde{R}_{12} = F_{21} R_{12} F_{12}^{-1}. \tag{3.18}$$

Die Eigenschaft quasi-triangulär bzw. triangulär Quasi-Hopf bleibt hierbei unter einem Twist erhalten.

Im Fall $\Phi = 1$ erhält man entsprechend eine quasi-trianguläre bzw. trianguläre Hopf-Algebra. Dann erfüllt der Operator R die Yang-Baxter-Gleichung ohne Spektralparameter:

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12}. \tag{3.19}$$

Hiermit hat man die Verbindung zu integrablen Modellen hergestellt: Quasi-trianguläre Hopf-Algebren liefern auf natürliche Weise Lösungen zur Yang-Baxter-Gleichung.

Das für uns entscheidende Theorem von Drinfel'd ist das folgende:

Theorem: Jede trianguläre quasi-Hopf Quanten-Universelle-Einhüllende-Algebra über $k[[h]]$ läßt sich durch einen geeigneten Twist in die Form $R = 1$ und $\Phi = 1$ bringen, wobei $k[[h]]$ die formalen Potenzreihen in h mit Koeffizienten aus k bezeichnet.

Nach (3.18) bedeutet $\tilde{R} = 1$, daß die deformierte Co-Multiplikation $\tilde{\Delta}$ co-kommutativ ist, und der ursprüngliche Operator R dann faktorisiert, d.h., er ist gegeben durch:

$$R_{12} = F_{21}^{-1} F_{12}. \tag{3.20}$$

Im folgenden Unterkapitel wird gezeigt, daß diese Faktorisierung von R zu einer vollkommen symmetrischen Darstellung der Monodromiematrixelemente führt.

Das Beweisprinzip dieser Faktorisierungseigenschaft kann man sich am Beispiel einer triangulären Hopf-Algebra folgendermaßen veranschaulichen [21, 22]:
Man betrachtet den quasiklassischen Limes $h \to 0$ von R, d.h., $R = 1 + rh + O(h^2)$, wobei $r \in g \otimes g$ und g eine Lie-Algebra ist, und r die klassische Yang-Baxter-Gleichung

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0 \tag{3.21}$$

mit $r_{12} + r_{21} = 1$ erfüllt. Untersucht man, unter welchen Bedingungen eine Lösung r der klassischen Yang-Baxter-Gleichung quantisierbar ist, so erhält man wegen der Forderung nach der Assoziativität des Produktes in der quantisierten Algebra, daß ein $F = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} F_i h^i$ mit $F_i \in Ug \otimes Ug$, wobei Ug die Universelle Einhüllende von g ist, existieren muß, für das gilt:

$$F(x+y,z)F(x,y) = F(x,y+z)F(y,z), \quad F(x,0) = F(0,x) = 1. \tag{3.22}$$

$F(x,y)$ bedeutet hierbei F, geschrieben als Polynom in den Basen $\{x_\mu\}$ mit $[x_\lambda, x_\mu] = c^\nu_{\lambda\mu} x_\nu$ und $\{y_\mu\}$ mit $[y_\lambda, y_\mu] = c^\nu_{\lambda\mu} y_\nu$ von g mit $[x_\lambda, y_\mu] = 0$.
Die Gleichung (3.22) ist invariant unter Transformationen der Form:

$$\tilde{F}(x,y) = f(x+y)F(x,y)f(x)^{-1}f(y)^{-1}, \quad f(0) = 1, \tag{3.23}$$

mit $f = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} f_i h^i$ und $f_i \in Ug$.
Die Koeffizienten F_i der Potenzreihe von F berechnet man sukzessive aus der Assoziativitätsbedingung (3.22) für jede Lösung r der klassischen Yang-Baxter-Gleichung (3.21) in Form einer Störungsrechnung bzgl. des Parameters h. Bis zur ersten Ordnung in h ergibt sich z.B. $F(r) = 1 + \frac{1}{2} r h + O(h^2)$.
Die quantisierte Lösung zu r erhält man dann durch die Definition

$$R(x,y) = F(y,x)^{-1} F(x,y), \tag{3.24}$$

wobei dieses R wegen (3.22) die Yang-Baxter-Gleichung

$$R(x,y)R(x,z)R(y,z) = R(y,z)R(x,z)R(x,y) \tag{3.25}$$

erfüllt, und R unitär ist, d.h., $R(x,y)R(y,x) = 1$. Außerdem ist $R = 1 + rh + \sum_{i=2}^{\infty} R_i h^i$, so daß R im quasiklassischen Limes tatsächlich r ergibt.
Damit folgt also die Faktorisierungseigenschaft von R aus der Quantisierbarkeit von r.

3.2 Darstellungen von Drinfeld-Twists: F-Matrizen

Geht man über zu den Darstellungen der Algebren, so erhält man das Konzept einer faktorisierenden F-Matrix:

Sei R eine Matrix, welche die Yang-Baxter-Gleichung

$$R_{12}(\lambda_1,\lambda_2)R_{13}(\lambda_1,\lambda_3)R_{23}(\lambda_2,\lambda_3) = R_{23}(\lambda_2,\lambda_3)R_{13}(\lambda_1,\lambda_3)R_{12}(\lambda_1,\lambda_2) \tag{3.26}$$

erfüllt und unitär ist

$$R_{21}(\lambda_2,\lambda_1)R_{12}(\lambda_1,\lambda_2) = 1. \tag{3.27}$$

Dann ist eine faktorisierende F-Matrix definiert durch

$$R_{12}(\lambda_1,\lambda_2) = F_{21}^{-1}(\lambda_2,\lambda_1)F_{12}(\lambda_1,\lambda_2). \tag{3.28}$$

Diese Überlegungen sollen nun für ein N-faches Tensorprodukt von Räumen verallgemeinert werden. Aus den schon bekannten Definitionen des Lax-Operators

$$L_i(\lambda, z_i) = R_{0i}(\lambda, z_i) \tag{3.29}$$

und der Monodromiematrix

$$T_{0,1\ldots N}(\lambda; z_1,\ldots,z_N) = L_N(\lambda, z_N)\cdots L_1(\lambda, z_1) \tag{3.30}$$

erhält man zusammen mit (3.26) die folgende Gleichung für die Monodromiematrix im Fall eines Tensorproduktes von zwei Räumen:

$$R_{12}(z_1,z_2)T_{0,12}(\lambda; z_1,z_2) = T_{0,21}(\lambda; z_2,z_1)R_{12}(z_1,z_2), \tag{3.31}$$

wobei

$$T_{0,21}(\lambda; z_2,z_1) = L_1(\lambda,z_1)L_2(\lambda,z_2). \tag{3.32}$$

Gleichung (3.31) läßt sich direkt auf ein N-faches Tensorprodukt von Räumen verallgemeinern:

$$R^{\sigma}_{1\ldots N}(z_1,\ldots,z_N)T_{0,1\ldots N}(\lambda; z_1,\ldots,z_N) = T_{0,\sigma(1)\ldots\sigma(N)}(\lambda; z_{\sigma(1)},\ldots,z_{\sigma(N)})R^{\sigma}_{1\ldots N}(z_1,\ldots,z_N), \tag{3.33}$$

$$\text{mit}\quad T_{0,\sigma(1)\ldots\sigma(N)}(\lambda; z_{\sigma(1)},\ldots,z_{\sigma(N)}) = L_{\sigma(N)}(\lambda, z_{\sigma(N)})\cdots L_{\sigma(1)}(\lambda, z_{\sigma(1)}). \tag{3.34}$$

Hierbei ist σ ein Element der Permutationsgruppe S_N, und $R^{\sigma}_{1\ldots N}(z_1,\ldots,z_N)$ bezeichnet ein Produkt von elementaren R-Matrizen (3.26), so daß die Permutation σ in elementare Transpositionen zerlegt wird.

Die Gleichung (3.33) impliziert die folgende Verknüpfungsregel

$$R^{\sigma'\sigma}_{1\ldots N}(z_1,\ldots,z_N) = R^{\sigma}_{\sigma'(1)\ldots\sigma'(N)}(z_{\sigma'(1)},\ldots,z_{\sigma'(N)})R^{\sigma'}_{1\ldots N}(z_1,\ldots,z_N) \tag{3.35}$$

für zwei Elemente σ und σ' aus S_N (Man beachte, daß sich (3.35) in der Reihenfolge der Permutationen im Vergleich zu [5] unterscheidet.).

Ein faktorisierender Drinfel'd Twist ist dann gegeben durch eine invertierbare Matrix F, welche die R-Matrix nach der folgenden Vorschrift faktorisiert:

$$F_{\sigma(1)\ldots\sigma(N)}(z_{\sigma(1)},\ldots,z_{\sigma(N)})R^{\sigma}_{1\ldots N}(z_1,\ldots,z_N) = F_{1\ldots N}(z_1,\ldots,z_N), \tag{3.36}$$

für jedes $\sigma \in S_N$.

Die Lösung dieser Gleichung ist nicht eindeutig. Eine andere Matrix $\tilde{F}$, welche ebenfalls die Gleichung (3.36) löst und invertierbar ist, unterscheidet sich von der Lösung F durch eine reguläre, vollständig symmetrische Matrix [5],

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{1\dots N}(z_1,\dots,z_N) &= X_{1\dots N}(z_1,\dots,z_N)F_{1\dots N}(z_1,\dots,z_N), &(3.37)\\ X_{1\dots N}(z_1,\dots,z_N) &= X_{\sigma(1)\dots\sigma(N)}(z_{\sigma(1)},\dots,z_{\sigma(N)}) \ \ \forall\sigma\in S_N\,. &(3.38)\end{aligned}$$

Man sieht leicht, daß $\tilde{F}$ die Faktorisierungseigenschaft (3.36) erfüllt, falls sie für F gilt. Andererseits hat man, wenn sowohl $\tilde{F}$ als auch F (3.36) lösen,

$$F^{-1}_{\sigma(1)\dots\sigma(N)}F_{1\dots N} = \tilde{F}^{-1}_{\sigma(1)\dots\sigma(N)}\tilde{F}_{1\dots N}, \tag{3.39}$$

und daher

$$F_{1\dots N}\tilde{F}^{-1}_{1\dots N} = F_{\sigma(1)\dots\sigma(N)}\tilde{F}^{-1}_{\sigma(1)\dots\sigma(N)}. \tag{3.40}$$

Somit folgt, daß

$$X_{1\dots N} = F_{1\dots N}\tilde{F}^{-1}_{1\dots N} \tag{3.41}$$

regulär und vollständig symmetrisch ist und $\tilde{F}$ in F transformiert, d.h., $X_{1\dots N}\tilde{F}_{1\dots N} = F_{1\dots N}$.

In den folgenden Kapiteln wird, wie oben bereits angedeutet, die explizite Abhängigkeit der Operatoren von den Parametern nicht immer angegeben werden, da sie bereits aus der Notation heraus folgt.

Zur Monodromiematrix $\tilde{T}_{0,1\dots N}(\lambda; z_1,\dots,z_N)$ in der F-Basis gelangt man durch die Transformation

$$\tilde{T}_{0,1\dots N}(\lambda; z_1,\dots,z_N) = F_{1\dots N}(z_1,\dots,z_N)T_{0,1\dots N}(\lambda; z_1,\dots,z_N)F^{-1}_{1\dots N}(z_1,\dots,z_N). \tag{3.42}$$

Das Verhalten der transformierten Monodromiematrix $\tilde{T}$ unter Permutationen ergibt sich dann aus (3.33) durch Multiplikation mit $F_{\sigma(1)\dots\sigma(N)}$ von links und $F^{-1}_{1\dots N}$ von rechts:

$$\begin{aligned}&F_{1\dots N}(z_1,\dots,z_N)T_{0,1\dots N}(\lambda; z_1,\dots,z_N)F^{-1}_{1\dots N}(z_1,\dots,z_N)\\ =\ &F_{\sigma(1)\dots\sigma(N)}(z_{\sigma(1)},\dots,z_{\sigma(N)})T_{0,\sigma(1)\dots\sigma(N)}(\lambda; z_{\sigma(1)},\dots,z_{\sigma(N)})F^{-1}_{\sigma(1)\dots\sigma(N)}(z_{\sigma(1)},\dots,z_{\sigma(N)}).\end{aligned} \tag{3.43}$$

Damit erhält man für die Monodromiematrix in der F-Basis:

$$\tilde{T}_{0,\sigma(1)\ldots\sigma(N)}(\lambda; z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(N)}) = \tilde{T}_{0,1\ldots N}(\lambda; z_1, \ldots, z_N). \tag{3.44}$$

Somit ist $\tilde{T}$ invariant unter jeder gleichzeitigen Permutation der Gitterplätze i und der entsprechenden Inhomogenitätsparameter z_i.

Die Tatsache, daß die F-Basis eine vollständig symmetrische Darstellung der Monodromiematrixelemente im Algebraischen Bethe-Ansatz erlaubt, ist der Hauptgrund für die Vereinfachung der Rechnungen bzgl. der Bethe-Wellenfunktionen in den späteren Kapiteln.

4 Die F-Matrix und ihr Inverses

Motiviert durch die Ausführungen im vorherigen Kapitel, soll nun eine faktorisierende F-Matrix für das rationale $sl(n)$-Modell explizit angegeben werden. In [5] wurde solch ein Drinfel'd Twist für die elementare $sl(2)$-R-matrix konstruiert:

$$R_{12} = F_{21}^{-1} F_{12}.$$

F_{12} ist dabei durch die folgende Dreiecksmatrix gegeben:

$$F_{12} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(z_1 - z_2) & b(z_1 - z_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Verallgemeinert man diesen Ausdruck auf den $sl(n)$-Fall, so erhält man:

$$F_{12} = \sum_{n \geq \alpha_2 \geq \alpha_1} P_{\alpha_1}^1 P_{\alpha_2}^2 \, \mathbb{1}_{12} + \sum_{n \geq \alpha_1 > \alpha_2} P_{\alpha_1}^1 P_{\alpha_2}^2 R_{12}^{21}\,. \tag{4.2}$$

$[P_\alpha^i]_{k,l} = \delta_{k,\alpha}\delta_{l,\alpha}$ ist hierbei der Projektor auf die α-te Komponente und wirkt im Raum i.

Die Verallgemeinerung dieser speziellen F-Matrix auf den Fall mit N Plätzen muß dann nach den Erläuterungen im vorherigen Kapitel drei Bedingungen erfüllen:

A. Faktorisierung (3.36), d.h., es muß

$$F_{\sigma(1)\ldots\sigma(N)}(z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(N)}) R_{1\ldots N}^{\sigma}(z_1, \ldots, z_N) = F_{1\ldots N}(z_1, \ldots, z_N) \tag{4.3}$$

für jede Permutation $\sigma \in S_N$ gelten;

B. sie muß eine untere Dreiecksmatrix sein;

C. sie muß regulär sein.

Satz 4.1 Der folgende Ausdruck für F erfüllt diese Anforderungen:

$$F_{1\ldots N} = \sum_{\sigma \in S_N} \sum_{\alpha_{\sigma(1)} \ldots \alpha_{\sigma(N)}}^{*} \prod_{i=1}^{N} P_{\alpha_{\sigma(i)}}^{\sigma(i)} R_{1\ldots N}^{\sigma}(z_1, \ldots, z_N)\,. \tag{4.4}$$

Die Summe $\sum^*$ läuft hierbei über Folgen von Indizes α_i, welche den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} \alpha_{\sigma(i+1)} &\geq \alpha_{\sigma(i)} \quad \text{für} \quad \sigma(i+1) > \sigma(i) \\ \alpha_{\sigma(i+1)} &> \alpha_{\sigma(i)} \quad \text{für} \quad \sigma(i+1) < \sigma(i) \quad , \end{aligned} \tag{4.5}$$

d.h., das Gleichheitszeichen gilt immer dann, wenn die betrachteten Plätze nach der Permutation σ immer noch in der ursprünglichen Reihenfolge zueinander stehen.

Beweis Die untere Dreiecksgestalt von F folgt direkt aus der Ordnungsvorschrift (4.5). Die Regularität ergibt sich aus der Dreiecksform und dem Nichtverschwinden der Diagonalelemente. In der Proposition 4.2 wird F^{-1} aber noch explizit angegeben werden.
Zum Beweis der Faktorisierungseigenschaft zerlegt man die Permutation σ in elementare Transpositionen σ_i:

$$\sigma = \sigma_1 ... \sigma_k .$$

Hierbei ist σ_i die Transposition der Plätze i und $i+1$.
Zerlegt man nun hiermit R^σ nach (3.35) und $F_{\sigma(1)...\sigma(N)}$ ebenfalls in elementare Transpositionen, so erhält man (4.4)

$$\begin{aligned} & F_{\sigma(1)...\sigma(N)}\ R^\sigma_{1...N} = \\ &= F_{\sigma_1\sigma_2...\sigma_k(1,...,N)}\ R^{\sigma_k}_{\sigma_1\sigma_2...\sigma_{k-1}(1,...,N)}\ R^{\sigma_{k-1}}_{\sigma_1\sigma_2...\sigma_{k-2}(1,...,N)} \cdots R^{\sigma_1}_{1...N} \\ &= F_{\sigma_1\sigma_2...\sigma_{k-1}(1,...,N)}\ R^{\sigma_{k-1}}_{\sigma_1\sigma_2...\sigma_{k-2}(1,...,N)}\ R^{\sigma_{k-2}}_{\sigma_1\sigma_2...\sigma_{k-3}(1,...,N)} \cdots R^{\sigma_1}_{1...N} \\ &= \ldots\ldots\ldots = F_{\sigma_1(1,...,N)}\ R^{\sigma_1}_{1...N} \ = \ F_{1...N}. \end{aligned}$$

Somit muß die Faktorisierungseigenschaft **A** nur noch für elementare Transpositionen σ_i gezeigt werden, d.h., man betrachtet $F_{1...i+1\, i...N} R^{\sigma_i}_{1...N}$. Mit Hilfe der Gleichungen (4.4) und (3.35) ergibt sich hierfür:

$$\begin{aligned} F_{1...i+1\, i...N} R^{\sigma_i}_{1...N} &= F_{\sigma_i(1...i\, i+1...N)} R^{\sigma_i}_{1...N} \\ &= \sum_{\sigma\in S_N} \sum_{\alpha_{\sigma_i\sigma(1)}...\alpha_{\sigma_i\sigma(N)}}^{*(i)} \prod_{j=1}^{N} P^{\sigma_i\sigma(j)}_{\alpha_{\sigma_i\sigma(j)}} R^\sigma_{\sigma_i(1,...,N)} R^{\sigma_i}_{1...N} \\ &= \sum_{\sigma\in S_N} \sum_{\alpha_{\sigma_i\sigma(1)}...\alpha_{\sigma_i\sigma(N)}}^{*(i)} \prod_{j=1}^{N} P^{\sigma_i\sigma(j)}_{\alpha_{\sigma_i\sigma(j)}} R^{\sigma_i\sigma}_{1...N}\,, \end{aligned} \tag{4.6}$$

wobei die Summe $\sum^{*(i)}$ nun durch die Bedingungen

$$\begin{aligned} \alpha_{\sigma_i\sigma(j+1)} \geq \alpha_{\sigma_i\sigma(j)} \quad & \text{für} \quad \sigma(j+1) > \sigma(j) \\ \alpha_{\sigma_i\sigma(j+1)} > \alpha_{\sigma_i\sigma(j)} \quad & \text{für} \quad \sigma(j+1) < \sigma(j) \end{aligned} \tag{4.7}$$

definiert ist, da die Ordnungsvorschrift (4.5) auf die bereits permutierten Plätze $\widetilde{j} = \sigma_i(j)$ bezogen ausgeführt wird. Die Ersetzung $\tilde\sigma = \sigma_i\sigma$ in (4.6) liefert

$$F_{1...i+1\, i...N} R^{\sigma_i}_{1...N} = \sum_{\tilde\sigma\in S_N} \sum_{\alpha_{\tilde\sigma(1)}...\alpha_{\tilde\sigma(N)}}^{*} \prod_{j=1}^{N} P^{\tilde\sigma(j)}_{\alpha_{\tilde\sigma(j)}} R^{\tilde\sigma}_{1...N} \tag{4.8}$$

mit der Summationsvorschrift in $\sum^*$

$$\begin{aligned}\alpha_{\tilde{\sigma}(j+1)} &\geq \alpha_{\tilde{\sigma}(j)} \quad \text{für} \quad \sigma_i\tilde{\sigma}(j+1) > \sigma_i\tilde{\sigma}(j) \\ \alpha_{\tilde{\sigma}(j+1)} &> \alpha_{\tilde{\sigma}(j)} \quad \text{für} \quad \sigma_i\tilde{\sigma}(j+1) < \sigma_i\tilde{\sigma}(j) \quad .\end{aligned} \tag{4.9}$$

Die Vorschriften (4.5) und (4.9) führen zum selben Ergebnis, wenn $\sigma^{-1}(i)$ und $\sigma^{-1}(i+1)$ nicht benachbart sind. Sind sie benachbart, d.h., es ist

$$\sigma^{-1}(i) = \sigma^{-1}(i+1) \pm 1\,, \tag{4.10}$$

so gibt es keinen Unterschied zwischen (4.9) und (4.5), wenn das strikte Ungleichheitszeichen in den Vorschriften gilt. Im Falle der Gleichheit von zwei Indizes, d.h., $\alpha_{\sigma_{\tilde{j+1}}} = \alpha_{\tilde{\sigma_j}}$, hat nun aber wegen

$$P^i_\alpha P^j_\alpha R_{ij} = P^i_\alpha P^j_\alpha \mathbb{1}_{ij} \tag{4.11}$$

die zusätzliche Transposition σ_i in (4.8) im Vergleich zu (4.4) keinen Effekt, so daß beide Ausdrücke übereinstimmen.
Somit ist auch die Eigenschaft **A** bewiesen.

Zur Berechnung von F^{-1} benötigt man nun den

Satz 4.2 Für den Operator F^* definiert durch

$$F^*_{1\ldots N} = \sum_{\sigma\in S_N} \sum^{**}_{\alpha_{\sigma(1)}\ldots\alpha_{\sigma(N)}} R^{(t)\,\sigma}_{1\ldots N}(z_1,\ldots,z_N) \prod_{i=1}^{N} P^{\sigma(i)}_{\alpha_{\sigma(i)}} \tag{4.12}$$

mit der Abkürzung

$$R^{(t)\,\sigma}_{1\ldots N} \equiv R^{\sigma^{-1}}_{\sigma(1,\ldots,N)}, \tag{4.13}$$

während die Summe in $\sum^{**}$ ausgeführt wird über alle α_i, welche die folgenden Bedingungen erfüllen

$$\begin{aligned}\alpha_{\sigma(i+1)} &\leq \alpha_{\sigma(i)} \quad \text{für} \quad \sigma(i+1) < \sigma(i) \\ \alpha_{\sigma(i+1)} &< \alpha_{\sigma(i)} \quad \text{für} \quad \sigma(i+1) > \sigma(i) \quad ,\end{aligned} \tag{4.14}$$

gilt folgende Beziehung:

$$F_{1\ldots N} F^*_{1\ldots N} = \prod_{i<j} \Delta_{ij}, \tag{4.15}$$

wobei die Diagonalmatrix

$$[\Delta_{ij}]^{\beta_i,\beta_j}_{\alpha_i,\alpha_j} = \delta_{\alpha_i\beta_i}\delta_{\alpha_j\beta_j}\begin{cases} 1 & \text{für } \alpha_i = \alpha_j, \\ b_{ij} & \text{für } \alpha_i > \alpha_j, \\ b_{ji} & \text{für } \alpha_j > \alpha_i \end{cases} \tag{4.16}$$

in den Räumen i und j wirkt.

Beweis Setzt man in dem Produkt $F_{1\ldots N}F^*_{1\ldots N}$ die Ausdrücke (4.4) und (4.12) für F und F^* ein und verwendet (3.35), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} F_{1\ldots N}F^*_{1\ldots N} &= \sum_{\sigma\in S_N}\sum_{\sigma'\in S_N}\sum^{*}_{\alpha_{\sigma(1)}\ldots\alpha_{\sigma(N)}}\sum^{**}_{\beta_{\sigma'(1)}\ldots\beta_{\sigma'(N)}}\prod_{i=1}^{N}P^{\sigma(i)}_{\alpha_{\sigma(i)}}R^{\sigma}_{1\ldots N}R^{\sigma'^{-1}}_{\sigma'(1)\ldots\sigma'(N)}\prod_{i=1}^{N}P^{\sigma'(i)}_{\beta_{\sigma'(i)}} \\ &= \sum_{\sigma\in S_N}\sum_{\sigma'\in S_N}\sum^{*}_{\alpha_{\sigma(1)}\ldots\alpha_{\sigma(N)}}\sum^{**}_{\beta_{\sigma'(1)}\ldots\beta_{\sigma'(N)}}\prod_{i=1}^{N}P^{\sigma(i)}_{\alpha_{\sigma(i)}}R^{\sigma'^{-1}\sigma}_{\sigma'(1,\ldots,N)}\prod_{i=1}^{N}P^{\sigma'(i)}_{\beta_{\sigma'(i)}} \qquad (4.17) \\ &= \sum_{\sigma\in S_N}\sum^{*}_{\alpha_{\sigma(1)}\ldots\alpha_{\sigma(N)}}\prod_{i=1}^{N}P^{\sigma(i)}_{\alpha_{\sigma(i)}}R^{\overline{\sigma}}_{\sigma(N,\ldots,1)}\prod_{i=1}^{N}P^{\sigma(i)}_{\alpha_{\sigma(i)}}. \qquad (4.18) \end{aligned}$$

Die Permutation $\overline{\sigma}$ kehrt hierbei die Reihenfolge der Indizes um:

$$\overline{\sigma}(1,\ldots,N) = (N,\ldots,1).$$

Um von (4.17) zu (4.18) zu gelangen, betrachtet man das in (4.17) entstandene Matrixelement

$$\left(R^{\sigma'^{-1}\sigma}_{\sigma'(1,\ldots,N)}\right)^{\alpha_{\sigma(N)}\ldots\alpha_{\sigma(1)}}_{\beta_{\sigma'(N)}\ldots\beta_{\sigma'(1)}}.$$

Ein entsprechendes Matrixelement der elementaren R-Matrizen (2.5)

$$(R_{ij})^{\alpha_i\alpha_j}_{\beta_i\beta_j} \tag{4.19}$$

verschwindet nur dann nicht, wenn $\alpha_i = \beta_i$ und $\alpha_j = \beta_j$ oder $\alpha_i = \beta_j$ und $\alpha_j = \beta_i$ ist. Da $R^{\sigma'^{-1}\sigma}_{\sigma'(1,\ldots,N)}$ aus elementaren R-Matrizen aufgebaut ist, verschwindet das Matrixelement (4.19) somit nur dann nicht, wenn die oberen und unteren Indizes durch eine Permutation miteinander verknüpft sind. Weil die $\alpha_{\sigma(i)}$ wegen (4.5) eine nicht-abnehmende Folge und die $\beta_{\sigma'(i)}$ wegen (4.14) eine nicht-zunehmende Folge bilden, hat man daher als Bedingung für das Nichtverschwinden des Elements (4.19)

$$\beta_{\sigma'(N)} = \alpha_{\sigma(1)},\ \ldots,\ \beta_{\sigma'(1)} = \alpha_{\sigma(N)}. \tag{4.20}$$

Desweiteren muß außerdem

$$\sigma\,\bar{\sigma} = \sigma' \tag{4.21}$$

gelten, damit $\left(R^{\sigma'^{-1}\sigma}_{\sigma'(1,\dots,N)}\right)^{\alpha_{\sigma(N)}\cdots\alpha_{\sigma(1)}}_{\beta_{\sigma'(N)}\cdots\beta_{\sigma'(1)}}$ einen Beitrag liefert. Dies macht man sich leicht klar im Fall, daß alle $\beta_{\sigma'(i)}$ (und damit auch alle $\alpha_{\sigma(i)}$) verschieden voneinander sind. Wäre $\sigma'(N)$ nicht gleich $\sigma(1)$, sondern stattdessen gleich einem $\sigma(x)$ mit $x > 1$, so könnte wegen (4.19) $\beta_{\sigma'(N)} = \alpha_{\sigma(1)}$ nicht mehr erfüllt werden, da $R^{\sigma'^{-1}\sigma}_{\sigma'(1,\dots,N)}$ dann keine $R_{\sigma(x)\sigma(y)}$ mit $y < x$ enthalten würde. Somit könnte $\beta_{\sigma'(N)}$ nur noch am Platz mit dem Index $\sigma(x)$ oder links davon erscheinen. Daher muß tatsächlich $\sigma'(N) = \sigma(1)$ sein. Die Identifikation von $\sigma'(N-1)$ mit $\sigma(2)$ usw. folgt dann entsprechend.

Für den Fall, daß nicht alle $\beta_{\sigma'(i)}$ verschieden sind, gilt nun das gleiche, da die unterschiedliche Position des Gleichheitszeichens in (4.5) und (4.14) eine eindeutige Zuordnung der Räume untereinander liefert.

Aus (4.18) wird deutlich, daß FF^* eine Diagonalmatrix ist. Mit

$$R^{\overline{\sigma}}_{\sigma(N,\dots,1)} = \prod_{i<j} R_{\sigma(i)\sigma(j)} \tag{4.22}$$

wird man dann direkt zu dem Ausdruck (4.16) geführt. Jedes Δ_{ij} hat dabei seinen Ursprung in einem R_{ij} aus (4.22).

Somit ist der Satz 4.2 bewiesen.

Aus (4.15) erhält man damit den Ausdruck für $F^{-1}_{1\dots N}$:

$$F^{-1}_{1\dots N} = F^*_{1\dots N} \prod_{i<j} \Delta^{-1}_{ij}. \tag{4.23}$$

Im Falle des $sl(2)$-Yangian entspricht (4.23) dem Resultat von Satz 4.6 in [5].

5 Die sl(n)-Generatoren und die Monodromiematrix in der F-Basis

In diesem Kapitel werden zuerst die einfachen Wurzeln der $sl(n)$-Algebra in der F-Basis $\tilde{E}_{\alpha,\alpha\pm1} = F_{1\ldots N} E_{\alpha,\alpha\pm1} F^{-1}_{1\ldots N}$ berechnet. Hieraus erhält man dann durch Mehrfachkommutatoren auch die nichteinfachen Wurzeln $\tilde{E}_{\alpha,n}$. Danach folgt die Berechnung des Monodromiematrix-elements $\tilde{T}_{nn} = F_{1\ldots N} T_{nn} F^{-1}_{1\ldots N}$. Wegen der $sl(n)$ Invarianz der Monodromiematrix (2.30) ist es dann möglich, aus diesem Element über die Beziehung (2.34) in der F-Basis

$$\tilde{T}_{n\alpha} = \left[\tilde{E}_{\alpha,n}, \tilde{T}_{nn}\right] \tag{5.1}$$

alle anderen spektrumerzeugenden Operatoren $\tilde{T}_{n\alpha}$ zu erhalten, d.h., alle Operatoren, die in der Bethe-Wellenfunktion erscheinen.

Die einfachen Wurzeln in der neuen Basis unterscheiden sich von denen in der ursprünglichen Basis nur durch ein zusätzliches diagonales Dressing, d.h., es gilt der

Satz 5.1

$$\tilde{E}_{\gamma,\gamma\pm1} = \sum_{i=1}^{N} E^{(i)}_{\gamma,\gamma\pm1} \otimes_{j\neq i} G^{\pm\gamma}(i,j)_{[j]}\,, \tag{5.2}$$

wobei

$$G^{\gamma}(i,j)_{k,l} = \delta_{kl} \begin{cases} b^{-1}_{ij} & \text{if } k=\gamma, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}\,,$$

$$G^{-\gamma}(i,j)_{k,l} = \delta_{kl} \begin{cases} b^{-1}_{ji} & \text{if } k=\gamma, \\ 1 & \text{sonst .} \end{cases}\,, \tag{5.3}$$

mit $b_{ij} = b(z_i - z_j)$.

Beweis Man erhält wegen $\tilde{E}_{\gamma,\gamma\pm1} = F_{1\ldots N} E_{\gamma,\gamma\pm1} F^{-1}_{1\ldots N}$

$$\tilde{E}_{\gamma,\gamma\pm1} = \sum_{\sigma\in S_N} \sum_{\sigma'\in S_N} \sum^{*}_{\alpha_{\sigma(1)}\ldots\alpha_{\sigma(N)}} \sum^{**}_{\beta_{\sigma'(1)}\ldots\beta_{\sigma'(N)}} \prod_{i=1}^{N} P^{\sigma(i)}_{\alpha_{\sigma(i)}} E_{\gamma,\gamma\pm1} R^{\sigma'^{-1}\sigma}_{\sigma'(1,\ldots,N)} \prod_{i=1}^{N} P^{\sigma'(i)}_{\beta_{\sigma'(i)}} \prod_{i<j} \Delta^{-1}_{ij}\ . \tag{5.4}$$

Hierbei wurde die $sl(n)$-Invarianz von R^{σ}

$$[R^{\sigma}_{1\ldots N}, E_{\alpha,\alpha\pm1}] = 0 \tag{5.5}$$

benutzt, welche direkt aus der Invarianz der elementaren R-Matrizen (2.28) folgt. Kommutiert man in (5.4) $E_{\gamma,\gamma\pm1}$ an den Projektoren $P^{\sigma(i)}_{\alpha_{\sigma(i)}}$ vorbei, so erzeugt man wegen

$$P^{i}_{\gamma} E^{i}_{\gamma,\gamma\pm1} = E^{i}_{\gamma,\gamma\pm1} P^{i}_{\gamma\pm1} \tag{5.6}$$

aus einem $P_\gamma^{\sigma(i)}$ ein $P_{\gamma\pm1}^{\sigma(i)}$. Deshalb entsprechen die $P_{\alpha_{\sigma(j)}}^{\sigma(j)}$ nicht mehr der Summationsvorschrift (4.5), d.h., man kannt nicht direkt die Logik des Schrittes von Gleichung (4.17) zu (4.18) im Beweis des Satzes 4.2 anwenden. R^σ muß zuerst durch Einfügen von entsprechenden elementaren R-Matrizen nach

$$\mathbb{1}_{ij} = b_{ij}^{-1} R_{ij} - \frac{c_{ij}}{b_{ij}} P_{ij} \tag{5.7}$$

($(P_{ij})_{\beta_i\beta_j}^{\alpha_i\alpha_j} = \delta_{\alpha_i\beta_j}\delta_{\alpha_j\beta_i}$ ist der Permutationsoperator in den Räumen i und j) korrigiert werden, d.h., man muß den Platz $\sigma(i)$ im Fall $\gamma+1$ nach oben bis zum ersten $\alpha_{\sigma(j)} = \gamma+1$ und im Fall $\gamma-1$ nach unten bis zum ersten $\alpha_{\sigma(j)} = \gamma-1$ kommutieren. Dies ergibt im ersten Fall ein $R_{\sigma(i)\sigma(j)}$ und im zweiten Fall ein $R_{\sigma(j)\sigma(i)}$. Konzentriert man sich nun für eine feste Anzahl Indizes $\alpha_{\sigma(j)} = \gamma$ auf den Platz $\sigma(i)$ mit der maximal notwendigen Anzahl von Vertauschungen, so erkennt man, daß der zweite Term in (5.7) wegen

$$E_{a,b}^i P_j^a P_{ij} = E_{a,b}^j P_i^a \tag{5.8}$$

nur Wurzeln $E_{\gamma,\gamma\pm1}^{\sigma(j)}$ erzeugen kann, wobei $j \neq i$. Ein Term mit $E_{\gamma,\gamma\pm1}^{\sigma(i)}$ ergibt sich also nur, wenn man den ersten Term in (5.7) benutzt. Man erhält deshalb für den Fall $\gamma+1$ ein Produkt $\prod_{i<j} b_{\sigma(i)\sigma(j)}^{-1}$ und für den Fall $\gamma-1$ ein Produkt $\prod_{j<i} b_{\sigma(j)\sigma(i)}^{-1}$. Korrekturen in den anderen Plätzen $\sigma(j)$ können nach (5.8) kein $E_{\gamma,\gamma\pm1}^{\sigma(i)}$ mehr erzeugen, da sie keine Vertauschungen mit dem Platz $\sigma(i)$ beinhalten. Zusätzliche Änderungen sind für $E_{\gamma,\gamma\pm1}^{\sigma(i)}$ wegen (4.11) nicht mehr erforderlich. Damit hat man den zu $E_{\gamma,\gamma\pm1}^{\sigma(i)}$ gehörenden Dressing-Faktor berechnet. Wegen der Symmetrie von $\tilde{E}_{\gamma,\gamma\pm1}$ erhält man hieraus auch alle anderen Terme. Nach der Korrektur von R^σ kann man dann wie in (4.17) verfahren, wobei $\prod_{i<j} \Delta_{ij}^{-1}$ sich mit dem entstehenden $\prod_{i<j} \Delta_{ij}$ weghebt. Es verbleiben somit nur noch die zur Korrektur notwendingen b_{ij}^{-1} im Fall $\gamma+1$ und b_{ji}^{-1} im Fall $\gamma-1$, und man erhält direkt (5.3).

Im Anhang A wird explizit nachgerechnet, daß diese neuen einfachen Wurzeln $\tilde{E}_{\gamma,\gamma\pm1}$ eine Darstellung der $sl(n)$-Algebra bilden. Außerdem wird dort gezeigt, wie man aus den obigen einfachen Wurzeln die positiven nicht-einfachen Wurzeln berechnet, welche in der neuen Basis folgende Gestalt haben:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{n-\alpha,n} &= \sum_{k=1}^{\alpha} \sum_{i_1\neq\ldots\neq i_k} \prod_{\gamma=1}^{k-1} \frac{\eta}{z_{i_\gamma} - z_{i_{\gamma+1}}} \sum_{\alpha=\beta_0>\beta_1\ldots>\beta_k=0} \otimes_{l=1}^k E_{n-\beta_{l-1},n-\beta_l}^{(i_l)} \\ &\quad \otimes_{j\neq i_1\ldots i_k} \Gamma^{(j)}_{j;\underbrace{i_1..i_1}_{\beta_0-\beta_1}\underbrace{i_2..i_2}_{\beta_1-\beta_2}\ldots\underbrace{i_k..i_k}_{\beta_{k-1}-\beta_k}}, \end{aligned} \tag{5.9}$$

wobei $\Gamma_{j;i_1,\ldots,i_\alpha} = \mathrm{diag}\{1,\ldots,1,b_{i_1j}^{-1},\ldots,b_{i_\alpha j}^{-1},1\}$.

Das Element T_{nn} der Monodromiematrix hat in der neuen Basis eine besonders einfache Form:

Satz 5.2

$$\tilde{T}_{nn}(\lambda) = \otimes_{i=1}^{N} \mathrm{diag}\{b(\lambda - z_i), \ldots, b(\lambda - z_i), 1\}\,. \tag{5.10}$$

Beweis Wegen $\tilde{T}_{nn} = F_{1\ldots N} T_{nn} F_{1\ldots N}^{-1}$ betrachtet man den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} F_{1\ldots N} T_{nn} &= \sum_{\sigma \in S_N} \sum_{\alpha_{\sigma(1)}\ldots\alpha_{\sigma(N)}}^{*} \prod_{i=1}^{N} P_{\alpha_{\sigma(i)}}^{\sigma(i)} R_{1\ldots N}^{\sigma} P_n^0 T_{0,1\ldots N} P_n^0 \\ &= \sum_{\sigma \in S_N} \sum_{\alpha_{\sigma(1)}\ldots\alpha_{\sigma(N)}}^{*} \prod_{i=1}^{N} P_{\alpha_{\sigma(i)}}^{\sigma(i)} P_n^0 T_{0,\sigma(1)\ldots\sigma(N)} P_n^0 R_{1\ldots N}^{\sigma}\,. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Die Projektoren P_n^0 links und rechts der Monodromiematrix liefern hierbei das Matrixelement T_{nn}. Im zweiten Schritt in (5.11) wurde (3.33) und die Tatsache, daß $R_{1\ldots N}^{\sigma}$ mit P_n^0 kommutiert, benutzt. Im folgenden wird jetzt die Summe $\sum^*$ nach der Anzahl k des Auftretens des Index n darin zerlegt:

$$F_{1\ldots N} T_{nn} = \sum_{\sigma \in S_N} \sum_{k=0}^{N} \sum_{\alpha_{\sigma(1)}\ldots\alpha_{\sigma(N)}}^{*'} \prod_{j=N-k+1}^{N} \delta_{\alpha_{\sigma(j)},n} P_n^{\sigma_j} \prod_{j=1}^{N-k} P_{\alpha_{\sigma(j)}}^{\sigma(j)} P_n^0 T_{0,\sigma(1)\ldots\sigma(N)} P_n^0 R_{1\ldots N}^{\sigma}\,. \tag{5.12}$$

Konzentriert man sich auf nur einen Term mit beliebiger Multiplizität von n in (5.12), so erhält man:

$$\begin{aligned} &\prod_{j=1}^{N-k} P_{\alpha_{\sigma(j)}}^{\sigma(j)} \prod_{j=N-k+1}^{N} P_n^{\sigma(j)} P_n^0\, T_{0,\sigma(1)\ldots\sigma(N)}\, P_n^0 \\ = &\prod_{j=1}^{N-k} P_{\alpha_{\sigma(j)}}^{\sigma(j)} \left(R_{0,\sigma(N)}\right)_{nn}^{nn} \left(R_{0,\sigma(N-1)}\right)_{nn}^{nn} \cdots \left(R_{0,\sigma(N-k+1)}\right)_{nn}^{nn} P_n^0\, T_{0,\sigma(1)\ldots\sigma(N-k)}\, P_n^0 \prod_{j=N-k+1}^{N} P_n^{\sigma(j)} \\ = &\prod_{j=1}^{N-k} P_{\alpha_{\sigma(j)}}^{\sigma(j)} P_n^0\, T_{0,\sigma(1)\ldots\sigma(N-k)}\, P_n^0 \prod_{j=N-k+1}^{N} P_n^{\sigma(j)} \\ = &\prod_{i=1}^{N-k} \left(R_{0\sigma(i)}\right)_{n,\alpha_{\sigma(i)}}^{n,\alpha_{\sigma(i)}} \prod_{j=1}^{N-k} P_{\alpha_{\sigma(j)}}^{\sigma(j)} \prod_{j=N-k+1}^{N} P_n^{\sigma(j)} P_n^0 \\ = &\otimes_{i=1}^{N} \mathrm{diag}\{b(\lambda - z_i), \ldots, b(\lambda - z_i), 1\} \prod_{j=1}^{N-k} P_{\alpha_{\sigma(j)}}^{\sigma(j)} \prod_{j=N-k+1}^{N} P_n^{\sigma(j)} P_n^0\,. \end{aligned} \tag{5.13}$$

In den einzelnen Rechenschritten wurde zuerst wieder die Identität $P_\alpha^i P_\alpha^j R_{ij} = P_\alpha^i P_\alpha^j \mathbb{1}_{ij}$ und danach die Tatsache, daß die oberen und unteren Matrixindizes der elementaren R-Matrix durch eine Permutation auseinander hervorgehen, während $\alpha_{\sigma(i)} \neq n$ für $i \leq N-k$, benutzt. Zur letzten Zeile gelangt man dann mit $\left(R_{0\sigma(i)}\right)^{n,\alpha_{\sigma(i)}}_{n,\alpha_{\sigma(i)}} = b(\lambda - z_{\sigma(i)})$. Setzt man nun wieder die rechte Seite von (5.13) in Gleichung (5.12) ein, so ergibt sich unmittelbar (5.10).

Mit Hilfe dieses Ergebnisses und der Ausdrücke für die Wurzeln $\tilde{E}_{n-\alpha,n}$ (5.9) kann man jetzt aus (5.1) die Monodromiematrixelemente $\tilde{T}_{n\,n-\alpha}$ berechnen, welche man zur Konstruktion der Bethe-Wellenfunktionen benötigt. Durch eine einfache Rechnung erhält man:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{n\,n-\alpha} &= \sum_{k=1}^{\alpha} \sum_{i_1 \neq \ldots \neq i_k} c(\lambda - z_{i_k}) \prod_{\gamma=1}^{k-1} \frac{\eta}{z_{i_\gamma} - z_{i_{\gamma+1}}} b(\lambda - z_{i_\gamma}) \\ &\times \sum_{\alpha=\beta_0>\beta_1\ldots>\beta_k=0} \otimes_{l=1}^{k} E^{(i_l)}_{n-\beta_{l-1},n-\beta_l} \otimes_{j\neq i_1\ldots i_k} \Delta^{(j)}_{j;\underbrace{i_1..i_1}_{\beta_0-\beta_1}\underbrace{i_2..i_2}_{\beta_1-\beta_2}\ldots\underbrace{i_k..i_k}_{\beta_{k-1}-\beta_k}}, \end{aligned} \tag{5.14}$$

wobei $\Delta^{(j)}_{j;i_1,\ldots,i_\alpha} = \mathrm{diag}\{b(\lambda - z_j), \ldots, b(\lambda - z_j), b(\lambda - z_j)\, b^{-1}_{i_1 j}, \ldots, b(\lambda - z_j)\, b^{-1}_{i_\alpha j}, 1\}$ eine diagonale Dressing-Matrix ist, die im Raum j wirkt.

Aus (5.14) wird deutlich, daß die Quasiteilchen-Erzeugungsoperatoren $\tilde{T}_{n\,n-\alpha}$ in der neuen F-Basis nun polarisationsfrei sind, d.h., der Ausdruck enthält nur noch positive Wurzeln und nicht mehr Ausdrücke sich gegenseitig kompensierender positiver und negativer Wurzeln (siehe Kapitel 2.6). Diese Tatsache macht die Auflösung der Hierarchie innerhalb der Bethe-Wellenfunktionen im folgenden Kapitel erst möglich.

6 Die Bethe-Wellenfunktionen in der F-Basis

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, daß es mit Hilfe der berechneten Operatoren $\tilde{T}_{n\,n-\alpha}$ möglich ist, die $sl(n)$-Bethe-Wellenfunktionen vollständig in $sl(2)$-Komponenten zu zerlegen.

Für die weiteren Rechnungen ist die Algebra der Operatoren $\tilde{T}_{n\alpha}$ von Bedeutung. Diese erfüllen, da sie durch eine Ähnlichkeitstransformation aus den ursprünglichen Operatoren $T_{n\alpha}$ hervorgehen, die gleiche Faddeev–Zamolodchikov–Algebra wie diese Operatoren (2.88):

$$[\tilde{T}_{n\alpha}(\lambda_1), \tilde{T}_{n\alpha}(\lambda_2)] = 0,$$
$$\tilde{T}_{n\alpha}(\lambda_1)\tilde{T}_{n\beta}(\lambda_2) = \frac{1}{b(\lambda_2-\lambda_1)}\tilde{T}_{n\beta}(\lambda_2)\tilde{T}_{n\alpha}(\lambda_1) - \frac{c(\lambda_2-\lambda_1)}{b(\lambda_2-\lambda_1)}\tilde{T}_{n\beta}(\lambda_1)\tilde{T}_{n\alpha}(\lambda_2)\,. \tag{6.1}$$

Das Vakuum $\Omega_N^{(n)}$ (2.37) ist invariant unter der F-Transformation, d.h.,

$$F\,\Omega_N^{(n)} = \Omega_N^{(n)},$$

da $R_{ij}v_n^{(i)} \otimes v_n^{(j)} = v_n^{(i)} \otimes v_n^{(j)}$, und somit wegen der Projektoren nur der Term, welcher die Identität in F enthält ($\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\} = \{n, \ldots, n\}$), einen Beitrag zu $F\,\Omega_N^{(n)}$ liefert.

Damit ergibt sich für die Bethe-Wellenfunktion (2.74) in der F-Basis:

$$\tilde{\Psi}_n(N;\lambda_1,\ldots,\lambda_p) = F\Psi_n(N;\lambda_1,\ldots,\lambda_p) = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} \Phi^{(n-1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\tilde{T}_{n\alpha_1}(\lambda_1)\ldots\tilde{T}_{n\alpha_p}(\lambda_p)\,\Omega_N^{(n)}, \tag{6.2}$$

wobei $\Phi^{(n-1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ die Koordinaten der Wellenfunktion des darunterliegenden $sl(n-1)$-Problems in der ursprünglichen Basis und nicht in der F-Basis sind.
Die Bethe-Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sind im folgenden freie Parameter, d.h., sie unterliegen nicht den Einschränkungen der Bethe-Ansatz-Gleichungen (2.84).

Im $sl(2)$-Fall entspricht der hierarchische Bethe-Ansatz dem einfachen Bethe-Ansatz. Für die Erzeugungsoperatoren in Bezug auf das Vakuum $\Omega_N^{(n)}$ erhält man dann aus (5.14) das gleiche Ergebnis wie in [5]:

$$\tilde{T}_{21}(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} c(\lambda-z_i)\sigma_+^{(i)} \otimes_{j\neq i} \begin{pmatrix} b(\lambda-z_j)b_{ij}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{[j]}. \tag{6.3}$$

Setzt man diesen Ausdruck in (6.2) für den Fall $n = 2$ ein, so ergibt sich für die transformierte

$sl(2)$-Wellenfunktion:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_2(N;\lambda_1,\ldots,\lambda_p) &= \tilde{T}_{21}(\lambda_1)\ldots\tilde{T}_{21}(\lambda_p)\,\Omega_N^{(2)} \\ &= \sum_{i_1<\ldots<i_p} B_p^{(2)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_p|z_{i_1},\ldots,z_{i_p})\sigma_+^{(i_1)}\ldots\sigma_+^{(i_p)}\,\Omega_N^{(2)}\,. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Die Koeffizienten $B_p^{(2)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_p|z_{i_1},\ldots,z_{i_p})$ berechnet man, indem man die Wirkung der Spinoperatoren $\sigma_+^{(i)}$ auf die Dressing-Faktoren $\mathrm{diag}\{b(\lambda-z_j)b_{ij}^{-1},1\}$ in (6.3) berücksichtigt. Aus diesen Überlegungen ergibt sich:

$$B_p^{(2)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_p|z_1,\ldots,z_p) = \sum_{\sigma\in S_p}\prod_{m=1}^{p} c(\lambda_m - z_{\sigma(m)})\prod_{l=m+1}^{p}\frac{b(\lambda_m - z_{\sigma(l)})}{b(z_{\sigma(m)}-z_{\sigma(l)})}. \tag{6.5}$$

Eine andere Darstellung dieser Koeffizienten wurde in [10] angegeben:

$$B_p^{(2)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_p|z_1,\ldots,z_p) = \frac{\prod_{i,j}(\lambda_i - z_j)}{\prod_{i>j}(\lambda_i-\lambda_j)(z_j-z_i)}\det_{<i,j>}\left(\frac{1}{\lambda_i - z_j}-\frac{1}{\lambda_i - z_j+\eta}\right). \tag{6.6}$$

Diese Darstellung hat allerdings den Nachteil, daß sie die Struktur der Singularitäten des Koeffizienten ein wenig verschleiert, da sich die Pole im Vorfaktor mit den Nullstellen der Determinante wegheben. Eine genauere Analyse dieses Sachverhalts findet man im Anhang B.

Der Fall des hierarchischen Bethe-Ansatzes in der F-Basis wird am deutlichsten, wenn man ihn anhand des Beispiels $sl(3)$ behandelt. Aus (5.14) erhält man die Erzeugungsoperatoren als

$$\tilde{T}_{32} = \sum_{i=1}^{N} c(\lambda - z_i)E_{23}^{(i)}\otimes_{j\neq i}\mathrm{diag}\{b(\lambda-z_j),b(\lambda-z_j)b_{ij}^{-1},1\}_{[j]}, \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{31} &= \sum_{i=1}^{N} c(\lambda - z_i)E_{13}^{(i)}\otimes_{j\neq i}\mathrm{diag}\{b(\lambda-z_j)b_{ij}^{-1},b(\lambda-z_j)b_{ij}^{-1},1\}_{[j]} \;+ \\ &\sum_{i\neq j} c(\lambda-z_i)\;b(\lambda-z_j)\,\frac{\eta}{z_i-z_j}E_{23}^{(i)}\otimes E_{12}^{(j)}\otimes_{k\neq i,j}\mathrm{diag}\{b(\lambda-z_k)b_{jk}^{-1},b(\lambda-z_k)b_{ik}^{-1},1\}_{[k]}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Um hiermit zur Bethe-Wellenfunktion (6.2) zu gelangen, verwendet man die folgende Strategie:

1. Man betrachtet eine spezielle Reihenfolge der Operatoren $\tilde{T}_{n\alpha}$ innerhalb der Wellenfunktion, in der deren Wirkung auf das Vakuum besonders einfach ist. Es ist hierbei wegen der Faddeev–Zamolodchikov–Algebra (6.1) immer möglich, eine vorgegebene Ordnung der Operatoren $\tilde{T}_{n\alpha}$ in diese spezielle Reihenfolge zu überführen.

2. Obwohl der Koeffizient $\Phi^{(2)}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ in (6.2) in der alten Basis auszuwerten ist, bleibt die spezielle Komponente von $\Phi^{(2)}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$, welche mit der oben beschriebenen Reihenfolge der Operatoren $\tilde{T}_{n\alpha}$ durch einen Faktor $\prod_{kl} b^{-1}(\lambda_l - \lambda_k)$ verknüpft ist, unverändert unter der F-Transformation. Daher erhält man den Ausdruck für diese spezielle Komponente aus (6.5).

3. Wie in Kapitel 2.5 beschrieben, ist die Bethe-Wellenfunktion auch im hierarchischen Fall invariant unter Permutationen der Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Daher erhält man dann alle weiteren Terme durch Symmetrisierung des obigen speziellen Ausdrucks.

Mit Hilfe dieser Strategie gelangt man zu dem
Satz 6.1

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Psi}_3(N, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p_0}; \lambda_{p_0+1}, \ldots, \lambda_{p_0+p_1}) = \\
&\sum_{\sigma \in S_{p_0}} B^{(2)}_{p_1}(\lambda_{p_0+1}, \ldots, \lambda_{p_0+p_1} | \lambda_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma(p_1)}) \prod_{k=1}^{p_1} \prod_{l=p_1+1}^{p_0} b(\lambda_{\sigma(l)} - \lambda_{\sigma(k)})^{-1} \\
&\tilde{T}_{32}(\lambda_{\sigma(p_1+1)}) \ldots \tilde{T}_{32}(\lambda_{\sigma(p_0)}) \tilde{T}_{31}(\lambda_{\sigma(1)}) \ldots \tilde{T}_{31}(\lambda_{\sigma(p_1)})\, \Omega^{(3)}_N \,. \qquad (6.9)
\end{aligned}$$

Beweis Zum Beweis verfährt man, wie oben beschrieben:
Die Reihenfolge der Operatoren in (6.9) ist so gewählt, daß alle Operatoren $\tilde{T}_{32}$ links von allen Operatoren $\tilde{T}_{31}$ stehen. Mit Hilfe der Faddeev–Zamolodchikov–Algebra (6.1) kann man alle Terme in (6.2) in diese Reihenfolge bringen. Betracht wird nun speziell der Term

$$\tilde{T}_{32}(\lambda_{p_1+1}) \ldots \tilde{T}_{32}(\lambda_{p_0}) \tilde{T}_{31}(\lambda_1) \ldots \tilde{T}_{31}(\lambda_{p_1})\, \Omega^{(3)}_N \qquad (6.10)$$

in (6.9). Wegen der festgelegten Reihenfolge der Parameter λ_i in (6.2) kann dieser nur aus dem Term

$$\tilde{T}_{31}(\lambda_1) \ldots \tilde{T}_{31}(\lambda_{p_1}) \tilde{T}_{32}(\lambda_{p_1+1}) \ldots \tilde{T}_{32}(\lambda_{p_0})\, \Omega^{(3)}_N \qquad (6.11)$$

entstanden sein. Weiterhin kann nur die Verwendung des ersten Terms der rechten Seite in der Beziehung (6.1) zu diesem Ausdruck führen, da ansonsten mindestens ein Parameter der Operatoren $\tilde{T}_{31}$ nicht der spezifizierten Menge $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{p_1}\}$ angehören würde. Dies bedeutet, daß der Übergang von (6.11) zu (6.10) einen Faktor

$$\prod_{k=1}^{p_1} \prod_{l=p_1+1}^{p_0} \frac{1}{b(\lambda_l - \lambda_k)} \qquad (6.12)$$

liefert.
Der Koeffizient $\Phi^{(2)}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$, welcher zu (6.11) gehört, lautet $\Phi^{(2)}_{1\ldots12\ldots2}$. Dieser besitzt die Eigenschaft,

daß er invariant unter der F-Transformation ist. Dies ist dadurch begründet, daß die Zeile in der F-Matrix, die die Komponente $\Phi^{(2)}_{1\ldots12\ldots2}$ transformiert, geliefert wird durch die Projektoren $\prod_i P^i_{\alpha_i}$ mit $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_N\} = \{1,\ldots,1,2,\ldots,2\}$. Diese α_i bilden somit eine aufsteigende Folge in der ursprünglichen Reihenfolge der Plätze, weswegen sie nach (4.5) mit der Identität als Permutation verknüpft sind. Somit kann der Koeffizient $\Phi^{(2)}_{1\ldots12\ldots2}$ aus (6.5) entnommen werden. Wegen der bereits beschriebenen Symmetrie von $\tilde{\Psi}_n(N;\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$ erhält man alle weiteren Terme durch Permutation der Parameter $\lambda_1,\ldots,\lambda_{p_0}$ und wird so zu dem Ausdruck in (6.9) geführt.

Setzt man nun in (6.9) die Ausdrücke (6.8) und (6.7) für $\tilde{T}_{31}$ und $\tilde{T}_{32}$ ein, so erkennt man, warum die spezielle Ordnung dieser Operatoren dort gewählt wurde. Der zweite Term von $\tilde{T}_{31}$ in (6.8) verschwindet in diesem Fall nämlich, da $E^{(i)}_{12}$ das Vakuum vernichtet. Damit verbleiben nur noch die Wurzeln $E^{(i)}_{23}$ aus $\tilde{T}_{32}$ und $E^{(i)}_{23}$ aus $\tilde{T}_{31}$, und man kann wie in der Berechung des $sl(2)$-Falls (6.5) verfahren. Man erhält nur einen zusätzlichen Faktor $\prod_{k=1}^{p_1}\prod_{l=p_1+1}^{p_0} b(\lambda_{\sigma(l)} - z_{i_k})$ durch die Wirkung der Dressing-Faktoren der Wurzeln $E^{(i)}_{23}$ auf die Wurzeln $E^{(i)}_{13}$. Somit ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Psi}_3(N,\lambda_1,\ldots,\lambda_{p_0};\lambda_{p_0+1},\ldots,\lambda_{p_0+p_1}) = \\
&\qquad\sum_{\substack{i_1<\ldots<i_{p_1}\\ i_{p_1+1}<\ldots<i_{p_0}}} B^{(3)}_{p_0,p_1}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{p_0};\lambda_{p_0+1},\ldots,\lambda_{p_0+p_1}|z_{i_1},\ldots,z_{i_{p_0}}) \\
&\qquad\qquad\times E^{(i_{p_1+1})}_{23}\ldots E^{(i_{p_0})}_{23} E^{(i_1)}_{13}\ldots E^{(i_{p_1})}_{13}\Omega^{(3)}_N,
\end{aligned} \tag{6.13}$$

mit

$$\begin{aligned}
&B^{(3)}_{p_0,p_1}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{p_0};\lambda_{p_0+1},\ldots,\lambda_{p_0+p_1}|z_{i_1},\ldots,z_{i_{p_0}}) = \\
&\quad\sum_{\sigma\in S_{p_0}}\prod_{k=1}^{p_1}\prod_{l=p_1+1}^{p_0}\frac{b(\lambda_{\sigma(l)}-z_{i_k})}{b(\lambda_{\sigma(l)}-\lambda_{\sigma(k)})} B^{(2)}_{p_0-p_1}(\lambda_{\sigma(p_1+1)},\ldots,\lambda_{\sigma(p_0)}|z_{i_{p_1+1}},\ldots,z_{i_{p_0}}) \\
&\quad\times B^{(2)}_{p_1}(\lambda_{p_0+1},\ldots,\lambda_{p_0+p_1}|\lambda_{\sigma(1)},\ldots,\lambda_{\sigma(p_1)}) B^{(2)}_{p_1}(\lambda_{\sigma(1)},\ldots,\lambda_{\sigma(p_1)}|z_{i_1},\ldots,z_{i_{p_1}}).
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Damit wurde die $sl(3)$-Hierarchie der Bethe-Wellenfunktion vollständig in $sl(2)$-Komponenten aufgelöst.

Man kann nun analog die gleiche Rechnung für $sl(n)$ mit $n > 3$ durchführen. Die Operatoren $\tilde{T}_{n\,\alpha}$ werden jetzt so angeordnet, daß alle Operatoren $\tilde{T}_{n\,n-\alpha}$ links von den Operatoren $\tilde{T}_{n\,n-\beta}$ stehen, wenn $\alpha < \beta$. In dieser Reihenfolge verschwinden im Ausdruck für $\tilde{T}_{n\,\alpha}$ (5.14) wieder alle Terme, die Tensorprodukte von Wurzeln enthalten, bei Anwendung auf das Vakuum. Die

Koeffizienten $\Phi^{(k)}_{1\dots12\dots2\dots n\dots n}$ sind ebenfalls nach den gleichen Überlegungen wie im $sl(3)$-Fall invariant unter der F-Transformation. Daraus ergibt sich für die $sl(n)$-Bethe-Wellenfunktion $\tilde{\Psi}_n$ in der F-Basis ein zu (6.13) analoger Ausdruck:

$$\tilde{\Psi}_n(N, p_0, p_1, \dots, p_{n-2}) =$$
$$\sum_{\substack{i_1<\dots<i_{p_{n-2}},\dots \\ \dots,i_{p_1+1}<\dots<i_{p_0}}} B^{(n)}_{p_0\,p_1\dots p_{n-2}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{p_0+\dots p_{n-2}}|z_{i_1}, \dots, z_{i_{p_0}}) \prod_{\alpha=1}^{n-1} \prod_{j=p_\alpha+1}^{p_{\alpha-1}} E^{(i_j)}_{n-\alpha\, n}\, \Omega^{(n)}_N, \quad (6.15)$$

mit der folgenden Rekursionsrelation für den Ausdruck $B^{(n)}_{p_0\,p_1\dots p_{n-2}}$:

$$\begin{aligned} B^{(n)}_{p_0\,p_1\dots p_{n-2}}&(\lambda_1, \dots, \lambda_{p_0+p_1+\dots p_{n-2}}|z_1, \dots, z_{p_0}) \\ &= \sum_{\sigma\in S_{p_0}} \prod_{\alpha=1}^{n-2} \prod_{k_\alpha=p_{\alpha+1}+1}^{p_\alpha} \prod_{l_\alpha=p_\alpha+1}^{p_0} \frac{b(\lambda_{\sigma(l_\alpha)} - z_{k_\alpha})}{b(\lambda_{\sigma(l_\alpha)} - \lambda_{\sigma(k_\alpha)})} \\ &\times \prod_{\gamma=0}^{n-2} B^{(2)}_{p_\gamma-p_{\gamma+1}}(\lambda_{\sigma(p_{\gamma+1}+1)} \dots \lambda_{\sigma(p_\gamma)}|z_{p_{\gamma+1}+1} \dots z_{p_\gamma}) \\ &\times B^{(n-1)}_{p_1\dots p_{n-2}}(\lambda_{p_0+1} \dots \lambda_{p_0+p_1+\dots+p_{n-2}}|\lambda_{\sigma(1)} \dots \lambda_{\sigma(p_1)}). \end{aligned} \quad (6.16)$$

Beachtet man, daß die Unordnungsparameter im hierarchischen Bethe-Ansatz immer durch die Bethe-Parameter des darüberliegenden Problems gegeben sind, so kann man die Rekursionsformel lösen und erhält:

$$\begin{aligned} &B^{(n)}_{p_0\,p_1\dots p_{n-2}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{p_0+p_1+\dots+p_{n-2}}|z_1, \dots, z_{p_0}) = \\ &\sum_{\sigma_0\in S_{p_0}} \sum_{\sigma_1\in S_{p_1}} \cdots \sum_{\sigma_{n-3}\in S_{p_{n-3}}} \prod_{i=0}^{n-3} \prod_{\alpha_i=i+1}^{n-2} \prod_{k_{\alpha_i}=p_{\alpha_i+1}+1}^{p_{\alpha_i}} \prod_{l_{\alpha_i}=p_{\alpha_i}+1}^{p_i} \frac{b(\lambda_{q_{i-1}+\sigma_i(l_{\alpha_i})} - \lambda_{q_{i-2}+\sigma_{i-1}(k_{\alpha_i})})}{b(\lambda_{q_{i-1}+\sigma_i(l_{\alpha_i})} - \lambda_{q_{i-1}+\sigma_i(k_{\alpha_i})})} \\ &\prod_{\gamma_i=i}^{n-2} B^{(2)}_{p_{\gamma_i}-p_{\gamma_i+1}} \left(\lambda_{q_{i-1}+\sigma_i(p_{\gamma_{i+1}}+1)} \dots \lambda_{q_{i-1}+\sigma_i(p_{\gamma_i})}|\lambda_{q_{i-2}+\sigma_{i-1}(p_{\gamma_{i+1}}+1)} \dots \lambda_{q_{i-2}+\sigma_{i-1}(p_{\gamma_i})}\right) \times \\ &B^{(2)}_{p_{n-2}} \left(\lambda_{q_{n-3}+1} \dots \lambda_{q_{n-3}+p_{n-2}}|\lambda_{q_{n-4}+\sigma_{n-3}(1)} \dots \lambda_{q_{n-4}+\sigma_{n-3}(p_{n-2})}\right), \end{aligned} \quad (6.17)$$

wobei folgende Definitionen verwendet wurden:

$$q_i = \sum_{j=0}^{i} p_j; \quad q_{-1} = 0$$

und

$$\lambda_{\sigma_{-1}(k)} = z_k\,.$$

Die Gleichungen (6.15) und (6.17) liefern auch im $sl(n)$-Fall eine vollständige Auflösung der Bethe-Hierarchie in $sl(2)$-Komponenten.

7 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde eine faktorisierende F-Matrix für das rationale $sl(n)$-Modell angegeben. Diese daraus resultierende Faktorisierung der R-Matrix erlaubte es, eine vollständig symmetrische Darstellung der Erzeugungsoperatoren anzugeben, welche keine Ausdrücke sich gegenseitig kompensierender Spin-Auf- und -Absteigeoperatoren mehr enthält. Mit Hilfe dieser neuen Erzeugungsoperatoren wurde die Wellenfunktion des hierarchischen Bethe-Ansatzes in der F-Basis ausgedrückt, und dadurch die Hierarchie vollständig in $sl(2)$-Komponenten aufgelöst.

Der Beweis der Faktorisierung von R durch F beinhaltete neben der Unitarität von R nur noch die Eigenschaft (4.11). Daher ist es möglich, für andere Modelle ebenfalls eine Faktorisierung in der hier angegebenen Form durchzuführen. In [24, 25, 26] wurde eine Transformation der R-Matrix des XYZ-Modells bzw. des Belavin-Modells im Hilfsraum und im physikalischen Raum verwendet, um zu einer R-Matrix mit den oben angegebenen Eigenschaften zu gelangen, welche es dann erlaubte, die gleichen Rechnungen wie in dieser Arbeit durchzuführen. Deshalb liegt es nahe zu fragen, ob alle integrablen Modelle in zwei Dimensionen eine derartige Faktorisierung zulassen. In [27] wurde gezeigt, daß in jeder integrablen zweidimensionalen Quantenfeldtheorie semilokale polarisationsfreie Generatoren existieren. Daher ist ein Zusammenhang zwischen diesen Operatoren und polarisationsfreien Operatoren in gitterbasierten Spin-Modellen vorstellbar.

Eine mögliche Anwendung der neuen Darstellung der Bethe-Wellenfunktionen ist die Berechnung von Korrelationsfunktionen für lokale Spin-Operatoren. Hierzu kann man z.B. wie in [10] verfahren: Man drückt die lokalen Spin-Operatoren mit Hilfe des inversen Streuproblems (siehe Anhang C) in Form der Monodromiematrixelemente aus. Da die Bethe-Wellenfunktion nur Monodromiematrixeinträge als Erzeugungsoperatoren enthält, kann man die Korrelationsfunktionen unter Verwendung der Faddeev-Zamolodchikov-Algebra auf Skalarprodukte zurückführen. Die Auswertung dieser Skalarprodukte erfolgt dann in der neuen F-Basis.

Danksagung Ich danke Herrn Professor Flume für die freundliche Betreuung und Unterstützung dieser Arbeit.
Weiterer Dank gilt Tom Albert, Herman Boos und Rubik Poghossian für die wissenschaftliche Zusammenarbeit.

A Die sl(n)-Algebra in der F-Basis

In diesem Anhang wird explizit nachgerechnet, daß die einfachen Wurzeln $\tilde{E}_{\alpha,\alpha\pm1}$ in der F-Basis die definierenden Relationen der $sl(n)$-Algebra erfüllen.

Eine halbeinfache Lie-Algebra $g(\Phi)$, welche assoziiert ist zu einer Menge

$$\Phi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \tag{A.1}$$

von l einfachen Wurzeln α_i und erzeugt wird durch die $3\,l$ Generatoren

$$\{E_{+\alpha_i}, E_{-\alpha_i}, H_i \mid 1 \leq i \leq l\}\,, \tag{A.2}$$

ist eindeutig gegeben durch die folgenden Chevalley-Serre-Relationen [23]:

- R1 $\quad \left[E_{+\alpha_i}, E_{-\alpha_j}\right] = \delta_{ij} H_{\alpha_i}$
- R2 $\quad \left[H_{\alpha_i}, E_{\pm\alpha_j}\right] = \pm A_{ji} E_{\pm\alpha_j}$
- R3 $\quad \left[H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j}\right] = 0$
- R4 $\quad \left(ad_{E_\pm^{\alpha_i}}\right)^{1-A_{ji}} \left(E_\pm^{\alpha_j}\right) = 0 \quad i = 1, \ldots, l\,; \quad i \neq j \quad .$

Hierbei ist

$$A_{ij} = 2\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} \tag{A.3}$$

die zu der Menge Φ von einfachen Wurzeln gehörende $l \times l$ Cartan-Matrix, und $(ad_x)^n$ ist eine abkürzende Schreibweise für $\underbrace{ad_x \circ ad_x \circ \ldots \circ ad_x}_{\text{n-mal}}$, so daß z.B. $(ad_x)^2(y) = [x, [x, y]]$.

In unserem Fall der $sl(n)$-Algebra ist $l = n - 1$, und die einfachen Wurzeln sind gegeben durch

$$\begin{aligned} E_{+\alpha} &= E_{\alpha,\alpha+1} \\ E_{-\alpha} &= E_{\alpha+1,\alpha} \quad , \end{aligned} \tag{A.4}$$

wobei wie in den vorherigen Kapiteln $(E_{\alpha,\beta})^i_j = \delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}$ ist. Außerdem ist

$$(H_\alpha)^i_j = \delta_{\alpha\,i}\delta_{\alpha\,j} - \delta_{\alpha+1\,i}\delta_{\alpha+1\,j}. \tag{A.5}$$

Die Cartan-Matrix A_{ij} hat dann die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} A_{ii} &= 2 \\ A_{i+1\,i} &= A_{i\,i+1} = -1 \\ A_{ij} &= 0 \text{ sonst.} \end{aligned} \tag{A.6}$$

Die Rechnungen in Kapitel 5 ergaben für die einfachen Wurzeln in der F-Basis:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{+\alpha} &= \sum_{i=1}^{N} E_{+\alpha}^{(i)} \otimes_{j\neq i} \left(\mathbb{1}_j + \frac{\eta}{z_i - z_j} E_{\alpha\,\alpha} \right)_{[j]} = \sum_{i=1}^{N} E_{+\alpha}^{(i)} \otimes_{j\neq i} \triangle_{(i,j)}^{\alpha} \\ \tilde{E}_{-\alpha} &= \sum_{i=1}^{N} E_{-\alpha}^{(i)} \otimes_{j\neq i} \left(\mathbb{1}_j + \frac{\eta}{z_j - z_i} E_{\alpha+1\,\alpha+1} \right)_{[j]} = \sum_{i=1}^{N} E_{-\alpha}^{(i)} \otimes_{j\neq i} \tilde{\triangle}_{(j,i)}^{\alpha} . \end{aligned} \tag{A.7}$$

Zum Beweis von Relation R1 berechnet man damit:

$$\begin{aligned} \left[\tilde{E}_{+\alpha}, \tilde{E}_{-\beta} \right] &= \sum_{i} \left[E_{+\alpha}^{(i)}, E_{-\beta}^{(i)} \right] \otimes_{j\neq i} \triangle_{(i,j)}^{\alpha} \tilde{\triangle}_{(j,i)}^{\beta} \\ &+ \sum_{i\neq j} \left(E_{\alpha}^{(i)} \tilde{\triangle}_{(i,j)}^{-\beta} \otimes \triangle_{(i,j)}^{\alpha} E_{-\beta}^{(j)} - \tilde{\triangle}_{(i,j)}^{-\beta} E_{\alpha}^{(i)} \otimes E_{-\beta}^{(j)} \triangle_{(i,j)}^{\alpha} \right) \otimes_{k\neq i,j} \triangle_{(i,k)}^{\alpha} \tilde{\triangle}_{(j,k)}^{-\beta} \\ &= \sum_{i} \delta_{\alpha\,\beta} H_{\alpha}^{(i)} \otimes_{j\neq i} \triangle_{(i,j)}^{\alpha} \tilde{\triangle}_{(j,i)}^{\alpha} , \end{aligned} \tag{A.8}$$

da der zweite Ausdruck termweise für beliebige α und β verschwindet.
Im folgenden soll gezeigt werden, daß der Ausdruck für $\tilde{H}_{\alpha}$ auf der rechten Seite von Gleichung (A.8) dem ursprünglichen H_{α} entspricht, d.h., der zusätzliche Dressing-Faktor $\triangle_{(i,j)}^{\alpha} \tilde{\triangle}_{(j,i)}^{\alpha}$ verschwindet.
Hierzu beachtet man, daß der Dressing-Faktor geschrieben werden kann als

$$\triangle_{(i,j)}^{\alpha} \tilde{\triangle}_{(j,i)}^{\alpha} = \mathbb{1}_{[j]} + \frac{\eta}{z_i - z_j} H_{\alpha}^{(j)} . \tag{A.9}$$

Desweiteren gilt die folgende Identität:

$$\otimes_{i=1}^{N} \left(\mathbb{1}_{[i]} + \frac{\eta}{\lambda - z_i} H_{\alpha}^{(i)} \right) = \mathbb{1}_{[N]} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\eta}{\lambda - z_i} H_{\alpha}^{(i)} \otimes_{j\neq i} \left(\mathbb{1}_{[j]} + \frac{\eta}{z_i - z_j} H_{\alpha}^{(j)} \right) . \tag{A.10}$$

Zum Beweis dieser Identität überprüft man, daß beide Seiten im Grenzfall $\lambda \to \infty$ und die Residuen an den einfachen Polen $\lambda = z_i$ übereinstimmen.

Betrachtet man nun (A.10) in der Entwicklung bis zur Ordnung $1/\lambda$, so ergibt sich die gesuchte Identität:

$$\sum_i H_\alpha^{(i)} \otimes_{j\neq i} \mathbb{1}_{[j]} = \sum_i H_\alpha^{(i)} \otimes_{j\neq i} \left(\mathbb{1}_{[j]} + \frac{\eta}{z_i - z_j} H_\alpha^{(j)} \right) = \sum_i H_\alpha^{(i)} \otimes_{j\neq i} \triangle^\alpha_{(i,j)} \tilde{\triangle}^\alpha_{(j,i)}. \tag{A.11}$$

Damit sind auch direkt die Relationen R2 und R3 bewiesen, da sie sich auf die gleichen Relationen in der ursprünglichen Basis reduzieren.
Es verbleibt also nur noch der Beweis der Beziehung R4, der sogenannten Serre-Relation. Wegen der Gestalt der $sl(n)$-Cartan-Matrix (A.6) hat man nur zwei Beziehungen zu überprüfen:

$$\begin{aligned} &1. \quad |j-i| = 1 \quad \left[\tilde{E}_\pm^{\alpha^i}, \left[\tilde{E}_\pm^{\alpha^i}, \tilde{E}_\pm^{\alpha^j}\right]\right] = 0, \\ &2. \quad |j-i| > 1 \quad \left[\tilde{E}_\pm^{\alpha^i}, \tilde{E}_\pm^{\alpha^j}\right] = 0\,. \end{aligned} \tag{A.12}$$

Zum Beweis benötigt man die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} \left(E_{+\alpha}\, \triangle^\beta_{(i,j)}\right) &= d^\beta_{\alpha+1}(i,j)\; E_{+\alpha}, \\ \left(\triangle^\beta_{(i,j)}\, E_{+\alpha}\right) &= d^\beta_{\alpha}(i,j)\; E_{+\alpha}, \\ \left(E_{-\alpha}\, \triangle^\beta_{(i,j)}\right) &= d^\beta_{\alpha}(i,j)\; E_{-\alpha}, \\ \left(\triangle^\beta_{(i,j)}\, E_{-\alpha}\right) &= d^\beta_{\alpha+1}(i,j)\; E_{-\alpha}. \end{aligned}$$

Hierbei ist $d^\beta_\alpha(i,j)$ das α-te Element auf der Diagonalen der Matrix $\triangle^\beta_{(i,j)}$.

Im ersten Fall der Serre-Relation (A.12) ergibt sich mit $\sum'_{i,j} = \sum_{i,j;\,i\neq j}$ und

$$\begin{aligned} \left[\tilde{E}_\alpha, \tilde{E}_\beta\right] &= \sum_i \left[E_\alpha^{(i)}, E_\beta^{(i)}\right] \otimes_{j\neq i} \triangle^\alpha_{(i,j)} \triangle^\beta_{(i,j)} \\ &+ \sum_{i,j}{}' \frac{\eta}{z_j - z_i} E_\alpha^{(i)} \otimes E_\beta^{(j)} \otimes_{k\neq i,j} \triangle^\alpha_{(i,k)} \triangle^\beta_{(j,k)} \end{aligned} \tag{A.13}$$

für die positiven Wurzeln:

$$\begin{aligned} &\left[\tilde{E}_\alpha, \left[\tilde{E}_\alpha, \tilde{E}_\beta\right]\right] \\ = &\sum_i \left[E_\alpha^{(i)}, \left[E_\alpha^{(i)}, E_\beta^{(i)}\right]\right] \otimes_{j\neq i} \triangle^\alpha_{(i,j)} \triangle^\alpha_{(i,j)} \triangle^\beta_{(i,j)} \\ + &\sum_{i,j}{}' \left(E_\alpha^{(i)} \triangle^\alpha_{(j,i)} \triangle^\beta_{(j,i)} \otimes \triangle^\alpha_{(i,j)} \left[E_\alpha^{(j)}, E_\beta^{(j)}\right] - \triangle^\alpha_{(j,i)} \triangle^\beta_{(j,i)} E_\alpha^{(i)} \otimes \left[E_\alpha^{(j)}, E_\beta^{(j)}\right] \triangle^\alpha_{(i,j)} \right) \otimes \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \otimes_{k\neq i,j} \triangle^{\alpha}_{(i,k)} \triangle^{\alpha}_{(j,k)} \triangle^{\beta}_{(j,k)} \\
+ & \sum_{i,j}{}' \frac{\eta}{z_j - z_i} \left(E^{(i)}_{\alpha} E^{(i)}_{\alpha} \otimes \triangle^{\alpha}_{(i,j)} E^{(j)}_{\beta} - E^{(i)}_{\alpha} E^{(i)}_{\alpha} \otimes E^{(j)}_{\beta} \triangle^{\alpha}_{(i,j)} \right) \otimes_{k\neq i,j} \triangle^{\alpha}_{(i,k)} \triangle^{\alpha}_{(j,k)} \triangle^{\beta}_{(j,k)} \\
+ & \sum_{i,j}{}' \frac{\eta}{z_j - z_i} \left(\triangle^{\alpha}_{(j,i)} E^{(i)}_{\alpha} \otimes E^{(j)}_{\alpha} E^{(j)}_{\beta} - E^{(i)}_{\alpha} \triangle^{\alpha}_{(j,i)} \otimes E^{(j)}_{\beta} E^{(j)}_{\alpha} \right) \otimes_{k\neq i,j} \triangle^{\alpha}_{(i,k)} \triangle^{\alpha}_{(j,k)} \triangle^{\beta}_{(j,k)} \\
+ & \sum_{i,j,k}{}' \frac{\eta}{z_k - z_j} \left(E^{(i)}_{\alpha} \triangle^{\alpha}_{(j,i)} \triangle^{\beta}_{(k,i)} \otimes \triangle^{\alpha}_{(i,j)} E^{(j)}_{\alpha} \otimes \triangle^{\alpha}_{(i,k)} E^{(k)}_{\beta} - \triangle^{\alpha}_{(j,i)} \triangle^{\beta}_{(k,i)} E^{(i)}_{\alpha} \otimes E^{(j)}_{\alpha} \triangle^{\alpha}_{(i,j)} \otimes E^{(k)}_{\beta} \triangle^{\alpha}_{(i,k)} \right) \\
& \otimes_{l\neq i,j,k} \triangle^{\alpha}_{(i,l)} \triangle^{\alpha}_{(j,l)} \triangle^{\beta}_{(k,l)} \, . \qquad \text{(A.14)}
\end{aligned}
$$

Der erste Term der rechten Seite verschwindet wegen der Serre-Relation für die ursprünglichen Operatoren und der dritte wegen $E_\alpha E_\alpha = 0$. Der zweite und der vierte Term heben sich gegeneinander weg, während die Klammer im letzten Term das folgende Resultat liefert:

$$
\frac{\eta}{z_k - z_j} \left((1 + \frac{\eta}{z_k - z_i})(1 + \frac{\eta}{z_i - z_j}) - (1 + \frac{\eta}{z_j - z_i}) \right) E^{(i)}_{\alpha} \otimes E^{(j)}_{\alpha} \otimes E^{(k)}_{\beta}. \qquad \text{(A.15)}
$$

Dieser Ausdruck ist antisymmetrisch unter Vertauschung von i und j. Somit verschwinden für ein festes k in der Summe immer zwei Terme zusammen, die durch Vertauschung von i und j auseinander hervorgehen. Damit ist der gesamte Ausdruck der rechten Seite gleich Null.

Im zweiten Fall der Serre-Relation (A.12) ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
& \left[\tilde{E}_\alpha, \tilde{E}_\beta \right] \\
= & \sum_i \left[E^{(i)}_{\alpha}, E^{(i)}_{\beta} \right] \otimes_{j\neq i} \triangle^{\alpha}_{(i,j)} \triangle^{\beta}_{(i,j)} \\
+ & \sum_{i,j}{}' \left(E^{(i)}_{\alpha} \triangle^{\beta}_{(j,i)} \otimes \triangle^{\alpha}_{(i,j)} E^{(j)}_{\beta} - \triangle^{\beta}_{(j,i)} E^{(i)}_{\alpha} \otimes E^{(j)}_{\beta} \triangle^{\alpha}_{(i,j)} \right) \otimes_{k\neq i,j} \triangle^{\alpha}_{(i,k)} \triangle^{\beta}_{(j,k)}. \qquad \text{(A.16)}
\end{aligned}
$$

Der erste Term verschwindet wegen der Serre-Relation für die untransformierten Operatoren, während im zweiten Term der Ausdruck in der Klammer für $|\alpha - \beta| > 1$ gleich Null ist. Damit ist die Relation R4 für $\tilde{E}_{+\alpha}$ bewiesen. Der Beweis für die Operatoren $\tilde{E}_{-\alpha}$ verläuft vollkommen analog.

Die nicht-einfachen Wurzeln, welche in Kapitel 5 benötigt wurden, erhält man aus den einfachen Wurzeln durch Mehrfachkommutatoren (Serre-Konstruktion) nach dem folgenden Prinzip:

$$
\tilde{E}_{n-\alpha,n} \quad = \quad \left[\tilde{E}_{n-\alpha\; n-\alpha+1}, \ldots, \left[\tilde{E}_{n-3\; n-2}, \left[\tilde{E}_{n-2\; n-1}, \tilde{E}_{n-1\; n} \right] \right] \ldots \right]
$$

$$
\begin{aligned}
= & \sum_{k=1}^{\alpha} \sum_{i_1 \neq \ldots \neq i_k} \prod_{\gamma=1}^{k-1} \frac{\eta}{z_{i_\gamma} - z_{i_{\gamma+1}}} \sum_{\alpha=\beta_0 > \beta_1 \ldots > \beta_k = 0} \otimes_{l=1}^{k} E^{(i_l)}_{n-\beta_{l-1}, n-\beta_l} \\
& \otimes_{j \neq i_1 \ldots i_k} \Gamma^{(j)}_{j; \underbrace{i_1..i_1}_{\beta_0-\beta_1} \underbrace{i_2..i_2}_{\beta_1-\beta_2} \ldots \underbrace{i_k..i_k}_{\beta_{k-1}-\beta_k}} ,
\end{aligned}
\tag{A.17}
$$

wobei $\Gamma_{j;i_1,\ldots,i_\alpha} = \mathrm{diag}\{1, ..., 1, b^{-1}_{i_1 j}, ..., b^{-1}_{i_\alpha j}, 1\}$.

Der Beweis erfolgt durch Induktion, d.h., man zeigt zuerst, daß der Ausdruck $\left[\tilde{E}_{n-2\,n-1}, \tilde{E}_{n-1\,n}\right]$ mit dem obigen Ausdruck (A.17) für $\alpha = 2$ identisch ist. Danach berechnet man den Kommutator $\left[\tilde{E}_{n-\alpha\,n-\alpha+1}, \tilde{E}_{n-\alpha+1\,n}\right]$ unter Verwendung der Beziehung (A.17) für $\alpha - 1$. Faßt man dort die entstehenden Summen zusammen, so erkennt man die Übereinstimmung mit (A.17) für α.

B Polstruktur der Determinantendarstellung der sl(2)-Wellenfunktion

In diesem Anhang soll näher auf die Singularitätenstruktur des Koeffizienten (6.6)

$$\begin{aligned} B_p^{(2)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_p;z_1,\ldots,z_p) &= \frac{\prod_{ij}(\lambda_i - z_j)}{\prod_{i>j}(\lambda_i-\lambda_j)\prod_{i>j}(z_j-z_i)}\,\mathrm{det}X \\ X_{ij} &= \frac{1}{\lambda_i - z_j} - \frac{1}{\lambda_i - z_j + \eta} \end{aligned} \tag{B.1}$$

eingegangen werden.
Wie bereits erwähnt, ist die Darstellung von (B.1) ein wenig irreführend, da sich die Pole im Vorfaktor mit den Nullstellen der Determinante wegheben.
Man gelangt zu einer klareren Darstellung der Singularitäten durch entsprechende Umformungen innerhalb der Determinante in (B.1). Hierzu substrahiert man die letzte Zeile von allen anderen und extrahiert dann einen rationalen Faktor aus der letzten Zeile. Danach zieht man die $n-1$-te Zeile von allen darüberliegenden Zeilen ab und erhält so einen erneuten Faktor. Führt man dies für alle anderen Zeilen fort, so ergibt sich der folgende Ausdruck:

$$\begin{aligned} B_p^{(2)}(\lambda_1,\ldots,\lambda_p;z_1,\ldots,z_p) &= \frac{1}{\prod_{i<j}(z_j-z_i)}\frac{1}{\prod_{ij}(\lambda_i-z_j+\eta)}\,\mathrm{det}Y, \\ Y_{\alpha,x} &= P_\alpha(\lambda;\,z_x), \\ P_\alpha(\lambda;\,z_x) &= \left\{\prod_{i=\alpha}^{n}(\lambda_i - z_x+\eta) - \prod_{i=\alpha}^{n}(\lambda_i - z_x)\right\}\prod_{j=1}^{\alpha-1}(\lambda_j - z_x + \eta)(\lambda_j - z_x). \end{aligned} \tag{B.2}$$

Man erkennt, daß das Polynom P_α zwar von allen λ-Parametern abhängt, aber nur von einer z-Variable. Daher kann man fortfahren, weitere polynomiale Faktoren durch Substraktion einzelner Spalten innerhalb der Determinante zu extrahieren. Die entstehenden Differenzen $P_\alpha(\lambda,\,z_x) - P_\alpha(\lambda,\,z_y)$ ergeben die gewünschten Faktoren $(z_x - z_y)$, welche sich dann mit den Polen $\frac{1}{\prod_{i>j}(z_i-z_j)}$ im Vorfaktor der Determinante (B.2) wegkürzen. Obwohl dieses Verfahren prinzipiell eine Auflösung der Polstruktur in (B.1) erlaubt, ist es nicht gelungen, einen einfachen Ausdruck für das Polynom, welches zusammen mit dem Vorfaktor $\frac{1}{\prod_{ij}(\lambda_i-z_j+\eta)}$ verbleibt, zu finden.

C Lösung des inversen Streuproblems

Die Lösung des inversen Streuproblems [10, 12, 13] besteht darin, die lokalen Spin-Operatoren $E_\alpha^{(k)}$ in Form der Monodromiematrixelemente $T_{l\,m}$ auszudrücken. Dieses Problem ist allgemein lösbar, wenn eine R-Matrix gegeben ist, welche an der Stelle $\lambda = 0$ in den Permutationsoperator übergeht

$$R_{ij}(0) = P_{ij}, \tag{C.3}$$

und aus der man durch die Beziehungen (2.10), (2.13) und (2.17) Lax-Operatoren $L_i(\lambda - z_i)$, Monodromiematrizen $T_{0,1\ldots N}(\lambda)$ und Transfermatrizen $t(\lambda)$ konstruiert.

Mit Hilfe der Gleichungen (C.3) und (2.11) kann man zeigen, daß der Operator

$$T_{1\to k} = \prod_{i=1}^{k-1} t(z_i) \tag{C.4}$$

folgendermaßen auf die Monodromiematrix wirkt:

$$T_{1\to k} T_{0,1\ldots N}(\lambda) T_{1\to k}^{-1} = T_{0,k\ldots N 1\ldots k-1}(\lambda). \tag{C.5}$$

Aus der Beziehung

$$P_{01} E_\alpha^{(0)} = E_\alpha^{(1)} P_{01} \tag{C.6}$$

erhält man außerdem die Gleichung

$$tr_0(E_\alpha^{(0)} T_{0,1\ldots N}(z_1)) = E_\alpha^{(1)} t(z_1). \tag{C.7}$$

Aus (C.7) und (C.5) folgt dann, daß man jeden lokalen Operator $E_\alpha^{(k)}$, welcher im Raum k wirkt, in Form der Monodromiematrixelemente ausdrücken kann als:

$$E_\alpha^{(k)} = \left\{ \prod_{i=1}^{k-1} t(z_i) \right\} tr_0(E_\alpha^{(0)} T_{0,1\ldots N}(z_k)) \left\{ \prod_{i=1}^{k} t(z_i) \right\}^{-1}. \tag{C.8}$$

Man kann diese Darstellung noch auf den Fall verallgemeinern, in dem die Hilfsräume und die physikalischen Räume alle unterschiedliche Darstellungsräume bilden [13].

Literatur

[1] Heisenberg W 1928 Zur Theorie des Ferromagnetismus *Zeitschrift für Physik* **49** (9-10) 619-636

[2] Takhtadzhyan L A, Faddeev L D 1979 *Russian Math. Surveys* **34**:5 11-68

[3] Bethe H 1931 Zur Theorie der Metalle I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette *Zeitschrift für Physik* **71** 205-226

[4] Kulish P P, Reshetikhin N Y 1981 Generalized Heisenberg ferromagnet and the Gross-Neveu model *Sov. Phys. JETP* **53**(1) 108

[5] Maillet J M, Sanchez de Santos J 1996 Drinfel'd twists and algebraic Bethe ansatz, q-alg/9612012

[6] Drinfel'd V G 1990 Quasi–Hopf algebras *Leningrad Math. J.* **1** 1419

[7] Gaudin M 1976 Diagonalisation d'une classe d'hamiltoniens de spin *Journale de Physique* **37** 1087

[8] Sklyanin E K 1990 Functional Bethe Ansatz *Integrable and Superintegrable Systems* Kupershmidt B (Editor) (Singapore: World Scientific) 8-33

[9] Terras V 1999 Drinfel'd twists and functional Bethe ansatz *Lett. Math. Phys.* **48** 263-276, math-ph/9902009

[10] Kitanine N, Maillet J M, Terras V 1999 Form factors of the XXZ Heisenberg spin–1/2 finite chain *Nucl. Phys.* **B 554** 647-678, math-ph/9807020

[11] Izergin A G, Kitanine N, Maillet J M, Terras V 1999 Spontaneous magnetization of the XXZ Heisenberg spin-1/2 chain *Nucl. Phys.* **B 554** 679-696, solv-int/9812021

[12] Göhmann F, Korepin V E 2000 Solution of the quantum inverse problem, *J. Phys.* **A 33** 1199-1220, hep-th/9910253

[13] Maillet J M, Terras V 2000 On the quantum inverse scattering problem *Nucl. Phys.* **B 575** 627-644, hep-th/9911030

[14] Babujian G M, Flume R 1994 Off-shell Bethe Ansatz equation for Gaudin magnets and solutions of Knizhnik-Zamolodchikov equations *Mod. Phys. Lett.* **A 9** 2029-2040, hep-th/9310110

[15] Albert T D Boos H Flume R Ruhlig K 2000 Resolution of the nested hierarchy for rational $s(ln)$ models *J. Phys.* **A 33** 4963-4980, nlin-si/0002027

[16] De Vega H J 1989 Yang-Baxter algebras, integrable theories and quantum groups *Int. J. Mod. Phys.* **A 4** 2371-2463

[17] Korepin V E, Bogoliubov N M, Izergin A G 1993 *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions* (Cambridge University Press)

[18] Takhtadzhyan L A 1985 *Introduction to algebraic Bethe Ansatz* in Exactly solvable Problems in Condensed Matter and Relativistic Field Theory (Berlin: Springer)

[19] Takhtadzhyan L A 1983 Quantum inverse scattering method and algebraized matrix Bethe–Ansatz *J. Sov. Math.* **23** 2470-2486

[20] Drinfel'd V G 1986 Quantum Groups *Proceedings of the International Congress of Mathematicians in Berkeley*

[21] Drinfel'd V G 1983 Constant quasi-classical solutions of the Yang-Baxter equation *Sov. Math. Dokl.* **28** 667

[22] Takhtadzhyan L A 1990 Introduction to Quantum Groups *Lecture Notes in Physics: Quantum Groups* **370** 3-27 (Berlin: Springer)

[23] Humphreys J E 1972 *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory* (Berlin: Springer)

[24] Albert T D, Boos H., Flume R., Phoghossian R H, Ruhlig K 2000 An F-twisted XYZ model nlin-si/0005023

[25] Albert T D, Ruhlig K 2000 Polarization-free generators for the Belavin model nlin-si/0007020

[26] Albert T D 2000 Polarization-free generators for the Belavin model *Dissertation* Bonn IR-2000-13

[27] Borchers H J, Buchholz D, Schroer B 2000 Polarization-free generators and the S-matrix hep-th/0003243