UNIVERSITÄT BONN
Physikalisches Institut

Behandlung der Photodesintegration von ^{3}H und ^{3}He mit Hilfe gekoppelter Integralgleichungen

von
Wolfgang Schadow

The photodisintegration of ^{3}H and ^{3}He is treated by means of coupled integral equations using separable versions of the Paris, the Bonn *A* and Bonn *B* potentials in their kernel. For the separable representation of the two-body inputs the *W*-matrix method and the Ernst-Shakin-Thaler (EST) expansion are used. The accuracy of these methods is investigated by comparing the the bound state results with rigorous calculations. The cross section for $\gamma + t \to n + d$ is calculated over an energy range from threshold up to 40 MeV. A strong potential dependence in the peak region observed, and it is found that a sufficient number of subsystem partial waves is needed to get agreement between theory and experiment at somewhat higher energies. The differential cross section for the inverse reaction is obtained via detailed balance. For this process very good agreement with the data is found when including final-state interaction, meson exchange currents, higher partial waves in the potential, and electric quadrupole contributions in the electromagnetic interaction.

Post address:
Nussallee 12
53115 Bonn
Germany

BONN-IR-97-17
Bonn University
November 1997
ISSN-0172-8741

UNIVERSITÄT BONN
Physikalisches Institut

Behandlung der Photodesintegration von ^{3}H und ^{3}He mit Hilfe gekoppelter Integralgleichungen

von
Wolfgang Schadow

Dieser Forschungsbericht wurde als Dissertation von der Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn angenommen.

Angenommen am:	04.11.1997
Referent:	Prof. Dr. W. Sandhas
Korreferent:	Prof. Dr. H. R. Petry

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Photodesintegration von ^{3}H und ^{3}He und die inverse Reaktion, d. h. der Einfang von Neutronen bzw. Protonen durch Deuteronen wurde in den letzten Jahrzehnten bereits mehrfach theoretisch [1–16] und experimentell [17–27] untersucht. Die Photospaltung von Drei- und Viernukleonensystemen [28,29] ist neben Streu- und Aufbruchreaktionen [30–37] von Interesse für das Verständnis der Kernkräfte. Die in die Rechnungen eingehenden Matrixelemente enthalten sowohl die Kontinuumzustände, als auch den Dreiteilchenbindungszustand. Sie bieten damit, im Gegensatz zu Streu- und Aufbruchrechnungen, die Möglichkeit, die zugrunde liegenden Modelle der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung eingehender zu testen.

Die wesentlichen Observablen des Zweinukleonensystems werden von realistischen NN-Potentialen gut beschrieben, während auf dem Dreiteilchenlevel einige Diskrepanzen vorliegen. So liefern heute gängige realistische Potentiale voneinander abweichende Werte für die Triton-Bindungsenergie. Im übrigen ist jedoch keines dieser Potentiale in der Lage, die korrekte experimentelle Bindungsenergie von -8.48 MeV zu liefern. Die Gründe hierfür sind bis heute nicht geklärt und Gegenstand zahlreicher Untersuchungen. Dabei zeigt sich, daß die Einbeziehung von den heute vieldiskutierten Dreiteilchenkräften ein erfolgversprechender Ansatz ist [38–41]. Im Gegensatz zu diesen theoretischen Überlegungen gibt es jedoch keine überzeugenden experimentellen Hinweise auf die Existenz von Dreiteilchenkräften, so daß auch andere Ursachen, z. B. relativistische Effekte, möglich wären.

In dieser Arbeit wird die Zweiteilchen-Photodesintegration des Tritons und des Heliums unter Verwendung realistischer Kernpotentiale behandelt. Diese sind das Paris- [42], das Bonn A- und Bonn B- [43,44] und schließlich das Nijmegen-Potential [45–47]. Ein Vergleich zwischen diesen heute gängigen realistischen Potentialen ist von Interesse, da sie für die Bindungsenergie des Tritons sehr voneinander abweichende Werte liefern. Es soll untersucht werden, inwieweit sich diese Diskrepanz im Wirkungsquerschnitt für die Photodesintegration niederschlägt. In Streu- und Aufbruchrechnungen hat sich gezeigt, daß alle realistischen Potentiale in der Lage sind, sowohl Wirkungsquerschnitte als auch Polarisationsobservablen sehr gut wiederzugeben, wenn auch bei einigen Observablen Unterschiede bestehen. Die Photodesintegration stellt somit einen weiteren Test für die Qualität der Potentiale dar. Zu Vergleichszwecken werden außerdem das phänomenologische Yamaguchi-Potential [48,49] und das semirealistische Malfliet-Tjon-Potential [50,51] verwendet.

Die ersten wesentlichen theoretischen Untersuchungen stammen von Barbour und Phillips [1–3]. Sie fanden heraus, daß eine korrekte Behandlung der Kontinuumzustände des nuklearen Hamiltonoperators erforderlich ist, da sich das Maximum des Wirkungsquerschnitts bei Berücksichtigung der final-state-interaction (FSI) um ca. 25% erhöht. In der Folge behandelten Gibson und Lehman [4,5] das Problem im Rahmen der Faddeev-Theorie [52,53] unter Verwendung von ladungsabhängigen und ladungsunabhängigen separablen S-Wellen-Potentialen, die teilweise an die experimentellen Triton- und Helium-Bindungsenergien angepaßt wurden. Die ersten Rechnungen mit dem realistischen Paris-Potential und dem semirealistischen Malfliet-Tjon-Potential stammen von Reiss [10] und Richter [11]. Diese Rechnungen basieren auf der AGS-Theorie [54] und der W-Matrix-Methode [55], die auch in dieser Arbeit verwendet werden. Die von Alt, Grassberger und Sandhas gefundene Formulierung des Dreiteichenproblems besteht in einer effektiven Zweiteilchengleichung und ist damit für numerische Zwecke besser geeignet als die Faddeev-Theorie. Andere Rechnungen beschäftigen sich mit einigen Polarisationsobservablen des inversen Prozesses bei bestimmten Energien [6–9,15]. Als Erweiterung der bisherigen realistischen Rechnungen wird der Einfluß höherer Partialwellen in der Bindungswellenfunktion des Tritons auf den Wirkungsquerschnitt der Photospaltung im Energiebereich vom Aufbruch bis etwa 40 MeV, sowie der Einfluß des Siegert-Theorems [56] untersucht.

Die Photodesintegration des Tritons wurde experimentell bereits mehrfach untersucht. Die ersten Messungen wurden in den sechziger Jahren von Bösch et al. [18] und Kosiek et al. [21] durchgeführt. Neuere Untersuchungen aus den achtziger Jahren stammen von Faul et al. [24,25] und Skopik et al. [26]. Die Aussagekraft dieser Messungen ist jedoch fragwürdig. Zum einen ist der Datensatz von Faul et al. mit einem großen Fehler behaftet und zum anderen unterscheiden sich die Datensätze von Faul et al. und Skopik et al. bei einigen Energien um einen Faktor ≈ 2. Des weiteren widersprechen sich die Daten von Kosiek et al. und Skopik et al., dabei scheint es sich um ein Normierungsproblem zu handeln. Wünschenswert wäre ein neuerliches Experiment mit höherer Genauigkeit. Zur inversen Reaktion gibt es genauere Werte im Falle von ^{3}He für den differentiellen Wirkungsquerschnitt bei zwei Energien [22], zu ^{3}H existieren keine Werte.

Die Berechnung von Dreiteilchenproblemen wird bei Verwendung nichtseparabler Zweiteilchenwechselwirkungen durch die komplizierte Struktur der zu lösenden Gleichungen erschwert. Das aus der Partialwellenentwicklung resultierende zweidimensionale Integralgleichungssystem ist in praktischen Rechnungen nur schwer zu behandeln. Erst in neuerer Zeit sind die Computer so leistungsfähig geworden, daß hier Fortschritte erzielt werden konnten. Eine Näherungsmöglichkeit bietet die Entwicklung der Zweiteilchen-T-Matrix in eine Summe separabler Terme, wodurch das Gleichungssystem eindimensional wird. Jeder zusätzliche Entwicklungsterm erhöht jedoch den Kopplungsgrad und den damit verbundenen Rechenaufwand. Eine Methode, bereits in einem separablen Term die wesentlichen physikalischen Informationen wie Bindungspole, Resonanzen und Schnitte wiederzugeben, bietet die von Bartnik, Haberzettl und Sandhas entwickelte W-Matrix-Methode [55]. Diese liefert eine Zerlegung der T-Matrix in einen separablen Anteil, der half-on-shell exakt ist, und einen nichtseparablen Restterm. Eine Möglichkeit zur Berücksichtigung des Restterms stellt die von Haberzettl [57] und Amos [58] vorgeschlagene systematische Entwicklung des Restterms dar. Es sind jedoch auch andere Näherungen, wie eine weitere separable Näherung des Restterms oder die Entwicklung nach Sturmschen Funktionen [58,59], denkbar. Ein weiterer Vorteil der Methode liegt darin, daß das Bindungs- und das Streuproblem formal gleich gelöst werden können. In der Vergangenheit wurde die W-Matrix-Methode bereits mehrfach erfolgreich sowohl bei Streu- und Aufbruchrechnungen [34–36], als auch bei der Photodesintegration [10–14,16] getestet. In den Dreiteilchengleichungen wird die

T-Matrix off-shell benötigt. Die bisher vorgeschlagenen Methoden [35,36] zur Minimierung des Restterms haben sich bei höheren Partialwellen als nicht ausreichend erwiesen. Ein weiterer Nachteil ist, daß die Optimierung erst auf dem Dreiteilchenlevel vorgenommen werden kann.
Als Alternative dazu wird die von Ernst, Shakin und Thaler (EST) [60,61] entwickelte Methode verwendet. Diese liefert eine separable Entwicklung des Potentials. Je nach gewünschter Genauigkeit können in den einzelnen Partialwellen verschiedene Ränge der Näherung gewählt werden. Dies führt zur einer Erhöhung der Dimension des Gleichungssystems, ist aber auf den zur Verfügung stehenden Computern praktikabel. Der Vorteil liegt darin, daß die Qualität der Näherung bereits auf dem Zweiteilchenlevel überprüft werden kann und der resultierende höhere Rang leichter in den Gleichungen einzubauen ist, als die oben beschriebene Berücksichtigung des Restterms bei der W-Matrix-Methode. EST-Parametrisierungen für das Paris- und das Bonn B- Potential wurden von Plessas und Haidenbauer angegeben [62–64]. In neuerer Zeit wurde diese weiter verbessert und für alle gängigen Potentiale berechnet [65]. Auf weitere Unterschiede der Näherungsmethoden wird im Rahmen dieser Arbeit eingegangen.

Die Arbeit gliedert sich in folgende Teile:

- In Kapitel 2 werden die Alt-Grassberger-Sandhas (AGS) Gleichungen zur Beschreibung des Dreinukleonenproblems vorgestellt. Es werden Gleichungen zur Berechnung der Übergangsamplitude der Photospaltung abgeleitet.

- In Kapitel 3 werden die verwendeten Potentiale und die damit berechneten Zweiteilchenobservablen vorgestellt.

- Kapitel 4 beschreibt die verwendeten Näherungsmethoden, also die W-Matrix- und die EST-Methode.

- Kapitel 5 beschreibt die Drehimpulszerlegung und Antisymmetrisierung der AGS-Gleichungen für separable Potentiale.

- Kapitel 6 beschäftigt sich mit dem Dreiteilchenbindungsproblem. Es werden homogene Integralgleichungen für die Berechnung der Bindungsenergie und Wellenfunktion abgeleitet. Die Ergebnisse für die verschiedenen Potentiale und die Eigenschaften der Wellenfunktionen werden diskutiert.

- Kapitel 7 beschreibt die Grundlagen der elektromagnetischen Wechselwirkung mit Materie. Im entsprechenden Hamiltonoperator sind mesonische Austauschströme enthalten, die i.a. nicht bekannt sind. Um diese jedoch implizit berücksichtigen zu können, wird das Siegert-Theorem benutzt. Der resultierende Operator wird in elektrische und magnetische Multipole zerlegt.

- In Kapitel 8 wird der in Kapitel 7 gefundene Operator zunächst zur Berechnung der Deuteron-Photodesintegration verwendet. Diese stellt eine erste einfache Anwendung dar. Andererseits können hier bereits einige Effekte, wie MEC und FSI untersucht werden. Außerdem ist dies ein Test der Matrixelemente der Operatoren, da diese auch in den Dreiteilchenfall eingehen. Im folgenden werden die Photospaltung von ^{3}H und ^{3}He untersucht und die Matrixelemente der Born-Amplitude berechnet. Kapitel 8.3 enthält die Ergebnisse zur Photodesintegration und der inversen Reaktion.

- In Kapitel 9 wird die Pion-Absorption am Triton kurz beschrieben. Diese Reaktion stellt eine weitere Anwendung des verwendeten Formalismus dar. Der Unterschied liegt in der Berechnung der Born-Amplitude. In diesem Fall wird der Absorptionsprozeß der Pionen beschrieben. Die Dynamik der Nukleonen bleibt unverändert.

- Ein weiterer Vergleich der Näherungsmethoden wird in Kapitel 10 anhand der n-d-Streuung durchgeführt.

- In Kapitel 11 werden die Ergebnisse diskutiert und ein Ausblick auf zukünftige Aufgaben gegeben.

- Im Anhang werden wichtige Formeln und Rechnungen aufgeführt, die aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht im Hauptteil angegeben worden sind. Außerdem sind dort Graphiken der Triton-Wellenfunktion abgebildet.

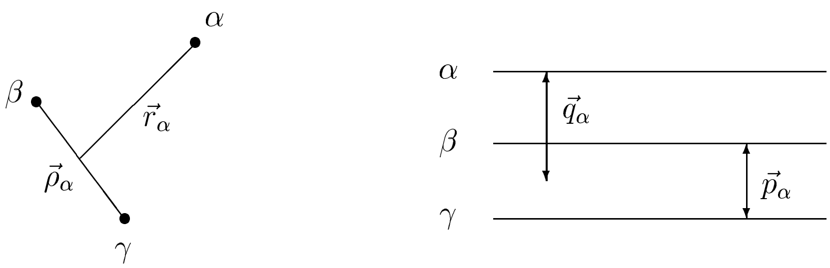
2 AGS-Formalismus

2.1 Kinematik und Notation

Zur Beschreibung eines Dreiteilchensystems ist es wie im Zweiteilchenfall günstiger, statt mit den Einzelimpulsen (Koordinaten) mit dem Gesamtimpuls (Gesamtschwerpunkt) und den Relativimpulsen (Relativkoordinaten) zu rechnen. Man verwendet dazu Jacobi-Koordinaten $(\vec{P}, \vec{p}, \vec{q})$, bzw. $(\vec{R}, \vec{\rho}, \vec{r})$, die durch die Impulsvektoren $\vec{k}_i$, bzw. Ortsvektoren $\vec{x}_i$ der einzelnen Teilchen wie folgt ausgedrückt werden können:

$$
\begin{aligned}
\vec{R} &= \frac{m_\alpha \vec{x}_\alpha + m_\beta \vec{x}_\beta + m_\gamma \vec{x}_\gamma}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma} & \vec{P} &= \vec{k}_\alpha + \vec{k}_\beta + \vec{k}_\gamma \\[2em]
\vec{\rho}_\alpha &= \vec{x}_\beta - \vec{x}_\gamma & \vec{p}_\alpha &= \frac{m_\gamma \vec{k}_\beta - m_\beta \vec{k}_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} \\[2em]
\vec{r}_\alpha &= \vec{x}_\alpha - \frac{m_\beta \vec{x}_\beta + m_\gamma \vec{x}_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} & \vec{q}_\alpha &= \frac{(m_\beta + m_\gamma)\vec{k}_\alpha - m_\alpha(\vec{k}_\beta + \vec{k}_\gamma)}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma}\,.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

$\vec{R}$ ist die Koordinate des Gesamtschwerpunkts, $\vec{P}$ ist der Gesamtimpuls. Im Zweiteilchensubsystem (β, γ) ist $\vec{\rho}_\alpha$ die Relativkoordinate, $\vec{p}_\alpha$ der Relativimpuls. Die Koordinaten des Teilchens α relativ zum Schwerpunkt des (β, γ)- Subsystems ist $\vec{r}_\alpha$, der zugehörige Relativimpuls ist $\vec{q}_\alpha$. Dabei ist $(\alpha\,\beta\,\gamma)$ eine zyklische Permutation von $(1\,2\,3)$. Die geometrische und kinematische Situation ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



Die Transformation zwischen verschiedenen Koordinatensätzen und die Umkehrabbildung der obigen Beziehungen (2.1) sind im Anhang C zu finden.

Im Schwerpunktsystem der drei Teilchen verschwindet der Gesamtimpuls $\vec{P}$. Die den Gesamtimpuls erhaltende Deltadistribution kann dann in allen Gleichungen abgespalten werden [66]. Im folgenden wird daher nur noch der von den Eigenvektoren $|\vec{p}_\alpha, \vec{q}_\alpha\rangle$ der Relativimpulsoperatoren aufgespannte Teilraum betrachtet. Der volle Hamiltonoperator ist dort von der Form

$$
H = \frac{\vec{q}_\alpha^{\,2}}{2M_\alpha} + \frac{\vec{p}_\alpha^{\,2}}{2\mu_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{3} V_\alpha = H_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} V_\alpha\,, \tag{2.2}
$$

wobei V_α die Zweiteilchenwechselwirkung im (β,γ)-Subsystem beschreibt. Die auftretenden reduzierten Massen sind gegeben durch:

$$\mu_\alpha = \frac{m_\beta\, m_\gamma}{m_\beta + m_\gamma} \qquad \text{und} \qquad M_\alpha = \frac{m_\alpha\,(m_\beta + m_\gamma)}{m_\alpha + m_\beta + m_\gamma}\,. \tag{2.3}$$

Die beteiligten Nukleonen werden im folgenden als identisch betrachtet, d.h. die Massendifferenz zwischen Proton und Neutron wird vernachlässigt. Als Vereinfachung der Gleichungen bietet es sich daher an, in nuklearen Einheiten, also $m_\alpha = m_\beta = m_\gamma = 1$ und $\hbar c = 1$, zu rechnen. Der Hamiltonoperator nimmt dann folgende Form an:

$$H = \vec{p}_\alpha^{\,2} + \tfrac{3}{4}\vec{q}_\alpha^{\,2} + \sum_{\alpha=1}^{3} V_\alpha\,. \tag{2.4}$$

Der kinetische Anteil im Hamiltonoperator zerfällt in diesen Koordinaten also in eine Summe aus den kinetischen Energien des Sub- und des Relativsystems. Kennzeichnet man nun alle Zweiteilchengrößen (außer Potentialen) mit einem Dach, so ergibt sich für den Zweiteilchenhamiltonoperator $\hat{H}_\alpha$

$$\hat{H}_\alpha = \vec{p}_\alpha^{\,2} + V_\alpha\,. \tag{2.5}$$

Im Dreiteilchenfall führt man nun sog. Kanalhamiltonoperatoren

$$H_\alpha = \tfrac{3}{4}\vec{q}_\alpha^{\,2} + \vec{p}_\alpha^{\,2} + V_\alpha = \tfrac{3}{4}\vec{q}_\alpha^{\,2} + \hat{H}_\alpha \tag{2.6}$$

ein, die die freie Bewegung des Teilchens α relativ zum gebundenen Subsystem (β,γ) der beiden anderen Teilchen beschreiben. Der Gesamthamiltonoperator läßt sich mit dieser Aufspaltung schreiben als

$$H = H_\alpha + \bar{V}_\alpha \qquad \text{mit} \qquad \bar{V}_\alpha = V - V_\alpha = \sum_\beta (1-\delta_{\alpha\beta})V_\beta = \sum_\beta \bar{\delta}_{\alpha\beta}V_\beta\,. \tag{2.7}$$

Für den Aufbruchkanal, d.h. drei asymptotisch freie Teilchen benötigt man noch folgenden Kanalhamiltonoperator:

$$H_0 = \tfrac{3}{4}\vec{q}_\alpha^{\,2} + \vec{p}_\alpha^{\,2}\,, \tag{2.8}$$

der zu folgender Aufspaltung des Gesamthamiltonoperators führt:

$$H = H_0 + V\,. \tag{2.9}$$

Mit der Vereinbarung $V_0 = 0$ ist dieser Fall bereits in (2.6) enthalten. Die Eigenzustände der Kanalhamiltonoperatoren, die sog. Kanalzustände, sind für den Kanal α mit gebundenem Zweiteilchen-Subsystem (β,γ)

$$|\phi_{\alpha n}\rangle = \left|\hat{\Psi}_{\alpha n}\right\rangle\, |\vec{q}_\alpha\rangle \tag{2.10}$$

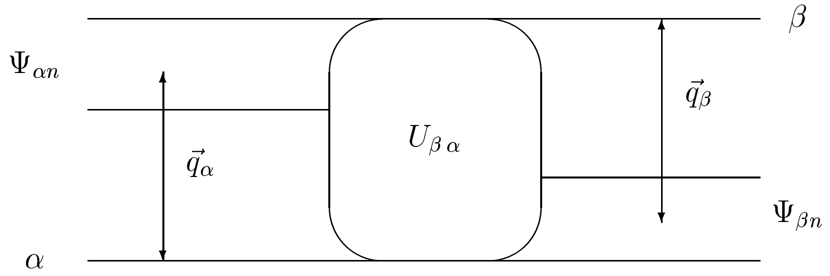
und den Aufbruchkanal, mit drei asymptotisch freien Teilchen

$$|\phi_0\rangle = |\vec{p}_\alpha\rangle\ |\vec{q}_\alpha\rangle\,. \tag{2.11}$$

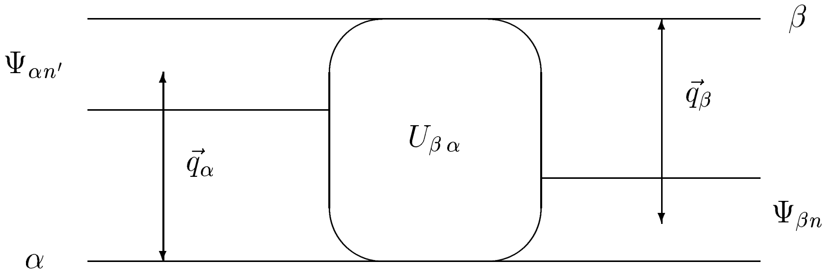
2.2 Die AGS-Gleichungen

Im Dreiteilchenfall gibt es verschiedene Arten von Streuprozessen. Als Eingangszustand läßt sich ein System aus einem asymptotisch freien Teilchen, das sich gegenüber einem gebundenen Zweiteilchensystem bewegt, präparieren. Als Ausgangszustand ist dann elastische Streuung mit und ohne Umordnung, Anregungsstreuung mit und ohne Anregung und Dreiteilchenaufbruch möglich. Die verschiedenen Prozesse sind in den nachstehenden Graphiken schematisch dargestellt.

elastische Streuung mit Umordnung



Anregung



Wie im Zweiteilchenfall benötigt man zur Beschreibung dieser Vorgänge Übergangsoperatoren, die von einer komplexen Energievariablen abhängen und deren on-shell Matrixelemente den physikalisch beobachtbaren Übergangsamplituden entsprechen. Die fast ausschließlich benutzte Wahl ist [54]

$$G(z) = \delta_{\beta\alpha}\, G_\alpha(z) + G_\beta(z)\, U_{\beta\alpha}(z)\, G_\alpha(z)\,, \tag{2.12}$$

mit den Resolventen

$$G(z) = (z - H)^{-1} \tag{2.13}$$

und

$$G_\alpha(z) = (z - H_\alpha)^{-1} \tag{2.14}$$

Die volle Resolvente läßt sich über

$$G_\alpha^{-1} - G^{-1} = \bar{V}_\alpha \tag{2.15}$$

auch schreiben als

$$G = G_\alpha + G_\alpha \, \bar{V}_\alpha \, G = G_\alpha + G \, \bar{V}_\alpha \, G_\alpha \, . \tag{2.16}$$

Verwendet man die Beziehung zwischen S-Matrix und Resolventen ('Reduktionsformel'), so erhält man für die S-Matrixelemente [66]

$$\begin{aligned} S_{\beta m,\alpha n}(\vec{q}\,'_\beta, \vec{q}_\alpha) &= \delta_{\beta\alpha}\delta_{mn}\, \delta(\vec{q}\,'_\beta - \vec{q}_\alpha) \\ & \quad -2\pi i\, \delta(E'_{\beta m} - E_{\alpha n})\, \langle \Psi_{\beta m} | \, \langle \, \vec{q}\,'_\beta \, | \, U_{\beta\alpha} \, | \, \Psi_{\alpha n} \, \rangle \, | \vec{q}_\alpha \rangle \ . \end{aligned} \tag{2.17}$$

Diese Beziehung zeigt, daß die $U_{\beta\alpha}(z)$ die gesuchten Operatoren für die elastische Anregungsstreuung sind. Entsprechend ist $U_{0\alpha}$ der entsprechende Übergangsoperator für den Aufbruchkanal. Sie stellen die direkte Verallgemeinerung des Zweiteilchen-T-Operators dar.

Die $U_{\beta\alpha}(z)$ erfüllen die Faddeev-artigen [52] Alt-Grassberger-Sandhas-Gleichungen [54]

$$U_{\beta\alpha}(z) = \bar{\delta}_{\beta\alpha} \, G_0^{-1}(z) + \sum_\gamma \bar{\delta}_{\beta\gamma} \, T_\gamma(z) \, G_0(z) \, U_{\gamma\alpha}(z) \, , \tag{2.18}$$

mit

$$G_0(z) = (z - H_0)^{-1} \quad \text{und} \quad \bar{\delta}_{\alpha\beta} = 1 - \delta_{\alpha\beta} \, . \tag{2.19}$$

Die Gleichungen sind gekoppelt, d.h sie behandeln alle Kanäle simultan und besitzen im Gegensatz zu den kanalseparaten Lippmann-Schwinger-Gleichungen für alle reellen z eine eindeutige Lösung. In den obigen Gleichungen ist auch der Aufbruchkanal $\beta = 0$ enthalten:

$$U_{0\alpha}(z) = G_0^{-1}(z) + \sum_\gamma T_\gamma(z) \, G_0(z) \, U_{\gamma\alpha}(z) \, . \tag{2.20}$$

Die Zweiteilchenpotentiale gehen über die T-Matrizen $T_\gamma(z)$ in die AGS-Gleichungen ein. Es gilt

$$T_\gamma(z) = V_\gamma + V_\gamma \, G_\gamma(z) \, V_\gamma \, , \tag{2.21}$$

wobei die T-Matrizen die Zweiteilchen-LS-Gleichungen

$$T_\gamma(z) = V_\gamma + V_\gamma \, G_0(z) \, T_\gamma(z) \tag{2.22}$$

erfüllen. Die Dreiteilchenoperatoren $T_\gamma(z)$ hängen mit den Zweiteilchenoperatoren $\hat{T}_\gamma(z)$ über

$$\langle\, (\gamma)\, \vec{q}\,\vec{p}\,|\, T_\gamma(z)\,|\, \vec{q}\,'\, \vec{p}\,'(\gamma)\,\rangle = \delta(\vec{q}-\vec{q}\,')\, \langle\, \vec{p}\,|\, \hat{T}_\gamma(z-\tfrac{3}{4}q^2)\,|\, \vec{p}\,'\,\rangle \tag{2.23}$$

zusammen. Die Energie im Zweiteilchen-Subsystem ist also gerade um die kinetische Energie des dritten Teilchens verschoben.

Das Gleichungssystem (2.18) kann auch als Matrixgleichung mit Lippmann-Schwinger-Struktur geschrieben werden, wenn man folgende operatorwertigen Matrizen einführt:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\beta\alpha}(z) &= U_{\beta\alpha}(z) \\ \mathbf{G}_{0,\beta\alpha}(z) &= \delta_{\beta\alpha} G_0(z)\, T_\alpha(z)\, G_0(z) \\ \mathbf{V}_{\beta\alpha}(z) &= \bar{\delta}_{\beta\alpha}\, G_0^{-1}(z)\,. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Damit läßt sich (2.18) schreiben als:

$$\mathbf{T}(z) = \mathbf{V}(z) + \mathbf{V}(z)\, \mathbf{G}_0(z)\, \mathbf{T}(z)\,. \tag{2.25}$$

Analog zum Zweiteilchenproblem kann man die Resolvente

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{G}_0(z) + \mathbf{G}_0(z)\, \mathbf{T}(z)\, \mathbf{G}_0(z) \tag{2.26}$$

definieren und erhält

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{G}_0(z) + \mathbf{G}_0(z)\, \mathbf{V}(z)\, \mathbf{G}(z)\,, \tag{2.27}$$

wobei auch hier

$$\mathbf{T}(z)\, \mathbf{G}_0(z) = \mathbf{V}(z)\, \mathbf{G}(z) \tag{2.28}$$

gilt.

2.3 Übergangsamplitude für die Photospaltung

Der Wirkungsquerschnitt für die Zweiteilchen-Photodesintegration des Tritons wird bestimmt durch die Übergangsamplitude

$$^{(-)}\langle\, \Psi_\beta\,|\, H_{em}\,|\, \Psi_t\,\rangle. \tag{2.29}$$

Der Streuzustand $|\Psi_\beta\rangle^{(-)\dagger}$ ist dabei über den Kanalzustand $|\Phi_\beta\rangle$ wie folgt definiert:

$$|\Psi_\beta\rangle^{(-)\dagger} = (-i\epsilon) \lim_{\epsilon\to 0} G(E_\beta - i\epsilon)\, |\Phi_\beta\rangle = \Omega_\beta^{(-)}\, |\Phi_\beta\rangle\ . \tag{2.30}$$

Mit Hilfe der Definition der Übergangsoperatoren (2.12) erhält man somit für den adjungierten Mølleroperator folgende Darstellung:

$$\Omega_\beta^{(-)\dagger} = \delta_{\beta\alpha} + U_{\beta\alpha}(E_\beta + i0)\, G_\alpha(E_\beta + i0)\,. \tag{2.31}$$

Die rechte Seite hängt nur scheinbar von α ab. Dies sieht man leicht unter Verwendung von (2.12) und (2.16)

$$\Omega_\beta^{(-)\dagger} = \delta_{\beta\alpha} + (G_\beta^{-1}\, G\, G_\alpha^{-1} - \delta_{\beta\alpha}\, G_\beta^{-1})\, G_\alpha = G_\beta^{-1}\, G = 1 + \bar{V}_\beta\, G\,. \tag{2.32}$$

Um eine Integralgleichung für diesen Operator zu erhalten, werden die AGS-Gleichungen (2.18) mit G_α multipliziert und auf beiden Seiten $\delta_{\beta\alpha}$ addiert:

$$\begin{aligned}
U_{\beta\alpha}\, G_\alpha + \delta_{\beta\alpha} &= \bar{\delta}_{\beta\alpha} G_0^{-1}\, G_\alpha + \delta_{\beta\alpha} + \sum_\gamma \bar{\delta}_{\beta\gamma}\, T_\gamma\, G_0\, U_{\gamma\alpha}\, G_\alpha \\
&= \bar{\delta}_{\beta\alpha} G_0^{-1}\, G_\alpha + \delta_{\beta\alpha} + \sum_\gamma \bar{\delta}_{\beta\gamma}\, T_\gamma\, G_0\, (\Omega_\gamma^{(-)\dagger} - \delta_{\gamma\alpha}) \\
&= \bar{\delta}_{\beta\alpha}(G_0^{-1}\, G_\alpha - T_\alpha\, G_0) + \delta_{\beta\alpha} + \sum_\gamma \bar{\delta}_{\beta\gamma}\, T_\gamma\, G_0\, \Omega_\gamma^{(-)\dagger} \\
&= \bar{\delta}_{\beta\alpha}\, \underbrace{(G_0^{-1}\, G_\alpha - V_\alpha\, G_\alpha)}_{=1} + \delta_{\beta\alpha} + \sum_\gamma \bar{\delta}_{\beta\gamma}\, T_\gamma\, G_0\, \Omega_\gamma^{(-)\dagger}\,.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Durch Vergleich mit (2.31) erhält man schließlich:

$$\Omega_\beta^{(-)\dagger} = 1 + \sum_\gamma \bar{\delta}_{\beta\gamma}\, T_\gamma\, G_0\, \Omega_\gamma^{(-)\dagger}\,. \tag{2.34}$$

Die Übergangsamplitude für die Zweiteilchen-Photodesintegration läßt sich damit schreiben als:

$$\begin{aligned}
&{}^{(-)}\langle\, \Psi_\beta \,|\, H_{em} \,|\, \Psi_t \,\rangle \\
&= \langle\, \Phi_\beta \,|\, \Omega_\beta^{(-)\dagger} H_{em} \,|\, \Psi_t \,\rangle \\
&= \langle\, \Phi_\beta \,|\, H_{em} \,|\, \Psi_t \,\rangle + \sum_\gamma \bar{\delta}_{\beta\gamma}\, \langle\, \Phi_\beta \,|\, T_\gamma(E + i0)\, G_0(E + i0)\, \Omega_\gamma^{(-)\dagger}\, H_{em} \,|\, \Psi_t \,\rangle\,.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Aus dieser Gleichung wird in Kapitel 5 durch Partialwellenentwicklung und off-shell-Erweiterung ein Integralgleichungssystem für die Übergangsamplitude abgeleitet. Außerdem wird die T-Matrix separabel genähert, um eine eindimensionale Integralgleichung zu erhalten. Der erste Term auf der rechten Seite, der sog. Born-Term, beschreibt den Übergang des Tritons in ein Deuteron und ein freies Neutron. Bei diesem Übergang findet keine Wechselwirkung zwischen Neutron und Deuteron statt, diese sog. final-state-interaction (FSI) wird erst durch die volle Gleichung beschrieben. Der Born-Term alleine stellt erst bei genügend hohen Energien eine gute Näherung dar, da dann der Impulsübertrag die Wechselwirkungszeit so kurz macht, daß keine Umordnungen mehr möglich sind.

Zu einer Gleichung für den Dreiteilchenaufbruch gelangt man, indem man in (2.34) den Index $\alpha = 0$ setzt, d.h.

$$\Omega_0^{(-)\dagger} = 1 + \sum_\gamma T_\gamma \, G_0 \, \Omega_\gamma^{(-)\dagger} \,. \tag{2.36}$$

Die entsprechende Gleichung für die Dreiteilchen-Photospaltung lautet dann:

$$\begin{aligned} & {}^{(-)}\langle \, \Psi_0 \, | \, H_{em} \, | \, \Psi_t \, \rangle \\ = \; & \langle \, \Phi_0 \, | \, \Omega_0^{(-)\dagger} H_{em} \, | \, \Psi_t \, \rangle \\ = \; & \langle \, \Phi_0 \, | \, H_{em} \, | \, \Psi_t \, \rangle + \sum_\gamma \langle \, \Phi_0 \, | \, T_\gamma(E+i0) \, G_0(E+i0) \, \Omega_\gamma^{(-)\dagger} \, H_{em} \, | \, \Psi_t \, \rangle \,. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Auch hier gibt es einen Born-Term, der den Übergang des Tritons in drei freie Teilchen beschreibt. Im Unterschied zu (2.35) handelt es sich jedoch um keine Integralgleichung. Die final-state Wechselwirkung wird hier als Summe über alle möglich Zweifragment-Kanäle beschrieben. Nach Lösen der Integralgleichung (2.35) läßt sich mit Hilfe dieser Amplituden bereits der Dreiteilchenaufbruch beschreiben.

Die oben angegebenen Gleichungen lassen sich durch Austausch des Wechselwirkungsoperators auf andere Prozesse, wie die π- oder η-Absorption anwenden. Für die π-Absorption wurden in Zusammenarbeit mit L. Canton bereits Rechnungen unternommen [67,68], diese werden in Kapitel 9 kurz vorgestellt.

3 Potentiale

In diesem Kapitel werden die verwendeten Nukleon-Nukleon-Potentiale und deren Parametrisierung beschrieben. Es gibt bisher kein parameterfreies NN-Modell, so daß die freien Parameter an die Zweiteilchenobservablen angefittet sind. Die folgenden beiden Tabellen enthalten die experimentellen Werte für die wesentlichen Zweiteilchenobservablen (zur Definition siehe Anhang A).

Bindungsenergie E_D (MeV)	2.224644 ± 0.000046	Houk [69]
	2.224575 ± 0.000009	van der Leun [70]
	2.224589 ± 0.000002	Greene [71]
Quadrupolmoment Q_d (fm^2)	0.2860 ± 0.0015	Reid [72,73]
		Bischop [74]
	0.2859 ± 0.0003	Bischop [74]
		Ericson [75]
Magnetisches Moment μ_d (μ_N)	0.857406 ± 0.000001	Lindgren [76]
Asymptotisches Norm A_S ($\mathrm{fm}^{-1/2}$)	0.8846 ± 0.0016[1]	Ericson [75]
Asymptotisches D/S Verhältnis	0.0271 ± 0.0008	Ericson [75]
	0.0256 ± 0.0004	Rodning [77]
r_d (fm)	1.9635 ± 0.045	Bérard [78]
	1.9660 ± 0.0068	Simon [79]

[1] Experimentelle Werte für A_S sind modellabhängig

Tabelle 1: Experimentelle Werte der Deuteronobservablen.

$^1S_0(nn)$	:	a_s (fm)	-18.45 ± 0.46[1]	Dumbrajs [80]
			-16.73 ± 0.47[2]	Dumbrajs [80]
	:	r_s (fm)	2.83 ± 0.16[1]	Dumbrajs [80]
			2.85 ± 0.6[2]	Dumbrajs [80]
$^1S_0(np)$	:	a_s (fm)	-23.748 ± 0.010	Dumbrajs [80]
	:	r_s (fm)	2.75 ± 0.05	Dumbrajs [80]
$^1S_0(pp)$	:	a_s (fm)	-17.9[3]	Dumbrajs [80]
	:	r_s (fm)	2.82[3]	Dumbrajs [80]
$^3S_1(np)$	:	a_t (fm)	5.424 ± 0.004	Dumbrajs [80]
	:	r_t (fm)	1.759 ± 0.005	Dumbrajs [80]

[1] aus $D(\pi^-, \gamma)2n$ Experimenten
[2] aus $D(n, p)2n$ Experimenten
[3] korrigierte Werte (elektromagnetische Effekte und np-Massendifferenz)

Tabelle 2: Experimentelle Niederenergie-Parameter Streulänge a, effektive Reichweite r.

3.1 Yamaguchi

Ein einfaches Potential zur Beschreibung der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung ist das separable Yamaguchi-Potential [48,49]:

$$V^\sigma = |g_\sigma\rangle\ \lambda_\sigma\ \langle g_\sigma| \qquad \text{mit} \qquad \sigma = \text{S(ingulett), T(riplett)}\,. \tag{3.1}$$

Das Yamaguchi-Potential ist ein empirisches Potential, welches nur in der S-Welle wirkt. Man hat daher folgende Impulsraumdarstellung:

$$\langle\,\vec{p}\,|\,V^\sigma\,|\,\vec{q}\,\rangle = Y_{00}(\hat{p})\,V_0^\sigma(p,q)\,Y_{00}(\hat{q})\,, \tag{3.2}$$

wobei

$$V_0^\sigma(p,q) = -g_\sigma^*(p)\,\lambda_\sigma\,g_\sigma(q))\,. \tag{3.3}$$

Die Formfaktoren $g_\sigma(p)$ sind im Impulsraum definiert durch:

$$g_\sigma(p) = \frac{\sqrt{4\pi}}{p^2+\beta_\sigma^2}\,. \tag{3.4}$$

Das Zweiteilchenproblem ist mit diesem Potential analytisch lösbar. Die Deuteron-Wellenfunktion ist gegeben durch $|\Psi_d\rangle = \frac{1}{N}\,G_0(E_d)\,|g\rangle$, mit der Normierungskonstanten

$$\frac{1}{N} = \sqrt{\frac{4}{\pi}\,\alpha\,\beta\,(\alpha+\beta)^3}\,, \tag{3.5}$$

wobei $\alpha^2 = -E_d$ die Bindungsenergie ist. Auch die Streuparameter lassen sich analytisch berechnen. Für die effektive Reichweite r_0 und die Streulänge a erhält man im Falle des Spin-Tripletts ($^3S_1$):

$$a = \frac{2(\alpha+\beta)^2}{\alpha+\beta(\alpha+2\beta)}\,, \qquad r_0 = \frac{(\alpha+\beta)^2+2\beta^2}{\beta(\alpha+\beta)^2}\,, \tag{3.6}$$

$$\lambda = \frac{\beta}{\pi^2}(\alpha+\beta)^2\,, \tag{3.7}$$

bzw. im Singulett-Kanal ($^1S_0$):

$$\frac{1}{a} = \frac{\beta}{2}\left(1-\frac{\beta^3}{\pi^2\lambda}\right)\,, \qquad \frac{1}{r_0} = \frac{1}{\beta}\left(1+\frac{2\beta^3}{\pi^2\lambda}\right)\,, \tag{3.8}$$

$$\lambda = \frac{a\beta^4}{\pi^2(a\beta-2)} = \frac{2\beta^3}{\pi^2(\beta r_0-1)}\,. \tag{3.9}$$

Werden die Parameter aus vorgegebenen experimentellen Werten berechnet, müssen sie mit genügend hoher Genauigkeit berechnet werden, da es sich um kubische Gleichungen handelt. Je nachdem in welchem Wertebereich man sich befindet, können kleine Ungenauigkeiten unerwünschte Abweichungen bei den berechneten Observablen haben. Ein Beispiel hierfür sind die von Gibson und Lehman [4] angegebenen Parametersätze. In Tabelle 3 sind die mit den Original-Parametern berechneten Werte angegeben. Zum Vergleich sind die von Gibson und Lehman angegebenen Werte in Klammern aufgeführt.

Potential		$\lambda\ (fm^{-3})$	$\beta\ (fm^{-1})$	$a\ (fm)$	$r_0\ (fm)$	E_d(MeV)
n-p Triplett	I	0.3815	1.406	5.433	1.761	-2.203
				(5.423)	(1.761)	(-2.225)
	II	0.220	1.15	5.806	2.088	-2.082
				(5.68)	(2.09)	(-2.225)
n-p Singulett	I	0.1445	1.153	-23.196	2.732	
				(-23.715)	(2.74)	
	II	0.148	1.15	-42.217	2.680	
				(-21.25)	(2.74)	
p-p Singulett		0.1534	1.223	-7.853	2.794	
				(-7.823)	(2.794)	
n-n Singulett		0.1323	1.130	-16.851	2.841	
				(-17.0)	(2.84)	
n-p Triplett	III	0.220	1.14525	5.666	2.081	2.226
n-n Singulett	III	0.148	1.16225	-22.998	2.710	

Tabelle 3: Parameter für das Yamaguchi-Potential. Die Werte in Klammern sind aus [4].

Außerdem werden in dieser Arbeit zu Testzwecken noch einige andere Parametersätze verwendet.

Nr.		$\lambda\ (fm^{-3})$	$\beta\ (fm^{-1})$	$a\ (fm)$	$r_0\ (fm)$	E_d(MeV)
1	$^1S_0$	0.144323	1.14943	-26.30963	2.72506	
	$^3S_1$	0.220000	1.14943	5.78838	2.08695	-2.09931
2	$^1S_0$	0.148	1.16225	-22.99809	2.70996	
	$^3S_1$	0.220	1.14525	5.66621	2.08129	-2.22594
3	$^1S_0$	0.148	1.15000	-42.21706	2.68033	
	$^3S_1$	0.220	1.15000	5.80562	2.08772	-2.082
4	$^1S_0$	0.131482	1.11767	-23.57491	2.81998	
	$^3S_1$	0.285929	1.26102	5.6662	1.92000	-2.28894
5	$^1S_0$	0.1445	1.153	-23.19554	2.73163	
	$^3S_1$	0.3815	1.1406	5.43301	1.76123	-2.203
6	$^1S_0$	0.1542	1.17710	-23.71132	2.67039	
	$^3S_1$	0.3817	1.14055	5.41068	1.76024	-2.22592
7	$^1S_0$	0.182166	1.14943	11.20099	2.33969	
	$^3S_1$	0.182166	1.14943	11.20099	2.33969	-0.42504

Tabelle 4: Parameter für das Yamaguchi-Potential.

3.2 Malfliet-Tjon

Bei den semirealistischen Malfliet-Tjon-Potentialen [50] handelt es sich um nicht koppelnde S-Wellen-Potentiale. Die Potentiale sind eine Überlagerung von Yukawa-Potentialen. Als Ergebnis erhält man ein Potential mit einem langreichweitigen attraktiven und einem kurzreichweitigen repulsiven Soft-Core Anteil. In der Ortsdarstellung hat man die Form

$$V_\sigma(r) = \lambda_\sigma^A \frac{-e^{r/r_A}}{r/r_A} + \lambda_\sigma^R \frac{-e^{r/r_R}}{r/r_R} . \tag{3.10}$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß das Potential nur in der S-Welle wirkt, findet man im Impulsraum die folgende Darstellung:

$$V(p,q) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\lambda_\sigma^R}{r_R} \frac{\ln\left(\frac{(p+q)^2+1}{(p-q)^2+1}\right)}{pq} + \frac{\lambda_\sigma^A}{r_A} \frac{\ln\left(\frac{(p+q)^2+1}{(p-q)^2+1}\right)}{pq} \right) . \tag{3.11}$$

Auch für das Malfliet-Tjon Potential gibt es in der Literatur verschiedene Parametersätze. Ursprünglich gab es zwei spinabhängige Potentiale, eines mit repulsivem Core (MT I/III) und ein rein attraktives (MT II/IV). Dabei beschreibt das jeweils erstgenannte den Spin-Singulett ($\sigma = s$) und das zweite den Spin-Triplett-Zustand ($\sigma = d$). MT V beschreibt die Mittelung von MT I/III und MT VI die von MT II/IV. Die NN-Wechselwirkung ist hier ohne Berücksichtigung des Spins, wird also in Singulett und Triplett als gleich angenommen. Tabelle 5 enthält eine Auflistung der in der Literatur verwendeten Parameter.

Potential no.	V_1 $(MeV fm)$	μ_1 (fm^{-1})	V_2 $(MeV fm)$	μ_2 (fm^{-1})	E_2 (MeV)	Ref.
I	1458.047	3.110	520.872	1.550		[50]
Ia	1438.720	3.110	513.968	1.550		[81]
Ib	1461.5156	3.110	521.9594	1.555		[82]
Ic	1458.047	3.110	520.872	1.555		[83]
III	1458.047	3.110	635.306	1.550	-2.409	[50]
IIIa	1438.720	3.110	626.885	1.550	-2.231	[81]
IIIb	1461.5156	3.110	636.7847	1.555		[82]
IIIc	1458.047	3.110	635.306	1.555	2.242	[83]
V	1458.047	3.110	578.089	1.550	-0.414	[50]
Va	1438.4812	3.110	570.316	1.550	-0.350	[81]
Vb	1438.4812	3.110	570.3316	1.550	-0.350	[84]
Vc	1458.047	3.110	578.089	1.555	-0.351	[83]
II			52.4818	0.809		[50]
IV			65.1090	0.633	-2.209	[50]
VI			58.7954	0.723	-0.343	[50]

Tabelle 5: Parameter für das Malfliet-Tjon-Potential.

Wie auch von Schellingerhout [83] bemerkt, geben Payne et al. [81] in ihrer Tabelle I irrtümlich für V_2 den Wert 570.316 anstelle von 570.3316 wie richtig in Referenz [84,85] an. Außerdem wurden in dieser Arbeit die Werte für MT-I/III mit 0.9866 multipliziert, damit sie eine bessere Deuteron-Bindungsenergie ergeben. Der Parametersatz von Bakker [82] ist unabhängig von allen anderen und wird auch in anderen Arbeiten [11,12,28,30,31,86,87] verwendet. Mit den oben angegebenen Parametersätzen ergeben sich folgende Werte für die Zweiteilchen-Observablen:

Potential	E_D (MeV)	r (fm)	A_S (fm$^{-1/2}$)	$a_s(nn)$	$r_s(nn)$	$a_t(nn)$	$r_t(nn)$
I-III	-2.4086	1.9328	0.93203	-28.74599	2.84958	5.34890	1.87550
Ia-IIIa	-2.2307	1.9897	0.90430	-23.58235	2.87860	5.51320	1.89299
Ib-IIIb	-2.2720	1.9760	0.91086	-23.77477	2.87835	5.47375	1.88948
Ic-IIIc	-2.2424	1.9859	0.90619	-23.23048	2.88170	5.50216	1.89239
II-IV	-2.2086	2.0126	0.92474	-23.05570	2.88172	5.50329	1.73410
V	-0.4140	4.0106	0.50841	11.29297	2.28097	11.29297	2.28097
Va	-0.3497	4.3147	0.48239	12.17465	2.30302	12.17465	2.30302
Vb	-0.3500	4.3132	0.48251	12.17018	2.30289	12.17018	2.30289
Vc	-0.3506	4.3103	0.48276	12.16167	2.30314	12.16167	2.30314
VI	-0.3427	4.3652	0.48164	12.31987	2.33639	12.31987	2.33639

Tabelle 6: Deuteron- und Niederenergie-Parameter mit den Malfliet-Tjon-Potentialen. Die Streuparameter sind in (fm) angegeben.

3.3 Paris

Das Paris-Potential ist ein realistisches auf einer feldtheoretischen Beschreibung beruhendes Modell der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung. Der lang- und mittelreichweitige Anteil der Kernkraft $r \geq 0.8 fm$ wird durch $\pi-$ und $\omega-$ korrelierten und unkorrelierten $2\pi-$ Austausch beschrieben und enthält keine freien Parameter. Bei $r < 0.8$ fm schließt dann ein energieabhängiger phänomenologischer Soft-Core an, der sechs freie Parameter erfordert. Die Parametrisierung für die beiden Isospinzustände $T = 0$ und $T = 1$ lautet im Impulsraum:

$$\begin{aligned} V(\vec{p},\vec{q}) = \quad & V_0(\vec{p},\vec{q})\,\Omega_0 + V_1(\vec{p},\vec{q})\,\Omega_1 && \text{Zentralpotential} \\ + \quad & V_{LS}(\Delta^2)\,\Omega_{LS} && \text{Spin-Bahn-Potential} \\ + \quad & V_T(\Delta^2)\,\Omega_T && \text{Tensor-Potential} \\ + \quad & V_{SO^2}(\Delta^2)\,\Omega_{SO^2} && \text{quadratisches Spin-Bahn-Potential}\,, \end{aligned} \tag{3.12}$$

mit $\vec{\Delta} = \vec{p} - \vec{q}$ und

$$\Omega_0 = \frac{1-\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2}{4} \tag{3.13}$$

$$\Omega_1 = \frac{3+\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2}{4} \tag{3.14}$$

$$\Omega_{LS} = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_1+\vec{\sigma}_2)\cdot(\vec{p}\times\vec{q}) \tag{3.15}$$

$$\Omega_T = \Delta^2\,\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2 - 3\vec{\sigma}_1\,\vec{\Delta}\,\vec{\sigma}_2\,\vec{\Delta} \tag{3.16}$$

$$\Omega_{SO^2} = \vec{\sigma}_1\,(\vec{p}\times\vec{q})\,\vec{\sigma}_2\,(\vec{p}\times\vec{q})\,. \tag{3.17}$$

Hier sind $\vec{p}$ und $\vec{q}$ der ein- bzw. auslaufende Impuls, Ω_0 und Ω_1 die Projektionsoperatoren zu Spin 0 und Spin 1, $\vec{\sigma}_1$ und $\vec{\sigma}_2$ die Spinoperatoren der einzelnen Nukleonen. Die Zentralkomponenten V_0 und V_1 sind durch

$$V_i(\vec{p},\vec{q}) = V^a(\Delta^2) + \frac{\hbar^2}{m}(\vec{p}^{\,2}+\vec{q}^{\,2})\,V^b(\Delta^2), \qquad i=0,1 \tag{3.18}$$

definiert. Jede Komponente $V(\Delta^2)$ wird durch eine Summe von Yukawa-Termen dargestellt,

$$V(\Delta^2) = \frac{1}{2\pi^2}\sum \frac{g_i}{m_i}\,\frac{1}{m_i^2+\Delta^2}\,f(m_i) \tag{3.19}$$

mit

$$f(m_i) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad V_{0,1} \\ \frac{1}{m_i^2} & \text{für} \quad V_{LS} \quad \text{und} \qquad V_T \\ \frac{1}{m_i^4} & \text{für} \quad V_{SO^2}\,. \end{cases} \tag{3.20}$$

Die Parameter m_i und g_i werden in [42] angegeben. Die durch das Paris-Potential beschriebene Wechselwirkung ist ladungsunabhängig und erhält den Gesamtdrehimpuls $\vec{J}$ sowie den Betrag des Gesamtspins $\vec{S}$. Außerdem ist sie invariant gegenüber Zeitumkehr und Raumspiegelung, d.h. die Parität π ist ebenfalls eine Erhaltungsgröße.

E_D	=	2.2245 MeV	Q_D	=	0.279 fm^2
P_D	=	0.0577	μ_D	=	0.847 μ_N
D/S	=	0.02606	r_d	=	1.972 fm
$a_s(pp)$	=	-17.612 fm	$r_s(pp)$	=	2.881 fm
$a_t(np)$	=	5.428 fm	$r_t(np)$	=	1.764 fm

Tabelle 7: Deuteron- und Niederenergie-Parameter mit dem Paris-Potential.

3.4 Bonn

Das quantenfeldtheoretisch begründete Bonn-Potential [43] beschreibt die NN-Wechselwirkung unterhalb der Pionen-Produktionsschwelle (276.06 MeV). Als Austauschteilchen werden Delta-Isobare und Mesonen berücksichtigt. Im Gegensatz zum Paris-Potential, das auf einem dispersionstheoretischen Ansatz beruht, wird das Bonn-Potential mit Hilfe von Wechselwirkungs-Lagrange-Dichten berechnet. In der endgültigen Form weist das Bonn-Potential eine ähnliche Struktur wie das Paris-Potential auf, d. h. es treten je nach Art des ausgetauschten Mesons verschiedene Wechselwirkungstypen wie Zentralpotential, Spin-Bahn-Potential usw. auf. In dieser Arbeit wird die energieunabhängige Version des Potentials mit den Parametersätzen A und B verwendet. Die Parameter sind in [44] angegeben.

E_D	=	2.2245 MeV	Q_D	=	0.274 fm^2
P_D	=	0.0438	μ_D	=	0.855 μ_N
D/S	=	0.02633	r_d	=	1.969 fm
$a_s(np)$	=	-23.750 fm	$r_s(np)$	=	2.713 fm
$a_t(np)$	=	5.427 fm	$r_t(np)$	=	1.763 fm

Tabelle 8: Deuteron- und Niederenergie-Parameter mit dem Bonn A-Potential.

E_D	=	2.2246 MeV	Q_D	=	0.278 fm^2
P_D	=	0.04987	μ_D	=	0.851 μ_N
D/S	=	0.02646	r_d	=	1.969 fm
$a_s(np)$	=	-23.750 fm	$r_s(np)$	=	2.710 fm
$a_t(np)$	=	5.424 fm	$r_t(np)$	=	1.761 fm

Tabelle 9: Deuteron- und Niederenergie-Parameter mit dem Bonn B-Potential.

Vor kurzem wurde von Machleidt et al. eine neue ladungsabhängige Version (CD-Bonn) entwickelt [88], die aber in dieser Arbeit noch keine Verwendung findet.

3.5 Nijmegen

Die erste Version des Nijmegen-Potentials wurde ursprünglich 1978 [45] entwickelt. In den letzten Jahren wurde diese immer weiter verbessert, unter Berücksichtigung der neuesten Streudaten. Es hat die gleiche Struktur wie die vorher genannten Potentiale, verfügt aber noch über einige Erweiterungen hinsichtlich der Mesonenaustauschdiagramme sowie die Ladungsabhängigkeit. Neben den pseudoskalaren Mesonen werden Skalar- und Vektormesonen miteinbezogen. Es berücksichtigt den Massenunterschied zwischen geladenen und ungeladenen Pionen und liegt für den $^1S_0$-Kanal in drei Parametrisierungen, entsprechend nn, np und pp Wechselwirkung, vor. Die erste Erweiterung, das Nijm93 [46], fittet die experimentellen Streudaten mit $\chi^2/N = 0.99$. Anschließend wurden weitere Versionen, das

NijmI und NijmII [47] entwickelt. Sie sind eine Mischung aus dem Reid-Potential [89] und dem ursprünglichen Nijmegen-Potential. Das NijmII ist ein lokales Potentials, d.h. es besitzt im Ortsraum keine Impulsabhängigkeit. Daneben gibt es von NijmI und NijmII noch Versionen mit relativistischen Korrekturen.
In dieser Arbeit wird eine separable Näherung des Nijm93, das sog. NEST-Potential verwendet. Die EST-Entwicklung stammt von J. Haidenbauer [65]. Im ${}^1S_0$-Kanal besteht sie aus einer nn- und einer np-Parametrisierung, so daß ladungsabhängige ^{3}H Rechnungen durchgeführt werden können.

E_D	=	2.2233 MeV	Q_D	=	0.271 fm^2
P_D	=	0.0575	μ_D	=	0.850 μ_N
D/S	=	0.02524	r_d	=	1.966 fm
$a_s(nn)$	=	-17.501 fm	$r_s(nn)$	=	2.809 fm
$a_s(np)$	=	-23.737 fm	$r_s(np)$	=	2.679 fm
$a_t(np)$	=	5.417 fm	$r_t(np)$	=	1.747 fm

Tabelle 10: Deuteron- und Niederenergie-Parameter mit dem Nijmegen-93-Potential.

3.6 Vergleich der Potentiale

Die Parameter der Potentiale sind so gefittet, daß die Deuteron- und n-p-Streudaten möglichst gut wiedergegeben werden. Die Diskrepanzen zwischen den Potentialen und den Daten sind teilweise im Alter der Potentiale und der zu dieser Zeit schlechteren Daten zu sehen. Es ist je nach Ansatz aber nicht immer möglich, alle Observablen zu reproduzieren. Die Unterschiede off-shell werden sich aber erst im Dreiteilchenfall zeigen.

4 Näherungsmethoden

4.1 W-Matrix-Methode

Die von Bartnik, Haberzettl und Sandhas [55] vorgeschlagene W-Matrix-Methode wurde für Zentralpotentiale im Impulsraum entwickelt. Im Falle von realistischen Potentialen, die spin- und energieabhängig sind, ist der Bahndrehimpuls L nicht mehr auf Null beschränkt, so daß im Zweiteilchensystem verschiedene L gekoppelt sein können. In diesem Kapitel wird die in [34,90,91] dargestellte Erweiterung zusammenfaßt und die wesentlichen Ergebnisse angeben.

4.1.1 Das Bindungsproblem

Stellt man in einem Zweiteilchenkanal $\eta = (SJT)$ die n-te Bindungswellenfunktion $\Psi^{\eta}_{nL}(p)$ zur Bindungsenergie $E_n = -\alpha_n^2$ mit Hilfe von Formfaktoren $g^{\eta}_{nL}(p)$ dar,

$$\Psi^{\eta}_{nL}(p) = \frac{g^{\eta}_{nL}(p)}{-\alpha_n^2 - p^2}\,, \tag{4.1}$$

so lautet die homogene Lippmann-Schwinger-Gleichung in Drehimpulsdarstellung (mit $\hbar = 1$ und $m = 1$)

$$g^{\eta}_{nL}(p) = \sum_{L'} \int_0^\infty dq\, q^2\, V^{\eta}_{LL'}(p,q)\, \frac{g^{\eta}_{nL'}(q)}{-\alpha_n^2 - q^2}\,. \tag{4.2}$$

Führt man nun die für $p \to 0$ und $q \to 0$ nichtverschwindende Potentialfunktion

$$U^{\eta}_{LL'}(p,q) = p^{-L}\, V^{\eta}_{LL'}(p,q)\, q^{-L'} \tag{4.3}$$

ein, gelangt man zur verallgemeinerten off-shell-W-Matrix-Integralgleichung

$$W^{\eta}_{L\hat{L}}(p,p';E) \;=\; U^{\eta}_{L\hat{L}}(p,p') + \sum_{L'} \int_0^\infty dq\, q^2\, \frac{U^{\eta}_{LL'}(p,q) - U^{\eta}_{LL'}(p,k)}{E - q^2}\, q^{2L'}\, W^{\eta}_{L'\hat{L}}(q,p';E), \tag{4.4}$$

mit

$$k = \begin{cases} \sqrt{E} & \text{für} \quad E \geq 0 \\ \text{beliebig} & \text{für} \quad E < 0 \end{cases}\,, \tag{4.5}$$

die im Gegensatz zu (4.2) für alle negativen Energien $-\alpha_n^2$ Lösungen besitzt. Mit Hilfe dieser, im gesamten Energiebereich nichtsingulären, inhomogenen Integralgleichung gelingt es, sowohl das Bindungs- als auch das Streuproblem zu lösen.

Eine Bestimmungsgleichung für die Bindungsenergie $-\alpha^2$ des Zweiteilchensystems läßt sich mit Hilfe von

$$\hat{F}^{\eta}_{LL'}(k,E) = \delta_{LL'} - \int\limits_0^\infty dq\, q^2\, q^{2L}\, \frac{W^{\eta}_{LL'}(q,k;E)}{E-q^2} \tag{4.6}$$

angeben. Wie in [55] gezeigt, entspricht diese Funktion für positive Energien gerade der bekannten Jost-Funktion. An der Bindungsenergie und nur dort verschwindet die Determinante von $\hat{F}^{\eta}_{nL}$

$$-\alpha^2 = -\alpha_n^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \det \hat{F}^{\eta}_{LL'}(k,-\alpha^2) = 0\,. \tag{4.7}$$

Die zugehörigen normierten Bindungswellenfunktionen $\Psi^{\eta}_{nL}(p)$ sind über

$$\Psi^{\eta}_{nL}(p) \;=\; p^L\, \frac{1}{-\alpha_{\eta n}^2 - p^2} \sum_{\hat{L}} W^{\eta}_{L\hat{L}}(p,k;-\alpha_{\eta n}^2)\, C^{\eta}_{n\hat{L}} \tag{4.8}$$

$$\;=\; p^L\, G_0(-\alpha_{\eta n}^2) \sum_{\hat{L}} \tilde{W}^{\eta}_{L\hat{L}}(p,k;-\alpha_{\eta n}^2) \tag{4.9}$$

gegeben. An dieser Stelle wurden die noch öfter benutzten normierten W-Matrizen

$$\tilde{W}^{\eta}_{L\hat{L}}(p,k;-\alpha_{\eta n}^2) = C^{\eta}_{n\hat{L}}\, W^{\eta}_{L\hat{L}}(p,k;-\alpha_{\eta n}^2) \tag{4.10}$$

eingeführt. Die Normierungskonstanten $C^{\eta}_{n\hat{L}}$ werden aus der Bedingung

$$\sum_{\hat{L}} C^{\eta}_{n\hat{L}}\, \hat{F}^{\eta}_{L\hat{L}}(-\alpha_{\eta n}^2) = 0 \tag{4.11}$$

und der Normierungsbedingung an die Wellenfunktion

$$\sum_L \int\limits_0^\infty dp\, p^2 |\, \Psi^{\eta}_{nL}(p)|^2 = 1 \tag{4.12}$$

bestimmt.

Für die verwendeten Potentiale ergeben sich die gleichen Bindungsenergien wie bei Verwendung des Originalpotentials.

4.1.2 Das Streuproblem

Ebenso einfach wie das Bindungsproblem läßt sich das Streuproblem mit Hilfe der W-Matrix-Methode lösen. Die für positive Energien auftretende Singularität im Kern von (4.4) läßt sich beheben, indem man den freien Parameter k auf $k = \sqrt{E}$ setzt. D. h., auch für positive Energien bleibt das Integralgleichungssystem nichtsingulär und die W-Matrix damit reell. Die off-shell-T-Matrix erhält man aus

$$\begin{aligned} & T^{\eta}_{LL'}(p,p',E+i0) = \\ & \qquad \sum_{\hat{L}\hat{L}'} p^L W^{\eta}_{L\hat{L}}(p,k;E) \Delta^{\eta}_{\hat{L}\hat{L}'}(E+i0) W^{\eta}_{L'\hat{L}'}(p',k;E) p'^{L'} \\ & + \quad p^L \left(W^{\eta}_{LL'}(p,p';E) - \sum_{\hat{L}\hat{L}'} W^{\eta}_{L\hat{L}}(p,k;E) {W^{\eta}_{\hat{L}'\hat{L}'}}^{-1}(k,k;E) W^{\eta}_{\hat{L}'L'}(k,p';E) \right) p'^{L'} , \end{aligned} \tag{4.13}$$

mit

$$\Delta^{\eta}_{\hat{L}\hat{L}'}(E+i0) = \sum_{L} {\hat{F}^{\eta}_{\hat{L}L}}^{-1} (E+i0)\, {\hat{W}^{\eta}_{\hat{L}L'}}^{-1} (k,k,E+i0)\,. \tag{4.14}$$

Die T-Matrix zerfällt also in einen separablen Teil und einen nichtseparablen Restterm

$$T^{\eta}_{LL'}(p,p',E+i0) = {}^{S}T^{\eta}_{LL'}(p,p',E+i0) + {}^{R}T^{\eta}_{LL'}(p,p',E+i0)\,. \tag{4.15}$$

Für die Dreiteilchenrechnungen wird als sehr gute Näherung der separable Anteil als Zweiteilcheninput verwendet, der im Falle von separablen Potentialen exakt ist. Außerdem gilt:

- Für positive Energien ($E = k^2$) verschwindet der Restterm half-on-shell, d.h. für $p = k$ oder $p' = k$ ist die Darstellung der T-Matrix exakt.
- Im negative Energiebereich läßt sich der Restterm durch einen geeigneten k-Verlauf minimieren. In dieser Arbeit wird das in [35] vorgeschlagene Optimierungsverfahren benutzt.
- Über den Propagator enthält der separable Anteil der T-Matrix die inverse Jost-Funktion und damit alle wesentlichen physikalischen Informationen, wie Bindungspole, Quasibindungszustände und Schnitte.

In den folgenden Kapiteln erweist es sich als nützlich, W-Matrix-Formfaktoren

$$\langle {}^{T}\tilde{W}\hat{L}'L'\eta M_J M_T | pL'\eta' M'_J M'_T \rangle = \delta_{LL'}\delta_{\eta\eta'}\delta_{M_J M'_J}\delta_{M_T M'_T}\, p^L\, \tilde{W}^{\eta}_{L\hat{L}}(p,k,E)\,, \tag{4.16}$$

$$\langle pL'\eta' M'_J M'_T | \tilde{W} L\hat{L}\eta M_J M_T \rangle = \delta_{LL'}\delta_{\eta\eta'}\delta_{M_J M'_J}\delta_{M_T M'_T}\, p^L\, \tilde{W}^{\eta}_{L\hat{L}}(p,k,E) \tag{4.17}$$

und normierte Propagatoren einzuführen:

$$\tilde{\Delta}^{\eta}_{\hat{L}\hat{L}'}(E+i0) = \frac{1}{C^{\eta}_{\hat{L}}}\,\Delta^{\eta}_{\hat{L}\hat{L}'}(E+i0)\,\frac{1}{C^{\eta}_{\hat{L}'}}\,. \tag{4.18}$$

Mit dieser Schreibweise läßt sich die Deuteron-Bindungswellenfunktion wie folgt darstellen:

$$|\Psi\eta M_J M_T\rangle = \sum_{L} |\Psi L\eta M_J M_T\rangle = G_0(E_\eta)\sum_{L\hat{L}} \left|\tilde{W} L\hat{L}\eta M_J M_T\right\rangle. \tag{4.19}$$

Für die separabel genäherte T-Matrix erhält man:

$$T^S(E+i0) = \sum_{\substack{LL'\eta M_J\\ \hat{L}\hat{L}' M_T}} \left|\tilde{W} L\hat{L}\eta M_J M_T\right\rangle \tilde{\Delta}^{\eta}_{\hat{L}\hat{L}'}(E+i0\,)\left\langle{}^T\tilde{W}\hat{L}'L'\eta M_J M_T\right|. \tag{4.20}$$

4.2 EST-Methode

Das Ziel der von Ernst, Shakin und Thaler [60,61] entwickelten Methode ist es, von einem nichtseparablen Potential eine separable Näherung anzugeben, die zu einer T-Matrix führt und die an einigen bestimmten Punkten mit der ursprünglichen T-Matrix übereinstimmt. Im Falle des Bindungszustandes läßt sich dies einfach zeigen. In der Nähe des Bindungspols kann man die T-Matrix

$$T(E) = V + V\,G_0(E)\,T(E) \tag{4.21}$$

schreiben als

$$T(E) \sim \frac{V\,|\Psi_B\rangle\,\langle\Psi_B|\,V}{E-E_B}\,. \tag{4.22}$$

Wenn man nun ein separables Potential $\tilde{V}$

$$\tilde{V} = V\,|\Psi_B\rangle\;\lambda\;\langle\Psi_B|\,V \tag{4.23}$$

konstruiert, führt dies auf die gleiche T-Matrix, wenn die Kopplungsstärke λ gewählt wird als

$$\frac{1}{\lambda} = \langle\,\Psi_B\,|\,V\,G_0(E_B)\,V\,|\,\Psi_B\,\rangle = \langle\,\Psi_B\,|\,V\,|\,\Psi_B\,\rangle\,. \tag{4.24}$$

Im letzten Schritt wurde verwendet, daß die Bindungswellenfunktion die homogene Lippmann-Schwinger Gleichung

$$|\Psi_B\rangle = G_0(E_B)\,V\,|\Psi_B\rangle \tag{4.25}$$

erfüllt. Setzt man die Darstellung (4.23) in (4.21) ein, ergibt sich

$$\tilde{T}(E) = \frac{\langle\,\Psi_B\,|\,V\,G_0(E_B)\,V\,|\,\Psi_B\,\rangle}{\lambda^{-1} - \langle\,\Psi_B\,|\,V\,G_0(E)\,|\,\Psi_B\,\rangle}\,. \tag{4.26}$$

Für $E \to E_B$ ergibt sich der Nenner gerade zu $(E - E_B)$, damit stimmen T und $\tilde{T}$ gerade überein. Diese separable Entwicklung ist unter dem Namen unitary pole approximation (UPA) in der Literatur bekannt [92] und stellt den ersten Term einer allgemeineren Entwicklung, der unitary pole expansion (UPE) [93], dar. Die Frage der optimalen Wahl der Parameter für ein gegebenes Potential wurde von Ernst, Shakin und Thaler untersucht.

Zur einfacheren Darstellung betrachtet man üblicherweise nicht die T-Matrix, sondern die R-Matrix, manchmal auch K-Matrix genannt. Diese ist im Gegensatz zur T-Matrix reell für alle Energien, da dort nicht die volle Green-Funktion, sondern nur deren Hauptwertanteil eingeht

$$R(E) = V + V\, G_0^P(E)\, R(E) \qquad \text{mit} \qquad G_0(E) = G_0^\delta(E) + G_0^P(E)\,. \tag{4.27}$$

Mit Hilfe der R-Matrix kann man die T-Matrix berechnen über

$$T(E) = R(E) - i\,\pi\,\delta(E - H_0)\,T(E)\,. \tag{4.28}$$

Die Gleichung für die R-Matrix läßt sich auch für die Zustände schreiben. Im Falle einer ungekoppelten Partialwelle ergibt sich:

$$|\phi_i\rangle \;=\; |k\rangle \;+\; G_0^P(E_i)\,V\,|\phi_i\rangle\;. \tag{4.29}$$

Ausgehend von einem nichtseparablen Potential V wird nun ein separables Potential

$$\tilde{V} = \sum_{ij} V\,|\phi_i\rangle\,\Lambda_{ij}\,\langle\phi_j|\,V \tag{4.30}$$

konstruiert, so daß die half-on-shell Werte der zugehörigen R-Matrizen, also $R(E_i)$ und $\tilde{R}(E_i)$ an den gewählten Energien übereinstimmen:

$$\tilde{V}\,|\phi_i\rangle = V\,|\phi_i\rangle = R(E)\,|k_i\rangle\;. \tag{4.31}$$

Dies wird durch die Bedingung

$$\sum_{j=1}^{N} \Lambda_{ij}\,\langle\,\phi_i\,|\,V\,|\,\phi_j\,\rangle = \delta_{ik} \tag{4.32}$$

an die Kopplungsstärken Λ_{ij} erreicht. Die Energien sind dabei frei wählbar. Wenn die Bindungsenergie genommen wird, reproduziert die EST-Methode genau die Bindungswellenfunktion. Dieser Fall stimmt mit der anfangs erwähnten UPA überein. An allen anderen gewählten Energien stimmen die R-Matrizen, wie gesagt, überein. In deren Nähe stellt die Methode eine sehr gute Näherung dar. Sie kann durch Hinzufügen weiterer Punkte noch verfeinert werden. Die R-Matrix läßt sich mit diesem Potential schreiben als

$$\tilde{R}(k,k',E) \;=\; \langle\,k\,|\,\tilde{R}(E)\,|\,k'\,\rangle = \sum_{i,j=1}^{N} \langle\,k\,|\,V\,|\,\phi_i\,\rangle\,D_{ij}(E)\,\langle\,\phi_j\,|\,V\,|\,k'\,\rangle\,. \tag{4.33}$$

Die Matrixelemente D_{ij} sind definiert als

$$\mathcal{D}(E) = (\Lambda^{-1} - \mathcal{G}(E))^{-1} = (1 - \Lambda\mathcal{G}(E))^{-1}\,\Lambda \tag{4.34}$$

mit

$$G_{ij}(E) = \langle\, \phi_i \,|\, V\, G_0^P(E)\, V \,|\, \phi_j \,\rangle\,. \tag{4.35}$$

Bei der Wahl der Energien muß beachtet werden, daß die Matrix $\langle\, \phi_i \,|\, V \,|\, \phi_j \,\rangle$ nicht singulär wird, da diese bei der Berechnung der Kopplungsstärken invertiert werden muß. Außerdem muß die Matrix $\mathcal{D}$ außer an der Bindungsenergie nichtsingulär sein. Die Kopplungsstärken werden berechnet aus:

$$\Lambda_{ij}^{-1} = g(p_i) + \frac{m}{\hbar^2}\, P \int dk\, k^2\, g_i(k) g_j(k)/(p_i^2 - k^2)\,. \tag{4.36}$$

Für ein gekoppeltes Potential erhält man folgende Darstellung:

$$V_{ll'} = \sum_{i,j=1}^{N} |g_i l\rangle\, \Lambda_{ij}\, \langle g_j l'| \qquad \text{mit} \qquad |g_i l\rangle = \sum_{l'} V_{ll'}\, |\phi_i l\rangle\;. \tag{4.37}$$

Die dazugehörige T-Matrix lautet

$$T_{ll'}(E + i0) = \sum_{ij} |g_i l\rangle\, \Delta_{ij}(E + i0)\, \langle g_j l'|\,, \tag{4.38}$$

mit dem Propagator

$$\Delta(E + i0) = \left(\Lambda^{-1} - \mathcal{G}_0(E + i0)\right)^{-1} \tag{4.39}$$

und

$$(\mathcal{G}_0(E + i0))_{ij} = \sum_{l} \langle g_i l | G_0(E + i0) | g_j l\rangle)\;. \tag{4.40}$$

Entsprechende Parametrisierungen für realistische Potentiale wurden erstmals von Plessas und Haidenbauer für das Paris- [62,63] und das Bonn B-Potential [64] angegeben. Diese wurden aber zwischenzeitlich weiter verbessert [65,94] und auch für andere Potentiale berechnet. Hinter den Potentialnamen werden in Klammern die verwendeten Ränge der Partialwellen in der Reihenfolge ($^1S_0$, $^3S_1$-$^3D_1$, $^3P_0$, $^1P_1$, $^3P_1$, $^1D_2$, $^3D_2$, $^2P_2$-$^3F_2$) angegeben, wobei nicht vorkommende Partialwellen nicht notiert werden. Auch in den Dreiteilchenrechnungen ist diese Notation bei Angabe des maximalen Subsystemdrehimpulses und der Parität eindeutig.

Ein Vergleich der folgenden Tabellen mit den Werten für die ursprünglichen Potentiale zeigt, daß die Observablen sehr gut reproduziert werden. Inwieweit die off-shell-Werte wiedergegeben werden, wird sich erst in den Dreiteilchenrechnungen zeigen.

E_D	=	-2.2250 MeV	Q_D	=	0.279 fm^2
P_D	=	0.05735	μ_D	=	0.847 μ_N
D/S	=	0.02610	r_d	=	1.972 fm
$a_s(pp)$	=	-17.461 fm	$r_s(pp)$	=	2.874 fm
$a_t(np)$	=	5.433 fm	$r_t(np)$	=	1.774 fm

Tabelle 11: Deuteron- und Niederenergie-Parameter mit dem PEST(56) Potential.

E_D	=	2.2245 MeV	Q_D	=	0.274 fm^2
P_D	=	0.0438	μ_D	=	0.855 μ_N
D/S	=	0.02630	r_d	=	1.969 fm
$a_s(np)$	=	-23.750 fm	$r_s(np)$	=	2.700 fm
$a_t(np)$	=	5.435 fm	$r_t(np)$	=	1.777 fm

Tabelle 12: Deuteron- und Niederenergie-Parameter mit dem BAEST(56) Potential.

E_D	=	2.2246 MeV	Q_D	=	0.278 fm^2
P_D	=	0.04986	μ_D	=	0.851 fm
D/S	=	0.02643	r_d	=	1.969 fm
$a_s(np)$	=	-23.750 fm	$r_s(np)$	=	2.700 fm
$a_t(np)$	=	5.434 fm	$r_t(np)$	=	1.778 fm

Tabelle 13: Deuteron- und Niederenergie-Parameter mit dem BBEST(56) Potential.

E_D	=	2.2242 MeV	Q_D	=	0.271 fm^2
P_D	=	0.05757	μ_D	=	0.850 μ_D
D/S	=	0.02528	r_d	=	1.966 fm
$a_s(nn)$	=	-17.574 fm	$r_s(nn)$	=	2.789 fm
$a_s(np)$	=	-23.740 fm	$r_s(np)$	=	2.673 fm
$a_t(np)$	=	5.435 fm	$r_t(np)$	=	1.787 fm

Tabelle 14: Deuteron- und Niederenergie-Parameter mit dem NEST(54) Potential.

5 Partialwellenzerlegung

Das im Kapitel 2 gewonnene Gleichungssystem ist für eine numerische Behandlung noch zu kompliziert. Um das System mit vertretbarem Aufwand lösen zu können, muß die Dimension reduziert werden. Da das Problem rotationsinvariant ist, gelingt dies mit Hilfe der Partialwellenzerlegung. Die Kopplungsreihenfolge der beteiligten Drehimpulse sollte dabei so gewählt sein, daß die Invarianzen des Hamiltonoperators ausgenutzt werden, damit das resultierende Gleichungssystem in möglichst viele unabhängige Blöcke zerfällt. Die Invarianzen des Zwei- und Dreinukleonensystems sind:

- Rotationsinvarianz
- Paritätsinvarianz gegenüber Raumspiegelung
- Paritätsinvarianz im Isospinraum bei ladungsunabhängigen Potentialen
- Zeitumkehrinvarianz

Mit diesen Symmetrien sind folgende Erhaltungsgrößen verbunden:

Erhaltungsgrößen
im Zweiteilchensystem
S Betrag des Gesamtspins $\vec{J}$ Gesamtdrehimpuls π Parität bzgl. Raumspiegelungen $\vec{T}$ Gesamtisospin
im Dreiteilchensystem
$\vec{\Gamma}$ Gesamtdrehimpuls Π Parität bzgl. Raumspiegelungen
zusätzlich bei ladungsunabhängigen Potentialen
$\vec{I}$ Gesamtisospin

Tabelle 15: Erhaltungsgrößen.

5.1 Drehimpulskopplung

In dieser Arbeit wird die sog. Kanalspindarstellung [95,96], eine Kopplungsreihenfolge, bei der zunächst alle Kopplungen innerhalb des Subsystems ausgeführt werden, verwendet. Dabei bleiben die Erhaltungsgrößen des Zweiteilchensystems auch im Dreiteilchensystem relevant. Neben den Spins der Nukleonen und den zu $\vec{p}$ und $\vec{q}$ gehörenden Bahndrehimpulsen, sind die Isospins zu koppeln, da in dieser Arbeit Proton und Neutron als ununterscheidbar angesehen werden. Im Zweiteilchensystem (β) wird der Drehimpuls $\vec{L}_\beta$ mit dem Gesamtspin $\vec{S}_\beta$, der sich aus den Einzelspins $\vec{s}_\gamma$ und $\vec{s}_\alpha$ zusammensetzt, zum Gesamtdrehimpuls $\vec{J}_\beta$ gekoppelt. Die beiden Einzelisospins $\vec{\tau}_\gamma$ und $\vec{\tau}_\alpha$ werden zu $\vec{T}_\beta$ gekoppelt. Im Dreiteilchensystem bildet man den Kanalspin $\vec{k}_\beta$, der aus $\vec{J}_\beta$ und dem Spin $\vec{s}_\beta$ besteht. Schließlich koppelt man $\vec{k}_\beta$ mit dem Relativdrehimpuls $\vec{l}_\beta$ zum Gesamtdrehimpuls $\vec{\Gamma}$ des Systems. Der Gesamtisospin $\vec{I}$ wird aus $\vec{T}_\beta$ und $\vec{\tau}_\beta$ zusammengesetzt. Folgende Skizzen sollen die Kopplungsreihenfolge veranschaulichen:

Zweiteilchen-Subsystem

$$\left.\begin{array}{r} \text{Subsystem-Bahndrehimpuls } \vec{L}_\beta \\ \left.\begin{array}{r} \text{Einteilchen-Spin } \vec{s}_\gamma \\ \text{Einteilchen-Spin } \vec{s}_\alpha \end{array}\right\} \text{Subsystem-Spin } \vec{S}_\beta \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Subsystem-} \\ \text{Gesamtdrehimpuls } \vec{J}_\beta \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Einteilchen-Isospin } \vec{\tau}_\gamma \\ \text{Einteilchen-Isospin } \vec{\tau}_\alpha \end{array}\right\} \text{Subsystem-Isospin } \vec{T}_\beta$$

Im Zweiteilchensubsystem hat man dann als Basiszustand

$$\langle(\beta)\, p\,(LS)JM_J;TM_T| \tag{5.1}$$

mit der Normierung

$$\begin{aligned} &\langle(\beta))\, p\,(LS)JM_J;TM_T|p'\,(L'S')J'M'_J;T'M'_T)\,(\beta)\rangle \\ &= \frac{\delta(p-p')}{p^2}\,\delta_{SS'}\,\delta_{LL'}\,\delta_{JJ'}\,\delta_{M_JM'_J}\,\delta_{TT'}\delta_{M_TM'_T} \end{aligned} \tag{5.2}$$

und

$$1_\beta = \sum_{LSJT}\sum_{M_JM_T}\int_0^\infty dp\,p^2\; |p\,(LS)JM_J;TM_T(\beta)\rangle\;\langle(\beta)\,p\,(LS)JM_J;TM_T|\;. \tag{5.3}$$

Der Index (β) soll hier nur andeuten, in welchem Koordinatensystem gerechnet wird und hat sonst keine physikalische Bedeutung.

Dreiteilchen-System

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\text{Subsystem-Gesamtdrehimpuls } \vec{J}_\beta \\[1ex] \text{Einteilchen-Spin } \vec{s}_\beta\end{array}\right\} \text{Kanal-Spin } \vec{k}_\beta \\[4ex] \text{Relativ-Bahndrehimpuls } \vec{l}_\beta\end{array}\right\} \text{Gesamtdrehimpuls } \vec{\Gamma}$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Subsystem-Isospin } \vec{T}_\beta \\[1ex] \text{Einteilchen-Isospin } \vec{\tau}_\beta\end{array}\right\} \text{Gesamt-Isospin } \vec{I}$$

Als Dreiteilchenbasiszustand hat man

$$|p\, q\, (((LS)Js)kl)\Gamma M_\Gamma; (T\tau)IM_I)\, (\beta)\rangle \tag{5.4}$$

mit der Normierung

$$\begin{aligned}&\langle(\beta))\, p\, q\, (((LS)Js)kl)\Gamma M_\Gamma; (T\tau)IM_I|p'\, q'\, (((L'S')J's')k'l')\Gamma' M'_\Gamma; (T'\tau')I'M'_I)\, (\beta)\rangle \\ &= \frac{\delta(p-p')}{p^2}\frac{\delta(q-q')}{q^2}\, \delta_{LL'}\, \delta_{SS'}\delta_{JJ'}\, \delta_{ss'}\, \delta_{kk'}\, \delta_{ll'}\, \delta_{\Gamma\Gamma'}\, \delta_{M_\Gamma M'_\Gamma}\, \delta_{TT'}\, \delta_{\tau\tau'}\, \delta_{II'}\, \delta_{M_I M'_I}\end{aligned} \tag{5.5}$$

und

$$\begin{aligned}1_\beta = &\sum_{LSJ}\sum_{skl\Gamma}\sum_{\tau TI}\sum_{M_\Gamma M_I}\int_0^\infty dq\, q^2 \int_0^\infty dp\, p^2 \\ &|p\, q\, (((LS)Js)kl)\Gamma M_\Gamma; (T\tau)IM_I\, (\beta)\rangle\, \langle(\beta)\, p\, q\, (((LS)Js)kl)\Gamma M_\Gamma; (T\tau)IM_I|\end{aligned} \tag{5.6}$$

5.2 Partialwellenzerlegung und Notation

Die Invarianz des Hamiltonoperators gegenüber Gesamtdrehimpuls, Isospin und Parität legt es nahe, die Dreiteilchenbasiszustände

$$\langle\, (\beta)\; \vec{q}\, s m_s\, \tau m_\tau\, ;\, \vec{p}\, S\, M_S\, T\, M_T| \tag{5.7}$$

im Spin-Isospin-Raum nach Partialwellen zu entwickeln und die Drehimpulse in der vorher angegebenen Reihenfolge zu koppeln. Mit der Entwicklung

$$|\vec{p}\rangle = \sum_{LM_L} |pLM_L\rangle \; Y^*_{LM_L}(\hat{p}) \,, \tag{5.8}$$

bzw. bei Berücksichtigung von Spin und Isospin

$$|\vec{p}\rangle\,|SM_S\rangle\,|TM_T\rangle = \sum_{JM_J}\sum_{LM_L} |p\,(LS)JM_J;TM_T\rangle \left(\begin{array}{cc|c} L & S & J \\ M_L & M_S & M_J \end{array}\right) Y^*_{LM_L}(\hat{p}) \tag{5.9}$$

des Zweiteilchensystems und der Entwicklung

$$|\vec{q}\rangle\,|sm_s\rangle\,|\tau m_\tau\rangle = \sum_{lm_l} |q\,sm_s;\tau m_\tau\rangle \; Y^*_{lm_l}(\hat{q}) \tag{5.10}$$

im Relativsystem erhält man mit der soeben konstruierten Drehimpulsbasis:

$$\begin{aligned} \langle\,(\beta)\;\vec{q}\,sm_s\,\tau m_\tau\,;\,\vec{p}\,S\,M_S\,T\,M_T| &= \sum_{LM_L}\sum_{JM_J}\sum_{km_k}\sum_{lm_l}\sum_{\Gamma M_\Gamma}\sum_{IM_I} Y_{L\,M_L}(\hat{p})\;Y_{l\,m_l}(\hat{q}) \\ &\times \left(\begin{array}{cc|c} L & S & J \\ M_L & M_S & M_J \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} J & s & k \\ M_J & m_s & m_k \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} k & l & \Gamma \\ m_k & m_l & M_\Gamma \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} T & \tau & I \\ M_T & m_\tau & M_I \end{array}\right) \\ &\times \langle(\beta)\,p\,q\,(((LS)Js)kl)\Gamma M_\Gamma;(T\tau)IM_I| \;. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Die obige Zerlegung enthält einige Summen, die bis unendlich laufen. Für numerische Rechnungen ist es daher notwendig, einige Quantenzahlen zu beschränken. Der Gesamtdrehimpuls ist eine Erhaltungsgröße und wird somit durch den Gesamtdrehimpuls des Tritons und des daran koppelnden Photons gegeben. Daneben wird in dieser Arbeit der Subsystem- Gesamtdrehimpuls in verschiedenen Rechnungen auf $J \leq 1^+$, $J \leq 1$, $J \leq 2^+$ und $J \leq 2$ beschränkt.

An dieser Stelle werden für die bisher explizit notierten Quantenzahlen einige Abkürzungen eingeführt, um die Struktur der Gleichungen überschaubar zu halten. Die folgende Tabelle enthält alle in dieser Arbeit verwendeten Abkürzungen:

η	$=$	$\{SJ^\pi;T\}$	Zweiteilchenkanäle
b	$=$	$\{SJ^\pi kl;T\tau\}$	Dreiteilchenkanäle
c	$=$	$\{LSJ^\pi kl;T\tau\} = \{Lb\}$	
ξ	$=$	$Lb\,\Gamma$	

Tabelle 16: Multiindizes für Quantenzahlen.

Die folgende Tabelle enthält alle verwendeten Quantenzahlen.

Quantenzahl	Erklärung	Projektion	Zusammensetzung
$s = \frac{1}{2}$	Spin der Nukleonen	m_s	–
$\tau = \frac{1}{2}$	Isospin der Nukleonen	m_t	–
L	Subsystem-Bahndrehimpuls	M_L	–
S	Subsystem-Spin	M_S	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})S$
J	Subsystem-Gesamtdrehimpuls	M_J	$(L, S)J$
π	Subsystem-Parität	–	$\pi = (-1)^L$
T	Subsystem-Isospin	M_τ	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\tau$
k	Kanalspin	m_k	$(J, \frac{1}{2})k$
l	Relativbahndrehimpuls	m_l	–
Γ	3-Teilchen-Gesamtdrehimpuls	M_Γ	$(k, l)\Gamma$
Π	3-Teilchen-Parität	–	$\Pi = (-1)^{L+l}$
I	3-Teilchen-Isospin	M_I	$(\tau, \frac{1}{2})I$

Tabelle 17: Quantenzahlen.

Mit dieser Notation läßt sich (5.4) schreiben als

$$|q\,p\,c\,\Gamma M_\Gamma; I M_I\,(\beta)\rangle\ . \tag{5.12}$$

Die Zustände erfüllen die Normierungsbedingung

$$\begin{aligned}&\langle(\beta)\,p\,q\,c\,\Gamma M_\Gamma; I M_I | q' p' c'\,\Gamma' M'_\Gamma; I' M'_I\,(\beta)\rangle \\ &= \frac{\delta(q-q')}{q^2}\frac{\delta(p-p')}{p^2}\,\delta_{cc'}\,\delta_{\Gamma\Gamma'}\,\delta_{M_\Gamma M'_\Gamma}\,\delta_{II'}\,\delta_{M_I M'_I}\ .\end{aligned} \tag{5.13}$$

5.3 Partialwellenzerlegung der Kanalzustände

Mit Hilfe der im letzten Abschnitt angegebenen Drehimpulszerlegung ist es nun möglich, die Kanalzustände $\langle\Phi_\beta|$ nach Dreiteilchenbasiszuständen zu entwickeln. Ein Kanalzustand ist das Tensorprodukt einer ebenen Welle $\langle(\beta)\vec{q}\,sm_s;\tau m_\tau|$ und einer Bindungs-Wellenfunktion $\langle(\beta)\Psi^\eta M_J M_T|$

$$\langle\Phi_\beta| = \langle(\beta)\vec{q}\,sm_s;\tau m_\tau|\,\otimes\,\langle(\beta)\Psi^\eta M_J M_T|\,. \tag{5.14}$$

Das Einschieben einer Zweiteilchen-Vollständigkeitsrelation (5.3) führt zu

$$\langle\Phi_\beta| = \sum_L \int_0^\infty dp\, p^2\, \langle(\beta)\Psi^\eta M_J M_T|p\,(LS)JM_J;TM_T(\beta)\rangle\ \langle(\beta)\vec{q}\,m_s m_\tau|\ \langle p\,(LS)JM_J;TM_T|\ . \tag{5.15}$$

Nach Kapitel 4.2 läßt sich die drehimpulszerlegte Bindungswellenfunktion mit Hilfe der Zweiteilchenformfaktoren ausdrücken:

$$|\Psi^\eta M_J M_T\rangle = \hat{G}_0(E_d) \sum_L |gL\eta M_J M_T\rangle\,, \tag{5.16}$$

damit ergibt sich

$$\langle(\beta)\Psi^\eta M_J M_T|p\,(LS)JM_J;TM_T(\beta)\rangle = \sum_L G_0(E_d)\, g_L^\eta(p)\,. \tag{5.17}$$

Setzt man nun (5.17) in (5.15) ein, führt die Entwicklung nach Basiszuständen zu Ende und berücksichtigt, daß die Energie im Subsystem gerade um die Energie des dritten Teilchens verschoben ist, so gelangt man zu

$$\begin{aligned}\langle\Phi_\beta| \;=\; & \sum_{km_k}\sum_{lm_l}\sum_{\Gamma M_\Gamma}\sum_{IM_I} Y_{lm_l}(\hat{q}) \left(\begin{array}{cc|c} J & s & k \\ M_J & m_s & m_k \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} k & l & \Gamma \\ m_k & m_l & M_\Gamma \end{array}\right) \\ & \times \left(\begin{array}{cc|c} T & \tau & I \\ M_T & m_\tau & M_I \end{array}\right) \langle(\beta)\,g\,q\,b\,\Gamma M_\Gamma;IM_I|\ G_0(E_d + \tfrac{3}{4}q^2 + i0)\,,\end{aligned} \tag{5.18}$$

mit der Abkürzung

$$\begin{aligned}&\langle(\beta)\,g\,q\,b\,\Gamma M_\Gamma;IM_I| \\ &\quad = \sum_L \int_0^\infty dp\, p^2\ \langle(\beta)\,p\,q\,(((LS)Js)kl)\Gamma M_\Gamma;(T\tau)IM_I|\ \ g_L^\eta(p)\,,\end{aligned} \tag{5.19}$$

die im folgenden als Partialwellenzustand bezeichnet wird. Die Verallgemeinerung auf Rang n mit dem Rangindex i lautet:

$$\begin{aligned}&\langle(\beta)\,g_i\,q\,b\,\Gamma M_\Gamma;IM_I| \\ &\quad = \sum_L \int_0^\infty dp\, p^2\ \langle(\beta)\,p\,q\,(((LS)Js)kl)\Gamma M_\Gamma;(T\tau)IM_I|\ \ g_{Li}^\eta(p)\,.\end{aligned} \tag{5.20}$$

5.4 Antisymmetrisierung der Übergangsamplitude

Das in Kapitel 2 abgeleitete Gleichungssystem (2.35) gilt in der dort angegebenen Form nur für unterscheidbare Teilchen. Im vorliegenden Fall werden die drei Nukleonen als identisch betrachtet. Da es sich um Fermionen handelt, müssen die Übergangsamplituden antisymmetrisch sein. Dies gelingt mit Hilfe des Projektors

$$\Lambda = \frac{1}{3!} \sum_{\Pi} \mathrm{sign}(\Pi)\, \Pi \,, \tag{5.21}$$

wobei Π eine Permutation der drei Teilchen (123) ist und

$$\mathrm{sign}(\Pi) = \left\{ \begin{array}{ll} +1, & \text{wenn } \Pi \text{ gerade} \\ -1, & \text{wenn } \Pi \text{ ungerade} \end{array} \right\} \text{Permutation}\,. \tag{5.22}$$

Das so normierte Λ hat dann die Eigenschaften $\Lambda^2 = \Lambda$ und $\Lambda^\dagger = \Lambda$, ist also tatsächlich ein Projektor.

Die Streuzustände in (2.35) müssen durch antisymmetrische normierte Zustände ersetzt werden:

$$\mathcal{A}\,|\Psi_{\beta n}\rangle^{(\pm)} = c_{\mathcal{A}}\,\Lambda\,|\Psi_{\beta n}\rangle^{(\pm)} \;. \tag{5.23}$$

Die Normierungskonstante $c_{\mathcal{A}}$ ist so zu wählen, daß $\mathcal{A}\,|\Psi_{\beta n}\rangle^{(\pm)}$ normiert ist

$${}^{(\pm)}\langle \Psi_{\beta n} | \Psi_{\beta n} \rangle^{(\pm)} = \delta_{\beta\beta}\,. \tag{5.24}$$

$c_{\mathcal{A}}$ folgt dann aus

$$\begin{aligned} 1 &= {}^{(\pm)}\langle\, \Psi_{\beta n} \,|\, \mathcal{A}^\dagger\, \mathcal{A} \,|\, \Psi_{\beta n}\,\rangle^{(\pm)} = c_{\mathcal{A}}^2\, {}^{(\pm)}\langle\, \Psi_{\beta n} \,|\, \Lambda \,|\, \Psi_{\beta n}\,\rangle^{(\pm)} \\ &= \frac{1}{3!}\, c_{\mathcal{A}}^2\, {}^{(\pm)}\langle\, \Psi_{\beta n} \,|\, \sum_{\Pi} \mathrm{sign}(\Pi)\, \Pi \,|\, \Psi_{\beta n}\,\rangle^{(\pm)} \\ &= \frac{1}{6}\, c_{\mathcal{A}}^2\, {}^{(\pm)}\langle\, \Psi_{\beta n} \,|\, \sum_{\beta} (1-(-1)) \,|\, \Psi_{\beta n}\,\rangle^{(\pm)} = \frac{1}{6}\, c_{\mathcal{A}}^2 \sum_{\beta} 2\, \delta_{\beta\beta} = \frac{1}{3}\, c_{\mathcal{A}}^2\,. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Dabei wurde implizit verwendet, daß das Subsystem des Streuzustandes bereits antisymmetrisch ist. Dies ist jedoch eine unmittelbare Folgerung aus den Eigenschaften des Deuterons, bzw. bei der off-shell Erweiterung der verwendeten Partialwellen. Desweiteren folgt dies aus der Tatsache, daß der Permutationsoperator $\Pi_{\beta\gamma}$, der die beiden Teilchen β und γ im Subsystem vertauscht, mit dem Mølleroperator $\Omega_\beta^{(-)}$ kommutiert [14]:

$$[H, \Pi_{\beta\gamma}] = 0 \qquad \text{und} \qquad [H_\beta, \Pi_{\beta\gamma}] = 0 \tag{5.26}$$

$$\Rightarrow \quad [\Omega_\beta^{(-)}, \Pi_{\beta\gamma}] = 0 \tag{5.27}$$

Es gilt also

$$\mathcal{A} = \sqrt{3}\,\Lambda = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sum_\Pi \mathrm{sign}(\Pi)\,\Pi\,. \tag{5.28}$$

Von den möglichen sechs Permutationen sind drei zyklisch und drei antizyklisch. Beachtet man weiter, daß die Subsysteme bereits antisymmetrisch sind, so folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\,|\Psi_{\beta n}\rangle^{(\pm)} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \sum_\Pi \mathrm{sign}(\Pi)\,\Pi\ |\Psi_{\beta n}\rangle^{(\pm)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_\beta |\Psi_{\beta n}\rangle^{(\pm)}\ . \end{aligned} \tag{5.29}$$

Es sei noch auf eine alternative Möglichkeit zur Antisymmetrisierung hingewiesen. Wie in [14] gezeigt, vertauscht H_{em} mit dem Antisymmetrisierungsoperator

$$[H_{em}, \Lambda] = 0\,. \tag{5.30}$$

Dies gilt, da H_{em} von der Gestalt

$$H_{em} = \sum_{\mathrm{L}} c_L(k)\, D_L(k,\lambda)\,, \tag{5.31}$$

wobei

$$D_L \approx \sum_i \tfrac{1}{2}(1+\tau_3^{(i)})\, \mathcal{Y}_{L\lambda}(\vec{x}_i) \tag{5.32}$$

ist. Die genaue Form wird in Kapitel 7 diskutiert. Wesentlich ist hier die Summe über die drei Nukleonen, so daß offensichtlich gilt

$$[D_L(k,\lambda), \Pi_\sigma] = 0 \quad \Rightarrow \quad [D_L(k,\lambda), \Lambda] = 0\,. \tag{5.33}$$

Bei den Matrixelementen kann der Antisymmetrisierungsoperator auch auf die Triton-Wellenfunktion angewendet werden:

$$\begin{aligned} \langle\, \Phi_\beta \,|\, \mathcal{A}\, H_{em} \,|\, \Psi_t \,\rangle &= \sqrt{3}\,\langle\, \Phi_\beta \,|\, H_{em}\,\Lambda \,|\, \Psi_t \,\rangle = \sqrt{3}\,\langle\, \Phi_\beta \,|\, H_{em} \,|\, \Psi_t \,\rangle \\ {}^{(-)}\langle\, \Psi_\beta \,|\, \mathcal{A}\, H_{em} \,|\, \Psi_t \,\rangle &= \sqrt{3}\ {}^{(-)}\langle\, \Psi_\beta \,|\, H_{em}\,\Lambda \,|\, \Psi_t \,\rangle = \sqrt{3}\,\langle\, \Phi_\beta \,|\, \Omega_\beta^{(-)\dagger} H_{em} \,|\, \Psi_t \,\rangle\,. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Letztlich muß jedoch auch bei dieser Vorgehensweise über die Clusterungen summiert werden, um zu einer Integralgleichung zu gelangen. Daher sind die Verfahren bis auf unwichtige Faktoren äquivalent.

5.5 Integralgleichung für die Übergangsamplituden

Um eine Integralgleichung für die Übergangsamplitude zu erhalten, wird die Gleichung für die Mølleroperatoren (2.34) von rechts mit $\mathcal{A}\, H_{em}\, |\Psi_t\rangle$ und von links mit dem Partialwellenzustand $\langle (\beta)\, g\, q\, b\, \Gamma M_\Gamma I M_I |\, G_0$ multipliziert

$$\langle\, (\beta)\, g\, q\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I \,|\, G_0(E+i0)\, \Omega_\beta^{(-)\dagger}\, \mathcal{A}\, H_{em} \,|\, \Psi_t \,\rangle \tag{5.35}$$

$$= \langle\, (\beta)\, g\, q\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I \,|\, G_0(E+i0)\, \mathcal{A}\, H_{em} \,|\, \Psi_t \,\rangle$$

$$+ \sum_\beta \bar{\delta}_{\beta\gamma}\, \langle\, (\beta)\, g\, q\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I \,|\, G_0(E+i0)\, T_\beta(E+i0)\, G_0(E+i0)\, \Omega_\beta^{(-)\dagger}\, \mathcal{A}\, H_{em} \,|\, \Psi_t \,\rangle\,.$$

Zur weiteren Rechnung nutzt man nun die Separabilität der T-Matrix aus. Ausgehend von der Zweiteilchen T-Matrix

$$\hat{T}(E) = \sum_{LL'} \sum_{SJT} \sum_{M_J M_T} |g(LS) J M_J; T M_T\rangle\ \Delta^\eta(E)\ \langle g(L'S) J M_J; T M_T| \tag{5.36}$$

erhält man durch Einschieben von Vollständigkeitsrelationen im Subsystem (5.3) und einer im Dreiteilchenraum (5.6), Zusammenkopplung der Drehimpulse und unter Verwendung der Partialwellenzustände (5.19):

$$T_\beta(E+i0) = \tag{5.37}$$

$$\sum_{\Gamma M_\Gamma I M_I b} \int_0^\infty dq\, q^2\ |g\, q\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I(\beta)\rangle\ \hat{\Delta}^\eta(E - \tfrac{3}{4} q^2 + i0)\ \langle (\beta)\, g\, q\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I|\ .$$

Setzt man nun (5.37) in (5.35) ein, gelangt man zu folgender Gleichung:

$$\langle\, (\beta)\, g\, q\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I \,|\, G_0(E+i0)\, \Omega_\beta^{(-)\dagger}\, \mathcal{A}\, H_{em} \,|\, \Psi_t \,\rangle$$

$$= \langle\, (\beta)\, g\, q\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I \,|\, G_0(E+i0)\, \mathcal{A}\, H_{em} \,|\, \Psi_t \,\rangle$$

$$+ \sum_\gamma \bar{\delta}_{\beta\gamma} \sum_{\Gamma' M'_\Gamma I' M'_I b'} \int_0^\infty dq'\, q'^2\, \langle\, (\beta)\, g\, q\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I \,|\, G_0(E+i0) \,|\, g'\, q'\, b'\, \Gamma' M'_\Gamma; I' M'_I(\gamma) \,\rangle$$

$$\times\, \hat{\Delta}^{\eta'}(E - \tfrac{3}{4} q'^2 + i0)\, \langle\, (\gamma)\, g'\, q'\, b'\, \Gamma' M'_\Gamma I' M'_I \,|\, G_0(E+i0)\, \Omega_\beta^{(-)\dagger}\, \mathcal{A}\, H_{em} \,|\, \Psi_t \,\rangle\,. \tag{5.38}$$

Zur abkürzenden Schreibweise werden nun folgende Größen eingeführt:

$$ {}^{\Gamma I}\!\mathcal{AM}^{b}(q,E) \;=\; \langle\, (\beta)\, g\, q\, b\, \Gamma; I \,|\, G_0(E+i0)\Omega_{\beta}^{(-)\dagger}\mathcal{A}\, H_{em} \,|\, \mathcal{A}\Psi_t \,\rangle\,, \tag{5.39} $$

$$ {}^{\Gamma I}\!\mathcal{AB}^{b}(q,E) \;=\; \langle\, (\beta)\, g\, q\, b\, \Gamma; I \,|\, G_0(E+i0)\, H_{em} \,|\, \mathcal{A}\Psi_t \,\rangle \tag{5.40} $$

und das effektive Potential

$$ {}^{\Gamma I}\!\mathcal{AV}^{bb'}(q,E) = \sum_{\beta} \bar{\delta}_{\beta\gamma}\, \langle\, (\beta)\, g\, q\, b\, \Gamma; I \,|\, G_0(E+i0) \,|\, g'\, q'\, b'\, \Gamma'; I'(\beta) \,\rangle\,. \tag{5.41} $$

Diese Größen ${}^{\Gamma I}\!\mathcal{AM}^{bb'}$ und ${}^{\Gamma I}\!\mathcal{AB}^{bb'}$ sind wegen des Antisymmetrisierungsoperators $\mathcal{A}$ und der daraus resultierenden Summe über die Cluster nicht mehr abhängig von der Clusterung. Der Index (β) wurde daher nicht mehr notiert. Gleiches gilt auch für das effektive Potential

$$ \langle\, (\beta)\, g\, q\, b\, \Gamma; I \,|\, G_0(E+i0) \,|\, g'\, q'\, b'\, \Gamma; I\,(\gamma) \,\rangle = \langle\, (\beta)\, g\, q\, b\, \Gamma; I \,|\, G_0(E+i0) \,|\, g'\, q'\, b'\, \Gamma; I\,(\alpha) \,\rangle \tag{5.42} $$

und damit

$$ {}^{\Gamma I}\!\mathcal{AV}^{bb'}(q,q',E+i0) = 2\,\langle\, (\beta) g\, q\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I \,|\, G_0(E+i0) \,|\, g'\, q'\, b'\, \Gamma M_\Gamma; I M_I(\gamma) \,\rangle\,. \tag{5.43} $$

In der Bezeichnung ${}^{\Gamma I}\!\mathcal{AV}^{bb'}$ wurde bereits vorweggenommen, daß das effektive Potential diagonal in Γ und I ist, bzw. unabhängig von M_Γ und M_I ist. Dies ist letztlich eine Folge der Gesamtdrehimpuls- und Isospinerhaltung. Das Gleichungssystem (5.38) läßt sich damit schreiben als:

$$ \begin{aligned} {}^{\Gamma I}\!\mathcal{AM}^{b}(q,E_d+\tfrac{3}{4}q^2) &= {}^{\Gamma I}\!\mathcal{AB}^{b}(q,E_d+\tfrac{3}{4}q^2) \\ &+ \sum_{b'} \int_0^\infty dq'\, q'^2\, {}^{\Gamma I}\!\mathcal{AV}^{bb'}(q,q',E_d+\tfrac{3}{4}q^2)\, \hat{\Delta}^{\eta'}(E_d+\tfrac{3}{4}q^2-\tfrac{3}{4}q'^2)\, {}^{\Gamma I}\!\mathcal{AM}^{b'}(q',E_d+\tfrac{3}{4}q^2)\,. \end{aligned} \tag{5.44} $$

Im Falle einer Rang n Wechselwirkung ist diese Gleichung als Matrixgleichung zu verstehen, mit den Komponenten:

$$ \begin{aligned} {}^{\Gamma I}\!\mathcal{AM}_i^{b}(q,E_d+\tfrac{3}{4}q^2) &= {}^{\Gamma I}\!\mathcal{AB}_i^{b}(q,E_d+\tfrac{3}{4}q^2) \\ &+ \sum_{jk}\sum_{b'} \int_0^\infty dq'\, q'^2\, {}^{\Gamma I}\!\mathcal{AV}_{ij}^{bb'}(q,q',E_d+\tfrac{3}{4}q^2)\, \hat{\Delta}_{jk}^{\eta'}(E_d+\tfrac{3}{4}q^2-\tfrac{3}{4}q'^2)\, {}^{\Gamma I}\!\mathcal{AM}_k^{b'}(q',E_d+\tfrac{3}{4}q^2)\,. \end{aligned} \tag{5.45} $$

Durch off-shell-Erweiterung gelingt es schließlich, ein Integralgleichungssystem zu erhalten:

$$
\begin{aligned}
{}^{\Gamma I}\!\mathcal{AM}^{b}(q,E) &= {}^{\Gamma I}\!\mathcal{AB}^{b}(q,E) \\
&+ \sum_{b'} \int_0^\infty dq'\, q'^2\, {}^{\Gamma I}\!\mathcal{AV}^{bb'}(q,q',E)\, \hat{\Delta}^{\eta'}(E - \tfrac{3}{4}q'^2)\, {}^{\Gamma I}\!\mathcal{AM}^{b'}(q',E)\,. \qquad (5.46)
\end{aligned}
$$

Dieses Integralgleichungssystem wird für Dreiteilchenenergien von E_d bis E_{max} gelöst. Die physikalisch beobachtbaren on-shell-Amplituden sind durch

$$
\begin{aligned}
\langle\, \mathcal{A}\phi_\beta \,|\, \Omega_\beta^{\dagger(-)} T_{em} \,|\, \mathcal{A}\Psi_t \,\rangle &= \sum_{\Gamma=\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \sum_{M_\Gamma} \sum_{b} \sum_{m_k m_l} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & k \\ M_J & M_S & m_k \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} k & l & \Gamma \\ m_k & m_l & M_\Gamma \end{array} \right) \\
&\times Y_{l m_l}(\hat{q})\, {}^{\Gamma I}\!\mathcal{AM}^{b}(q, E_d + \tfrac{3}{4}q^2) \qquad (5.47)
\end{aligned}
$$

gegeben.

6 Das Dreiteilchen-Bindungsproblem

In diesem Kapitel werden Gleichungen zur Berechnung der Dreiteilchen-Bindungsenergie und -Wellenfunktion hergeleitet. Je nachdem, welche Art von Wechselwirkung bzw. Näherung verwendet wird, ergeben sich ein- oder zweidimensionale Integralgleichungen. Ausgangspunkt ist die Lippmann-Schwinger-Gleichung

$$|\Psi_t\rangle = \lim_{\epsilon\to 0} i\epsilon\, G(E_t + i\epsilon)|\Psi_t\rangle \,. \tag{6.1}$$

Zur Ausführung des ϵ-Limes kann nun eine der verschiedenen Resolventenbeziehungen für $G(z)$ verwendet werden. Ausgehend von

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)\, V\, G(z) \tag{6.2}$$

erhält man

$$\begin{aligned} |\Psi_t\rangle &= \lim_{\epsilon\to 0} i\epsilon \Big(G_0(E_t + i\epsilon) + G_0(E_t + i\epsilon)\, V\, G(E_t + i\epsilon) \Big) |\Psi_t\rangle \\ &= G_0(E_t)\, V\, |\Psi_t\rangle \,, \end{aligned} \tag{6.3}$$

also eine aus dem Zweiteilchenfall bekannte homogene Gleichung. Man definiert nun die Faddeev-Komponenten der Wellenfunktion

$$|\psi_\alpha\rangle = G_0 V_\alpha\, |\Psi\rangle \;, \tag{6.4}$$

die aufsummiert die volle Wellenfunktion ergeben

$$|\Psi_t\rangle = \sum_\alpha |\psi_\alpha\rangle = \sum_\alpha G_0 V_\alpha\, |\Psi\rangle = G_0(E_t)\, V\, |\Psi_t\rangle \,. \tag{6.5}$$

6.1 Formfaktoren

In diesem Kapitel wird eine eindimensionale Integralgleichung zur Berechnung der Bindungsenergie und der sog. Formfaktoren hergeleitet. Mit Hilfe der Formfaktoren kann anschließend die volle Wellenfunktion berechnet werden. Ausgehend von (6.1) und der Resolventenbeziehung (2.16) läßt sich der Grenzübergang $\epsilon \to 0$ ausführen, und man erhält

$$\begin{aligned} |\Psi_t\rangle &= \lim_{\epsilon\to 0} i\epsilon\, G_\alpha(E_t + i\epsilon), \bar{V}_\alpha\, G(E_t + i\epsilon)\ |\Psi_t\rangle \\ &= G_\alpha(E_t)\, \bar{V}_\alpha\ |\Psi_t\rangle \,. \end{aligned} \tag{6.6}$$

An dieser Stelle werden nun die üblicherweise verwendeten Formfaktoren eingeführt, die wie folgt definiert sind:

$$|F_\alpha\rangle = \bar{V}_\alpha\,|\Psi_t\rangle\,. \tag{6.7}$$

Die linke Seite dieser Gleichung kann nun mit (6.6) umgeformt werden zu:

$$|F_\alpha\rangle = \bar{V}_\alpha\,|\Psi_t\rangle = \sum_\beta \bar{\delta}_{\alpha\beta}\,V_\beta\,G_\beta\,\bar{V}_\beta\;|\Psi_t\rangle = \sum_\beta \bar{\delta}_{\alpha\beta}\,V_\beta\,G_\beta\;|F_\beta\rangle\;. \tag{6.8}$$

Unter Verwendung der Beziehung $V_\beta G_\beta = T_\beta G_0$ ergibt sich folgende Gleichung für die Formfaktoren

$$|F_\alpha\rangle = \sum_\beta \bar{\delta}_{\alpha\beta}\,T_\beta\,G_0\;|F_\beta\rangle\,, \tag{6.9}$$

mit deren Hilfe sich das Triton darstellen läßt als:

$$|\Psi_t\rangle = G_0\,V\;|\Psi_t\rangle = \sum_\beta G_0\,V_\beta\,G_\beta\,\bar{V}_\beta\;|\Psi_t\rangle = \sum_\beta G_0\,T_\beta\,G_0\;|F_\beta\rangle = \sum_\beta |\psi_\beta\rangle\;, \tag{6.10}$$

wobei die $|\psi_\beta\rangle$ die üblichen Faddeev-Komponenten (6.4) sind. Dies zeigt man unter Verwendung der Definition der $|F_\beta\rangle$ und der Beziehung $V_\beta\,G_\beta = T_\beta\,G_0$:

$$|\psi_\beta\rangle = G_0\,T_\beta\,G_0\,|F_\beta\rangle = G_0\,V_\beta\,G_\beta\,|F_\beta\rangle = G_0\,V_\beta\,G_\beta\,(V - V_\beta)|\Psi_t\rangle = G_0\,V_\beta|\Psi_t\rangle\,. \tag{6.11}$$

6.2 Integralgleichung für die Formfaktoren

Analog zur Vorgehensweise bei der Übergangsamplitude soll eine Integralgleichung für die Formfaktoren hergeleitet werden, dazu wird die Formfaktorgleichung (6.9) zunächst auf Partialwellenzustände (5.19) projiziert. Mit der Definition

$$F^b(q) = \langle\,(\alpha)\,g\,q\,b;\Gamma M_\Gamma;IM_I\,|\,G_0\,|\,F_\alpha\,\rangle = \sum_L \int_0^\infty dp\,p^2\,g_L(p)\,\langle p\,q\,L\,b\,\Gamma M_\Gamma;IM_I|G_0|F_\alpha\rangle \tag{6.12}$$

erhält man

$$F^b(q) = \sum_\beta \bar{\delta}_{\alpha\beta}\,\langle\,(\alpha)\,g\,q\,b\,\Gamma M_\Gamma;IM_I\,|\,G_0\,T_\beta\,G_0\,|\,F_\beta\,\rangle\,. \tag{6.13}$$

Mit Hilfe der separabel genäherten T-Matrix T_γ (5.37) und unter Ausnutzung der Definition des effektiven Potentials (5.43) gelangt man schließlich zur Integralgleichung für die Formfaktoren

$$F^b(q) = \sum_{b'} \int_0^\infty dq'\,q'^2\,\mathcal{AV}^{bb'}(q,q',E_t)\,\hat{\Delta}^{\eta'}(E_t - \tfrac{3}{4}q'^2)\,F^{b'}(q')\,. \tag{6.14}$$

Zur Verallgemeinerung dieser Gleichung auf Wechselwirkungen mit höherem Rang, d.h. T-Matrix, muß sie als Matrixgleichung aufgefaßt werden. Die Komponenten lauten dann:

$$F^{ib}(q) = \sum_{b'} \sum_{jk} \int_0^\infty dq'\, q'^2\, \mathcal{A}\mathcal{V}_{ij}^{\hat{b}b'}(q, q', E_t)\, \hat{\Delta}_{jk}^{\eta'}(E_t - \tfrac{3}{4}q'^2)\, F^{kb'}(q')\,, \tag{6.15}$$

mit

$$F^{ib}(q) = \langle\, (\alpha)\, g\, q\, b; \Gamma M_\Gamma; I M_I \mid G_0 \mid F_\alpha\, \rangle = \sum_L \int_0^\infty dp\, p^2\, g_{Li}(p)\, \langle pqLb\Gamma; IM_I|G_0|F_\alpha\rangle\,. \tag{6.16}$$

6.3 Antisymmetrisierung des Tritons

Zunächst erhält man mit (6.9), (6.12) und (5.37) folgende Darstellung des Tritons:

$$|\Psi_t\rangle = \sum_{\beta b'} \int_0^\infty dq'\, q'^2\, G_0(E_t)\ |(\beta)\, g'\, q'\, b'; \Gamma M_\Gamma I M_I\rangle\ \hat{\Delta}^\eta(E_t - \frac{3}{4}q^2)\, F^b(q)\,. \tag{6.17}$$

Mit Hilfe der Definition der Partialwellenzustände (5.19) erhält man

$$\begin{aligned} |\Psi_t\rangle \;\; = \;\; & \sum_{\beta b' L'} \int_0^\infty \int_0^\infty dq'\, dp'\, q'^2\, p'^2\, G_0(E_t)\ |(\beta) p' q' L' b' \Gamma M_\Gamma; I M_I\rangle \\ & \times g_{L'}(p')\ \hat{\Delta}^\eta(E_t - \frac{3}{4}q'^2)\ F^b(q). \end{aligned} \tag{6.18}$$

Dies stellt eine Entwicklung des Tritons nach den Zuständen

$$\sum_\beta |(\beta)\, p\, q\, L\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I\rangle \tag{6.19}$$

dar. Wenn diese Zustände antisymmetrisch sind, ist somit auch die Triton-Wellenfunktion bereits antisymmetrisch. Die Antisymmetrisierung eines Zustandes

$$|(\beta)\, p\, q\, L\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I\rangle \tag{6.20}$$

gelingt mit Hilfe des entsprechenden Projektionsoperators

$$\Lambda\, |(\beta)\, p\, q\, L\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I\rangle = \frac{1}{3!} \sum_\pi \mathrm{sign}(\pi)\, \Pi\ |(\beta)\, p\, q\, L\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I\rangle\ . \tag{6.21}$$

Wenn nun die betrachteten Zustände bzgl. des Zweiteilchen-Subsystems schon antisymmetrisch sind, bleibt hier nur die Summe über die zyklischen Permutationen Π, also die Cluster (β) übrig

$$\begin{aligned}
&\Lambda\,|(\beta)\,p\,q\,L\,b\,\Gamma M_\Gamma; I M_I\rangle \\
&= \frac{1}{3!}\sum_\beta |(\beta)\,p\,q\,L\,b\,\Gamma M_\Gamma; I M_I\rangle - - |(\beta)\,p\,q\,L\,b\,\Gamma M_\Gamma; I M_I\rangle \\
&= \frac{2}{3!}\sum_\beta |(\beta)\,p\,q\,L\,b\,\Gamma M_\Gamma; I M_I\rangle \ . \qquad (6.22)
\end{aligned}$$

Wenn man also dafür sorgt, daß die Zustände $|(\beta)\,q\,p\,L\,b\,\Gamma M_\Gamma; I M_I\rangle$ antisymmetrisch sind, ist somit das Triton (6.18) bereits antisymmetrisiert.

In dieser Arbeit wird die Triton-Wellenfunktion für realistische Potentiale in verschiedenen Rechnungen nach 5, 9, 10 und 18 Kanälen entwickelt; dieses entspricht einer Einschränkung des Zweiteilchen-Subsystem-Gesamtdrehimpulses J auf $J \leq 1^+$, $J \leq 2^+$ $J \leq 1$ und $J \leq 2$. Die folgende Tabelle gibt Auskunft über die Quantenzahlen der Kanäle

Kanal	Subsystem	L	S	J^π	τ	k	l
1	$^1S_0$	0	0	0^+	1	1/2	0
2	$^3S_1$	0	1	1^+	0	1/2	0
3	$^3S_1$	0	1	1^+	0	3/2	2
4	$^3D_1$	2	1	1^+	0	1/2	0
5	$^3D_1$	2	1	1^+	0	3/2	2
6	$^3P_0$	1	1	0^-	1	1/2	1
7	$^1P_1$	1	0	1^-	0	1/2	1
8	$^1P_1$	1	0	1^-	0	3/2	1
9	$^3P_1$	1	1	1^-	1	1/2	1
10	$^3P_1$	1	1	1^-	1	3/2	1
11	$^1D_2$	2	0	2^+	1	3/2	2
12	$^1D_2$	2	0	2^+	1	5/2	2
13	$^3D_2$	2	1	2^+	0	3/2	2
14	$^3D_2$	2	1	2^+	0	5/2	2
15	$^3P_2$	1	1	2^-	1	3/2	1
16	$^3P_2$	1	1	2^-	1	5/2	3
17	$^3F_2$	3	1	2^-	1	3/2	1
18	$^3F_2$	3	1	2^-	1	5/2	3

Tabelle 18: Triton-Quantenzahlen.

Diese Kanäle sind gerade so konstruiert, daß sie antisymmetrisch bei Vertauschung zweier Nukleonen im Subsystem sind, für sie gilt nämlich

$$\mathcal{P}\,|(\gamma)\,p\,q\,L\,b\,\Gamma M_\Gamma; I M_I\rangle = (-)^{L+s_1+s_2-S+\tau_1+\tau_2-\tau}\ |(\gamma)\,p\,q\,L\,b\,\Gamma M_\Gamma; I M_I\rangle\,, \qquad (6.23)$$

wobei $\mathcal{P}$ ein Permutationsoperator ist, der zwei Teilchen im Subsystem vertauscht. Damit sind die Dreiteilchenbasiszustände antisymmetrisch bzgl. des Zweiteilchen-Subsystems.

6.4 Das Partialwellen-projizierte Triton

In diesem Abschnitt wird die Projektion des antisymmetrisierten Tritons auf Partialwellen, d.h.

$$\langle(\beta)\, p\, q\, L\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I | \Psi_t\rangle\,, \tag{6.24}$$

berechnet. Dazu wurde in anderen Arbeiten [11,12,14] ausgegangen von

$$|\Psi_t\rangle = \sum_\beta G_0\, T_\beta\, G_0\; |F_\beta\rangle\;. \tag{6.25}$$

Diese Vorgehensweise ist sehr rechenintensiv, wenn man zu höheren Rängen in der Wechselwirkung und damit der T-Matrix übergeht. Es ist jedoch möglich, die Wellenfunktion nahezu unabhängig von den verwendeten Rängen zu berechnen. Dazu geht man aus von

$$|\Psi_t\rangle = \sum_\alpha |\psi_\alpha\rangle = |\psi_\beta\rangle + \sum_\alpha \bar{\delta}_{\beta\alpha}\, |\psi_\alpha\rangle\;. \tag{6.26}$$

Projiziert man nun auf Partialwellen, so ergibt sich

$$\langle(\beta)\, p\, q\, L\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I | \Psi_t\rangle = \langle(\beta)\, p\, q\, L\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I | \psi_\beta\rangle + \sum_\alpha \bar{\delta}_{\alpha\beta} \langle(\beta)\, p\, q\, L\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I | \psi_\alpha\rangle\,. \tag{6.27}$$

Der erste Term auf der rechten Seite läßt sich mit Hilfe von $|\psi_\beta\rangle = G_0\, T_\beta\, G_0\; |F_\beta\rangle$ unter Verwendung der separabel genäherten T-Matrix (5.37) und der Partialwellenzustände (5.19) umschreiben zu:

$$\begin{aligned}
\langle(\beta)\, p\, q\, L\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I | \psi_\beta\rangle &= \langle\, (\beta)\, p\, q\, L\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I \,|\, G_0\, T_\beta\, G_0 \,|\, F_\beta\,\rangle \\
&= \langle\, (\beta)\, p\, q\, L\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I \,|\, G_0(E_t) \,|\, (\beta)\, g\, q\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I\,\rangle \\
&\quad \times\, \hat{\Delta}^\eta(E_t - \tfrac{3}{4}q^2)\, \langle\, (\beta)\, g\, q\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I \,|\, G_0(E_t) \,|\, F_\beta\,\rangle \\
&= \sum_{L'} g^\eta_{L'}(p)\, \hat{\Delta}^\eta(E_t - \tfrac{3}{4}q^2)\, \frac{1}{E_t - p^2 - \frac{3}{4}q^2}\, F^b(q)\,.
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Die Verallgemeinerung auf höhere Ränge lautet:

$$\langle(\beta)\, p\, q\, L\, b\, \Gamma M_\Gamma; IM_I|\Psi_t\rangle = \sum_{ij}\sum_{L'} g^{\eta}_{L'i}(p)\, \hat{\Delta}^{\eta}_{ij}(E_t - \tfrac{3}{4}q^2)\, \frac{1}{E_t - p^2 - \frac{3}{4}q^2}\, F^b_j(q)\,. \quad (6.29)$$

Die Berechnung der Faddeev-Komponente läßt sich damit sehr effizient durchführen. Auch bei Verwendung von höheren Rängen ist die Berechnung sehr schnell möglich. Die Berechnung der Nichtdiagonalelemente wird nun vom Rang unabhängig und bedeutet eine erhebliche Beschleunigung des Programms. Man schiebt dazu im zweiten Teil der rechten Seite von (6.27) eine Vollständigkeitsrelation im Koordinatensatz (α) ein und gelangt zu:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha} \bar{\delta}_{\beta\alpha}\langle(\beta)\, p\, q\, L\, b\, \Gamma M_\Gamma; IM_I|\psi_\alpha\rangle \\
&= \sum_{\alpha}\sum_{c'} \int dp'\, p'^2\, dq'\, q'^2\, \langle(\beta)\, p\, q\, L\, b\, \Gamma M_\Gamma; IM_I|p'\, q'\, L'\, b'\, \Gamma M_\Gamma; IM_I(\alpha)\rangle \\
&\quad \times \langle(\alpha)\, p'\, q'\, L'\, b'\, \Gamma M_\Gamma; IM_I|\psi_\alpha\rangle\,.
\end{aligned} \quad (6.30)$$

Der Umkopplungskoeffizient ist für $\alpha \neq \beta$ unabhängig von der Clusterung. Die Faddeev-Komponenten sind ebenfalls unabhängig von der Clusterung, so daß das bereits berechnete $\psi^c(p,q)$ an dieser Stelle verwendet werden kann. Zur konkreten Berechnung wurden nun je nach den Werten von p und q unterschiedliche Formen des Umkopplungskoeffizienten verwendet. Damit kann die Wellenfunktion auf dem gesamten Intervall $[0, p_{max}]$, $[0, q_{max}]$, also auch am Ursprung berechnet werden. Dies ist insbesondere für die weiteren Berechnungen sehr wichtig, da die Wellenfunktion dort auch bei sehr kleinen Argumenten benötigt wird und keine Extrapolationen nötig sind. Setzt man die in Anhang F angegebene 'pp'-Form des Umkopplungskoeffizienten ein, erhält man

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha} \bar{\delta}_{\beta\alpha}\, \langle(\beta)\, p\, q\, L\, b\, \Gamma M_\Gamma; IM_I|\psi_\alpha\rangle \\
&= \sum_{c'} \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{\infty} dq'\, q'^2\, \psi^{c'}(p'_\alpha(x), q')\, q^{L+L'} \\
&\quad \times \sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} \sum_{h=0}^{L'+L} \left(\frac{q'}{q}\right)^h U^{cc'}_{\Gamma I}(\ell, h)\, \frac{\delta(p - p_\beta(x))}{p^2}\, \frac{P_\ell(x)}{p'_\beta(x)^L p^{L'}}\,,
\end{aligned} \quad (6.31)$$

mit

$$\delta(p - p_\beta(x)) = \frac{2p}{qq'}\, \delta(x - x_0) \qquad \text{und} \qquad x_0 = \frac{p^2 - \frac{1}{4}q^2 - q'^2}{qq'}\,. \quad (6.32)$$

Nach Ausführen der x-Integration ergibt sich schließlich für die volle Wellenfunktion:

$$\begin{aligned}\langle(\beta)\, p\, q\, L\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I|\Psi_t\rangle &= \sum_L g_L^\eta(p)\,\hat{\Delta}^\eta(E_t-\tfrac{3}{4}q^2)\,\frac{1}{E_t-p^2-\frac{3}{4}q^2}\,F^b(q)\\ &\quad+\sum_{c'}\int\limits_{|p-q/2|}^{p+q/2} dq'\,\psi^{c'}(p'_\alpha(x_0),q')\,\frac{q^{L+L'}}{p^{L+L'+1}}\\ &\quad\times 2\sum_{\ell=0}^{\ell_{max}}\sum_{h=0}^{L'+L}\left(\frac{q'}{q}\right)^{h+1} U_{\Gamma I}^{cc'}(\ell,h)P_\ell(x_0)\,,\end{aligned}\tag{6.33}$$

mit

$$p_\beta(x_0)=p \qquad \text{und} \qquad p'_\alpha(x_0)=\sqrt{\tfrac{3}{4}(q^2-q'^2)-p^2}\,.\tag{6.34}$$

Die Form ist insbesondere für kleine Werte von q und $q=0$ geeignet. Für kleine Werte von p treten trotz des Faktors $p^{-(L+L'+1)}$ keine Singularitäten auf, da diese sich wegen des Umkopplungskoeffizienten herausheben. Allerdings ist diese Form numerisch in diesem Falle nicht geeignet, besser ist hier die 'qq'-Form des Umkopplungskoeffizienten zu verwenden. Für praktische Rechnungen wird daher das Mesh der Stützstellen unterschieden nach $p>q$ oder $q>p$, und die eine oder andere Form verwendet. Ist einer der Impulse gleich Null, bereitet dies keine Probleme, auch am Ursprung kann die Wellenfunktion berechnet werden. Die so berechnete Wellenfunktion wurde anschließend mit Hilfe von B-Splines approximiert, wobei die resultierende Funktion an den Stützstellen exakt mit den berechneten Werten übereinstimmt, um auch Zwischenwerte und Ableitungen leicht ausrechnen zu können.

6.5 Normierung der Wellenfunktion

Die Triton-Wellenfunktion wird gemäß

$$\langle\Psi_t|\Psi_t\rangle=\sum_\alpha\langle\psi_\alpha|\Psi_t\rangle=3\,\langle\psi_1|\Psi_t\rangle=1\tag{6.35}$$

normiert. Es erscheint wichtig anzumerken, daß das Einschieben einer Vollständigkeitsrelation

$$1=\sum_c\int dp\,p^2\,dq\,q^2\,|p\,q\,c\rangle\langle p\,q\,c|\tag{6.36}$$

in $\langle\Psi_t|\Psi_t\rangle$ dazu führt, daß man mit einer unendlichen Anzahl von Partialwellen arbeiten muß, um die richtige Normierungskonstante zu erhalten. In [11–14,16] wurde die Anzahl der Partialwellen, auf die projiziert wurde, auf die Anzahl der Partialwellen beschränkt, die sich bei der Lösung der Formfaktorgleichung ergaben. Die Wellenfunktion kann zwar auch dann auf 1 normiert werden, enthält jedoch nur ca. 95-98% der vollen Wellenfunktion. Es ist jedoch viel einfacher die Vollständigkeitsrelation bei $\langle\psi_1|\Psi_t\rangle$ einzuschieben, da durch die Faddeev-Komponente die unendliche Summation auf eine endliche Anzahl beschränkt wird. Wenn die Vollständigkeitsrelation im gleichen Koordinatensatz wie die Faddeev-Komponente gegeben ist, wird durch die Orthogonalität der Zustände die Anzahl genau auf die beschränkt, die bei der Zweiteilchen-T-Matrix berücksichtigt wurden. Die Normierung läßt sich also bereits mit diesen Partialwellen durchführen. Die volle Wellenfunktion enthält jedoch unendlich viele Partialwellen.

6.6 Eigenschaften der Wellenfunktion

Es ist üblich, die Eigenschaften der Wellenfunktion in der $(\mathcal{LS})$ Kopplung

$$|p\,q(Ll)\mathcal{L}(Ss)\mathcal{S}\Gamma M_\Gamma\rangle \tag{6.37}$$

zu betrachten, da hier das Verhalten unter Drehungen leichter untersucht werden kann [97,98]. Der Gesamtdrehimpuls des Tritons ist $\Gamma = 1/2$, der Gesamtspin bei drei Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen kann $\mathcal{S} = 1/2$ oder $\mathcal{S} = 3/2$ sein. Damit ist der Gesamtdrehimpuls auf die Werte $\mathcal{L} = 0, 1, 2$ beschränkt. Dies bietet dann die Möglichkeit zur Klassifikation nach bestimmten Anteilen. Der Gesamtdrehimpuls und Gesamtspin bleiben in jeder Clusterung erhalten, während es in der Kanalspinbasis nur den Gesamtdrehimpuls gibt, der erhalten bleibt. Dies ist auch der Grund, warum die Kanalspinbasis für eine Klassifikation ungeeignet ist. Die $(\mathcal{LS})$ Kopplung hingegen ist ungeeignet, wenn die Zustände nach dem Subsystem charakterisiert sein müssen, wie z.B. dort, wo die Zweiteilchenpotentiale oder T-Matrizen in die Gleichung eingehen, also insbesondere in den Bindungs- oder Streugleichungen.
Die Wellenfunktion wird daher mittels folgender Umkopplung der Zustände in das $(\mathcal{LS})$ Kopplungsschema transformiert:

$$\begin{aligned}
&\langle((Ll)\mathcal{L},(Ss)\mathcal{S})\Gamma M_\Gamma| \\
=\;& \sum_{Jk}(-)^{L+S+l+s+\mathcal{L}+\mathcal{S}+1}\hat{J}\hat{\mathcal{L}}\hat{\mathcal{S}}\hat{k}\begin{Bmatrix} L & \mathcal{S} & k \\ s & J & S\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} L & \mathcal{S} & k \\ \Gamma & l & \mathcal{L}\end{Bmatrix}\langle((((LS)Js)kl)\Gamma M_\Gamma|\,.
\end{aligned} \tag{6.38}$$

Bei der Transformation müssen alle Zustände, die beitragen können, in der projizierten Wellenfunktion vorhanden sein, ansonsten kann es passieren, daß sich durch Interferenzen der Terme die Normierung ändert.
Im $(\mathcal{LS})$ Kopplungsschema wird die Wellenfunktion nun nach den Beiträgen zu verschiedenem $\mathcal{L} = 0, 1, 2$ unterschieden, d.h. man berechnet die Beiträge zur Normierungskonstanten:

$$\langle\psi_1|\Psi_t\rangle = \sum_{\mathcal{L}}\sum_c \int dp\,p^2\,dq\,q^2\,\langle\psi_1|p\,q\,c\rangle\langle p\,q\,c|\Psi_t\rangle = P(S)P(S') + P(P) + P(D) = 1\,. \tag{6.39}$$

Der Anteil, der zu $\mathcal{L} = 0$ gehört, wird dabei üblicherweise nochmals aufgespalten in einen Anteil, der symmetrisch im Spinraum ist ($P(S)$) und einen, der gemischtsymmetrisch im Spin-Isospinraum ist ($P(S')$) [98]. Letztlich rührt die ($P(S')$) Komponente von dem Unterschied zwischen der $^1S_0$ und der $^3S_1$ Wechselwirkung her, ist diese gleich, verschwindet $P(S')$.

Eine weitere charakteristische Größe ist die asymptotische Normierungskonstante [99]. Diese beschreibt den Überlapp der Wellenfunktion mit einem Kanalzustand aus einer ebenen Welle und der Deuteron-Wellenfunktion.

6.7 Resultate für das Triton

6.7.1 Numerik

Zur Bestimmung der Bindungsenergie wird Gleichung (6.14) diskretisiert und in eine Matrixgleichung (Eigenwertgleichung) überführt. Dazu wird eine Gauß-Legendre-Verteilung der Integrationspunkte gewählt. Die Anzahl der Stützstellen und der Scaling-Faktor bei der Transformation der Punkte vom Intervall $]-1, 1[$ auf $]0, \infty[$ wurde so gewählt, daß sich eine stabile Lösung ergibt. Die folgende Tabelle zeigt die Abhängigkeit der Bindungsenergie von der Anzahl der Meshpunkte pro Partialwelle.

Punkte	$J \leq 1^+$	$J \leq 1$	$J \leq 2$
6	-8.3318	-8.1383	-9.0551
12	-7.3571	-7.1376	-7.4330
24	-7.3150	-7.0913	-7.3688
36	-7.3156	-7.0919	-7.3688
40	-7.3156	-7.0919	-7.3688

Tabelle 19: Triton Bindungsenergien (in MeV) mit PEST-Potential (56555557).

Es zeigt sich also, daß bereits mit wenigen Meshpunkten eine hohe Genauigkeit erzielt wird. Im Gegensatz zu Parke et al. [100], bei denen mehr Punkte nötig waren. Alle Rechnungen wurden mit $N = 40$ Meshpunkten pro Partialwelle durchgeführt, um bei weiteren Rechnungen (Wellenfunktion etc.) eine hohe Genauigkeit zu gewährleisten. Die berechneten Formfaktoren wurden mit Hilfe von B-Splines [101] approximiert, um auch Zwischenpunkte verfügbar zu haben.

6.7.2 Ergebnisse für Yamaguchi und Malfliet-Tjon

Zunächst werden die Ergebnisse dieser Arbeit für das Yamaguchi Potential mit denen von Gibson und Lehman [4] verglichen. Zur Berechnung der Bindungsenergie und Wellenfunktion im ladungsabhängigen Fall wird wie in [35] vorgegangen, d.h. im $^1S_0$ Kanal wird dem Unterschied zwischen der nn- und np-Wechselwirkung durch Hinzunahme eines weiteren Kanals Rechnung getragen. Die Umkopplung der Isospin-Matrixelemente wird entsprechend geändert.

Wellenfunktion	Potential	Bindungsenergie (MeV)
Symmetric Tabakin	gemittelte n-p	9.72
	Triplett und Singulett	(9.33)
	Sätze II	
Tabakin	n-p Triplett und	10.11
	Singulett Sätze II	(10.1)
ladungsabhängig	n-p Triplett I	10.34
^3H	n-p Singulett I	(10.34)
	n-n Singulett	
Ladungsabhängig	n-p Triplett	8.49
	$\lambda = 0.3608 fm^{-3}$	(8.49)
^3H	n-p Singulett I	
(adjustiert)	n-n Singulett	
ladungsabhängig	n-p Triplett I	7.72
	$\lambda = 0.3589 fm^{-3}$	(7.72)
^3He	n-p Singulett I	
(adjustiert)	p-p Singulett	

Tabelle 20: Triton Bindungsenergien mit den Yamaguchi-Potentialen. Die Zahlen in Klammern sind aus [4].

Bis auf den gemittelten Parametersatz II ergibt sich exakte Übereinstimmung mit den Resultaten von Gibson und Lehman. Dies ist jedoch genau der, bei dem es im Triplett-Fall größere Abweichungen der Deuteronobservablen gab. Andererseits stimmt die mit dem nicht gemittelten Parametersatz II berechnete Bindungsenergie mit der von Gibson und Lehman überein. Dies könnte ein Indiz dafür sein, daß deren gemittelter Parametersatz ein anderer ist. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit der Parametersatz 7, ein leicht modifizierter Satz II, verwendet, der die Bindungsenergie von Gibson und Lehman ergibt, um mit deren Ergebnissen für die Photodesintegration vergleichen zu können. Die Bindungsenergien für die anderen Yamaguchi-Potentials sind in Tabelle 21 aufgeführt.

Die Berechnungen mit den nichtseparablen Malfliet-Tjon Potentialen wurden mit einem Programm für zweidimensionale Integralgleichungen berechnet. Techniken zur Behandlung solcher Gleichungen sind beschrieben in [38,102–109]. Das in [105] beschriebene Programm zur Behandlung dreier spinloser Teilchen wurde auf den vorliegenden Fall erweitert. Dies äußert sich im wesentlichen im geänderten Umkopplungskoeffizienten und dem Hinzukommen eines weiteren Kanals. Mit den Referenzrechnungen stimmen die hier erzielten Ergebnisse sehr gut überein.

Potential	E_t (MeV)
1	-9.7642
2	-9.9684
3	-10.1146
4	-10.2654
5	-10.7463
6	-11.0002
7	-9.3272

Tabelle 21: Triton-Bindungsenergien für die Yamaguchi Potentiale.

Potential	Referenzrechnung	diese Arbeit
I-III		-9.061
Ia-IIIa	8.536(1)[1]	-8.536
Ib-IIIb		-8.613
Ic-IIIc		-8.534
IIa -IVa	11.880[1]	-11.868
V		-8.043
Va	7.540[1]	-7.538
Vb		-7.540
Vc		-7.534
VI		-10.596

[1]Referenz [81]

Tabelle 22: Triton-Bindungsenergien (in MeV) für die Malfliet-Tjon Potentiale.

6.7.3 Ergebnisse für realistische Potentiale

Die Tabellen 23 bis 25 beinhalten die Ergebnisse für die Bindungsenergie und die Anteile der Zustände an der Wellenfunktion. Dabei werden die EST-Rechnungen mit den W-Matrix-Ergebnissen verglichen. Die weiter angegebenen Bindungsenergien für die ungenäherten Potentiale wurden mit einem Programm von A. Nogga aus Bochum berechnet. Dies löst die zweidimensionale Gleichung für die Faddeev-Komponente. Die volle Wellenfunktion und die Anteile können daraus, wie oben beschrieben, berechnet werden. Die Ergebnisse für das PEST ($J \leq 1^+$) stimmen mit denen von Parke et al. [100] exakt überein. Als weiterer Test für die Korrektheit des Programms für separable Potentiale wurde die Bindungsenergie für die EST-Potentiale auch mit dem Programm von A. Nogga berechnet. Dabei haben sich keine Unterschiede gezeigt. Bei der Beurteilung der Ergebnisse fällt zunächst auf, daß im Falle der EST-Potentiale mit steigendem Rang die Ergebnisse der exakten Wechselwirkung mehr und mehr reproduziert werden. Dies gilt sowohl für die Bindungsenergie, als auch für die Anteile der Partialwellen. Die Qualität dieser Entwicklung stimmt im Rahmen von ca. 1-2% mit exakten Ergebnissen überein.

		E_t(MeV)	P(S)	P(S')	P(P)	P(D)
$J \leq 1^+$	BAEST (11)	-8.3500	92.7458	1.41495	0.0277886	5.81145
	BAEST (44)	-8.3471	92.3509	1.42736	0.0340801	6.18769
	BAEST (56)	-8.3797	92.3136	1.43166	0.0345979	6.22011
	Bonn A (W-Matrix)	-8.3708	92.0088	1.38520	0.0405042	6.56547
	Bonn A	-8.3767	92.3225	1.42557	0.0348948	6.21699
$J \leq 2^+$	BAEST (1111)	-8.3604	92.7377	1.41487	0.0270358	5.82038
	BAEST (4444)	-8.4112	92.3510	1.41146	0.0336197	6.20389
	BAEST (5644)	-8.4439	92.3146	1.41527	0.0341380	6.23599
	Bonn A (W-Matrix)	-8.3994	92.0028	1.37959	0.0394791	6.57816
	Bonn A	-8.4419	92.3201	1.41060	0.0345150	6.23478
$J \leq 1$	BAEST (11111)	-8.2981	92.9493	1.24832	0.0300225	5.77239
	BAEST (44444)	-8.0827	92.7166	1.25222	0.0365796	5.99458
	BAEST (56444)	-8.1146	92.6825	1.25383	0.0370767	6.02662
	Bonn A (W-Matrix)	-8.1603	92.3577	1.20850	0.0429607	6.390804
	Bonn A	-8.1253	92.6872	1.24754	0.0370255	6.02822
$J \leq 2$	BAEST (11111111)	-8.3949	92.8108	1.26365	0.0309093	5.89459
	BAEST (56444445)	-8.2846	92.5921	1.23607	0.0366045	6.13526
	Bonn A	-8.2939	92.5947	1.23151	0.0365575	6.13728

Tabelle 23: Bindungsenergien und die Komponenten der Wellenfunktion für das Bonn A Potential.

Ein weiteres Kriterium, was dies unterstreicht, ist die Norm der Differenz der mit den EST- und den Originalpotentialen berechneten Wellenfunktionen:

$$||\Psi_{2d} - \Psi_{EST}|| < 10^{-3} \,. \tag{6.40}$$

Dies zeigt, daß die Wellenfunktionen sehr gut übereinstimmen. Ein Kriterium für die Qualität der Bindungsenergie ergibt sich aus der Schrödinger-Gleichung

$$(H + V)\ |\Psi\rangle = E\ |\Psi\rangle \ . \tag{6.41}$$

Wenn man die berechnete Wellenfunktion dort einsetzt und die Summe aus kinetischer und potentieller Energie berechnet, so stimmt diese in den hier betrachteten Fällen bis auf 0.001% mit der berechneten Energie überein.
Die Ergebnisse mit der W-Matrix Methode schneiden bei diesem Vergleich schlechter ab. Zwar stimmen sie für 5-Kanal Rechnungen noch recht gut mit den exakten überein, werden aber umso schlechter, je mehr Partialwellen in der Zweiteilchen-T-Matrix berücksichtigt

		E_t(MeV)	P(S)	P(S')	P(P)	P(D)
$J \leq 1^+$	BBEST (11)	-8.2085	91.9460	1.36065	0.0348533	6.65852
	BBEST (44)	-8.1366	91.3592	1.36899	0.0473481	7.22447
	BBEST (56)	-8.1699	91.3436	1.37267	0.0477297	7.23599
	Bonn B (W-Matrix)	-8.1614	91.2134	1.28573	0.0532581	7.44759
	Bonn B	-8.1615	91.3477	1.36848	0.0489139	7.23492
$J \leq 2^+$	BBEST (1111)	-8.2187	91.9375	1.36041	0.0340525	6.66799
	BBEST (4444)	-8.1966	91.3528	1.35435	0.0473731	7.24546
	BBEST (5644)	-8.2301	91.3392	1.35732	0.0477175	7.25572
	Bonn B (W-Matrix)	-8.1895	91.2134	1.28573	0.0532582	7.44759
	Bonn B	-8.2243	91.3400	1.35419	0.0490166	7.25679
$J \leq 1$	BBEST (11111)	-8.1592	92.1425	1.20042	0.0369875	6.62010
	BBEST (44444)	-7.8545	91.7519	1.21583	0.0476747	6.98455
	BBEST (56444)	-7.8838	91.7363	1.21778	0.0479390	6.99799
	Bonn B (W-Matrix)	-7.9259	91.5561	1.14285	0.0541292	7.24690
	Bonn B	-7.8974	91.7403	1.21041	0.0485996	7.00064
$J \leq 2$	BBEST (11111111)	-8.2818	91.9620	1.20797	0.0385888	6.79147
	BBEST (56444445)	-8.0881	91.6138	1.18929	0.0475855	7.14935
	Bonn B (W-Matrix)	-7.9186	91.5555	1.14334	0.0519720	7.24918
	Bonn B	-8.1011	91.6156	1.18438	0.0481771	7.15180

Tabelle 24: Bindungsenergien und die Komponenten der Wellenfunktion für das Bonn B Potential.

werden. Die Ursache ist, daß das von T. Frank [35] vorgeschlagene Verfahren zur Optimierung des k-Parameters bei höheren Partialwellen, insbesondere im ${}^3P_2$-${}^3F_2$-Kanal, nicht mehr ausreichend ist bzw. wegen Mehrdeutigkeiten versagt. Die Genauigkeit der Bindungsenergien und Anteile der Partialwellen liegt in der Größenordnung von ca. 5-10%.
Die prozentualen Anteile der verschiedenen Partialwellen sind in den folgenden Tabellen mit steigender Anzahl von Subsystempartialwellen und in der Projektion aufgelistet. Dabei zeigt sich, daß diese Anteile nur schwach von den Partialwellen des Subsystems abhängen. Viel wichtiger ist die Anzahl der Partialwellen, auf die projiziert wird. Man sieht in Tabelle 28 wie sich die Summe der Beträge mit steigender Anzahl 100% nähert. Dies entspricht gerade der im Abschnitt 6.5 erwähnten, von der Projektion abhängigen, Norm.

Potential	E_t (MeV)
NEST (11)	-7.7417
NEST (54)	-7.5539
NEST (1111)	-7.7418
NEST (5455)	-7.5542
NEST (11111)	-7.6895
NEST (54555)	-7.2339
NEST (11111111)	-7.8244
NEST (54555557)	-7.4281

Tabelle 25: Triton-Bindungsenergien für das NEST Potential.

		E_t(MeV)	P(S)	P(S')	P(P)	P(D)
$J \leq 1^+$	PEST (11)	-7.4512	90.6293	1.63602	0.0423256	7.69233
	PEST (34)	-7.2659	89.8814	1.65240	0.0646665	8.40150
	PEST (56)	-7.3156	89.9014	1.63357	0.0642615	8.40075
	Paris (W-Matrix)	-7.2998	90.2208	1.45001	0.0643732	8.26480
	Paris	-7.2998	89.8860	1.62146	0.0658460	8.42673
	Paris-r	-7.31	89.883	1.623	0.066	8.428
$J \leq 2^+$	PEST (1111)	-7.4639	90.6187	1.63550	0.0415494	7.70422
	PEST (3444)	-7.3751	89.8694	1.61766	0.0663868	8.44658
	PEST (5644)	-7.4236	89.8891	1.60062	0.0659797	8.44431
	PEST (5655)	-7.4257	89.8886	1.59973	0.0660708	8.44559
	Paris (W-Matrix)	-7.3425	90.2116	1.43647	0.0635970	8.28829
	Paris	-7.4108	89.8726	1.58717	0.0675808	8.47268
$J \leq 1$	PEST (11111)	-7.4639	90.8305	1.46675	0.0443597	7.65835
	PEST (34333)	-7.0737	90.2772	1.49243	0.0636900	8.16664
	PEST (56444)	-7.0927	90.2956	1.48790	0.0621203	8.15440
	PEST (56555)	-7.0919	90.2974	1.48810	0.0616712	8.15283
	Paris (W-Matrix)	-7.1498	90.5100	1.30111	0.0663818	8.12252
	Paris	-7.1053	90.2801	1.46496	0.0627511	8.19216
$J \leq 2$	PEST (11111111)	-7.5493	90.6148	1.45911	0.0473895	7.87866
	PEST (56555557)	-7.3688	90.1375	1.42046	0.0633571	8.37871
	Paris (W-Matrix)	-7.0880	90.5383	1.36632	0.0616161	8.03381
	Paris	-7.3805	90.1184	1.39988	0.0644307	8.41730

Tabelle 26: Bindungsenergien und die Komponenten der Wellenfunktion für das Paris Potential. Die Werte für Paris-r sind aus [99].

	PEST-Potential			BAEST-Potential			BBEST-Potential		
#	$J \leq 1^+$	$J \leq 1$	$J \leq 2$	$J \leq 1^+$	$J \leq 1$	$J \leq 2$	$J \leq 1^+$	$J \leq 1$	$J \leq 2$
1	44.41	44.56	44.47	45.89	46.00	45.95	45.36	45.49	45.42
2	44.89	45.04	44.94	46.16	46.29	46.23	45.65	45.80	45.73
3	1.03	0.95	0.97	0.93	0.86	0.86	1.01	0.93	0.94
4	2.76	2.71	2.81	1.96	1.92	1.98	2.32	2.27	2.35
5	0.17	0.17	0.17	0.09	0.09	0.09	0.12	0.12	0.12
6	1.06	1.07	1.11	0.88	0.90	0.92	1.00	1.02	1.03
7	0.12	0.13	0.13	0.11	0.11	0.11	0.10	0.11	0.11
8	0.26	0.22	0.21	0.24	0.19	0.19	0.23	0.19	0.18
9	1.09	0.97	0.97	1.03	0.90	0.90	1.08	0.94	0.94
10	0.64	0.62	0.62	0.59	0.56	0.56	0.62	0.59	0.60
11	0.31	0.32	0.32	0.23	0.24	0.24	0.24	0.25	0.25
12	0.44	0.45	0.45	0.32	0.34	0.34	0.33	0.35	0.35
13	0.13	0.13	0.13	0.12	0.13	0.13	0.12	0.13	0.13
14	0.08	0.08	0.08	0.08	0.07	0.08	0.07	0.07	0.07
15	0.10	0.09	0.09	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
16	0.93	0.93	1.00	0.57	0.58	0.62	0.72	0.73	0.78
17	0.30	0.28	0.29	0.14	0.13	0.13	0.20	0.18	0.19
18	0.03	0.03	0.03	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01

Tabelle 27: Anteile der Partialwellen an der Wellenfunktion.

	Paris (PEST)			Bonn *A* (BAEST)			Bonn *B* (BBEST)		
Projektion	$J \leq 1^+$	$J \leq 1$	$J \leq 2$	$J \leq 1^+$	$J \leq 1$	$J \leq 2$	$J \leq 1^+$	$J \leq 1$	$J \leq 2$
$J \leq 1^+$	93.27	93.43	93.36	95.03	95.17	95.13	94.46	94.61	94.56
$J \leq 1$	96.45	96.43	96.40	97.88	97.83	97.80	97.50	97.46	97.42
$J \leq 2^+$	94.23	94.42	94.34	95.78	95.95	95.91	95.23	95.41	95.36
$J \leq 2$	98.78	98.76	98.79	99.41	99.39	99.40	99.26	99.24	99.26
$J \leq 3$	99.27	99.26	99.28	99.71	99.70	99.70	99.62	99.60	99.61
$J \leq 4$	99.67	99.66	99.67	99.88	99.87	99.88	99.84	99.83	99.84
$J \leq 5$	99.77	99.76	99.77	99.92	99.92	99.92	99.90	99.89	99.90
$J \leq 6$	99.87	99.86	99.87	99.96	99.95	99.96	99.95	99.94	99.94

Tabelle 28: Anteile der Wellenfunktion für PEST(56555557), BAEST(56444445) und BBEST(56444445).

7 Die elektromagnetische Wechselwirkung

7.1 Grundlagen

Die Wechselwirkung von Photonen mit Materie wird mit der Eichung $\vec{\nabla}\vec{A} = 0$ in erster Ordnung des elektromagnetischen Feldes beschrieben durch ($\hbar = c = 1$)

$$H_{em} = -\int d^3x\, \vec{j}(\vec{x}\,)\, \vec{A}(\vec{x}\,)\,. \tag{7.42}$$

Dabei ist $\vec{j}(\vec{x}\,)$ der Materiestrom und $\vec{A}(\vec{x}\,)$ das Vektorpotential des Feldes. Für den Strom gilt die Kontinuitätsgleichung

$$-\vec{\nabla}\vec{j} = \dot{\rho} = [H_N, \rho(\vec{x}\,)]\ . \tag{7.43}$$

Hierin ist H_N der nukleare Hamiltonoperator, der sowohl die beteiligten Nukleonen, als auch die beteiligten Austauschteilchen beschreibt. Sowohl der Strom, als auch die Ladungsdichte ist aus Ein- und Mehrteilchengrößen zusammengesetzt

$$\rho = \rho_{[1]} + \rho_{[2]} + \ldots \qquad \vec{j} = \vec{j}_{[1]} + \vec{j}_{[2]} + \ldots\,. \tag{7.44}$$

Die Einteilchenoperatoren

$$\vec{j}_{[1]} = \sum_i \vec{j}_i \qquad \text{und} \qquad \rho_{[1]} = \sum_i \rho_i \tag{7.45}$$

beschreiben die Nukleonen, während die Mehrteilchenoperatoren, sog. Austauschoperatoren, die Ströme der Austauschteilchen erfassen, also von der Wechselwirkung der Teilchen miteinander herrühren.

7.2 Siegert-Hypothese

Eine angemessene Beschreibung der nuklearen Prozesse erfordert die Berücksichtigung der Mehrteilchenströme, die i. a. jedoch nicht bekannt sind. Die von Siegert [56] aufgestellte Hypothese ermöglicht es, diese auch ohne genaue Kenntnis miteinzubeziehen. Man entwickelt dazu die Kontinuitätsgleichung nach Ein- und Mehrteilchengrößen:

$$\begin{aligned} 0 = \vec{\nabla}\cdot\vec{j} + i\,[H_N, \rho] \ = \quad & \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_{[1]} + i\left[T, \rho_{[1]}\right] \\ + \quad & \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_{[2]} + i\left[T, \rho_{[2]}\right] + i\left[V_{[2]}, \rho_{[1]}\right] \\ + \quad & \ldots\,. \end{aligned} \tag{7.46}$$

Diese Gleichung kann nun nach Ein- und Mehrteilchenoperatoren separiert werden

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{[1]} + i\left[T, \rho_{[1]}\right] &(7.47)\\ 0 &= \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{[2]} + i\left[T, \rho_{[2]}\right] + i\left[V_{[2]}, \rho_{[1]}\right] . &(7.48)\end{aligned}$$

Die oben angegebenen Einteilchenoperatoren erfüllen zwar (7.47), jedoch nicht zwangsläufig (7.43). Sobald das Potential isospin- oder impulsabhängig ist, d.h. im Falle von realistischen Potentialen, ist der Kommutator von $V_{[2]}$ mit der Einteilchen-Ladungsdichte $\rho_{[1]}$ von Null verschieden, so daß $\vec{\nabla}\vec{j}_{[2]}$ ebenfalls nicht verschwinden wird. Die Siegert- Hypothese besagt, daß in nichtrelativistischer Näherung die Ladungsdichte der Austauschteilchen und damit die Beiträge der Zweiteilchen-Ladungsdichte in (7.48) verschwindet. Diese Hypothese gilt im statischen Limes für OBE- Potentiale, da die ausgetauschten Mesonen keine Energie tragen und ihre Ladungsdichte verschwindet [110]. Für den Ladungsdichteoperator folgt

$$\rho = \rho_{[1]} \tag{7.49}$$

und für die Kontinuitätsgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{[1]} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{[2]}) = -\dot{\rho}_{[1]} . \tag{7.50}$$

Dies bedeutet jedoch, daß $\dot{\rho}_{[1]}$ einen Teil der Austauschströme bereits enthält. Es handelt sich dabei nur um den longitudinalen Anteil. Für den transversalen Anteil, der in der Kontinuitätsgleichung nicht erfaßt wird, wird ein explizites dynamisches Modell benötigt. In dieser Arbeit wird ausschließlich der longitudinale Strom betrachtet.

7.3 Siegert-Theorem

Die Kontinuitätsgleichung für den in den Impulsraum transformierten Strom

$$\tilde{\vec{j}}(\vec{k}_\gamma) = \int d^3x \, \vec{j}(\vec{x}) \, e^{i\vec{k}_\gamma \vec{x}} \tag{7.51}$$

und die Ladungsdichte

$$\tilde{\rho}(\vec{k}_\gamma) = \int d^3x \, \rho(\vec{x}) \, e^{i\vec{k}_\gamma \vec{x}} \tag{7.52}$$

lautet

$$\vec{k}_\gamma \cdot \tilde{\vec{j}}(\vec{k}_\gamma) = -i\,\dot{\tilde{\rho}}(\vec{k}) = \left[H_N, \tilde{\rho}(\vec{k}_\gamma)\right] . \tag{7.53}$$

Gleichung (7.53) macht lediglich eine Aussage über die longitudinale Komponente des Stromes. Es ist jedoch leicht möglich, aus dieser eine Gleichung für die transversale Komponente abzuleiten. Bildet man nämlich auf beiden Seiten der Gleichung den Gradienten an der Stelle $\vec{k}_\gamma = 0$, so erhält man die ursprüngliche Form des Siegert-Theorems:

$$\tilde{\vec{j}}(0) = \left[H_N, \int d^3x\, \rho(\vec{x}\,)\, \vec{x} \right] . \tag{7.54}$$

Als Niederenergienäherung für den Strom $\tilde{\vec{j}}$ erhält man also den Kommutator von H_N und dem Dipoloperator

$$\vec{D} = \int d^3x\, \rho(\vec{x}\,)\, \vec{x}\,. \tag{7.55}$$

Die Siegert- Hypothese besagt, daß diese Näherung gut ist, da über die Eichbedingung bis zu einem gewissen Grad auch 2- Teilchen Stromdichten (Austauschströme) mit beschrieben werden. Das Siegert- Theorem ist nur für den Grenzfall $\vec{k}_\gamma \to 0$ gültig. Friar und Fallieros haben in [111] das Siegert-Theorem für höhere Energien erweitert, indem sie aus höheren Ableitungen der Kontinuitätsgleichung an der Stelle $\vec{k}_\gamma = 0$ die Taylor-Reihe für $\tilde{\vec{j}}$ aufbauen. Im folgenden wird jedoch ohnehin nur die niedrigste Ordnung dieser Entwicklung betrachtet, diese stimmt mit den üblicherweise verwendeten Operatoren überein.

7.4 Multipolentwicklung

Der Hamiltonoperator für elektromagnetische Wechselwirkung ist in erster Ordnung des Feldes gegeben durch:

$$H_{em} = -\int d^3x\, \vec{j}(\vec{x}\,)\, \vec{A}(\vec{x}\,)\,. \tag{7.56}$$

Von diesem Operator wird nun der Normierungsfaktor der ebenen Welle abgespalten, der sich bei der Berechnung des Wirkungsquerschnitts ohnehin wegkürzt:

$$H_{em} = \left(\frac{2\pi}{\omega V}\right)^{\frac{1}{2}} T_{em}(\vec{k}_\gamma, \lambda) = \left(\frac{2\pi}{\omega V}\right)^{\frac{1}{2}} \int d^3r\ \hat{\epsilon}_{k_\gamma,\lambda}\ e^{i\vec{k}_\gamma \vec{r}}\ \vec{j}(\vec{r}\,)\,. \tag{7.57}$$

Das Photonenfeld $\hat{\epsilon}_{\vec{k}_\gamma,\lambda} \exp(i\vec{k}_\gamma\, \vec{r}\,)$ wird üblicherweise nach elektrischen und magnetischen Multipolen entwickelt [112,113]. In dieser Arbeit wird die z- Richtung parallel zum Impuls $\vec{k}$ des einlaufenden Photons gelegt. In diesem Koordinatensystem gilt für die Entwicklung von T_{em}

$$T_{em}(\vec{k}_\gamma, \lambda) = -(2\,\pi)^{\frac{1}{2}} \sum_L \hat{L}\, [T_{el}^{[L]}(k_\gamma, \lambda) + \lambda\, T_{mag}^{[L]}(k_\gamma, \lambda)]\,, \quad \hat{L} = \sqrt{2L+1}\,. \tag{7.58}$$

$T_{el}^{[L]}$ und $T_{mag}^{[L]}$ sind die elektrischen und magnetischen Multipoloperatoren mit der Parität $(-)^L$ bzw. $-(-)^L$, sie sind gegeben durch:

$$T_{el}^{[L]}(k_\gamma, \lambda) \;=\; \frac{i^L}{k_\gamma} \int d^3r\ \left\{ \vec{\nabla} \times [j_L(k_\gamma r)\, \vec{Y}_{LL;\lambda}(\Omega_r)] \right\} \cdot \vec{j}(\vec{r}\,) \tag{7.59}$$

$$T^{[L]}_{mag}(k_\gamma,\lambda)] \;=\; i^L \int d^3r \; \left\{ j_L(k_\gamma\, r)\, \vec{Y}_{LL;\lambda}(\Omega_r) \right\} \cdot \vec{j}(\vec{r})\,. \tag{7.60}$$

Die Ausdrücke in den geschweiften Klammern stellen die Multipolentwicklung des Vektorpotentials $\vec{A}$ dar, $j_L(k_\gamma\, r)$ sind dabei die Bessel-Funktionen und $\vec{Y}_{LL;\lambda}(\Omega_r)$ die im Anhang definierten Vektorkugelfunktionen. Der elektrische Multipol (7.59) läßt sich weiter zerlegen [110,114,115] in

$$T^{[L]}_{el}(k_\gamma,\lambda) = T^{[L]}_{a}(k_\gamma,\lambda) + T^{[L]}_{b}(k_\gamma,\lambda)\,, \tag{7.61}$$

mit

$$\begin{aligned} T^{[L]}_{a}(k_\gamma,\lambda) \;&=\; \frac{i^{L+1}}{k_\gamma}\frac{1}{\sqrt{L(L+1)}}\int d^3r \; (\vec{\nabla}\Phi_{L\,\lambda}) \cdot \vec{j}(\vec{r})\,, \\ T^{[L]}_{b}(k_\gamma,\lambda) \;&=\; i^{L+1}\frac{1}{\sqrt{L(L+1)}}\int d^3r \; [\vec{r}\, j_L(k_\gamma\, r)\, Y_{L\,\lambda}(\Omega_r)] \cdot \vec{j}(\vec{r}) \end{aligned} \tag{7.62}$$

und

$$\Phi_{L\,\lambda} = \left(1 + r\,\frac{d}{d\,r}\right) j_L(k_\gamma\, r)\; Y_{L\,\lambda}(\Omega_r)\,. \tag{7.63}$$

Durch partielle Integration von $T^{[L]}_{a}(k_\gamma,\lambda)$ gelangt man zu

$$T^{[L]}_{a}(k_\gamma,\lambda) = -\frac{i^{L+1}}{k_\gamma}\frac{1}{\sqrt{L(L+1)}}\int d^3r \; \Phi_{L\,\lambda}\, \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r})\,. \tag{7.64}$$

Benutzt man nun für den Strom $\vec{j}$ die Kontinuitätsgleichung (7.43), dann läßt sich dieser Anteil des elektrischen Multipoloperators schreiben als

$$T^{[L]}_{a}(k_\gamma,\lambda) = [H_N, D_L]\;, \tag{7.65}$$

mit

$$D_L(k_\gamma,\lambda) = -\frac{i^L}{\sqrt{L(L+1)}}\frac{1}{k_\gamma}\int d^3r \; \rho(r) \left(1 + \frac{d}{dr}\right) j_L(k_\gamma\, r)\, Y_{L\lambda}(\Omega_r)\,. \tag{7.66}$$

In der Niederenergie- oder Langwellennäherung, d.h. $kr \ll 1$, überwiegt dieser Anteil

$$T^{[L]}_{el}(k_\gamma,\lambda) \rightsquigarrow T^{[L]}_{a}(k_\gamma,\lambda) \tag{7.67}$$

und die Übergangsamplitude wird eine Funktion, die von der Ladungsverteilung der Nukleonen, aber nicht mehr explizit von den Strömen abhängt, diese jedoch implizit enthält.

In dieser Näherung kann nun anstelle der Bessel-Funktion eine Entwicklung nach kleinen Argumenten eingesetzt werden:

$$D_L = i^L \sqrt{\frac{L+1}{L}} \frac{k_\gamma^{L-1}}{(2L+1)!!} \int d^3r \; r^L \rho(\vec{r}\,)\, Y_{L\lambda}(\Omega_r)\,. \tag{7.68}$$

Für punktförmige Teilchen, d.h. die Ladungsdichte $\rho(\vec{r}\,) = \sum_{i=1}^{N} e_i\, \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$, vereinfacht sich dieser Ausdruck weiter zu

$$\begin{aligned} D_L &= i^L \sqrt{\frac{L+1}{L}} \frac{k_\gamma^{L-1}}{(2L+1)!!} \sum_{i=1}^{N} e_i\, r_i^L\, Y_{L\lambda}(\Omega_r) \\ &= i^L \sqrt{\frac{L+1}{L}} \frac{k_\gamma^{L-1}}{(2L+1)!!} \sum_{i=1}^{N} e_i\, \mathcal{Y}_{L\lambda}(\vec{r}_i\,)\,. \end{aligned} \tag{7.69}$$

Diese Form des elektromagnetischen Wechselwirkungsoperators dient nun als Grundlage für die weiteren Berechnungen.

8 Photodesintegration

8.1 Photodesintegration des Deuterons

Als erste einfache Anwendung der im vorhergehenden Kapitel berechneten Multipoloperatoren soll zunächst die Photodesintegration des Deuterons betrachtet werden. Diese wurde bereits mehrfach mit unterschiedlichen Methoden untersucht [90,116–122]. Hier dient sie einerseits als Test, andererseits können hier bereits einige Effekte, wie der Einfluß der final-state interaction oder die Rolle der mesonischen Austauschströme untersucht werden. Die Photodesintegration des Deuterons wird durch folgendes Matrixelement beschrieben:

$$M(\vec{p}) = {}^{(-)}\langle\, \vec{p}\,|\, H_{em}\,|\, \Psi_d\,\rangle = \langle\, \vec{p}\,|\, \Omega^{(-)\dagger} H_{em}\,|\, \Psi_d\,\rangle\,. \tag{8.1}$$

Hierin bedeutet $|\Psi_d\rangle$ das im Eingangszustand vorliegende Deuteron, während ${}^{(-)}\langle\vec{p}\,|$ den aus Proton und Neutron gebildeten Streuzustand beschreibt. Der Operator H_{em} beschreibt die elektromagnetische Wechselwirkung. Die Streuzustände ${}^{(-)}\langle\vec{p}\,|$ sind über den Møller-operator $\Omega^{(-)}$ mit den ebenen Wellen der freien Bewegung

$$|\vec{p}\,\rangle^{(-)} = \Omega^{(-)}\,|\vec{p}\,\rangle = \lim_{\epsilon\to 0}\,(-i\epsilon)\,G(E-i\epsilon)\,|\vec{p}\,\rangle \tag{8.2}$$

verknüpft. Die Resolvente des vollen Hamiltonoperators $H = H_0 + V$ ist gegeben durch $G(z) = (z-H)^{-1}$. Um den obigen ϵ-Limes ausführen zu können, benutzt man den weniger singulären Übergangsoperator T

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)\,T(z)\,G_0(z)\,, \tag{8.3}$$

der die übliche Lippmann-Schwinger Gleichung

$$T(z) = V + V\,G_0(z)\,T(z) \tag{8.4}$$

erfüllt. Unter Benutzung von (8.3) läßt sich der Grenzwert in (8.2) ausführen, man erhält

$$|\vec{p}\,\rangle^{(-)} = \Omega^{(-)}\,|\vec{p}\,\rangle = \Big(1 + G_0(E-i0)\,T(E-i0)\Big)\,|\vec{p}\,\rangle\;. \tag{8.5}$$

Für den adjungierten Mølleroperator ergibt sich somit

$$\Omega^{(-)\dagger} = 1 + T(E+i0)\,G_0(E+i0)\,. \tag{8.6}$$

Eine Integralgleichung für den Mølleroperator findet man nun, indem man die LS-Gleichung (8.4) von rechts mit G_0 multipliziert und den Einsoperator auf beiden Seiten hinzuaddiert:

$$1 + T(E+i0)\, G_0(E+i0) = 1 + V\, G_0(E+i0)\, (1 + T(E+i0)\, G_0(E+i0)) \;. \tag{8.7}$$

Durch Vergleich mit (8.6) ergibt sich

$$\Omega^{(-)\dagger}(z) = 1 + V\, G_0(z)\, \Omega^{(-)\dagger}(z)\,. \tag{8.8}$$

Die Übergangsamplitude für die Photodesintegration findet man nun, indem man den Møller-Operator auf $H_{em}|\Psi_d\rangle$ anwendet und von rechts mit $\langle\vec{p}|$ multipliziert:

$$\begin{aligned}\langle\, \vec{p}\,|\, \Omega^{(-)\dagger} H_{em}\,|\, \Psi_d\,\rangle &= \langle\, \vec{p}\,|\, H_{em}\,|\, \Psi_d\,\rangle \\ &+ \int d^3p'\, \langle\, \vec{p}\,|\, V\,|\, \vec{p}\,'\,\rangle\, \frac{1}{E - p'^2 + i0}\, \langle\, \vec{p}\,'\,|\, \Omega^{(-)\dagger} H_{em}\,|\, \Psi_d\,\rangle\end{aligned} \tag{8.9}$$

oder

$$M(\vec{p}\,) = B(\vec{p}\,) + \int d^3p'\, V(\vec{p},\vec{p}\,')\, \frac{1}{E - p'^2 + i0}\, M(\vec{p}\,')\,. \tag{8.10}$$

Ein Vergleich mit der Lippmann-Schwinger-Gleichung im Impulsraum

$$T(\vec{p},\vec{p}\,') = V(\vec{p},\vec{p}\,') + \int d^3p''\, V(\vec{p},\vec{p}\,'')\, \frac{1}{E - p''^2 + i0}\, T(\vec{p}\,'',\vec{p}\,') \tag{8.11}$$

zeigt, daß sich die beiden Gleichungen nur durch ihre Inhomogenität unterscheiden. Das Potential in (8.11) wird in (8.10) ersetzt durch eine off-shell-Erweiterung der sog. Born-Amplitude

$$B(\vec{p}\,) = \langle\, \vec{p}\,|\, H_{em}\,|\, \Psi_d\,\rangle\,. \tag{8.12}$$

Hier ist, im Gegensatz zur vollen Lösung, der auslaufende Zustand kein Streuzustand, sondern eine ebene Welle.

8.1.1 Partialwellenzerlegung der Integralgleichung

Zur numerischen Behandlung wird Gleichung (8.10) nach Partialwellen zerlegt, dazu wird (8.8) von links auf Partialwellen (5.1) projiziert und von rechts mit $H_{em}\,|\Psi_d\rangle$ multipliziert:

$$\begin{aligned}
&\langle\, p(LS)JM_J;TM_T \,|\, \Omega^{(-)\dagger}\, H_{em} \,|\, \Psi_d \,\rangle \\
&\quad = \langle\, p(LS)JM_J;TM_T \,|\, H_{em} \,|\, \Psi_d \,\rangle + \langle\, p(LS)JM_J;TM_T \,|\, V\, G_0\, \Omega^{(-)\dagger}\, H_{em} \,|\, \Psi_d \,\rangle\,.
\end{aligned} \tag{8.13}$$

Im folgenden wird der Multiindex η aus Kapitel 5 verwendet. Mit den Abkürzungen:

$$\mathcal{B}^\eta_L(p,\lambda) \;=\; \langle\, p(LS)JM_J;TM_T \,|\, H_{em} \,|\, \Psi_d \,\rangle\,, \tag{8.14}$$

$$\mathcal{M}^\eta_L(p,\lambda) \;=\; \langle\, p(LS)JM_J;TM_T \,|\, V\, G_0\, \Omega^{(-)\dagger} H_{em} \,|\, \Psi_d \,\rangle \tag{8.15}$$

und nach Einschieben einer Vollständigkeitsrelation (5.3) ergibt sich:

$$\mathcal{M}^\eta_L(p,\lambda) = \mathcal{B}^\eta_L(p,\lambda) \sum_{L'} \int_0^\infty dp\, p^2\, V_{LL'}(p,p')\, \frac{1}{E - p'^2 + i0}\, \mathcal{M}^\eta_{L'}(p',\lambda)\,. \tag{8.16}$$

Diese Integralgleichung kann nun mit üblichen Verfahren gelöst werden. Die auftretende Hauptwertintegration wird mit der in Anhang J angegebenen Beziehung durchgeführt. Es sei angemerkt, daß hier keine Näherung des Potentials vorgenommen werden muß, sondern die exakte Wechselwirkung verwendet werden kann. Diese Reaktion stellt damit neben den Deuteron- und n-p-Streuobservablen einen weiteren einfachen Test zur Güte der separablen Näherung dar.

8.1.2 Berechnung der Born-Amplitude

Die Born-Amplitude ist bei Berücksichtigung der Dipol- und Quadrupolübergänge bis auf einen Normierungsfaktor gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\langle\, p(LS)JM_J \,|\, T_{em}(\vec{k}_\gamma,\lambda) \,|\, \Psi_d \,\rangle \\
&\approx\; -\sqrt{2\pi} k_\gamma \left\{ \sqrt{3}\, \langle\, p(LS)JM_J \,|\, D_1 \,|\, \Psi_d \,\rangle + \sqrt{5}\, \langle\, p(LS)JM_J \,|\, D_2 \,|\, \Psi_d \,\rangle \right\}\,,
\end{aligned} \tag{8.17}$$

wobei D_1 und D_2 nach Transformation ins Schwerpunktsystem lauten:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \frac{ie}{3\sqrt{2}}\, \tfrac{1}{2} \left(\tau_3^{(1)} - \tau_3^{(2)} \right) \mathcal{Y}_{1\lambda}(\vec{r}\,) = \frac{ie}{3\sqrt{2}}\, \mathcal{T}_1\, \mathcal{Y}_{1\lambda}(\vec{r}\,) \\
D_2 &= -\frac{ek_\gamma}{60} \sqrt{\frac{3}{2}}\, \tfrac{1}{2} \left(2 + \tau_3^{(1)} + \tau_3^{(2)} \right) \mathcal{Y}_{2\lambda}(\vec{r}\,) = -\frac{ek_\gamma}{60} \sqrt{\frac{3}{2}}\, \mathcal{T}_2\, \mathcal{Y}_{2\lambda}(\vec{r}\,)\,.
\end{aligned} \tag{8.18}$$

Die Berechnung der Isospin-Matrixelemente kann separat erfolgen. Unter Verwendung des Isospins des Deuterons $T = 0$ ergibt sich, daß die Matrixelemente diagonal in M_T sind, was letztlich Ladungserhaltung bedeutet. Für verschiedene Werte des Betrages des Isospins ergibt sich:

	$\langle\, (\tau_3^{(1)}\tau_3^{(2)})TM_T \,|\, \mathcal{T}_1 \,|\, (\tau_3^{(1)}\tau_3^{(2)})00 \,\rangle$	$\langle\, (\tau_3^{(1)}\tau_3^{(2)})TM_T \,|\, \mathcal{T}_2 \,|\, (\tau_3^{(1)}\tau_3^{(2)})00 \,\rangle$
T = 0	0	1
T = 1	1	0

Tabelle 29: Isospin-Matrixelemente der Deuteron-Photodesintegration.

Die reduzierten Matrixelemente der sphärischen Harmonischen sind im Anhang angegeben. Nach Einschieben einer Vollständigkeitsrelation erhält man folgende Matrixelemente:

$$\begin{aligned}
\langle\, p\,(LS)J \,\|\, D_1^{(1)} \,\|\, \Psi_d \,\rangle &= \sum_{L'} \int dp'\, p'^2 \langle\, p\,(LS)J \,\|\, D_1^{(1)} \,\|\, p'\,(L'S')J' \,\rangle\, \langle p'(L'S')J' | \Psi_d \rangle \\
&= \frac{\hbar}{\sqrt{6\pi}} \Bigg\{ \frac{e}{2} (-)^{S+J'} \delta_{SS'}\, \hat{J}\hat{J}' \sum_{L'} \hat{L}\hat{L}' \begin{pmatrix} L & 1 & L' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} L & L' & 1 \\ J' & J & S \end{Bmatrix} \\
&\quad \times \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{L(L+1) - L'(L'+1) - 2}{2\,p} \right) \langle p\,(L'S')J' | \Psi_d \rangle \Bigg\} \\
&= \frac{\hbar}{\sqrt{6\pi}} T_1 \,, \qquad (8.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\, p\,(LS)J \,\|\, D_2^{(1)} \,\|\, \Psi_d \,\rangle &= \frac{\hbar}{\sqrt{10\pi}} \Bigg\{ \frac{e\hbar k_\gamma}{8} \sqrt{\frac{5}{2}} (-)^{L+1} \delta_{SS'}\, \hat{J}\hat{J}'\hat{L}\hat{L}' \sum_{L'L''} \hat{L}''^2 \begin{pmatrix} L & 1 & L'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{pmatrix} L'' & 1 & L' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ L' & L & L'' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L & L' & 2 \\ J' & J & S \end{Bmatrix} \\
&\quad \times \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{L(L+1) - L''(L''+1) - 2}{2\,p} \right) \\
&\quad \times \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{L''(L''+1) - L'(L'+1) - 2}{2\,p} \right) \langle p\,(L'S')J' | \Psi_d \rangle \Bigg\} \\
&= \frac{\hbar}{\sqrt{10\pi}} T_2 \,. \qquad (8.20)
\end{aligned}$$

Insgesamt läßt sich das Matrixelement des elektrischen Wechselwirkungsoperators schreiben als:

$$\langle\, p(LS)JM_J\,|\,T_{em}(\vec{k}_\gamma,\lambda)\,|\,\Psi_d\,\rangle \approx -\hbar k_\gamma\,(T_1+T_2)\,. \tag{8.21}$$

Neben den Isospin-Auswahlregeln gelten nach den obigen Matrixelementen auch noch folgende Drehimpuls-Auswahlregeln:

$$\begin{aligned}\Delta(L,L') &= 1 \quad \text{Dipol}\\ \Delta(L,L') &= 2 \quad \text{Quadrupol}\,.\end{aligned} \tag{8.22}$$

Damit ergeben sich ausgehend von den Quantenzahlen des Deuterons $L=0,2$, $S=1$, $J=1$ und $T=0$ folgende mögliche Ausgangskanäle:

Dipol	Quadrupol
${}^3P_0$	${}^3S_1$
${}^3P_1$	${}^3D_1$
${}^3P_2$	${}^3D_2$
${}^3F_2$	${}^3D_3$
	${}^3G_3$

Tabelle 30: Ausgangskanäle der Deuteron-Photodesintegration.

Bei Vernachlässigung der mesonischen Austauschströme lautet der elektromagnetische Hamiltonoperator:

$$H_{E1} = -\frac{e}{m}\sum_i \frac{1+\tau_3^{(i)}}{2}\,p_i\,Y_{1m}(\Omega). \tag{8.23}$$

Für das Matrixelement mit dem Impulsoperator erhält man:

$$\langle\, p\beta\,\|\,P^{(1)}\,\|\,\Psi_d\,\rangle = -\sum_{l_d}(-)^{s+j_d}\hat{L}\hat{L}_d\hat{J}\hat{J}_d\begin{pmatrix} L & L_d & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} L & L_d & 1\\ J_d & J & s\end{Bmatrix}\delta_{SS_d}\,p\,\langle p\beta_d|\Psi_d\rangle\,. \tag{8.24}$$

Der Wirkungsquerschnitt (mit MEC) ist nach Anhang E.3 gegeben durch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(p,\vartheta,\lambda) = m_N\hbar\,\frac{(2\pi)^2}{2}\,\frac{p}{E_\gamma}\,|\langle\,\vec{p}\,|\,\Omega^{(-)\dagger}\,T_{em}(\vec{k}_\gamma,\lambda)\,|\,\Psi_d\,\rangle|^2\,, \tag{8.25}$$

mit

$$\begin{aligned}&\langle\,\vec{p}\,|\,\Omega^{(-)\dagger}\,T_{em}(\vec{k}_\gamma,\lambda)\,|\,\Psi_d\,\rangle\\ &= \sum_{LSJ}\sum_{M_S M_L}\left(\begin{matrix} s_1 & s_2\\ m_{s_1} & m_{s_2}\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} S\\ M_s\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix} L & S\\ M_L & M_S\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix} J\\ M_J\end{matrix}\right)Y_{LM_L}(\hat{p})\,\mathcal{M}_L^\eta(p,\lambda)\,.\end{aligned} \tag{8.26}$$

Die Spinorientierungen werden nicht beobachtet, so daß über die der einlaufenden Teilchen gemittelt und die der auslaufenden summiert wird:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(p,\vartheta,\lambda) = m_N\hbar\,\frac{(2\pi)^2}{2}\,\frac{p}{E_\gamma}\,\frac{1}{4}\sum_{m_{s_1}m_{s_2}}\sum_{\lambda M_J}|\langle\,\vec{p}\,|\,\Omega^{(-)\dagger}\,T_{em}(\vec{k}_\gamma,\lambda)\,|\,\Psi_d\,\rangle|^2\,. \tag{8.27}$$

Abbildung 1 enthält die Ergebnisse für das Deuteron. Es zeigt sich, daß bei diesen Energien kein Unterschied zwischen der Born-Näherung und der vollen Lösung zu sehen ist. Die Kurven liegen übereinander und stimmen sehr gut mit den experimentellen Werten [123–125] überein. Das gleiche Ergebnis ergibt sich mit anderen Potentialen, bei diesen Energien lassen sich diese nicht unterscheiden. Deutlich zu erkennen ist jedoch der Einfluß der mesonischen Austauschströme (MEC). Die gepunktete Kurve liegt unterhalb der Meßwerte, d.h. die rein nuklearen Ströme reichen nicht aus.

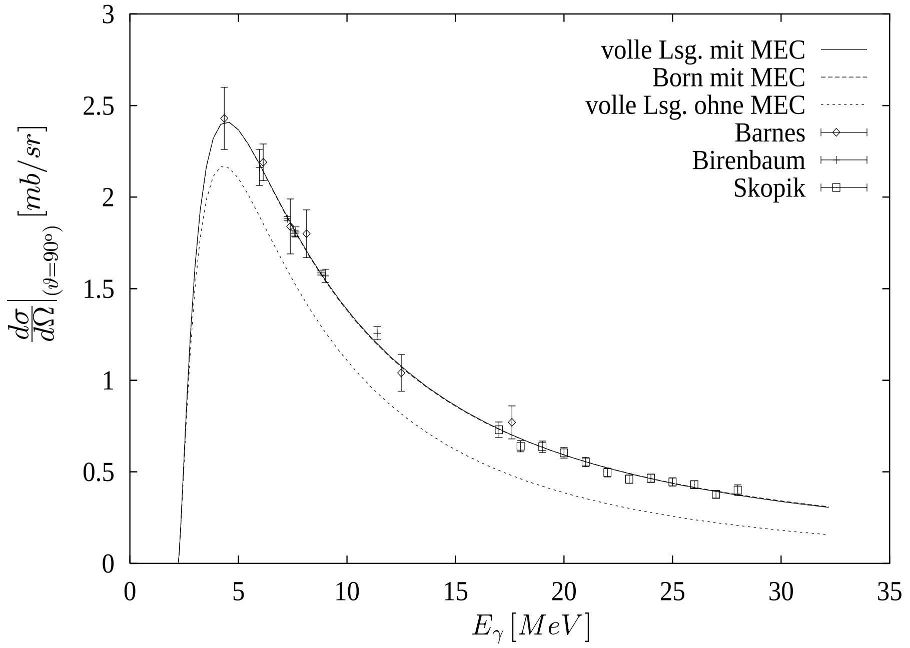


Abbildung 1: Einfluß von FSI und MEC beim Deuteron (Paris-Potential). Experimentelle Werte sind aus [123–125].

Abbildung 2 zeigt den differentiellen Wirkungsquerschnitt bei 20 MeV für das Bonn B Potential. Deutlich ist hier der Einfluß des Quadrupolterms zu sehen, der eine Verschiebung der Kurve zu kleineren Winkeln im Vergleich zu E1 bewirkt. Die Übereinstimmung mit den experimentellen Werten wird bei Berücksichtigung von E2 besser. Abbildung 3 zeigt die Verhältnisse bei 60 MeV. Hier wird der Einfluß von E2 noch größer. Schließlich zeigen die Abbildungen 4 und 5 einen Vergleich mit theoretischen Rechnungen von Arenhövel et al. Die Übereinstimmung ist sehr gut, auch für weitere, hier nicht gezeigte Kurven, sind die numerischen Abweichungen kleiner als $\approx$ 1-2%.

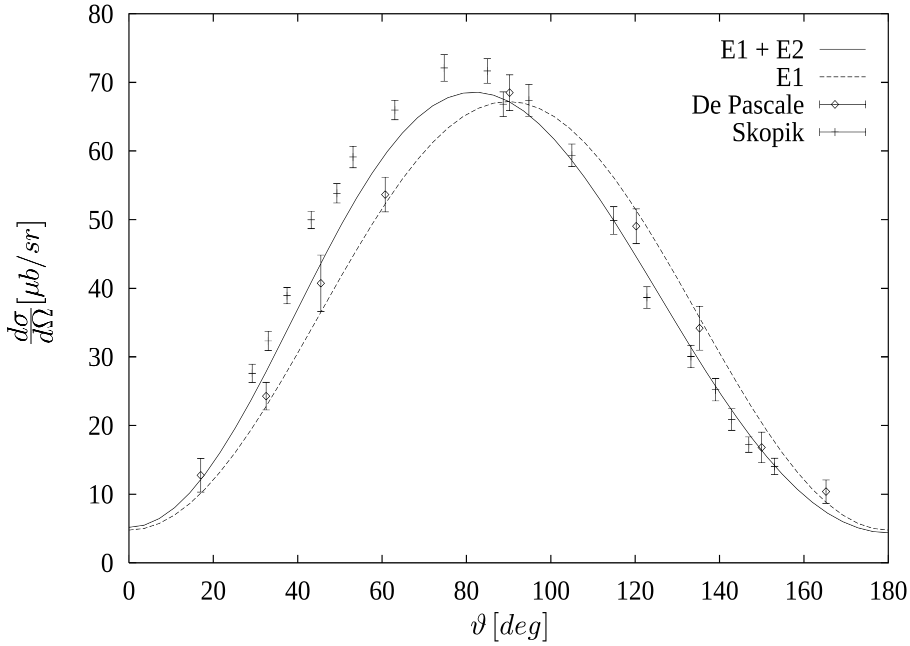


Abbildung 2: Vergleich mit experimentellen Werten [125,126] bei $E_\gamma = 20$ MeV.

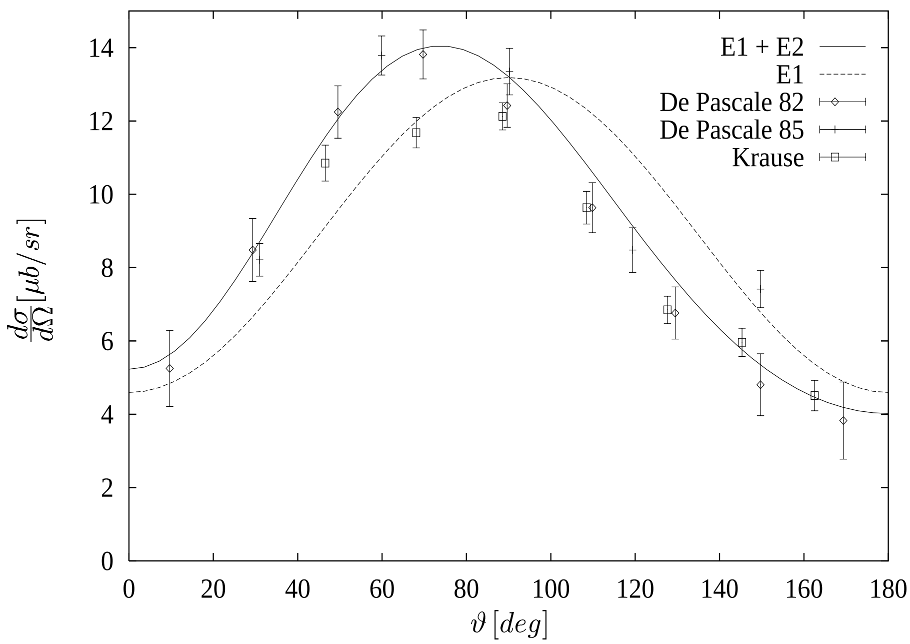


Abbildung 3: Vergleich mit experimentellen Werten [126–128] bei $E_\gamma = 60$ MeV.

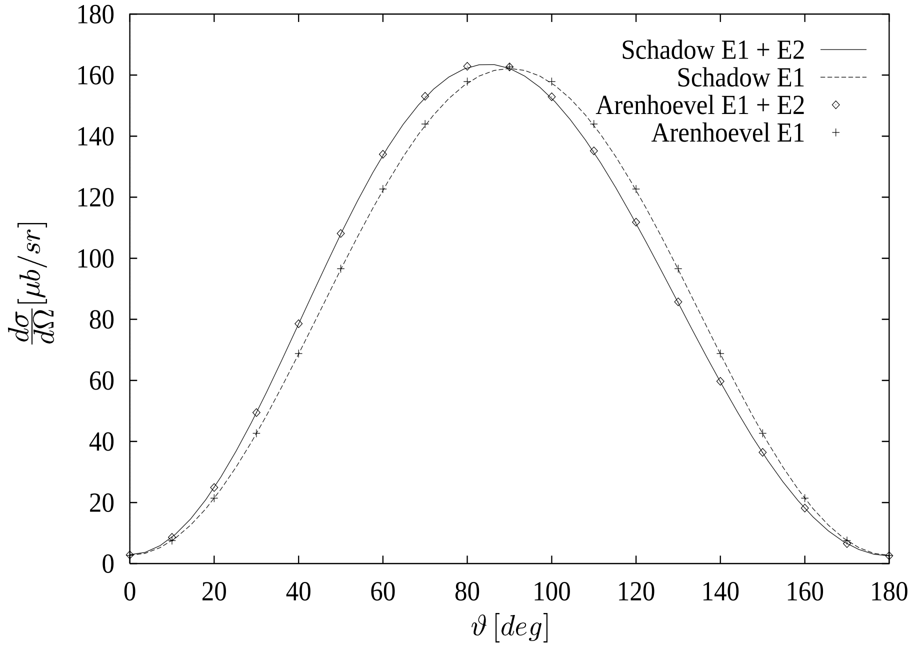


Abbildung 4: Vergleich mit Rechnung von Arenhövel und Schwamb [129] bei E = 10 MeV.

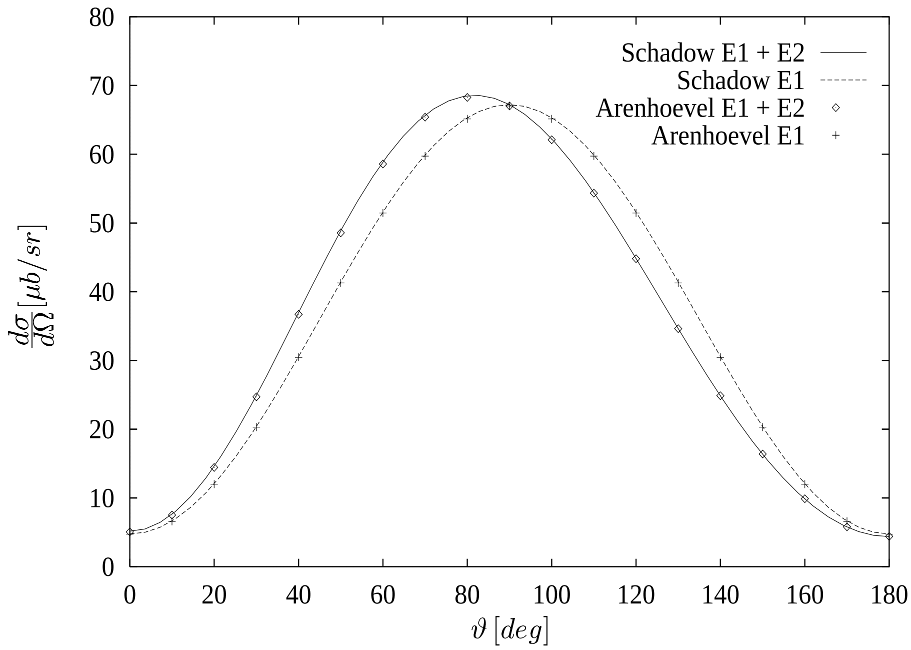


Abbildung 5: Vergleich mit Rechnung von Arenhövel und Schwamb [129] bei E = 20 MeV.

8.2 Photodesintegration des Tritons

8.2.1 Matrixelemente

Im folgenden sollen die Matrixelemente des elektromagnetischen Wechselwirkungsoperators mit Dreiteilchenbasiszuständen (5.7) für Dipol- und Quadrupolübergänge berechnet werden. Dazu wird der Erwartungswert von T_{em} mit dem Endzustand $\langle f|$ (hier Neutron oder Proton und Deuteron) und dem Anfangszustand $|i\rangle$ (hier Triton bzw. Helium) gebildet

$$\begin{aligned}\langle f|T_{em}(\vec{k}_\gamma,\lambda)|i\rangle &\approx -\sqrt{2\pi}\sum_L \hat{L}\,\langle f|T_{el}^{[L]}(k_\gamma,\lambda)|i\rangle = -\sqrt{2\pi}\sum_L \hat{L}\,\langle f|[H_N,D_L]|i\rangle \\ &= -\sqrt{2\pi}(E_f-E_i)\sum_L \hat{L}\,\langle f|D_L|i\rangle = -\sqrt{2\pi}k_\gamma\sum_L \hat{L}\,\langle f|D_L|i\rangle\,. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Die Energiedifferenz $(E_f - E_i)$ entspricht gerade der Energie des Photons. Nun wird (7.69) in Jacobi-Koordinaten (2.1) umgeschrieben und unter Verwendung des Additionstheorems (H.4) für die sphärischen Harmonischen weiter umgeformt. Für den elektrischen Dipoloperator erhält man:

$$D_1 = \frac{i\,e}{9\sqrt{2}}\Big[\underbrace{\tfrac{3}{2}\left(\tau_3^\beta-\tau_3^\gamma\right)\mathcal{Y}_{1\lambda}(\vec{\rho}\,)}_{\text{Subsystem}}+\underbrace{\left(2\,\tau_3^\alpha-\tau_3^\beta-\tau_3^\gamma\right)\mathcal{Y}_{1\lambda}(\vec{r}\,)}_{\text{Relativsystem}}\Big] \quad (8.29)$$

und den elektrischen Quadrupoloperator:

$$\begin{aligned} D_2 = -\frac{e\,k_\gamma}{10\sqrt{6}}\Big[&\underbrace{\tfrac{1}{4}\left(2+\tau_3^\beta+\tau_3^\gamma\right)\mathcal{Y}_{2\lambda}(\vec{\rho}\,)}_{\text{Subsystem}}+\underbrace{\tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{10\pi}{3}}\left(-\tau_3^\beta+\tau_3^\gamma\right)[\mathcal{Y}_1(\vec{\rho}\,)\otimes\mathcal{Y}_1(\vec{r}\,)]^2_\lambda}_{\text{gemischt}} \\ &+\underbrace{\tfrac{1}{9}\left(6+4\,\tau_3^\alpha+\tau_3^\beta+\tau_3^\gamma\right)\mathcal{Y}_{2\lambda}(\vec{r}\,)}_{\text{Relativsystem}}\Big]\,. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Beide Operatoren zerfallen also jeweils in einen Anteil, der im Subsystem ($\mathcal{Y}(\vec{\rho}\,)$), und einen, der im Relativsystem ($\mathcal{Y}(\vec{r}\,)$) wirkt. Im Falle des Quadrupoloperators tritt noch ein weiterer Term auf, der in beiden Systemen wirkt und jeweils einen Dipolübergang induziert. Die Matrixelemente der beiden Multipoloperatoren lassen sich schreiben als:

$$\begin{aligned} &-\sqrt{2\pi}\,k_\gamma\,\sqrt{3}\,\langle\,(\alpha)p\,q\,\xi\,|\,D_1(\vec{k}_\gamma,\lambda)\,|\,p'\,q'\,\xi'(\alpha)\,\rangle \\ &= \left\{\langle\,\xi\,|\,\mathbf{t}^{E1}_{Sub}(k_\gamma,\lambda,p,q)\,|\,\xi'\,\rangle+\langle\,\xi\,|\,\mathbf{t}^{E1}_{Rel}(k_\gamma,\lambda,p,q)\,|\,\xi'\,\rangle\right\}\frac{\delta(p-p')}{p'^2}\,\frac{\delta(q-q')}{q'^2} \end{aligned} \quad (8.31)$$

$$
\begin{aligned}
&-\sqrt{2\pi}\, k_\gamma \sqrt{5}\, \langle\, (\alpha) p\, q\, \xi \,|\, D_2(\vec{k}_\gamma, \lambda) \,|\, p'\, q'\, \xi'(\alpha) \,\rangle \\
&= \Big\{ \langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E2}_{Sub}(k_\gamma, \lambda, p, q) \,|\, \xi' \,\rangle + \langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E2}_{Mix}(k_\gamma, \lambda, p, q) \,|\, \xi' \,\rangle + \langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E2}_{Rel}(k_\gamma, \lambda, p, q) \,|\, \xi' \,\rangle \Big\} \\
&\quad \times \frac{\delta(p-p')}{p'^2} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} \,. \qquad (8.32)
\end{aligned}
$$

Die Operatoren $\mathbf{t}^{En}$ sind in Anhang G.3 definiert. Zur weiteren Abkürzung der Schreibweise ist es nützlich, folgende Notation einzuführen:

$$
\langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E1}(k_\gamma, \lambda, p, q) \,|\, \xi' \,\rangle = \langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E1}_{Sub}(k_\gamma, \lambda, p, q) \,|\, \xi' \,\rangle + \langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E1}_{Rel}(k_\gamma, \lambda, p, q) \,|\, \xi' \,\rangle \qquad (8.33)
$$

$$
\begin{aligned}
\langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E2}(k_\gamma, \lambda, p, q) \,|\, \xi' \,\rangle &= \langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E2}_{Sub}(k_\gamma, \lambda, p, q) \,|\, \xi' \,\rangle + \langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E2}_{Mix}(k_\gamma, \lambda, p, q) \,|\, \xi' \,\rangle \\
&\quad + \langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E2}_{Rel}(k_\gamma, \lambda, p, q) \,|\, \xi' \,\rangle \qquad (8.34)
\end{aligned}
$$

und die reduzierten Matrixelemente:

$$
\langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E1}(k_\gamma, \lambda, p, q) \,|\, \xi' \,\rangle = (-)^{\Gamma - M_\Gamma} \begin{pmatrix} \Gamma & 1 & \Gamma' \\ -M_\Gamma & \lambda & M'_\Gamma \end{pmatrix} \langle\, \xi \,\|\, \mathbf{t}^{E1}(k_\gamma, \lambda, p, q) \,\|\, \xi' \,\rangle \qquad (8.35)
$$

$$
\langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E2}(k_\gamma, \lambda, p, q) \,|\, \xi' \,\rangle = (-)^{\Gamma - M_\Gamma} \begin{pmatrix} \Gamma & 2 & \Gamma' \\ -M_\Gamma & \lambda & M'_\Gamma \end{pmatrix} \langle\, \xi \,\|\, \mathbf{t}^{E2}(k_\gamma, \lambda, p, q) \,\|\, \xi' \,\rangle \qquad (8.36)
$$

Das Matrixelement des elektrischen Wechselwirkungsoperators ergibt sich damit zu:

$$
\begin{aligned}
&\langle\, p\, q\, \xi \,|\, T_{em}(\vec{k}_\gamma, \lambda) \,|\, p'\, q', \xi' \,\rangle \\
&\approx -\sqrt{2\pi}\, k_\gamma \Big\{ \sqrt{3}\, \langle\, (\alpha) p\, q\, \xi \,|\, D_1(\vec{k}_\gamma, \lambda) \,|\, p'\, q'\, \xi'(\alpha) \,\rangle + \sqrt{5}\, \langle\, (\alpha) p\, q\, \xi \,|\, D_2(\vec{k}_\gamma, \lambda) \,|\, p'\, q'\, \xi'(\alpha) \,\rangle) \Big\} \\
&= \Big\{ \langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E1}(k_\gamma, \lambda, p, q) \,|\, \xi' \,\rangle + \langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E2}(k_\gamma, \lambda, p, q) \,|\, \xi' \,\rangle \Big\} \frac{\delta(p-p')}{p'^2} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} \,. \qquad (8.37)
\end{aligned}
$$

8.2.2 Die Born-Amplitude

Mit der Entwicklung des elektromagnetischen Wechselwirkungsoperators nach Dreiteilchen-Basiszuständen kann man nun die Born-Amplitude berechnen:

$$
{}^{\Gamma I}\!\mathcal{AB}^b(q, E) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_\alpha \langle\, (\alpha)\, g\, q\, g\, b\, \Gamma M_\Gamma; I M_I \,|\, G_0(E + i\,0) T_{em} \,|\, \mathcal{A}\Psi_t \,\rangle \,. \qquad (8.38)
$$

Die Summanden sind unabhängig von der Clusterung, d.h. man gelangt sofort zu

$$ {}^{\Gamma I}\!\mathcal{AB}^b(q,E) = \sqrt{3}\,\langle\,(\alpha)\,g\,q\;\,b\,\Gamma M_\Gamma; IM_I\,|\,G_0(E+i\,0)T_{em}\,|\,\mathcal{A}\Psi_t\,\rangle\,. \tag{8.39}$$

Mit der Definition der Partialwellenzustände (5.19) und nach Einschieben einer Dreiteilchenhilbertraum-Eins (5.6) im Koordinatensatz (α) erhält man

$$\begin{aligned} {}^{\Gamma I}\!\mathcal{AB}^b(q,E) &= \sqrt{3}\sum_L \int dp\,p^2\,\frac{g_L^\eta(p)}{E-p^2-\frac{3}{4}q^2+i\,0} \\ &\times \sum_{\xi'}\int dp'\,p'^2\,dq'\,q'^2\,\langle\,p\,q\,\xi\,|\,T_{em}\,|\,p'\,q'\,\xi'\,\rangle\,\langle p'\,q'\,\xi'|\mathcal{A}\Psi_t\rangle\,. \end{aligned} \tag{8.40}$$

Die Summationen über $\Gamma', M_{\Gamma'}, I'$ und $M_{I'}$ fallen weg, da das Triton durch einen festen Satz von Quantenzahlen festgelegt wird. Die explizite Form des T_{em}- Matrixelementes (8.37) führt weiter zu

$$\begin{aligned} {}^{\Gamma I}\!\mathcal{AB}^b(q,E) &= \sqrt{3}\sum_L \int dp\,p^2\,\frac{g_L^\eta(p)}{E-p^2-\frac{3}{4}q^2+i\,0} \\ &\times \sum_{\xi'}\left\{\langle\,\xi\,|\,\mathbf{t}^{E1}(k_\gamma,\lambda,p,q)\,|\,\xi'\,\rangle\;+\langle\,\xi\,|\,\mathbf{t}^{E2}(k_\gamma,\lambda,p,q)\,|\,\xi'\,\rangle\,\right\}\,\langle p\,q\,\xi'|\mathcal{A}\Psi_t\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{2}(-)^{\Gamma-M_\Gamma}\begin{pmatrix}\Gamma & \Gamma & \Gamma' \\ -M_\Gamma & \lambda & M'_\Gamma\end{pmatrix}\,||{}^{\Gamma I}\!\mathcal{AB}^{b,(n)}(q,E)||\,, \end{aligned} \tag{8.41}$$

mit der reduzierten Born-Amplitude:

$$\begin{aligned} ||{}^{\Gamma I}\!\mathcal{AB}^{b,(n)}(q,E)|| &= \sqrt{3}\sum_L \int dp\,p^2\,\frac{g_L^\eta(p)}{E-p^2-\frac{3}{4}q^2+i\,0} \\ &\quad\times\sum_{c'}\langle\,\xi\,\|\,\mathbf{t}^{E(n)}(k_\gamma,\lambda,p,q)\,\|\,\xi'\,\rangle\,\langle p\,q\,\xi'|\mathcal{A}\Psi_t\rangle\,. \end{aligned} \tag{8.42}$$

Die eingeführte reduzierte Born-Amplitude bedeutet eine erhebliche Vereinfachung bei der numerischen Berechnung und Speicherung der Daten. Die für positive Energien notwendige Polintegration wird mit der in Anhang I angegebenen Beziehung durchgeführt. Die physikalische Born-Amplitude erhält man, indem man die Energie on-shell, d. h. $E = E_d + \frac{3}{4}q^2$, setzt.

Die möglichen Ausgangskanäle sind durch die Kopplung $l' = l \pm 1$ oder $L' = L \pm 1$ bei Dipol- und $l' = l \pm 2$, $L' = L \pm 2$ oder $L' = L \pm 1$ und $l' = l \pm 1$ bei Quadrupolübergängen gegeben. In der folgenden Tabelle sind die Quantenzahlen der möglichen Ausgangskanäle für $J \leq 2$ zusammengestellt.

$\Gamma^{\Pi} = \frac{1}{2}^-$								$\Gamma^{\Pi} = \frac{3}{2}^-$							
	Kanal	L	S	J^π	T	k	l		Kanal	L	S	J^π	T	k	l
1	${}^1S_0$	0	0	0^+	1	$\frac{1}{2}$	1	1	${}^1S_0$	0	0	0^+	1	$\frac{1}{2}$	1
2	${}^1P_1$	1	0	1^-	0	$\frac{1}{2}$	0	2	${}^1P_1$	1	0	1^-	0	$\frac{1}{2}$	2
3	${}^1P_1$	1	0	1^-	0	$\frac{3}{2}$	2	3	${}^1P_1$	1	0	1^-	0	$\frac{3}{2}$	0
4	${}^1D_2$	2	0	2^+	1	$\frac{3}{2}$	1	4	${}^1P_1$	1	0	1^-	0	$\frac{3}{2}$	2
5	${}^1D_2$	2	0	2^+	1	$\frac{5}{2}$	3	5	${}^1D_2$	2	0	2^+	1	$\frac{3}{2}$	1
6	${}^3P_0$	1	1	0^-	1	$\frac{1}{2}$	0	6	${}^1D_2$	2	0	2^+	1	$\frac{3}{2}$	3
7	${}^3P_1$	1	1	1^-	1	$\frac{1}{2}$	0	7	${}^1D_2$	2	0	2^+	1	$\frac{5}{2}$	1
8	${}^3P_1$	1	1	1^-	1	$\frac{3}{2}$	2	8	${}^1D_2$	2	0	2^+	1	$\frac{5}{2}$	3
9	${}^3S_1$	0	1	1^+	0	$\frac{1}{2}$	1	9	${}^3P_0$	1	1	0^-	1	$\frac{1}{2}$	2
10	${}^3S_1$	0	1	1^+	0	$\frac{3}{2}$	1	10	${}^3P_1$	1	1	1^-	1	$\frac{1}{2}$	2
11	${}^3D_1$	2	1	1^+	0	$\frac{1}{2}$	1	11	${}^3P_1$	1	1	1^-	1	$\frac{3}{2}$	0
12	${}^3D_1$	2	1	1^+	0	$\frac{3}{2}$	1	12	${}^3P_1$	1	1	1^-	1	$\frac{3}{2}$	2
13	${}^3P_2$	1	1	2^-	1	$\frac{3}{2}$	2	13	${}^3S_1$	0	1	1^+	0	$\frac{1}{2}$	1
14	${}^3P_2$	1	1	2^-	1	$\frac{5}{2}$	2	14	${}^3S_1$	0	1	1^+	0	$\frac{3}{2}$	1
15	${}^3F_2$	3	1	2^-	1	$\frac{3}{2}$	2	15	${}^3S_1$	0	1	1^+	0	$\frac{3}{2}$	3
16	${}^3F_2$	3	1	2^-	1	$\frac{5}{2}$	2	16	${}^3D_1$	2	1	1^+	0	$\frac{1}{2}$	1
17	${}^3D_2$	2	1	2^+	0	$\frac{3}{2}$	1	17	${}^3D_1$	2	1	1^+	0	$\frac{3}{2}$	1
18	${}^3D_2$	2	1	2^+	0	$\frac{5}{2}$	3	18	${}^3D_1$	2	1	1^+	0	$\frac{3}{2}$	3
								19	${}^3P_2$	1	1	2^-	1	$\frac{3}{2}$	0
								20	${}^3P_2$	1	1	2^-	1	$\frac{3}{2}$	2
								21	${}^3P_2$	1	1	2^-	1	$\frac{5}{2}$	2
								22	${}^3P_2$	1	1	2^-	1	$\frac{5}{2}$	4
								23	${}^3F_2$	3	1	2^-	1	$\frac{3}{2}$	0
								24	${}^3F_2$	3	1	2^-	1	$\frac{3}{2}$	2
								25	${}^3F_2$	3	1	2^-	1	$\frac{5}{2}$	2
								26	${}^3F_2$	3	1	2^-	1	$\frac{5}{2}$	4
								27	${}^3D_2$	2	1	2^+	0	$\frac{3}{2}$	1
								28	${}^3D_2$	2	1	2^+	0	$\frac{3}{2}$	3
								29	${}^3D_2$	2	1	2^+	0	$\frac{5}{2}$	1
								30	${}^3D_2$	2	1	2^+	0	$\frac{5}{2}$	3

Tabelle 31: Quantenzahlen der Ausgangskanäle bei E1-Übergängen.

$\Gamma^{\Pi} = \frac{3}{2}^{+}$								$\Gamma^{\Pi} = \frac{5}{2}^{+}$							
	Kanal	L	S	J^{π}	T	k	l		Kanal	L	S	J^{π}	T	k	l
1	$^1S_0$	0	0	0^+	1	$\frac{1}{2}$	2	1	$^1S_0$	0	0	0^+	1	$\frac{1}{2}$	2
2	$^1P_1$	1	0	1^-	0	$\frac{1}{2}$	1	2	$^1P_1$	1	0	1^-	0	$\frac{1}{2}$	3
3	$^1P_1$	1	0	1^-	0	$\frac{3}{2}$	1	3	$^1P_1$	1	0	1^-	0	$\frac{3}{2}$	1
4	$^1P_1$	1	0	1^-	0	$\frac{3}{2}$	3	4	$^1P_1$	1	0	1^-	0	$\frac{3}{2}$	3
5	$^1D_2$	2	0	2^+	1	$\frac{3}{2}$	0	5	$^1D_2$	2	0	2^+	1	$\frac{3}{2}$	2
6	$^1D_2$	2	0	2^+	1	$\frac{3}{2}$	2	6	$^1D_2$	2	0	2^+	1	$\frac{3}{2}$	4
7	$^1D_2$	2	0	2^+	1	$\frac{5}{2}$	2	7	$^1D_2$	2	0	2^+	1	$\frac{5}{2}$	0
8	$^1D_2$	2	0	2^+	1	$\frac{5}{2}$	4	8	$^1D_2$	2	0	2^+	1	$\frac{5}{2}$	2
9	$^3P_0$	1	1	0^-	1	$\frac{1}{2}$	1	9	$^1D_2$	2	0	2^+	1	$\frac{5}{2}$	4
10	$^3P_1$	1	1	1^-	1	$\frac{1}{2}$	1	10	$^3P_0$	1	1	0^-	1	$\frac{1}{2}$	3
11	$^3P_1$	1	1	1^-	1	$\frac{3}{2}$	1	11	$^3P_1$	1	1	1^-	1	$\frac{1}{2}$	3
12	$^3P_1$	1	1	1^-	1	$\frac{3}{2}$	3	12	$^3P_1$	1	1	1^-	1	$\frac{3}{2}$	1
13	$^3S_1$	0	1	1^+	0	$\frac{1}{2}$	2	13	$^3P_1$	1	1	1^-	1	$\frac{3}{2}$	3
14	$^3S_1$	0	1	1^+	0	$\frac{3}{2}$	0	14	$^3S_1$	0	1	1^+	0	$\frac{1}{2}$	2
15	$^3S_1$	0	1	1^+	0	$\frac{3}{2}$	2	15	$^3S_1$	0	1	1^+	0	$\frac{3}{2}$	2
16	$^3D_1$	2	1	1^+	0	$\frac{1}{2}$	2	16	$^3S_1$	0	1	1^+	0	$\frac{3}{2}$	4
17	$^3D_1$	2	1	1^+	0	$\frac{3}{2}$	0	17	$^3D_1$	2	1	1^+	0	$\frac{1}{2}$	2
18	$^3D_1$	2	1	1^+	0	$\frac{3}{2}$	2	18	$^3D_1$	2	1	1^+	0	$\frac{3}{2}$	2
19	$^3P_2$	1	1	2^-	1	$\frac{3}{2}$	1	19	$^3D_1$	2	1	1^+	0	$\frac{3}{2}$	4
20	$^3P_2$	1	1	2^-	1	$\frac{3}{2}$	3	20	$^3P_2$	1	1	2^-	1	$\frac{3}{2}$	1
21	$^3P_2$	1	1	2^-	1	$\frac{5}{2}$	1	21	$^3P_2$	1	1	2^-	1	$\frac{3}{2}$	3
22	$^3P_2$	1	1	2^-	1	$\frac{5}{2}$	3	22	$^3P_2$	1	1	2^-	1	$\frac{5}{2}$	1
23	$^3F_2$	3	1	2^-	1	$\frac{3}{2}$	1	23	$^3P_2$	1	1	2^-	1	$\frac{5}{2}$	3
24	$^3F_2$	3	1	2^-	1	$\frac{3}{2}$	3	24	$^3P_2$	1	1	2^-	1	$\frac{5}{2}$	5
25	$^3F_2$	3	1	2^-	1	$\frac{5}{2}$	1	25	$^3F_2$	3	1	2^-	1	$\frac{3}{2}$	1
26	$^3F_2$	3	1	2^-	1	$\frac{5}{2}$	3	26	$^3F_2$	3	1	2^-	1	$\frac{3}{2}$	3
27	$^3D_2$	2	1	2^+	0	$\frac{3}{2}$	0	27	$^3F_2$	3	1	2^-	1	$\frac{5}{2}$	1
28	$^3D_2$	2	1	2^+	0	$\frac{3}{2}$	2	28	$^3F_2$	3	1	2^-	1	$\frac{5}{2}$	3
29	$^3D_2$	2	1	2^+	0	$\frac{5}{2}$	2	29	$^3F_2$	3	1	2^-	1	$\frac{5}{2}$	5
30	$^3D_2$	2	1	2^+	0	$\frac{5}{2}$	4	30	$^3D_2$	2	1	2^+	0	$\frac{3}{2}$	2
								31	$^3D_2$	2	1	2^+	0	$\frac{3}{2}$	4
								32	$^3D_2$	2	1	2^+	0	$\frac{5}{2}$	0
								33	$^3D_2$	2	1	2^+	0	$\frac{5}{2}$	2
								34	$^3D_2$	2	1	2^+	0	$\frac{5}{2}$	4

Tabelle 32: Quantenzahlen der Ausgangskanäle bei E2-Übergängen.

8.3 Ergebnisse

Ausgehend von (E.9) erhält man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Zweiteilchen-Photodesintegration

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(q,\vartheta) = m_N\hbar\,\frac{qE_\gamma}{3\pi c}(2\pi)^3 \left|\langle\,\phi_\alpha\,|\,\Omega_\alpha^{\dagger(-)}\,\mathcal{A}\,T_{em}\,|\,\Psi_t\,\rangle\right|^2 , \tag{8.43}$$

mit

$$\begin{aligned}
&\langle\,\phi_\alpha\,|\,\Omega_\alpha^{\dagger(-)}\,\mathcal{A}\,T_{em}\,|\,\Psi_t\,\rangle \\
&= \sum_{\Gamma=\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\sum_{M_\Gamma}\sum_{b}\sum_{m_k m_l}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & k \\ M_J & M_S & m_k\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} k & l & \Gamma \\ m_k & m_l & M_\Gamma\end{array}\right)Y_{lm_l}(\hat{q}) \\
&\times\ {}^{\Gamma I}\!\mathcal{AM}^b(q,E_d+\tfrac{3}{4}q^2).
\end{aligned} \tag{8.44}$$

Bei den berücksichtigten experimentellen Daten wurde weder die Polarisationsrichtung der Photonen noch die eines an der Reaktion beteiligten Teilchens beobachtet, so daß noch über die Spins der einlaufenden Teilchen (Triton und Photon) gemittelt und über die Spins der auslaufenden Teilchen (Neutron, Deuteron) summiert werden muß.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(q,\vartheta) = m_N\hbar\,\frac{qE_\gamma}{3\pi c}(2\pi)^3\frac{1}{4}\sum_{m_S M_J}\sum_{\lambda M_\Gamma}\left|\langle\,\phi_\alpha\,|\,\Omega_\alpha^{\dagger(-)}\,\mathcal{A}\,T_{em}\,|\,\mathcal{A}\Psi_t\,\rangle\right|^2 . \tag{8.45}$$

Durch explizites Einsetzen von (8.44) in (8.45) überzeugt man sich von der Drehinvarianz bzgl. der Achse des einlaufenden Photons.

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega}(q,\vartheta) &= m_N\hbar\,\frac{qE_\gamma}{3\pi c}(2\pi)^3\frac{1}{4}\sum_{n\xi}\sum_{n'\xi'}\sum_{\lambda}\delta_{kk'}\,(-)^{2\Gamma'+k-\frac{1}{2}+l+l'}\,\hat{\Gamma}\,\hat{\Gamma}'\,\frac{\hat{l}\hat{l}'}{4\pi} \\
&\quad\times {}^{\Gamma I}\!\mathcal{AM}^{b(n)}(q,E_q+\tfrac{3}{4}q^2)\ {}^{\Gamma' I'}\!\mathcal{AM}^{b'(n')^*}(q,E_q+\tfrac{3}{4}q^2) \\
&\quad\times \sum_{l''}(-)^{l''}\hat{l}''\begin{pmatrix} l'' & l & l' \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} l'' & l & l' \\ k & \Gamma & \Gamma'\end{Bmatrix} \\
&\quad\times \begin{pmatrix} l'' & n & n' \\ 0 & -\lambda & \lambda\end{pmatrix}\begin{Bmatrix} l'' & n & n' \\ \frac{1}{2} & \Gamma' & \Gamma\end{Bmatrix}\,Y_0^{l''}(\Omega)\,.
\end{aligned} \tag{8.46}$$

Für S-Wellen-Potentiale läßt sich dieser Ausdruck noch weiter vereinfachen zu:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{(E1)}}{d\Omega}(E,\vartheta) &= f_1(E)\sin^2\vartheta && \text{Dipolanteil} \\
\frac{d\sigma^{(E2)}}{d\Omega}(E,\vartheta) &= f_2(E)\sin^2\vartheta\,\cos^2\vartheta && \text{Quadrupolanteil} \\
\frac{d\sigma}{d\Omega}(E,\vartheta) &= \frac{d\sigma^{(E1)}}{d\Omega}(E,\vartheta) + \frac{d\sigma^{(E2)}}{d\Omega}(E,\vartheta) \pm 2\sqrt{f_1(E)+f_2(E)}\,\sin^2\vartheta\,\cos\vartheta \;.
\end{aligned}
\tag{8.47}
$$

Das Vorzeichen des Interferenzterms hängt davon ab, ob man die Photodesintegration von ^{3}H oder ^{3}He betrachtet. Das Maximum des Wirkungsquerschnitts wird daher im Falle von ^{3}H zu größeren Winkeln und im Falle von ^{3}He zu kleineren Winkeln verschoben.
Durch eine Winkelintegration kann der totale Wirkungsquerschnitt $\sigma_{tot}(q)$ berechnet werden. Er setzt sich additiv aus dem Dipol- und dem Quadrupolanteil zusammen

$$\sigma_{tot}(q) = \sigma_{tot}^{E1} + \sigma_{tot}^{E2}\,. \tag{8.48}$$

In den folgenden Graphiken wurden die theoretisch berechneten Kurven um die Differenz aus der theoretischen und experimentellen Schwellenenergie

$$\Delta E = E_{\text{Schwelle}}^{\text{theor.}} - E_{\text{Schwelle}}^{\text{exp.}}\,, \tag{8.49}$$

die sich aus den unterschiedlichen Triton-Bindungsenergien ergeben, verschoben, um einen Vergleich mit den Messungen zu ermöglichen.

8.4 Vergleich mit Gibson und Lehman

Ein Vergleich mit den Ergebnissen von Gibson und Lehman ist nur teilweise möglich. Auf der einen Seite gibt es, wie schon bei der Diskussion der Deuteron- und Triton-Ergebnisse gezeigt, gewisse Inkonsistenzen in deren Parametersätzen. Auf der anderen Seite haben sie in der Wellenfunktion den gemischt symmetrischen Anteil vernachlässigt, um ihre Rechnungen vereinfachen zu können. Der Anteil beträgt allerdings nur ca. 1-2%. Bei den gemittelten Parametersätzen kommt dieser Anteil ohnehin nicht vor, da dann der $^1S_0$- und der $^3S_1$-Anteil gleich sind.

Zunächst werden die Ergebnisse für den ladungsunabhängigen Fall und die symmetrische Tabakin-Wellenfunktion (Mittelung über Singulett- und Triplett-Parametersätze II) verglichen. Dabei ergibt sich eine Diskrepanz in der Bindungsenergie zwischen dieser Arbeit und der von Gibson/Lehman (siehe Tabelle 20). Um die von Gibson/Lehman angegebene Bindungsenergie zu erhalten, wurde deren Parametersatz leicht modifiziert (Tabelle 4: Parametersatz 7), die Ergebnisse für die Photodesintegration sind in Abbildung 6 enthalten.

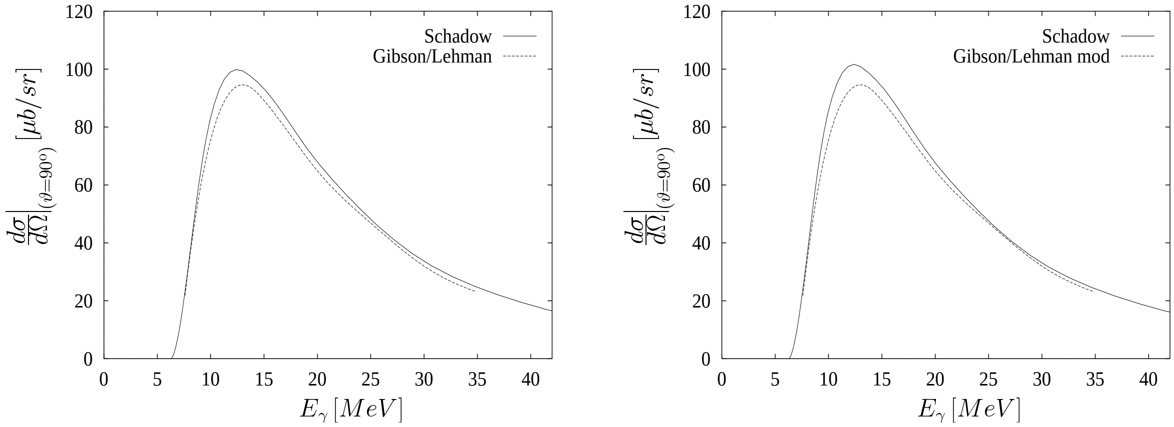


Abbildung 6: Links:Wirkungsquerschnitt mit dem gemittelten Original-Parametersatz II. Rechts: Wirkungsquerschnitt mit dem modifizierten gemittelten Original-Parametersatz II (Parametersatz 7).

Es zeigt sich, daß die Form des Wirkungsquerschnitts gut reproduziert wird, jedoch Abweichungen im Peak vorliegen. In den nächsten beiden Graphiken wurden statt der theoretischen Bindungsenergien die experimentellen in die Formeln für den Wirkungsquerschnitt eingesetzt. Auch hier wurden einmal die Original- und einmal die modifizierten Parametersätze verwendet. Es zeigt sich, daß sehr gute Übereinstimmung bei dem modifizierten Parametersatz unter Verwendung der experimentellen Bindungsenergien besteht. Letztlich konnte aber auch nach Rücksprache mit den Autoren nicht geklärt werden, welche ihre genauen Parameter waren. Es sei auch noch auf eine weitere Inkonsistenz hingewiesen. In diesen Rechnungen werden zur Berechnung der Triton-Wellenfunktion und der final-state interaction unterschiedliche Parametersätze verwendet, so daß das Siegert-Theorem nicht angewendet werden kann, da dort vorausgesetzt wird, daß Eingangs- und Endzustand Eigenfunktionen zum gleichen Hamiltonoperator sind.

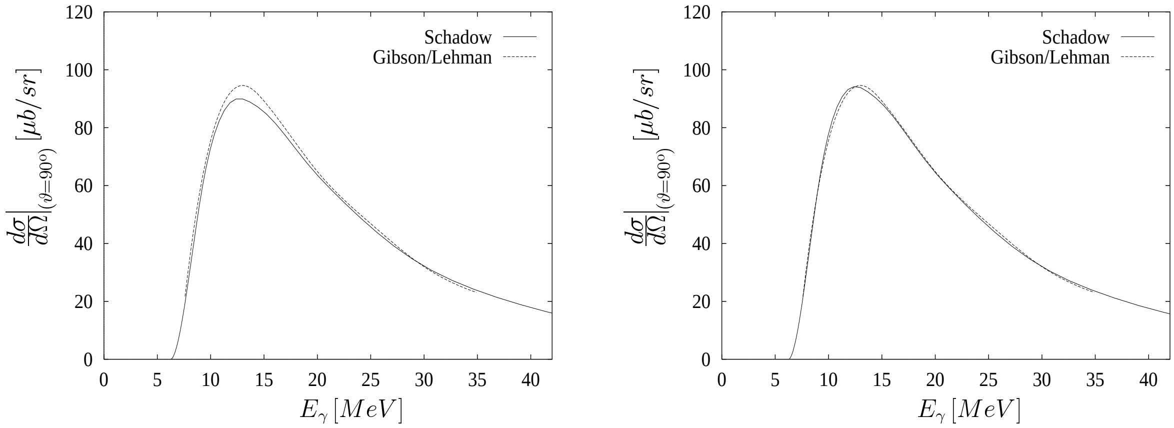


Abbildung 7: Wie Abb. 6, jedoch jetzt mit experimentellen Bindungsenergien.

Ein weiterer Vergleich soll für den ladungsabhängigen Fall erfolgen, bei dem die Parameter so gewählt sind, daß sie gerade den experimentellen entsprechen. Es wurde der Parametersatz für ^{3}He verwendet. Auch hier zeigen sich Abweichungen in der Größenordnung von 3-4%. Die Ursache hierfür können wiederum Abweichungen in den Parametern oder die in dieser Arbeit bessere Numerik sein.

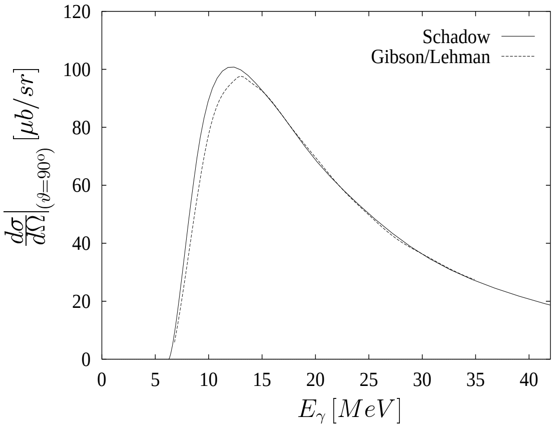


Abbildung 8: Wirkungsquerschnitt mit Yamaguchi für ^{3}He.

8.5 Ergebnisse für Yamaguchi und Malfliet-Tjon

Die folgenden Graphiken zeigen die Ergebnisse für die anderen Yamaguchi-Potentiale und für das Malfliet-Tjon Potential.

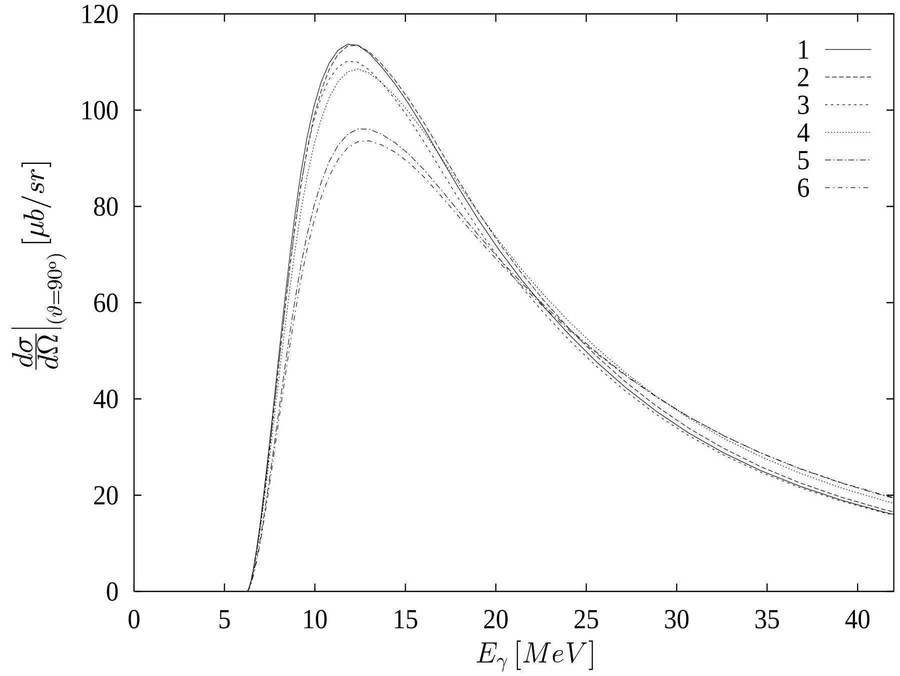


Abbildung 9: Wirkungsquerschnitte für die Yamaguchi-Potentiale.

Die Ergebnisse mit dem nichtseparablen Malfliet-Tjon Ia/IIIa Potential wurden mit Hilfe der W-Matrix-Methode berechnet und bereits in [12] angegeben, seien aber hier zu Vergleichszwecken nochmal abgebildet. Neben der Kurve, die die volle Reaktion beschreibt, ist auch die Born-Näherung gezeigt.

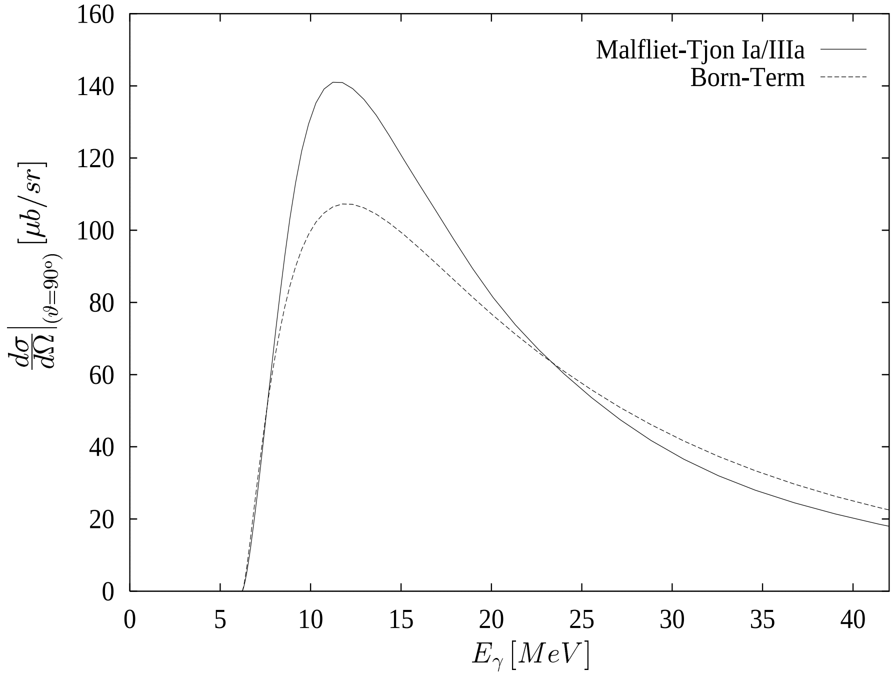


Abbildung 10: Wirkungsquerschnitte für das Malfliet-Tjon Ia/IIIa-Potential.

Hier ist bereits ein deutlicher Unterschied zur Photodesintegration des Deuterons zu sehen. Im Maximum des Peaks besteht zwischen der Born-Näherung und der vollen Rechnung ein Unterschied von ca 20%, während dies beim Deuteron nicht der Fall war. Bei Energien größer als ca. 24 MeV wird der Wirkungsquerschnitt durch FSI gegenüber der Born-Näherung abgesenkt.

8.6 Einfluß von mesonischen Austauschströmen

Die Bedeutung der mesonischen Austauschströme hat sich bereits beim Deuteron gezeigt und wurde schon von anderen Autoren untersucht [90,122]. Dort wurde deutlich, daß die Austauschströme sehr wichtig sind und bereits sehr gut durch das Siegert-Theorem beschrieben werden. Im Falle des Tritons zeigt sich der Effekt noch ausgeprägter. Zwischen den Maxima der Peaks mit und ohne MEC besteht ein Faktor von ca. 1.7. Die Ursache für die Erhöhung liegt in der Tatsache, daß es im Falle des Tritons einen möglichen Strom mehr gibt. Bei n Nukleonen sind $n-1$ Zweiteilchenströme möglich, die von einem Nukleon ausgehen. Im Gegensatz zum Deuteron gibt es beim Triton also einen Strom mehr, an dem das Photon angreifen kann. Auch im Vierteilchenfall setzt sich dieser Trend fort. Dort besteht zwischen den Kurven mit und ohne MEC ca. ein Faktor 3 [28]. Der Einfluß der

MEC wächst also mit steigender Anzahl von Nukleonen. Die Frage, wie gut die Ströme im Drei- und Vierteilchenfall durch das Siegert-Theorem beschrieben werden, kann hier nicht beantwortet werden. Dazu wäre es notwendig, zum Vergleich explizite Ströme zu benutzen. Entsprechende Rechnungen hierzu sind geplant.

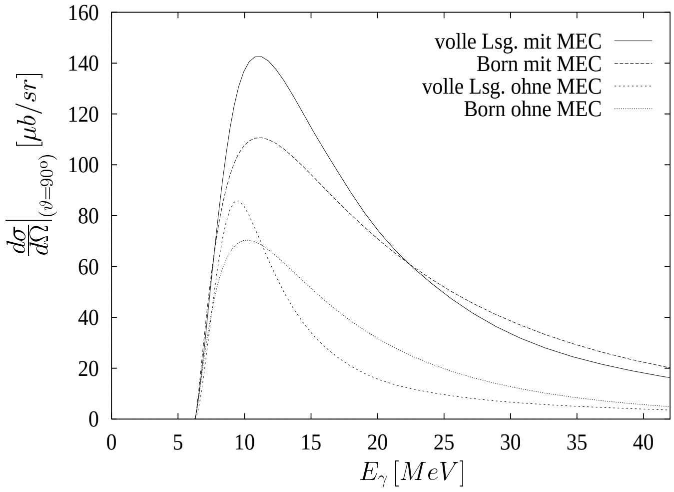


Abbildung 11: Einfluß von MEC mit dem Paris (W-Matrix) Potential und Berücksichtigung von 5 Kanälen.

8.7 Vergleich der EST- und W-Matrix-Methode

Wie bereits beim Triton, sollen auch im Falle der Photodesintegration die beiden Näherungsmethoden verglichen werden.

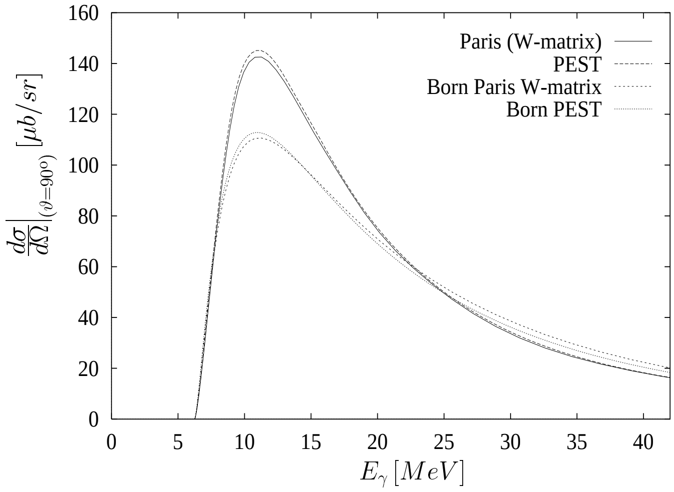


Abbildung 12: Wirkungsquerschnitt mit Paris (W-Matrix) und PEST Potential 5 Kanäle ($J \leq 1^+$).

Es zeigt sich also, daß bei dieser Kanalanzahl im Wirkungsquerschnitt Unterschiede in der Größenordnung von 2-3% vorhanden sind. Eine ähnliche Beobachtung macht man auch bei der n-d Streuung (siehe Kapitel 10), jedoch zeigen sich größere Abweichungen bei den Polarisationsobservablen, die aber hier noch nicht untersucht worden sind.

8.8 Einflüsse höherer Partialwellen

Im folgenden werden nur noch die Rechnungen mit der EST-Methode diskutiert. Zunächst wird der Einfluß der höheren Partialwellen in der Projektion der Wellenfunktion untersucht. Dabei wird bei der Berechnung der Formfaktoren die Anzahl der Partialwellen auf $J \leq 2$, also 18 Dreiteilchenkanäle, beschränkt. Bei der Berechnung der Wellenfunktion wird die Anzahl der Partialwellen, auf die projiziert wird, variiert. Abbildung 13 zeigt den Einfluß auf den Wirkungsquerschnitt der Photodesintegration.

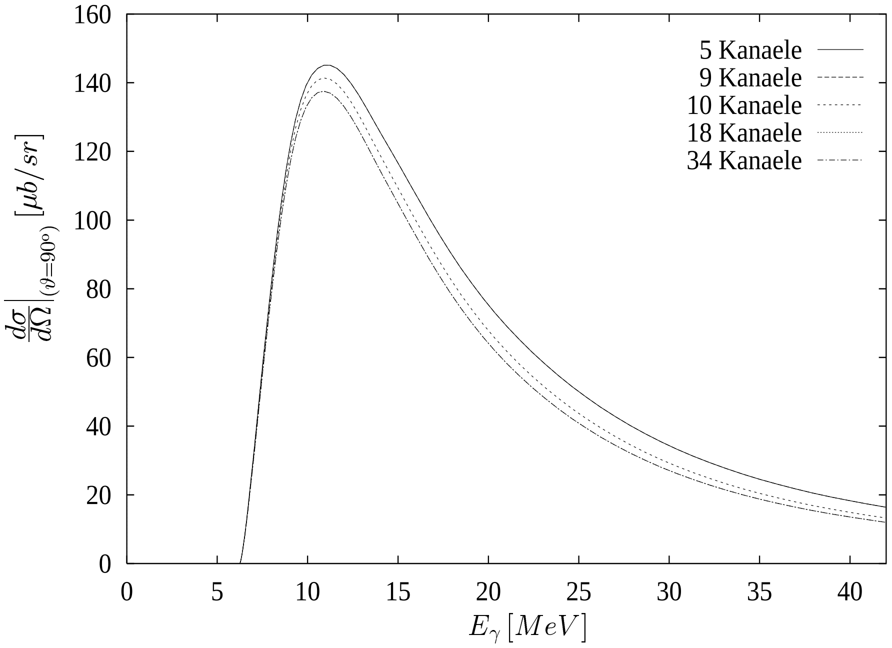


Abbildung 13: Einfluß höherer Partialwellen im Triton mit PEST Potential.

Zunächst zeigt sich, daß die höheren D-Wellen keinen Einfluß haben, da sich die 5- nicht merklich von der 9-Kanal-Rechnung unterscheidet. Die P-Wellen haben jedoch einen deutlichen Einfluß. Je mehr P-Wellen man berücksichtigt, desto kleiner wird der Wirkungsquerschnitt. Noch höhere Partialwellen spielen hingegen keine merkliche Rolle mehr. Geht man bei der Projektion über 18 Kanäle hinaus, ändert sich der Wirkungsquerschnitt nicht mehr.

Die Rolle der höheren Partialwellen in der final-state-Wechselwirkung kann untersucht werden, indem man jeweils die gleiche Tritonwellenfunktion (hier $J \leq 2$) verwendet und die Anzahl der Partialwellen in der Bornnäherung und damit auch in der FSI variiert.

Das Ergebnis ist in Abbildung 14 zu sehen. Auch hier zeigt sich, daß die höheren D-Wellen keinen Einfluß haben, während die höheren P-Wellen den Wirkungsquerschnitt in Peakbereich absenken und ihn ab ca. 17 Mev leicht anheben.

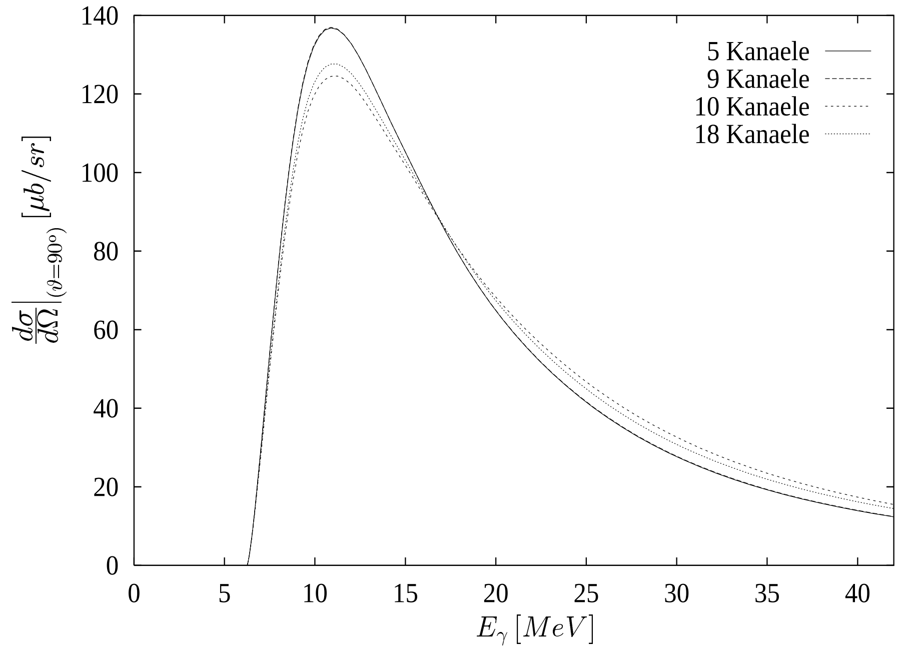


Abbildung 14: Einfluß höherer Partialwellen in der FSI mit dem PEST Potential $J \leq 2$.

Ebenfalls zu sehen ist, daß die Änderungen mit wachsender Anzahl von Partialwellen kleiner werden, so daß hier keine großen Änderungen bei noch höherem J zu erwarten sind. Solche Rechnungen mit $J \leq 3$ sind wegen der hohen Kanalanzahl sehr aufwendig und können im übrigen momentan nicht durchgeführt werden, da eine entsprechende EST-Parametrisierung dieser Partialwellen nicht vorliegt.

8.9 Quadrupolbeiträge

Nachdem nun die wichtigsten Einflüsse auf den Wirkungsquerschnitt unter Verwendung der elektrischen Dipolwechselwirkung diskutiert worden sind, werden nun die Beiträge des Quadrupolterms miteinbezogen. Hierzu gibt es bereits Untersuchungen von Barbour und Hendry [3], die aber mit sehr einfachen Wellenfunktionen und Wechselwirkungen gerechnet haben. Erste Rechnungen mit realistischen Potentialen wurden von Th. Heck [14] durchgeführt. Die von ihm berechneten Wirkungsquerschnitte beinhalten jedoch einen falschen Phasenfaktor eines Matrixelements. Dieser macht sich bei E1-Übergängen und Beschränkung der Wechselwirkung auf $J \leq 1^+$ kaum bemerkbar, bei E2 und $J \leq 1^+$ jedoch schon stärker, so daß diese Rechnungen hier wiederholt werden, bzw. auf $J \leq 2$ erweitert werden. Die grundsätzlichen Aussagen aus [14] sind jedoch richtig und werden daher hier nicht im Detail wiederholt.

Der erste wichtige Unterschied zu E1-Übergängen ist, daß die Isospin-Matrixelemente des Wechselwirkungsoperators von der 3-Komponente abhängen. Damit gibt es eine Unterscheidungsmöglichkeit von Triton und Helium. Dies ist mit E1-Übergängen nicht möglich. Die Abbildungen 15 bis 18 zeigen den Einfluß des E2-Terms auf den totalen Wirkungsquerschnitt bei ^{3}H und ^{3}He jeweils für $J \leq 1^+$ und $J \leq 2$.

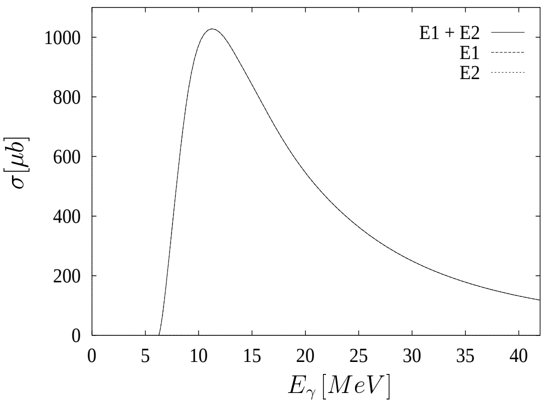


Abbildung 15: Totaler Wirkungsquerschnitt für ^{3}H mit dem PEST Potential $J \leq 1^+$.

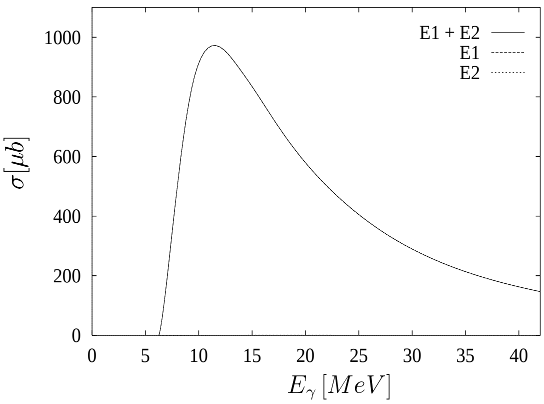


Abbildung 16: Totaler Wirkungsquerschnitt für ^{3}H mit dem PEST Potential $J \leq 2$.

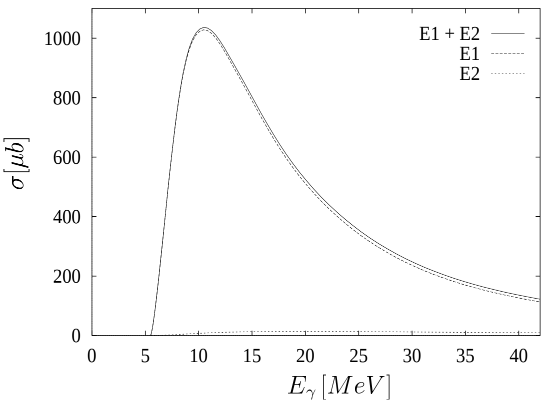


Abbildung 17: Totaler Wirkungsquerschnitt für ^{3}He mit dem PEST Potential $J \leq 1^+$.

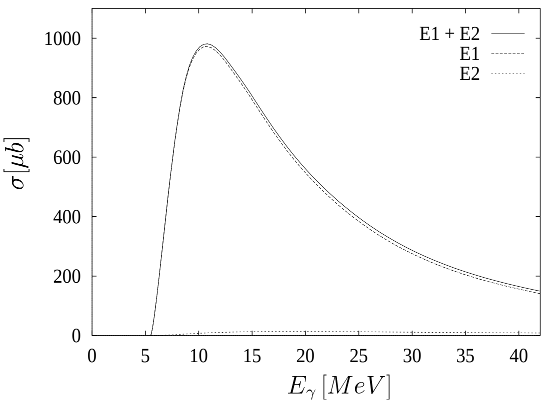


Abbildung 18: Totaler Wirkungsquerschnitt für ^{3}He mit dem PEST Potential $J \leq 2$.

Man erkennt, daß die E2- gegenüber den E1-Beiträgen um etwa drei Größenordnungen kleiner sind. Aufgrund von Isospin-Auswahlregeln ist der E2-Beitrag beim Triton noch kleiner als er ohnehin schon beim Helium ist. Die Absenkung des Wirkungsquerschnitts bei Mitnahme höherer Partialwellen auf den jeweils rechten Bildern kommt ausschließlich durch den E1-Term zustande. Die Graphiken sind alle mit dem BBEST Potential berechnet, die gleichen Aussagen gelten aber auch für alle anderen Potentiale.

Zur weiteren Untersuchung der E2-Beiträge sind in den folgenden Abbildungen die Born-Näherung und die volle Lösung für die gleichen vier Fälle eingezeichnet. Auffallend ist, daß das Maximum der Peaks gegenüber dem E1-Term zu höheren Energien hin verschoben ist und daß die Kurven langsamer abfallen. Dies liegt an dem zusätzlichen Faktor E_γ im E2-Operator. Man erkennt weiter, daß sich die E2-Beiträge bei ^{3}H und ^{3}He um einen Faktor $\approx$ 25 unterscheiden. Die Rolle der höheren Partialwellen ist ebenfalls in beiden Fällen unterschiedlich. Beim Helium führen sie zu einer sehr kleinen Absenkung, während sie beim Triton zu einer Erhöhung der Born-Näherung um ca. 10% führt, die final-state-Amplitude ändert sich jedoch nur um ca. 0.8%.

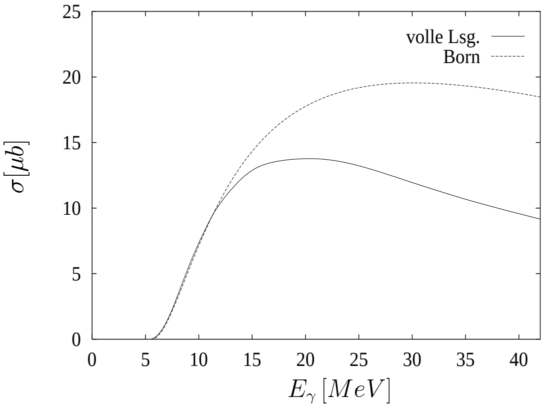


Abbildung 19: E2 Beiträge mit BBEST ($J \leq 1^+$) für ^{3}He

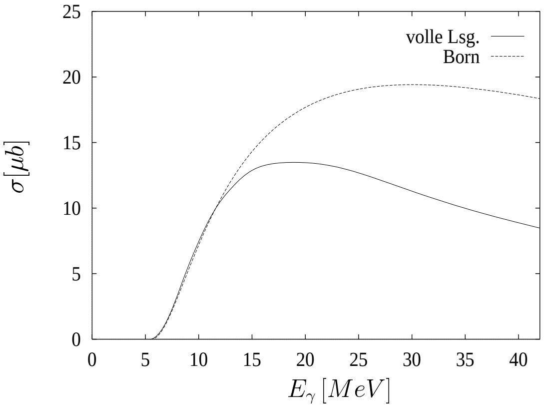


Abbildung 20: E2 Beiträge mit BBEST ($J \leq 2$) für ^{3}He

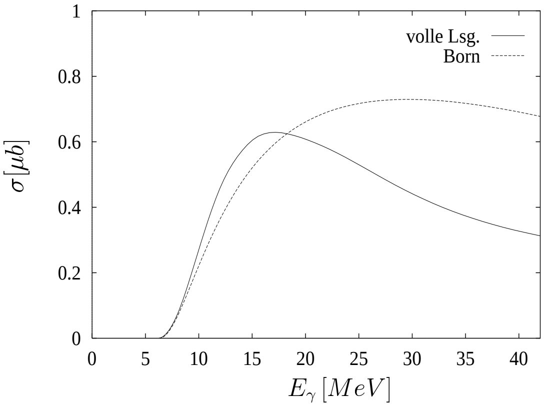


Abbildung 21: E2 Beiträge mit BBEST ($J \leq 1^+$) für ^{3}H

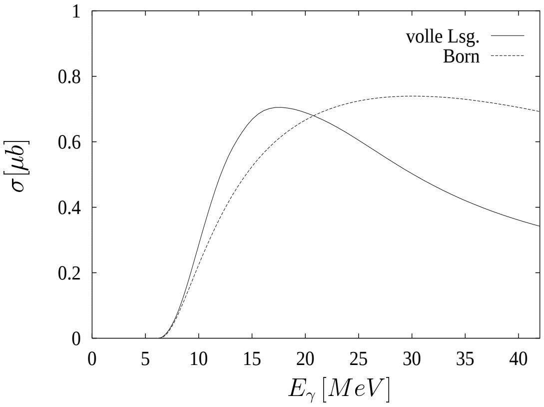


Abbildung 22: E2 Beiträge mit BBEST ($J \leq 2$) für ^{3}H

Weit wichtiger als beim totalen Wirkungsquerschnitt sind die E2-Beiträge im differentiellen Wirkungsquerschnitt, also der Winkelverteilung. Die Abbildungen 23-26 zeigen die entsprechenden Graphiken. Die besondere Bedeutung hängt mit dem Interferenzterm zwischen dem E1- und E2-Term zusammen. Dieser ist proportional zum Produkt der Wirkungsquerschnitte von E1 und E2 und einer Kombination aus $\sin^2\theta\cos\theta$ und verschwindet gerade bei 90^0. Wegen der besonderen Winkelverteilung mittelt er sich beim Übergang zum totalen Wirkungsquerschnitt heraus. Für die Winkelverteilung ist weiter das Vorzeichen davon abhängig, ob man Triton oder Helium betrachtet. Der Interferenzterm stellt neben der absoluten Größe des E2-Beitrags den zweiten Unterschied zwischen Helium und Triton dar. Aufgrund des Vorzeichens wird das Maximum des differentiellen Wirkungsquerschnitts bei Berücksichtigung des E2 Terms relativ zum E1-Fall zu kleineren (^{3}He) oder größeren (^{3}H) Winkeln verschoben.

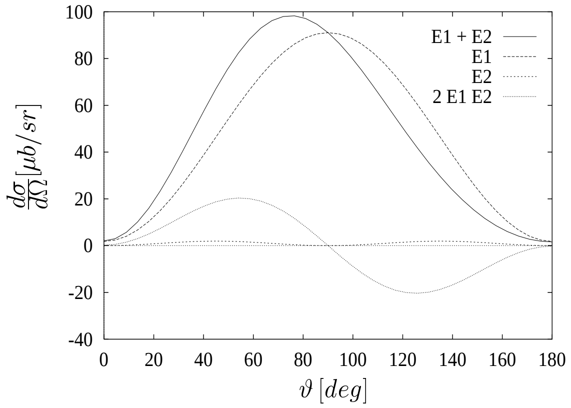


Abbildung 23: Photodesintegration bei E = 15.3 MeV mit BBEST ($J \leq 1^+$) ^{3}He.

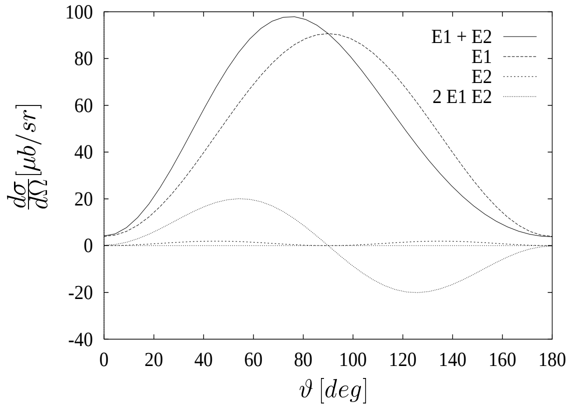


Abbildung 24: Photodesintegration bei E = 15.3 MeV mit BBEST ($J \leq 2$) ^{3}He.

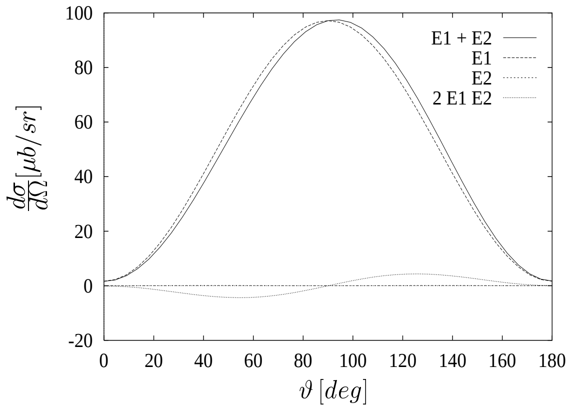


Abbildung 25: Photodesintegration bei E = 15.3 MeV mit BBEST ($J \leq 1^+$) ^{3}H.

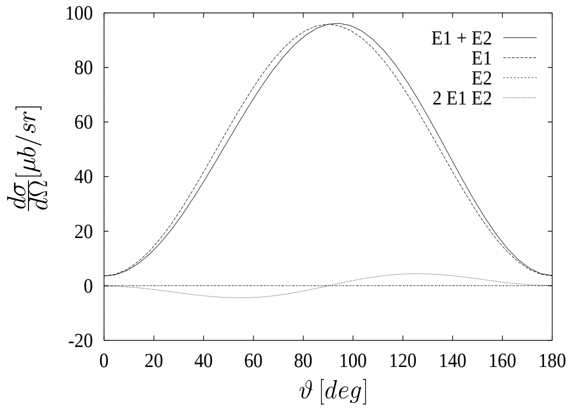


Abbildung 26: Photodesintegration bei E = 15.3 MeV mit BBEST ($J \leq 2$) ^{3}H.

8.10 Korrelation der Peakhöhen und Bindungsenergien

Nachdem nun die wichtigsten Effekte an Hand eines Potentials erläutert wurden, werden nun die Potentiale untereinander verglichen. Einerseits wurden verschiedene Parametrisierungen des Yamaguchi-Potentials, dann das semirealistische Malfliet-Tjon und schließlich verschiedene realistische Potentiale verwendet. Insbesondere die realistischen Potentiale liefern auf dem Zweiteilchenlevel vergleichbare Ergebnisse, während dies im Dreiteilchenfall schon bei der Triton-Bindungsenergie nicht mehr der Fall ist. Außerdem verfügen sie gegenüber den beiden erstgenannten über eine größere Anzahl von Partialwellen. Es stellt sich die Frage, inwieweit sich dies im Wirkungsquerschnitt der Photodesintegration niederschlägt. Abbildung 27 zeigt die Maxima des Wirkungsquerschnitts aufgetragen gegen die Bindungsenergie. Es zeigt sich, daß eine sehr starke Korrelation zwischen diesen Größen besteht. Eine weitere wichtige Rolle spielt die Anzahl der Partialwellen, die dabei berücksichtigt wurde.

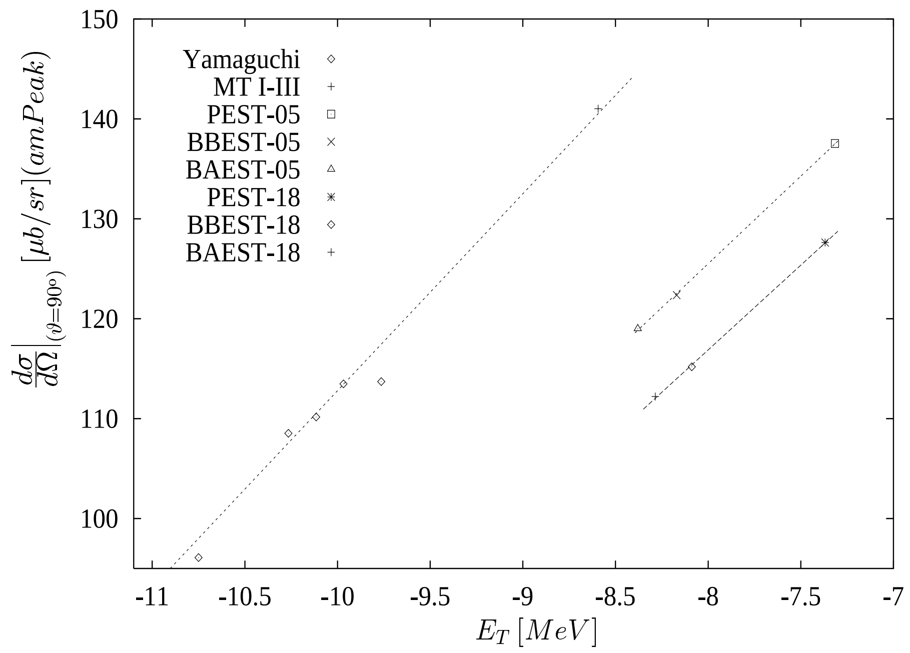


Abbildung 27: Korrelation der Peakhöhen.

Alle S-Wellen Potentiale liegen auf einer Linie. Ein gleicher Effekt zeigt sich bei den realistischen Potentialen. Außerdem verschiebt sich die entsprechende Linie nahezu parallel nach unten, je mehr Partialwellen miteinbezogen werden. Eine wichtige Folgerung ist, daß ein S-Wellen Potential, welches die richtige Triton-Bindungsenergie liefert, nicht in der Lage ist, das Maximum des Wirkungsquerschnitts eines realistischen Potentials zu liefern, da diese aufgrund ihrer höheren Partialwellen einen kleineren Wirkungsquerschnitt ergeben. Dies wurde bereits in einem vorherigen Abschnitt gezeigt. Es sei jedoch betont, daß dies kein Kriterium zur Unterscheidung von realistischen, und empirischen Potentialen, im Sinne des zugrundegelegten Modells, ist. Es wird nur eine Aussage über die Korrelation der Bindungsenergie und und der Peakhöhe in Abhängigkeit von der Anzahl der Partialwellen gemacht.

8.11 Vergleich mit dem Experiment

Nachdem die theoretischen Effekte diskutiert wurden, folgt nun der Vergleich mit den experimentellen Werten. Im Falle des Tritons gibt es mehrere verschiedene Datensätze [17–21,24–26]. Die Daten etwas oberhalb der Schwelle von Bösch et al. und Wölfli et al. entsprechen etwa denen von Faul et al. und sind daher in den folgenden Graphiken nicht eingezeichnet. Die Daten von Faul et al. sind teilweise mit einem sehr großen Fehler behaftet und stehen im Widerspruch zu denen von Skopik et al. und Kosiek et al. Die beiden letztgenannten Datensätze sind untereinander ebenfalls im Widerspruch, scheinen sich aber nur durch einen Normierungsfaktor zu unterscheiden. Ein neues Experiment mit größerer Genauigkeit ist daher dringend erforderlich. Es lassen sich dennoch einige Trends aus diesen Daten ablesen. Zunächst werden die Daten besser beschrieben, je mehr Partialwellen man berücksichtigt. Insbesondere beschreiben die beiden Bonn Potentiale die Daten im Peak besser als das Paris Potential. Dies scheint also mit der besseren Triton-Bindungsenergie zusammen zuhängen, die diese Potentiale liefern. Oberhalb des Peaks werden die Daten von Kosiek et al. mit allen drei Potentialen besser beschrieben, als die von Skopik et al.

Im Falle von Helium sind die Daten besser, wenn auch die ersten beiden Punkte bei 15 MeV von Ticcioni et al. [23] eine etwas andere Tendenz der Daten im Peak erwarten lassen. Da es sich nur um wenige Punkte handelt, ist dies jedoch fraglich. In der Beschreibung der Daten zeigen sich wiederum ähnliche Trends wie zuvor. Man erhält sehr gute Übereinstimmung, wenn genügend Partialwellen berücksichtigt werden mit dem Potential, welches die Bindungsenergie (hier $B(^3H) = 7.7$ MeV) am besten beschreibt. Hier ist dies das Paris-Potential mit 7.368 MeV im Gegensatz zu den beiden Bonn-Potentialen mit 8.088 MeV (Bonn B) und 8.2848 MeV (Bonn A). Die Daten von Ticcioni et al. werden oberhalb des Peaks sehr gut beschrieben, wenn genügend Partialwellen miteinbezogen werden.

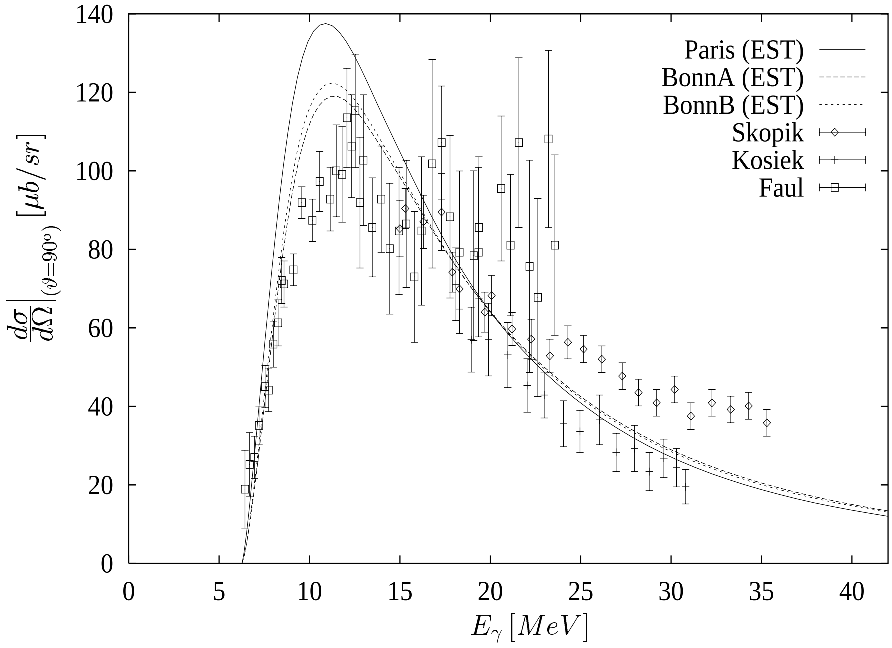


Abbildung 28: Vergleich von experimentellen Werten [21,25,26] mit den PEST, BAEST und BBEST Ergebnissen ($J \leq 1^+$) für ^{3}H.

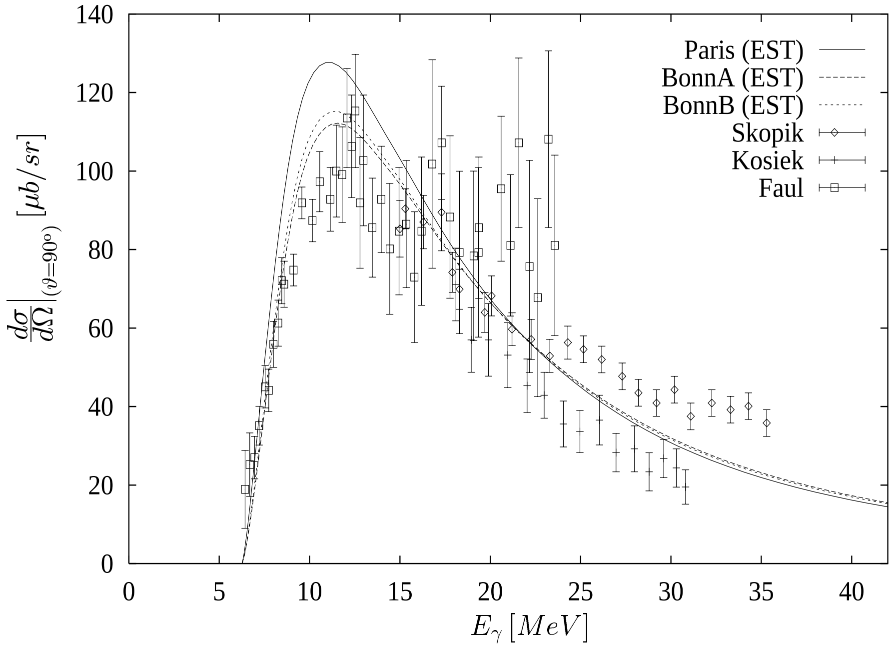


Abbildung 29: Vergleich von experimentellen Werten [21,25,26] mit den PEST, BAEST und BBEST Ergebnissen ($J \leq 2$) für ^{3}H.

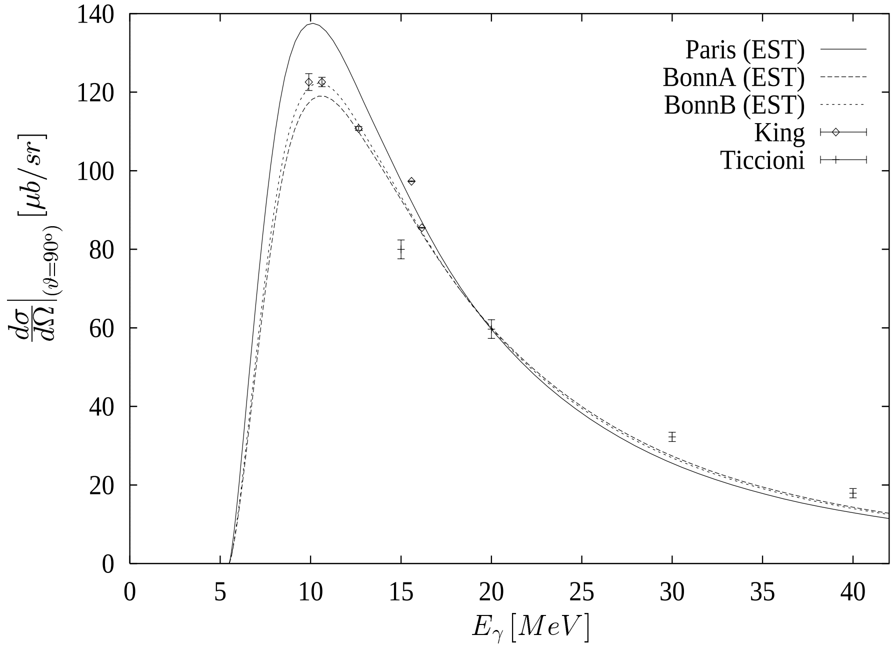


Abbildung 30: Vergleich von experimentellen Werten [23,27] mit den PEST, BAEST und BBEST Ergebnissen ($J \leq 1^+$) für ^{3}He.

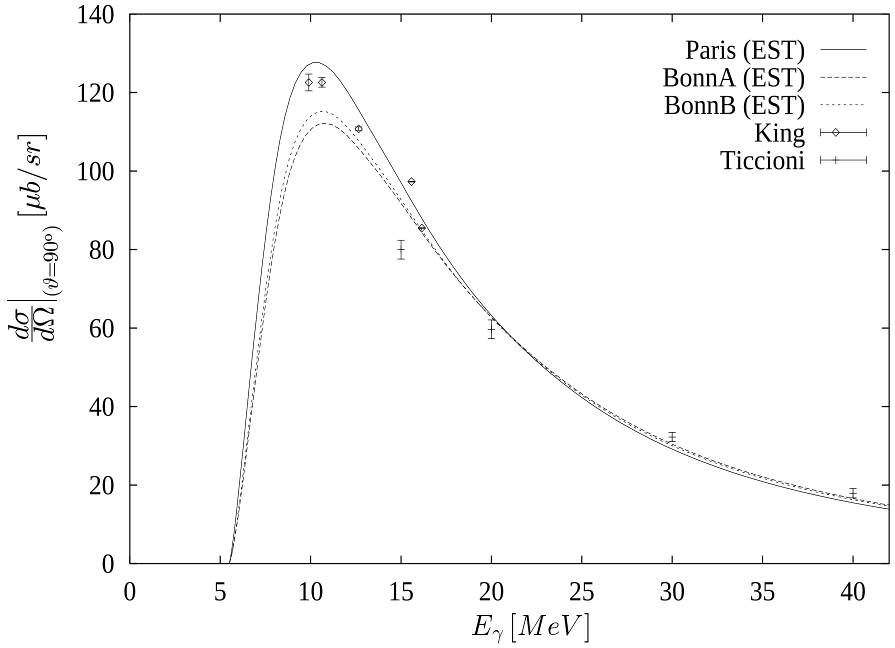


Abbildung 31: Vergleich von experimentellen Werten [23,27] mit den PEST, BAEST und BBEST Ergebnissen ($J \leq 2$) für ^{3}He.

8.12 Capture

Die sog. Capture-Reaktion, also der Einfang von Neutronen bzw. Protonen durch Deuteronen, ist der inverse Prozeß zur Photospaltung. Der Wirkungsquerschnitt läßt sich, wie in Anhang E.2 gezeigt, mittels des detaillierten Gleichgewichts aus dem für die Photodesintegration berechnen. Zunächst ist in Abbildung 32 der Wirkungsquerschnitt in Born-Näherung und bei Berücksichtigung der final-state Wechselwirkung dargestellt. Der Peak ist nicht so stark ausgeprägt und dem Betrag nach um einen Faktor ≈ 100 kleiner als bei der Spaltung und vor dem Peak schneidet die Born- die volle Kurve.

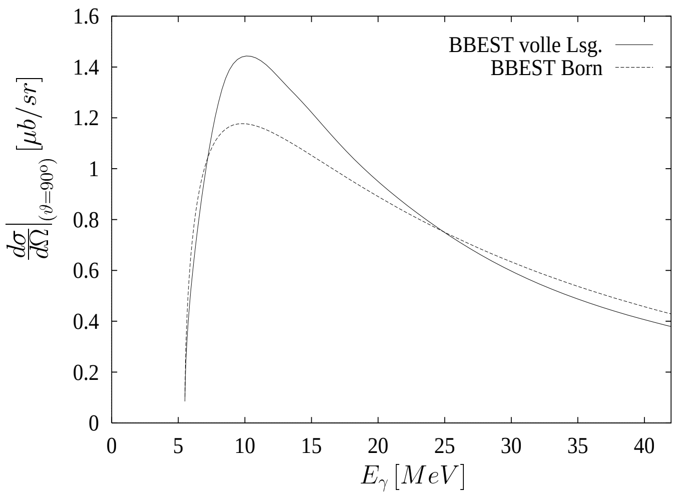


Abbildung 32: Wirkungsquerschnitt für Photocapture mit BBEST ($J \leq 2$), volle Lösung und Born-Näherung.

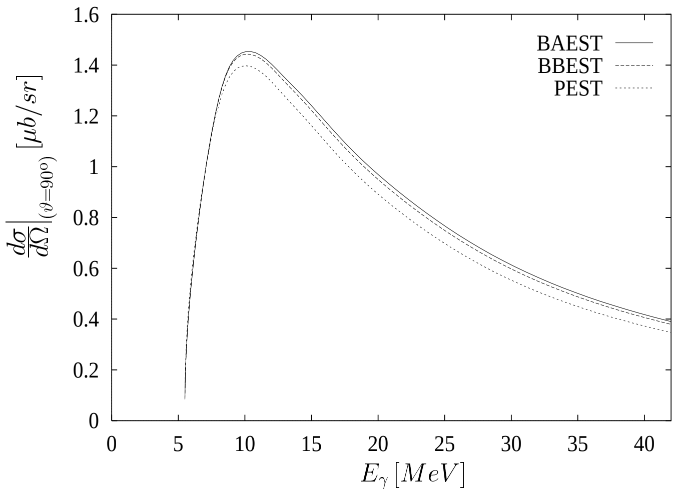


Abbildung 33: Wirkungsquerschnitt für Photocapture mit BAEST, BBEST, PEST, jeweils nur volle Lösung.

Ein weiterer Unterschied ist bei Verwendung verschiedener Potentiale zu erkennen. Die

Potentialabhängigkeit zeigt sich hier nicht nur im Peakbereich, sondern im ganzen Verlauf. Hier gilt jedoch, je höher die Bindungsenergie, desto höher der Wirkungsquerschnitt. Die Kurven für verschiedene Potentiale verlaufen nahezu parallel zueinander.

Die Aussagen, die bzgl. des E2 -Terms bei der Photodesintegration gemacht wurden, lassen sich ohne weiteres auf die inverse Reaktion übertragen. Die Abbildungen 34-37 zeigen die Beiträge der verschiedenen Multipole im differentiellen Wirkungsquerschnitt in Born-Näherung und voller Rechnung im Vergleich zu sehr guten experimentellen Werten von Belt et al. [22]. Es zeigt sich, daß die vollen Rechnungen die Daten sehr gut beschreiben, wenn man den E2-Anteil miteinbezieht.

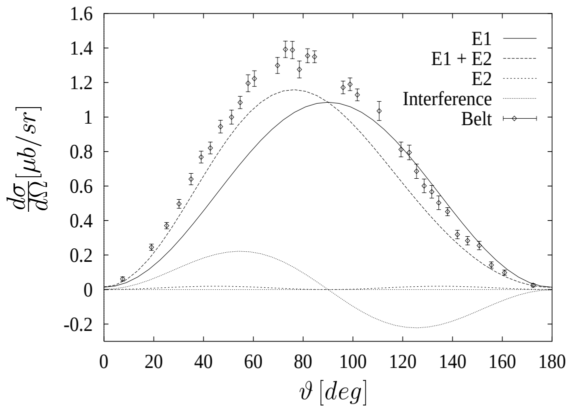


Abbildung 34: *p-d* capture mit PEST ($J \leq 2$) bei E = 12.1 MeV (Born-Näherung), E1 und E2 Beiträge.

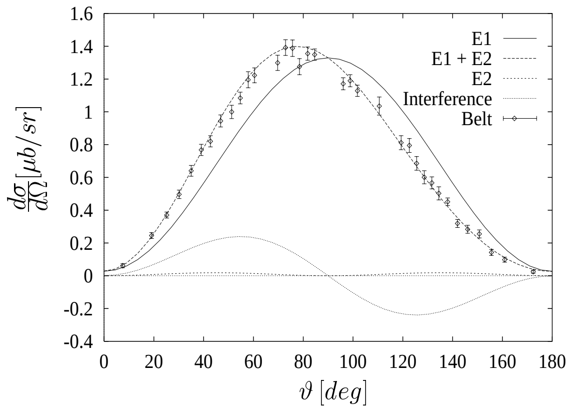


Abbildung 35: *p-d* capture mit PEST ($J \leq 2$) bei E = 12.1 MeV (volle Lösung), E1 und E2 Beiträge.

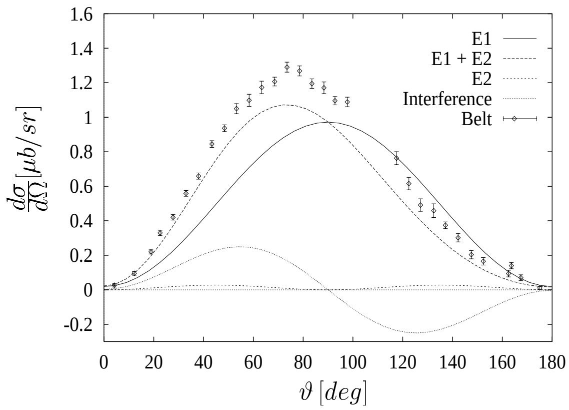


Abbildung 36: *p-d* capture mit PEST ($J \leq 2$) bei E = 15.3 MeV (Born-Näherung), E1 und E2 Beiträge.

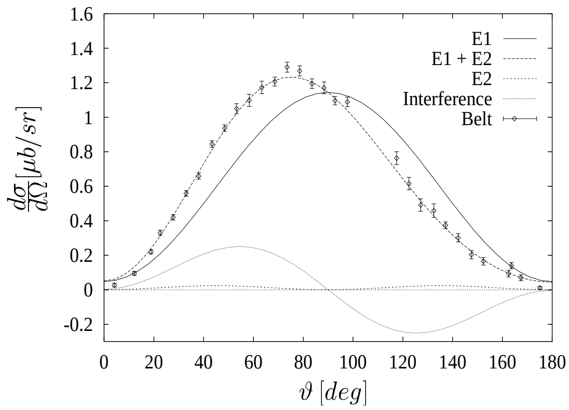


Abbildung 37: *p-d* capture mit PEST ($J \leq 2$) bei E = 15.3 MeV (volle Lösung), E1 und E2 Beiträge.

Wie schon bei der Photodesintegration ist auch bei der inversen Reaktion ein deutlicher

Unterschied zwischen Helium und Triton gegeben. Aufgrund der Auswahlregeln ist der E2-Term beim Triton erheblich kleiner und der Wirkungsquerschnitt wird bei dessen Berücksichtigung zu größeren Winkeln verschoben.

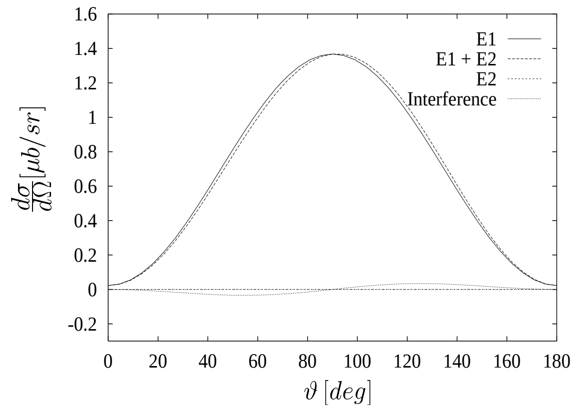


Abbildung 38: n-d capture bei E = 12.1 mit PEST ($J \leq 2$).

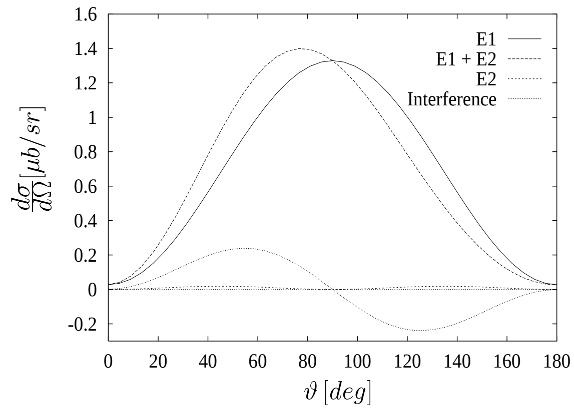


Abbildung 39: p-d capture bei E = 12.1 mit PEST ($J \leq 2$).

Die Bedeutung der höheren Partialwellen liegt auch hier darin, daß sie den Wirkungsquerschnitt absenken. In Abbildung 40 ist eine Rechnung ohne und eine mit höheren Partialwellen dargestellt. Nur bei Mitnahme dieser Partialwellen ergibt sich Übereinstimmung mit den experimentellen Werten.

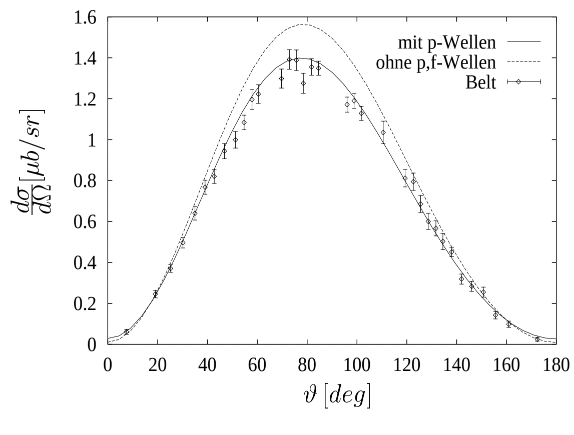


Abbildung 40: p-d capture PEST E = 12 MeV mit und ohne P- und F- Wellenbeiträge.

Schließlich ist in den beiden letzten Graphiken die Potentialabhängigkeit dargestellt. Da die beiden Energien oberhalb des Peaks liegen, liefern alle Potentiale vergleichbare Werte, die die Daten im Rahmen der Fehlerbalken gut beschreiben.

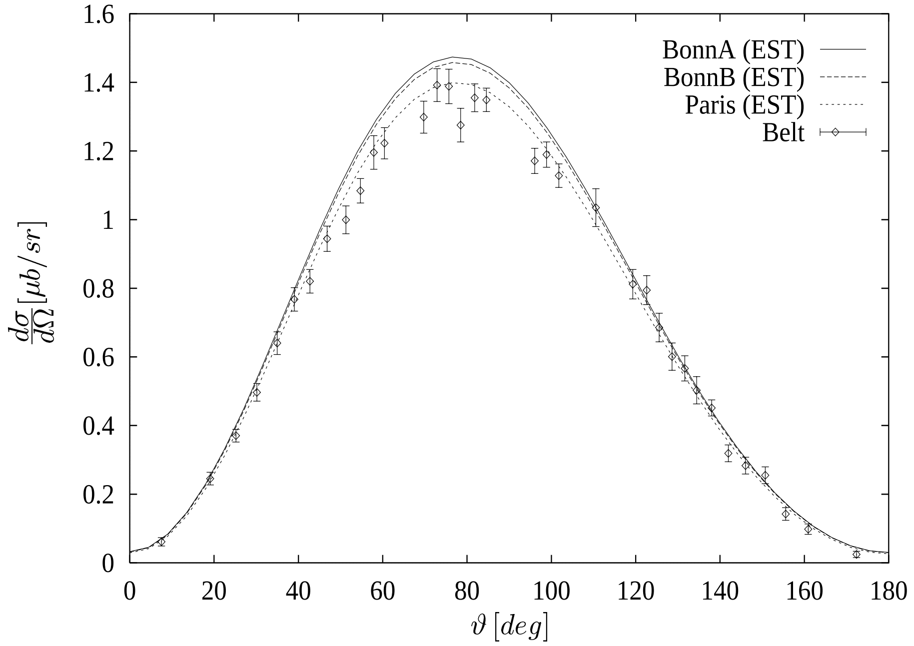


Abbildung 41: p-d capture bei E = 12.1 MeV mit PEST, BAEST und BBEST ($J \leq 2$).

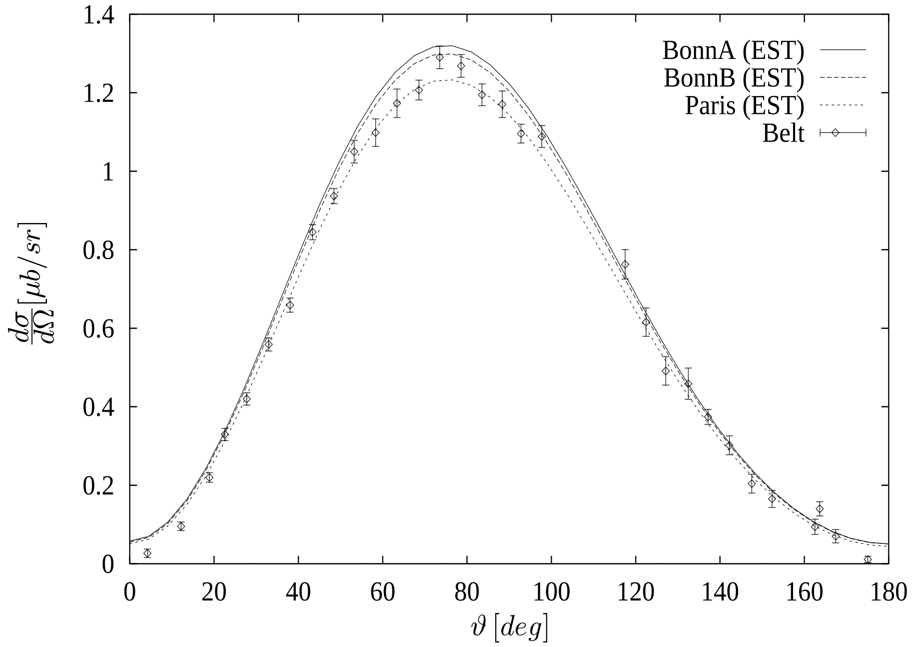


Abbildung 42: p-d capture bei E = 15.3 MeV mit PEST, BAEST und BBEST ($J \leq 2$).

9 π-Absorption am Triton

Eine weitere Anwendung des hier verwendeten Formalismus ist die Absorption oder Erzeugung eines Pions am Triton. Diese Reaktion wurde in Kooperation mit L. Canton berechnet [67,68]. Die wesentliche Vorgehensweise soll hier kurz beschrieben werden. Nähere Einzelheiten zur Berechnung finden sich in Referenz [68]. Die Übergangsamplitude läßt sich schreiben als

$$A_d^{\mathrm{tot}} = {}_{\mathcal{S}}\langle \Psi_d^{(-)} | \mathcal{A} | \Psi_t \rangle_{\mathcal{S}} \, |\mathbf{P}_0^\pi\rangle \,, \tag{9.1}$$

wobei $|\Psi_t\rangle_{\mathcal{S}}$ die Dreiteilchen- Bindungswellenfunktion und ${}_{\mathcal{S}}\langle \Psi_d^{(-)}|$ den Dreiteilchen-Streuzustand aus Deuteron und Proton bzw. Neutron darstellt. Beide Zustände sind bereits antisymmetrisiert unter Vertauschung von zwei Nukleonen. $|\mathbf{P}_0^\pi\rangle$ ist eine dreidimensionale ebene Welle, die das ein- bzw. auslaufende Pion beschreibt, d.h. die mögliche initial- oder final-state Wechselwirkung des Pions mit dem Triton wird nicht berücksichtigt. Der Operator $\mathcal{A}$ schließlich beinhaltet die Wechselwirkung für den Absorptions- bzw. Produktionsprozeß. Zur Berechnung der Dynamik der Nukleonen im Endzustand, also dem Streuzustand kann die gleiche Technik wie bisher verwendet werden. Der einzige Unterschied liegt in der Born-Näherung, die hier anders berechnet wird.
Bei der Berechnung wird der Absorptionsmechanismus betrachtet, der durch die Pion-Nukleon Wechselwirkung in P-Wellen hervorgerufen wird. Er wird beschrieben durch die πNΔ und πNN Vertizes mit den nichtrelativistischen Hamiltonoperatoren

$$H_{\pi N\Delta} = \frac{f_{\pi N\Delta}}{m_\pi} \int d\mathbf{r}\; \rho(\mathbf{r}) (\vec{S} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\Phi}(\mathbf{r}) \cdot \vec{T}) \tag{9.2}$$

für die πNΔ Wechselwirkung und

$$H_{\pi NN} = \frac{f_{\pi NN}}{m_\pi} \int d\mathbf{r}\; \rho(\mathbf{r}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\Phi}(\mathbf{r}) \cdot \vec{\tau}) \tag{9.3}$$

für die πNN Wechselwirkung. Die Dichte der Baryonen ist $\rho(\mathbf{r})$, während $\vec{\Phi}(\mathbf{r})$ das Pion-Isovektor-Feld ist. M und m_π sind die Massen der Nukleonen bzw. des Pions. Die Spin- und Isospinoperatoren der Nukleonen sind mit $\vec{\sigma}$ und $\vec{\tau}$ bezeichnet. Die entsprechenden Operatoren für das Δ-Nukleon Potential sind $\vec{S}$ und $\vec{T}$.
Der πNN Vertex wird auch als Impuls-Approximation bezeichnet und stellt den einfachsten Absorptionsmechanismus dar, ist aber wegen Energie-Impulserhaltung unterdrückt. Es dominieren daher Zweinukleonenprozesse. Die πNN–NN Inelastizitäten werden durch einen πNΔ–ΔN–NN Zweistufenprozeß modelliert. Der erste Übergang ist πNΔ, gefolgt von einem ΔN Zwischenzustand und schließlich dem ΔN–NN Übergang. Der Zwischenzustand des Δ wird beschrieben durch eine Green-Funktion

$$G_0 = \frac{1}{E + M - \mathcal{M}_\Delta - \frac{p^2}{2\mu_\Delta} - \frac{q^2}{2\nu_\Delta}} \,, \tag{9.4}$$

wobei E gegeben ist durch die Energie des Pions und die kinetische Energie des Targets im Schwerpunktsystem. Die Jacobi Koordinaten p und q sind die des Subsystems ΔN und relativ dazu des dritten Nukleons. Die zugehörigen reduzierten Massen sind μ_Δ und ν_Δ. $\mathcal{M}_\Delta - M$ berücksichtigt den Unterschied zwischen der Nukleonenmasse und der des Δ-Isobars. Da das Δ kein stabiles Teilchen ist, ist seine Masse mit einem Imaginärteil behaftet Γ_Δ, der mit der Zerfallsbreite zusammenhängt

$$\mathcal{M}_\Delta = M_\Delta - E_s - \frac{i}{2}\Gamma_\Delta(E)\,, \tag{9.5}$$

dabei ist $M_\Delta = 1232$ (MeV) und E_s ein Parameter. Die Energieabhängigkeit von $\Gamma_\Delta(E)$ wurde hier von der bereits vorher durchgeführten Analyse der Pion-Absorption am Deuteron [130] übernommen.
Das $N\Delta$–NN Übergangspotential wird hergeleitet aus π- und ρ- Austauschdiagrammen

$$\begin{aligned}
V_{N\Delta} &= (V^\pi_{N\Delta} + V^\rho_{N\Delta})(\vec{T_1}^\dagger \cdot \vec{\tau_2}) \\
V^\pi_{N\Delta} &= -\frac{g_\pi f_{\pi N\Delta}}{2Mm_\pi}(\vec{S_1}^\dagger \cdot \vec{Q})(\vec{\sigma_2} \cdot \vec{Q})G(\omega_\pi) \\
V^\rho_{N\Delta} &= -\frac{(g_\rho + f_\rho) f_{\rho N\Delta}}{2Mm_\rho}(\vec{S_1}^\dagger \times \vec{Q}) \cdot (\vec{\sigma_2} \times \vec{Q})G(\omega_\rho)\,.
\end{aligned} \tag{9.6}$$

Der Operator $\vec{Q}$ ist der Relativimpuls zwischen den Baryonen, m_ρ ist die Masse des ρ-Mesons und die Funktion $G(\omega)$, welche die Propagation des Mesonenaustauschs beschreibt, ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
G(\omega) &= \frac{1}{2\omega^2} + \frac{1}{2\omega(M_\Delta - M + \omega)} \\
&\simeq \frac{1}{2\omega^2} + \frac{1}{2\omega^2 + 2m_\pi(M_\Delta - M)}\,.
\end{aligned} \tag{9.7}$$

ω ist die relativistische Energie des ausgetauschten Mesons. Der Massenunterschied zwischen dem Nukleon und dem Δ wird im letzten Schritt nur noch näherungsweise berücksichtigt. Jedes Meson-Baryon Potential wird mit einem phänomenologischen Monopol-Formfaktor versehen, außer dem $\rho N\Delta$ Potential, hier wird ein Dipol-Formfaktor angenommen. Die Born-Amplitude läßt sich nun in verschiedene Teile aufspalten:

$$\begin{aligned}
&B^\Delta_E(q', \alpha', E) = 2\sqrt{3} \\
&\quad \times \sum_{\alpha'', \alpha_\Delta, \alpha} \int p'^2 dp'\, p''^2 dp''\, q''^2 dq''\, p^2_\Delta dp_\Delta\, p^2 dp\, q^2 dq\; \frac{f_1(\alpha', p')\, \langle p'q'\alpha'|P|p''q''\alpha''\rangle}{E - \frac{3}{4}\frac{q'^2}{M} - \frac{p'^2}{M} + i\epsilon} \\
&\quad \times \frac{\langle p''q''\alpha''|V_{N\Delta}|p_\Delta q''\alpha_\Delta\rangle}{E + (M - \mathcal{M}_\Delta) - \frac{q''2}{2\nu_\Delta} - \frac{p^2_\Delta}{2\mu_\Delta}}\; \langle p_\Delta q''\alpha_\Delta|H_{\pi N\Delta}|pq\alpha\rangle\, \langle pq\alpha|\Psi_t\rangle
\end{aligned} \tag{9.8}$$

und

$$
\begin{aligned}
B_D^{\Delta}(q',\alpha',E) &= 2\sqrt{3} \\
&\times \sum_{\alpha_\Delta,\alpha} \int p'^2 dp'\, p_\Delta^2 dp_\Delta\, p^2 dp\, q^2 dq\; \frac{f_1(\alpha',p')}{E - \frac{3}{4}\frac{q'^2}{M} - \frac{p'^2}{M} + i\epsilon} \\
&\times \frac{\langle p'q'\alpha'|V_{N\Delta}|p_\Delta q'\alpha_\Delta\rangle}{E + (M - \mathcal{M}_\Delta) - \frac{q'2}{2\nu_\Delta} - \frac{p_\Delta^2}{2\mu_\Delta}}\, \langle p_\Delta q'\alpha_\Delta|H_{\pi N\Delta}|pq\alpha\rangle\, \langle pq\alpha|\Psi_t\rangle
\end{aligned} \tag{9.9}
$$

für den Δ- Rückstreumechanismus und

$$
\begin{aligned}
B_E^{I.A.}(q',\alpha',E) &= \sqrt{3} \\
&\times \sum_{\alpha'',\alpha} \int p'^2 dp'\, p''^2 dp''\, q''^2 dq''\, p^2 dp\, q^2 dq\; \frac{f_1(\alpha',p')\,\langle p'q'\alpha'|P|p''q''\alpha''\rangle}{E - \frac{3}{4}\frac{q'^2}{M} - \frac{p'^2}{M} + i\epsilon} \\
&\times \langle p''q''\alpha''|H_{\pi NN}|pq\alpha\rangle\, \langle pq\alpha|\Psi_t\rangle\,,
\end{aligned} \tag{9.10}
$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
B_D^{I.A.}(q',\alpha',E) &= \sqrt{3} \\
&\times \sum_{\alpha} \int p'^2 dp'\, p^2 dp\, q^2 dq\; \frac{f_1(\alpha',p')\,\langle p'q'\alpha'|H_{\pi NN}|pq\alpha\rangle\,\langle pq\alpha|\Psi_t\rangle}{E - \frac{3}{4}\frac{q'^2}{M} - \frac{p'^2}{M} + i\epsilon}
\end{aligned} \tag{9.11}
$$

für die Einteilchen-Impuls-Approximation. Alle Terme tragen zur gesamten Amplitude bei. Die Indizes "E" und "D" unterscheiden zwischen Austausch- und direkten Mechanismen. Der direkte Mechanismus entspricht der Wahrscheinlichkeit, daß Nukleon (1) das freie ist, während (2) und (3) das Deuteron bilden. Die anderen beiden Fälle, in denen die Nukleonen (2) oder (3) jeweils frei sind, werden mit Hilfe des Permutationsoperators P berechnet und stellen die Austauschmechanismen dar. Für die weitergehenden Rechnungen sei auf Referenz [68] verwiesen. Hier sollen nur noch einige Resultate vorgestellt werden.

Abbildungen 43 und 44 zeigen den Wirkungsquerschnitt für die Reaktion $\pi + t \to n + d$ bei 300 MeV und 500 MeV für das BAEST, BBEST und das PEST Potential im Vergleich mit experimentellen Werten [131–133]. Die theoretischen Kurven sind hier anders normiert worden, um die Winkelabhängigkeit besser untersuchen zu können und eine gewisse Unsicherheit bei der Normierung der Daten zu berücksichtigen. Die Unterschiede in den Potentialen zeigen sich bei größeren Winkeln. Bei den Ergebnissen für 500 MeV ergeben sich diese jedoch nur in Rückwärtsrichtung. Abbildung 45 zeigt, daß ISI bei diesen Energien nur einen Einfluß von ca. 4% hat. Auch höhere Partialwellen spielen nur eine geringere Rolle. Sehr wichtig hingegen sind die Δ-Kanäle. Schließlich zeigt Abbildung 46 die Einflüsse von höheren Partialwellen und ISI auf die Vektoranalysierstärke A_y. Die P- und D-Wellen der Pion-Wechselwirkung sind hier wichtig, wenn sie auch noch nicht ausreichend sind, um die experimentellen Daten zu erklären.

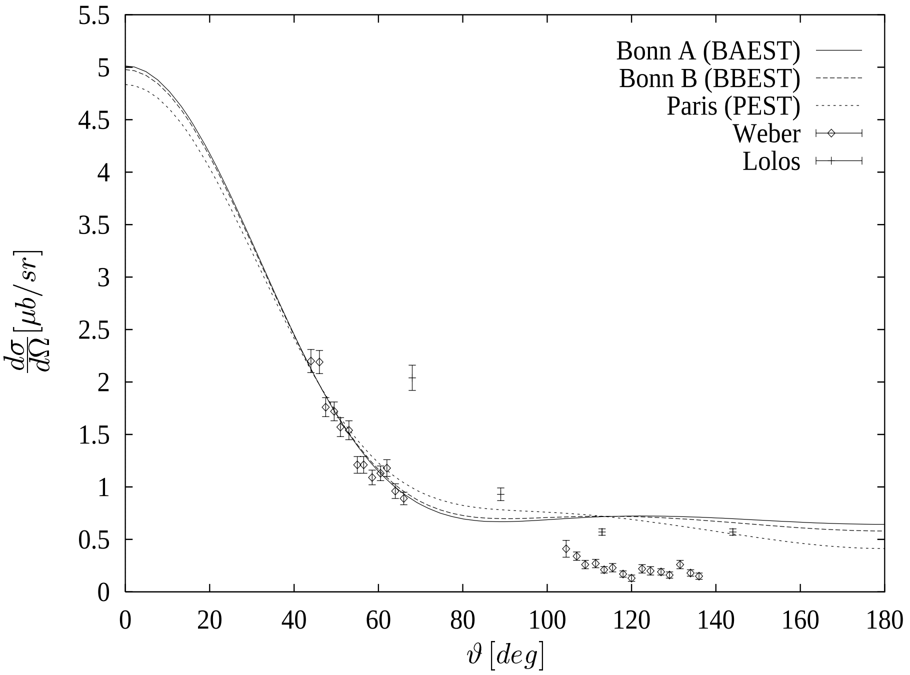


Abbildung 43: Wirkungsquerschnitt für $p+d \to \pi^+ + t$ bei 300 MeV mit BAEST, BBEST und PEST. Experimentelle Werte aus [131,132].

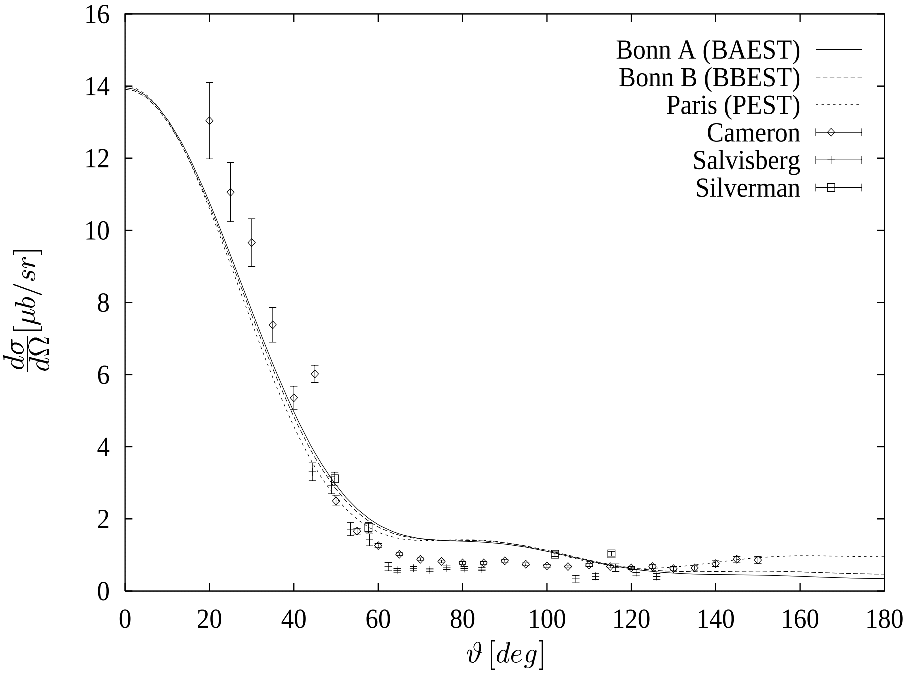


Abbildung 44: Wirkungsquerschnitt $p+d \to \pi^+ + t$ bei 500 MeV mit BAEST, BBEST und PEST. Experimentelle Werte aus [133].

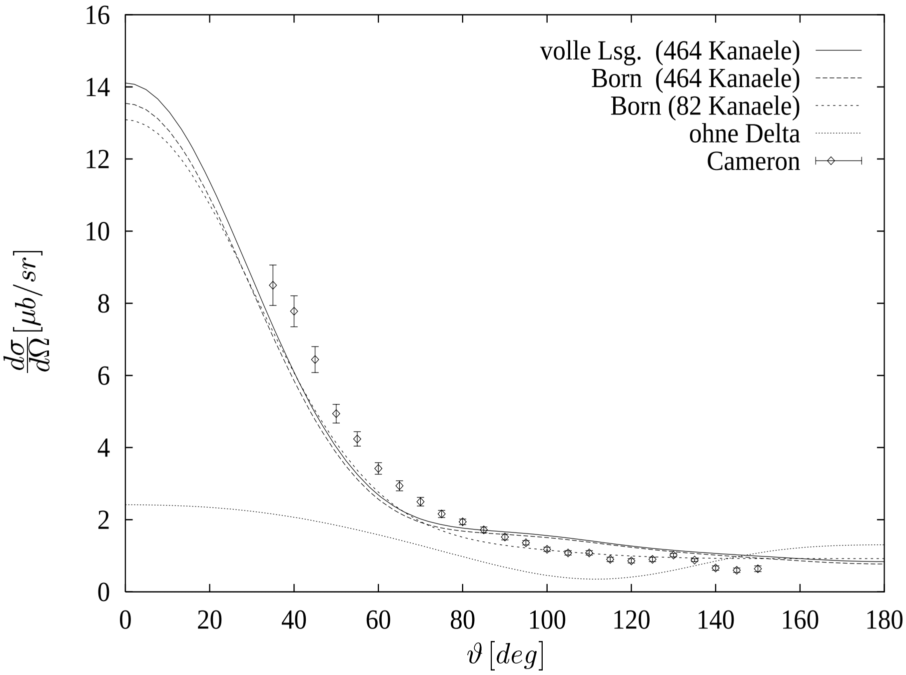


Abbildung 45: Einfluß von ISI und Δ-Freiheitsgraden auf den Wirkungsquerschnitt von $p + d \to \pi^+ + t$ mit dem PEST. Experimentelle Werte aus [133].

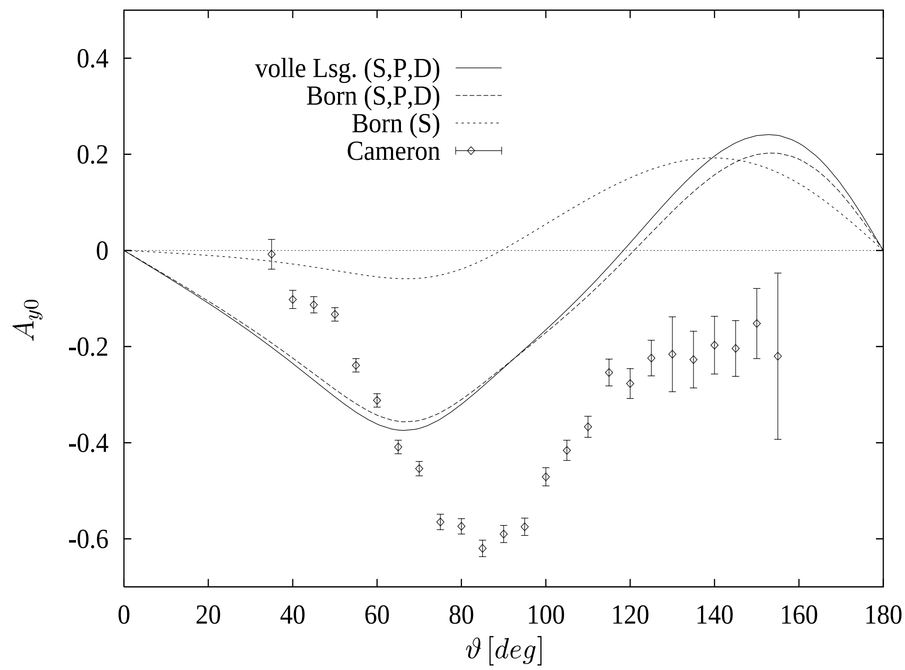


Abbildung 46: Vektoranalysierstärke A_{y0} für $\vec{p} + d \to \pi^+ + t$ mit BBEST. Experimentelle Werte aus [133].

10 Elastische n-d Streuung

Als weiterer Vergleich der beiden verwendeten Näherungsmethoden wird die elastische Streuung von Neutron und Deuteron berechnet. Eine Gleichung für die Übergangsamplituden erhält man aus (2.17)

$$\mathcal{T}_{\beta m,\alpha n} = \langle \Psi_{\beta m} | \langle \vec{q}\,'_{\beta} \,|\, U_{\beta\alpha} \,|\, \Psi_{\alpha n} \rangle \,|\vec{q}_{\alpha}\rangle = \langle\, \Phi_{\beta m} \,|\, U_{\beta\alpha} \,|\, \Phi_{\alpha n} \,\rangle \,. \tag{10.1}$$

Unter Benutzung der AGS-Gleichungen (2.18) und Antisymmetrisierung (siehe Kapitel 5.4) ergibt sich für die elastische Streuung

$$\mathcal{AT}_{m,n}(\vec{q}\,',\vec{q}\,) = \mathcal{AV}_{m,n}(\vec{q}\,',\vec{q}\,) + \sum_{ij} \int d^3q''\,\mathcal{AV}_{m,j}(\vec{q}\,',\vec{q}\,'')\,\Delta_{ij}(E - \tfrac{3}{4}q''^2)\,\mathcal{AT}_{i,n}(\vec{q}\,'',\vec{q}\,')\,. \tag{10.2}$$

Die Partialwellenzerlegung kann genauso wie bei der Photospaltung vorgenommen werden. Das endgültige Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned} {}^{\Gamma I}\!\mathcal{AT}^{bb'}(q,q',E+i0) &= {}^{\Gamma I}\!\mathcal{AV}^{bb'}(q,q',E+i0) \\ &+ \sum_{b''} \int_0^\infty dq''\,q''^2\,{}^{\Gamma I}\!\mathcal{AV}^{bb''}(q,q'',E+i0)\,\tilde{\Delta}^{\eta''}(E - \tfrac{3}{4}q''^2 + i0)\,{}^{\Gamma I}\!\mathcal{AT}^{b''b'}(q'',q',E+i0)\,, \end{aligned} \tag{10.3}$$

wobei $E = E_d + \frac{3}{4}q^2$ ist. Die Berechnung von Polarisationsobservablen wird in [34,134] ausführlich diskutiert und soll daher hier nicht wiederholt werden. Die folgenden Graphiken zeigen den differentiellen Wirkungsquerschnitt und die unabhängigen Polarisationsobservablen bei $E_{lab} = 10$ MeV für das Paris-Potential in W-Matrix- und EST-Näherung (Rang 1). Eine Übereinstimmung mit den experimentellen Daten kann bei dieser geringen Anzahl an Zweiteilchen-Partialwellen noch nicht erwartet werden. Hierzu wird bei einigen Observablen bis zu $J \leq 3$ benötigt. Dieser Test soll jedoch zunächst nur die Unterschiede zwischen den Näherungsmethoden aufzeigen. Weitergehende Untersuchungen waren nicht das Ziel dieser Arbeit.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt und einige Polarisationsobservablen stimmen für beide Methoden recht gut überein. Bei den sensitiven Observablen gibt es jedoch Unterschiede. Hier müßte man im Falle der EST-Rechnung zunächst den Rang erhöhen, um die Abweichungen genauer zu erklären.

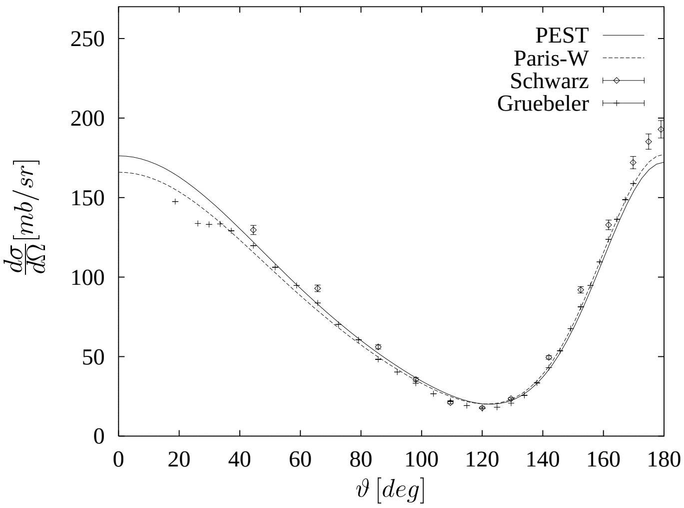


Abbildung 47: Differentieller Wirkungsquerschnitt mit Paris-Potential ($J \leq 1^+$) in EST- und W-Matrix-Näherung bei $E_{lab} = 10$ MeV. Die experimentellen Daten sind aus [135,136].

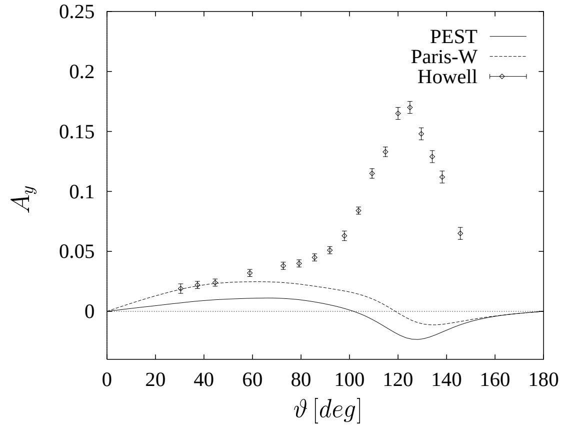


Abbildung 48: Deuteron-Analysierstärke A_y.

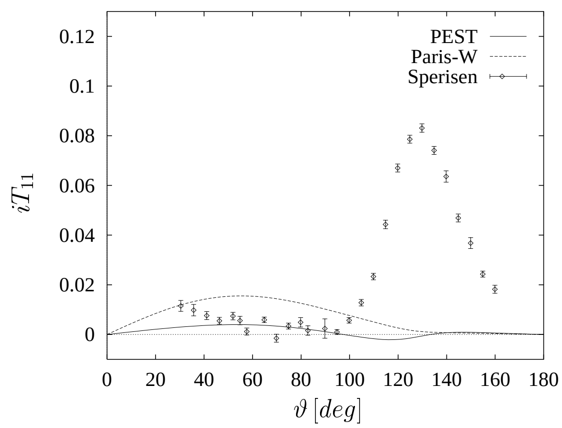


Abbildung 49: Deuteron-Analysierstärke iT_{11}.

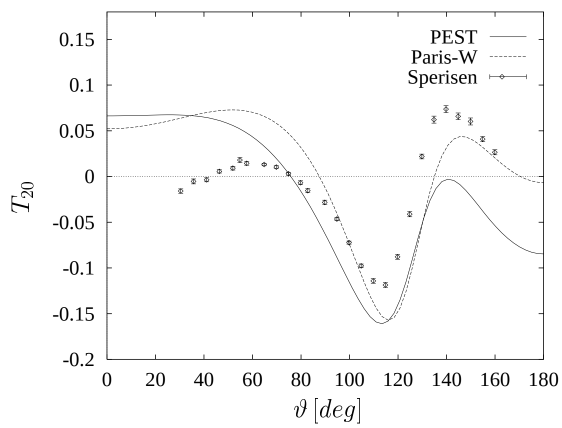


Abbildung 50: Deuteron-Analysierstärke T_{20}.

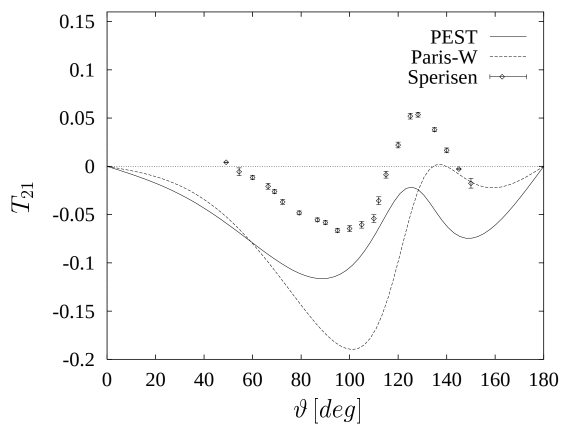


Abbildung 51: Deuteron-Analysierstärke T_{21}.

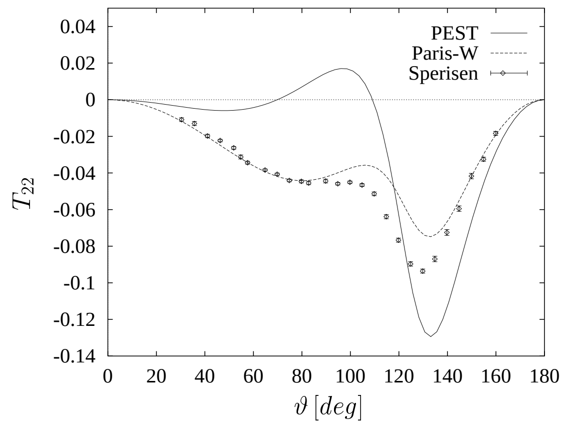


Abbildung 52: Deuteron-Analysierstärke T_{22}.

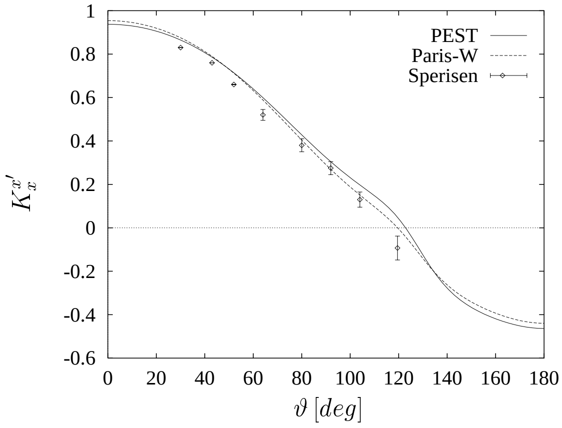


Abbildung 53: Nukleon-Nukleon-Polarisationstransfer $K_x^{x'}$.

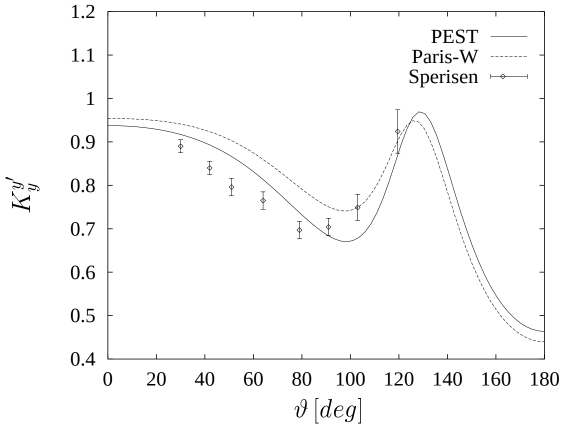


Abbildung 54: Nukleon-Nukleon-Polarisationstransfer $K_y^{y'}$.

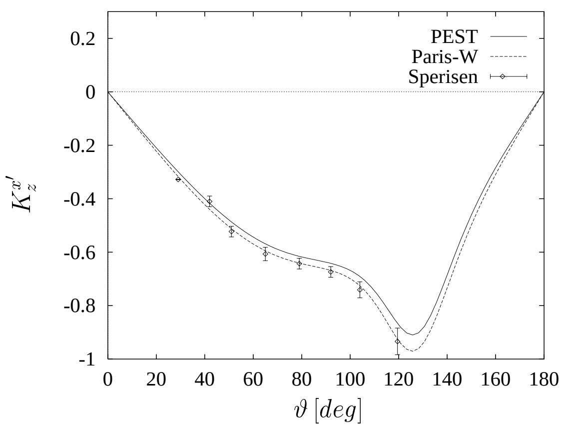


Abbildung 55: Nukleon-Nukleon-Polarisationstransfer $K_z^{x'}$.

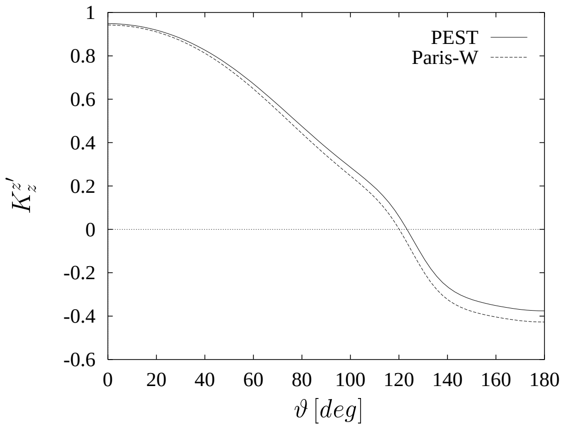


Abbildung 56: Nukleon-Nukleon-Polarisationstransfer $K_z^{z'}$.

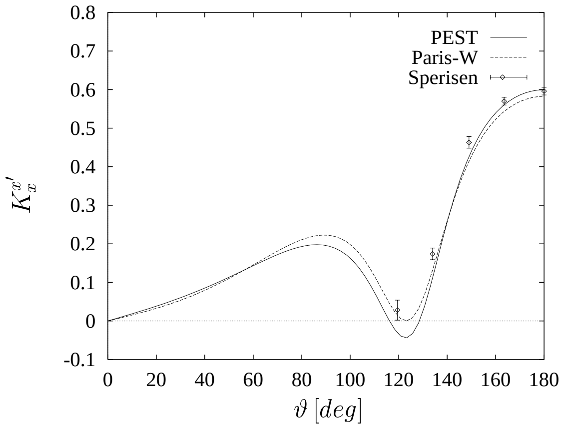


Abbildung 57: Nukleon-Deuteron-Polarisationstransfer $K_x^{x'}$ Vektor-Vektor.

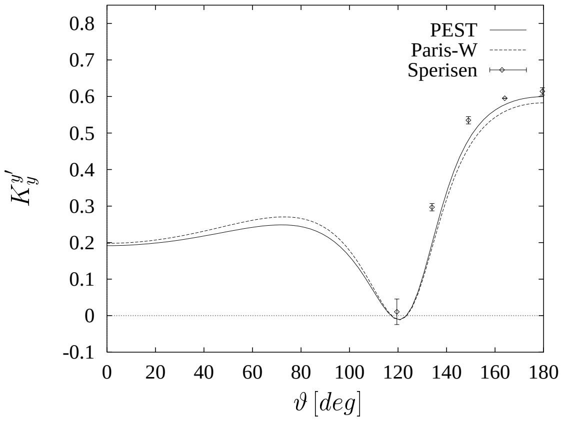


Abbildung 58: Nukleon-Deuteron-Polarisationstransfer $K_y^{y'}$ Vektor-Vektor.

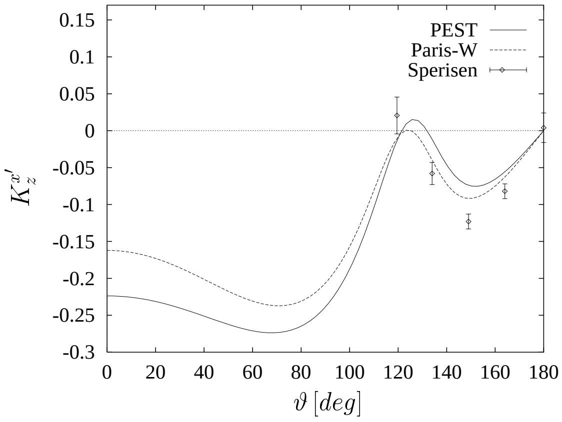


Abbildung 59: Nukleon-Deuteron-Polarisationstransfer $K_z^{x'}$ Vektor-Vektor.

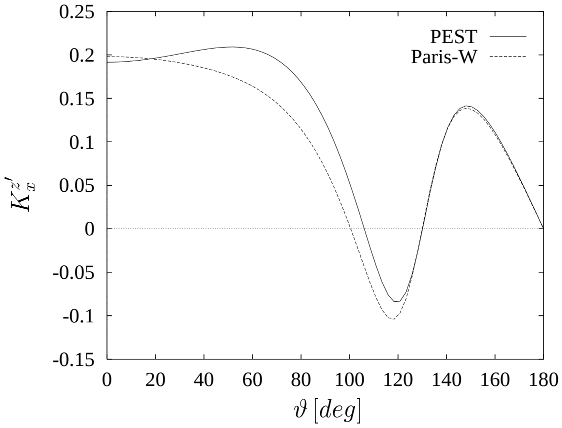


Abbildung 60: Nukleon-Deuteron-Polarisationstransfer $K_x^{z'}$ Vektor-Vektor.

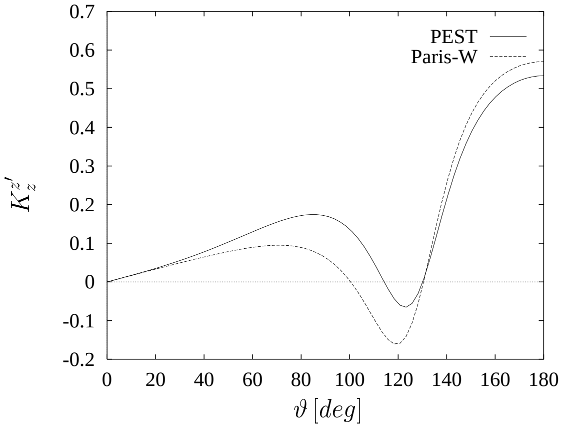


Abbildung 61: Nukleon-Deuteron-Polarisationstransfer $K_z^{z'}$ Vektor-Vektor.

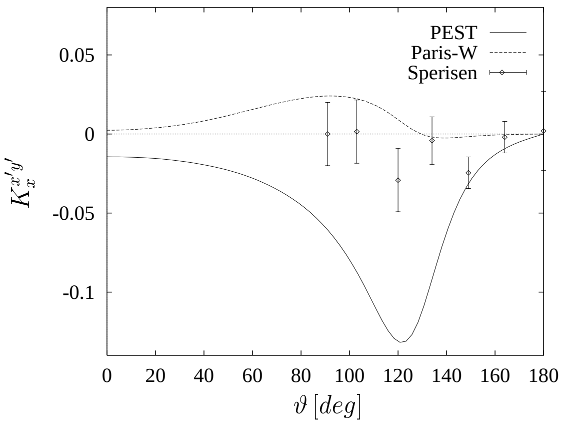


Abbildung 62: Nukleon-Deuteron-Polarisationstransfer $K_x^{x'y'}$ Vektor-Tensor.

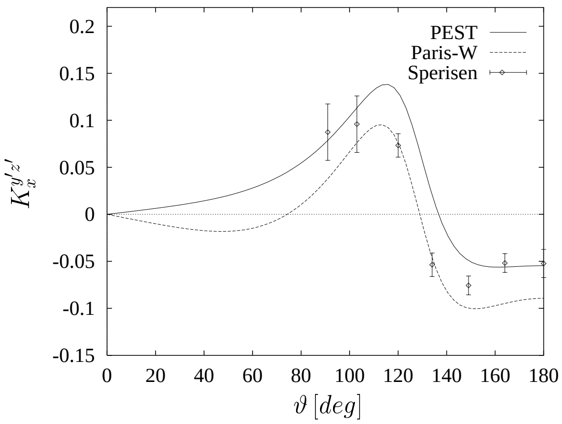


Abbildung 63: Nukleon-Deuteron-Polarisationstransfer $K_x^{y'z'}$ Vektor-Tensor.

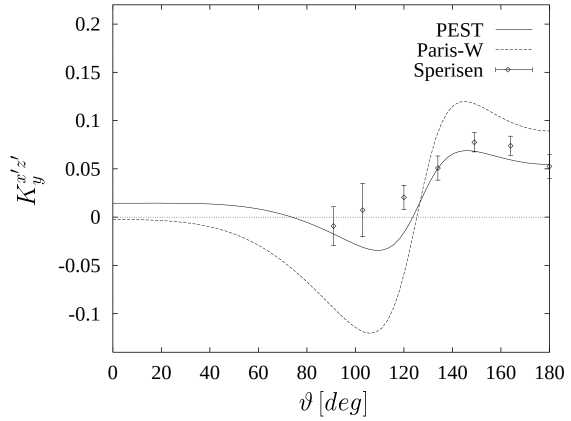


Abbildung 64: Nukleon-Deuteron-Polarisationstransfer $K_y^{x'z'}$ Vektor-Tensor.

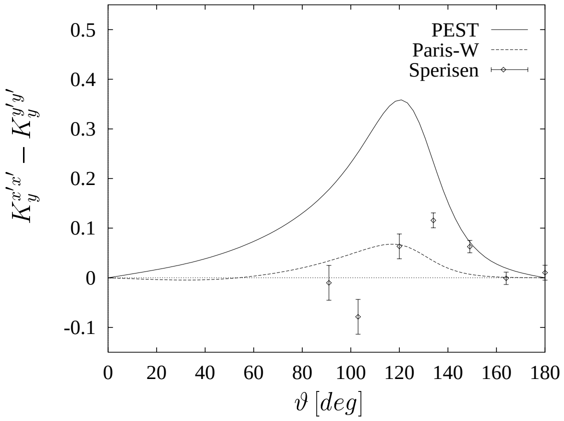


Abbildung 65: Nukleon-Deuteron-Polarisationstransfer $K_y^{x'x'} - K_y^{y'y'}$ Vektor-Tensor.

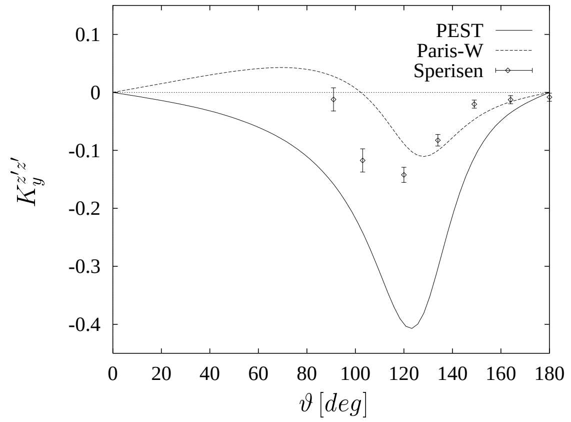


Abbildung 66: Nukleon-Deuteron-Polarisationstransfer $K_y^{z'z'}$ Vektor-Tensor.

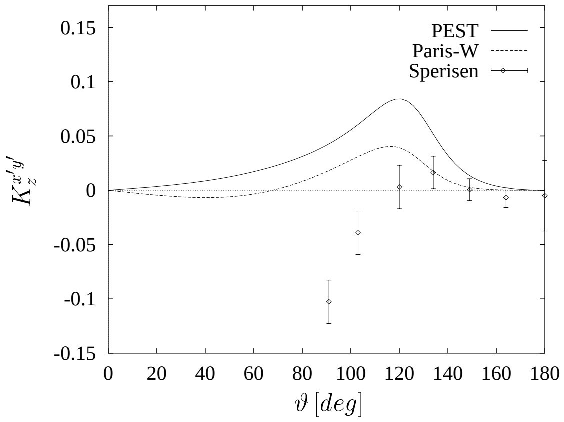


Abbildung 67: Nukleon-Deuteron-Polarisationstransfer $K_x^{y'z'}$ Vektor-Tensor.

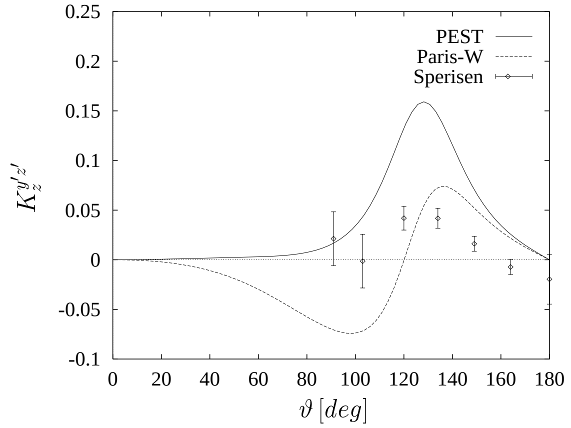


Abbildung 68: Nukleon-Deuteron-Polarisationstransfer $K_z^{y'z'}$ Vektor-Tensor.

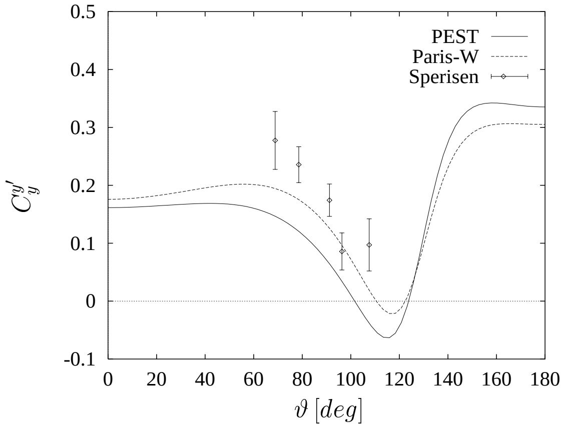


Abbildung 69: Nukleon-Deuteron Spin-Transfer $C_y^{y'}$.

11 Diskussion und Ausblick

In dieser Arbeit wurde die Photodesintegration des Deuterons und des Tritons mit den gleichen Methoden untersucht. Die elektromagnetische Wechselwirkung wurde in beiden Prozessen in der gleichen Weise berücksichtigt, so daß die auftretenden Matrixelemente bereits beim Deuteron getestet werden konnten. Die Übereinstimmung mit Arenhövel et al. ist sowohl für den Dipol- als auch für den Quadrupolteil sowohl mit, als auch ohne Siegert-Theorem sehr gut. Die Matrixelemente bilden die Grundlage zur Berechnung der Dreiteilchenübergänge.
Der zweite Input in die Gleichungen für die Photodesintegration ist die Triton-Wellenfunktion. Diese wurde in dieser Arbeit mit großer Genauigkeit berechnet. Die in der Literatur für das PEST-Potential und wenige Partialwellen ($J \leq 1^+$) vorliegenden Werte konnten reproduziert werden und auf eine höhere Anzahl von Partialwellen ($J \leq 2$) und verschiedene Potentiale ausgedehnt werden. Als weiterer Test für die Qualität der Wellenfunktionen wurden statt der separablen Näherung des Potentials bzw. der T-Matrix die exakte Wechselwirkung in einem zweidimensionalen Integralgleichungsprogramm verwendet. Dabei hat sich gezeigt, daß insbesondere die mit der EST-Methode berechneten Potentiale in der Lage sind, die Eigenschaften der Wellenfunktion sehr gut wiederzugeben, während die, mit der W-Matrix berechneten, größere Abweichungen zeigen.
Als weiterer Test für den Unterschied zwischen W-Matrix- und EST-Methode wurde die n-d Streuung untersucht. Als Ergebnis bleibt festzuhalten, daß der differentielle Wirkungsquerschnitt und einige Polarisationsobservablen gleich gut beschrieben werden. Insgesamt sind die Polarisationsobservablen sensitiver als der Wirkungsquerschnitt. Ein weiterer Vergleich müßte hier noch mit höherem Rang des Potentials durchgeführt werden. Ein Vergleich mit anderen Rechnungen konnte nicht durchgeführt werden, da diese mehr Partialwellen berücksichtigen. Es war jedoch nicht das Ziel dieser Arbeit Rechnungen zu diesem Thema mit großem Aufwand durchzuführen, es sollten lediglich mögliche Unterschiede der beiden verwendeten Methoden aufgezeigt werden.
Der Vergleich mit früheren Rechnungen ist nur bedingt möglich, da diese nur sehr vereinfacht oder fehlerhaft sind. So haben Gibson und Lehman [4] in ihrer Arbeit für das Yamaguchi-Potential von der Triton-Wellenfunktion nur den Anteil benutzt, der symmetrisch im Ortsanteil und antisymmetrisch im Spin-Isospin-Raum ist. Desweiteren besteht Unklarheit über die genauen Parameter, die sie verwendet haben. Es war auch nach Rücksprache mit einem der Autoren nicht möglich, dies zu klären. Daher ergeben sich bereits bei den Deuteronobservablen teilweise größere Abweichungen, als in deren Arbeit. Die berechneten Triton-Bindungsenergien zeigen ebenfalls in einem Fall Unterschiede. Mit einem modifizierten Parametersatz und unter Verwendung der experimentellen Bindungsenergien, ist es jedoch möglich, sehr nahe an deren Ergebnisse heranzukommen. Die Rechnungen von Gibson und Lehman weisen jedoch noch einen weiteren Mangel auf: Sie verwenden für das Triton und die final-state-interaction unterschiedliche Hamiltonoperatoren, so daß das Siegert-Theorem nicht mehr angewendet werden darf.
G. Reiss [10] und J. Richter [11] haben in ihren Arbeiten den Wirkungsquerschnitt falsch berechnet. Sie legen die z-Achse in Polarisationsrichtung und erhalten damit einen sehr

einfachen Hamiltonoperator, aus dem alle anderen Anteile herausprojiziert wurden. Um jedoch die möglichen Polarisationsrichtungen des Photons zu berücksichtigen, muß die Polarisationsachse aus der z-Richtung herausgedreht werden. Der Hamiltonoperator besitzt nach der Projektion jedoch überhaupt keine Anteile mehr in diese Richtung. Bei dieser Vorgehensweise wird also die Mittelung über alle Polarisationsrichtungen unmöglich gemacht, und die angegebenen Wirkungsquerschnitte sind falsch. Außerdem zeigt sich bei genauerer Betrachtung, daß der von ihnen berechnete Wirkungsquerschnitt nicht drehinvariant in Richtung φ bzgl. der Achse des einlaufenden Photons ist, was physikalisch jedoch zu erwarten ist.

Anders als im Zweiteilchenfall zeigen sich im Dreiteilchenfall weitere Effekte und andere ausgeprägter. So sind beim Deuteron bei den betrachteten Energien keine Einflüsse der final-state-interaction feststellbar, während sie beim Triton zu einer Erhöhung des Wirkungsquerschnitts um ca. 20-25% im Bereich des Peaks führt. Bei höheren Energien wird der Einfluß kleiner und führt schließlich zu einer Absenkung gegenüber der Born-Näherung. Der Einfluß der mesonischen Austauschströme, die mit Hilfe des Siegert-Theorems berücksichtigt werden können, zeigt sich bereits bei Energien wenig oberhalb der Aufbruchschwelle. Während im Falle des Deuterons dies zu einer Erhöhung des Wirkungsquerschnitts um ca. 20% führt, sind es beim Triton bereits ca. 80%. Zur Beschreibung der experimentellen Werte sind sie absolut notwendig.
Der wesentliche Unterschied zwischen den verschiedenen Potentialen zeigt sich bis zu einer Energie von 20 MeV. Bei höheren Energien liefern alle Potentiale nahezu gleiche Resultate. Trägt man das Maximum des Wirkungsquerschnitts gegen die Bindungsenergie auf, so zeigt sich eine starke Korrelation zwischen diesen Größen. Es zeigt sich, daß die Maxima der Wirkungsquerschnitte für Potentiale, bei denen eine bestimmte Anzahl von Partialwellen berücksichtigt wurde, auf einer Geraden liegen. Bei Erhöhung der Anzahl der Partialwellen wird diese Gerade parallel nach unten verschoben. Man erhält im Falle der realistischen Potentiale eine bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Daten, wenn man genügend viele Partialwellen miteinbezieht.
Abschließend bleibt festzuhalten, daß ein neues Experiment mit größerer Genauigkeit für die Photodesintegration erforderlich ist, um zu entscheiden, welches der Potentiale in der Lage ist, die Photodesintegration richtig zu beschreiben.

Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt der capture-Reaktion liegen recht genaue experimentelle Werte vor. Zu ihrer Beschreibung ist es in den Rechnungen notwendig, den Quadrupolterm zu berücksichtigen. Dieser führt im Falle von ^{3}He zu einer Verschiebung des Maximums des Wirkungsquerschnitts zu kleineren Winkeln und damit zu den experimentellen Daten. Aufgrund von Isospin Auswahlregeln ist der Einfluß des E2-Terms beim Triton sehr viel kleiner und führt sogar zu einer kleinen Verschiebung zu größeren Winkeln, d.h Triton und Helium lassen sich experimentell mit Hilfe der Photodesintegration unterscheiden. Es gibt jedoch keine Werte für ^{3}H. Eine Übereinstimmung mit den Daten kann auch bei der inversen Reaktion nur erreicht werden, wenn die höheren Partialwellen in der Zweiteilchen-Wechselwirkung berücksichtigt werden und die Triton-Wellenfunktion auf eine genügend hohe Anzahl von Partialwellen projiziert wird.

Der für die Photodesintegration verwendete Formalismus wurde auch auf die Absorption von Pionen angewendet. Der wesentliche Unterschied liegt hier in der Born-Näherung, in die der eigentliche Absorptionsprozeß eingeht. Diese wurde von L. Canton berechnet. Die final-state-Wechselwirkung des Protons und des Deuterons wurde mit einem modifizierten Programm für die Photodesintegration berechnet. Als Ergebnis läßt sich festhalten, daß sich der Wirkungsquerschnitt im Bereich der Δ-Resonanz gegenüber der Born-Näherung um ca. 3-4% ändert und eine gewisse Potentialabhängigkeit zeigt. Polarisationsobservablen sind dagegen sensitiver. Hier sind aber noch weitere Untersuchungen nötig, insbesondere die Erhöhung der Ränge. Erschwert wird dies allerdings durch die erheblich größere Zahl an Ausgangskanälen.

Die Aufgaben für die Zukunft lassen sich in verschiedene Felder unterteilen:

1. Wichtig für das weitere Verständnis erscheint die Berücksichtigung der magnetischen Anteile der elektromagnetischen Wechselwirkung. Die hierzu notwendige Miteinbeziehung expliziter mesonischer Austauschströme stellt eine weitere Aufgabe dar. Insbesondere stellt sie für den elektrischen Anteil auch im Hinblick auf höhere Energien eine notwendige Erweiterung dar.

2. Mit Hilfe der hier berechneten Amplituden können Polarisationsobservablen für die Photodesintegration berechnet werden. Der bereits vorhandene Formalismus im Falle der n-d Streuung kann nicht direkt übernommen werden. Es gibt zwar auch dort jeweils ein Spin 1 und ein Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen im Ein- und Ausgangskanal, aber hier ist eines der Spin 1 Teilchen ein Photon mit nur zwei Polarisationsrichtungen.

3. Die Erweiterung auf ladungsabhängige Potentiale wurde bereits vorgenommen. Hier stellt sich jedoch die Aufgabe, die Rechnungen mit noch höheren Partialwellen durchzuführen und z.B. eine separable Entwicklung des neueren CD-Bonn Potentials [88] zu verwenden.

4. Die Untersuchung des Dreiteilchen-Aufbruchs stellt ein weiteres Anwendungsgebiet des verwendeten Formalismus dar. Die nötigen Gleichungen sind in dieser Arbeit bereits angegeben.

5. Neben der π-Absorption stellt die η-Absorption eine weitere Reaktion dar, die mit dem vorliegenden Formalismus zu behandeln ist. Es ist auch denkbar, die π- oder η-Absorption am Deuteron als Dreiteilchenproblem zu untersuchen. Hierzu ist es notwendig, die in dieser Arbeit angegebenen Gleichung für unterschiedliche Massen umzuschreiben. Daneben muß die Antisymmetrisierung geändert werden, da dann nur noch zwei identische Teilchen vorliegen.

Anhang

A Zweiteilchenobservablen

A.1 Eigenschaften des Deuterons

Dieser Abschnitt enthält eine Zusammenstellung von Formeln zur Berechnung von Observablen für das Deuteron und n-p Streuung (siehe u.a. [43,75]).

- Normierung:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}q\, q^2 \left\{ (\Psi_0(q))^2 + (\Psi_2(q))^2 \right\} . \tag{A.1}$$

- Anteil der D-Welle:

$$P_D = \int_0^\infty \mathrm{d}q\, q^2 \, (\Psi_2(q))^2 . \tag{A.2}$$

- Magnetisches Moment:

$$\mu_d = \mu_p + \mu_n - \tfrac{3}{2} \left[\mu_p + \mu_n - \tfrac{1}{2} \right] P_D \qquad \text{mit} \qquad \mu_p = 2.79290 \quad \text{und} \quad \mu_n = -1.91315 . \tag{A.3}$$

- Quadrupol Moment:

$$Q_d = -\tfrac{1}{20} \int_0^\infty \mathrm{d}q \left\{ \sqrt{8}\, \frac{d\psi_0(q)}{dq} \left[q^2 \frac{d\psi_2(q)}{dq} + 3\, q\, \psi_2(q) \right] + q^2 \left(\frac{d\psi_0(q)}{dq} \right)^2 + 6\, (\psi_2(q))^2 \right\} , \tag{A.4}$$

  dabei wurde das Vorzeichen der Wellenfunktion in beiden Komponenten willkürlich für kleine Impulse auf +1 festgesetzt, um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden.

Für die Berechnung weiterer Observablen wird die Wellenfunktion im Ortsraum benötigt. Zur Umrechnung wird eine Fourier-Transformation der beiden Komponenten durchgeführt:

$$\frac{\varphi(r)}{r} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \mathrm{d}q\, q^2\, j_L(qr)\, \psi_L(q) , \tag{A.5}$$

wobei j_L die sphärischen Bessel Funktionen sind, $L = 0$ oder 2 und

$$\varphi_0(r) = u(r), \qquad \varphi_2(r) = w(r)\ . \tag{A.6}$$

- Asymptotische Norm A_S:

$$u(r) \underset{r\to\infty}{\widetilde{\quad}} A_s e^{-\alpha r}\ . \tag{A.7}$$

- D/S Verhältnis, η:

$$w(r) \underset{r\to\infty}{\widetilde{\quad}} \eta A_s \left(1 + \frac{3}{\alpha r} + \frac{3}{(\alpha r)^2}\right) e^{-\alpha r}\ , \tag{A.8}$$

  mit $\alpha = (mE_d)^{1/2}$.

- Root-mean-square Radius r_d:

$$r_d = \left[\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^2 \left\{(u(r))^2 + (w(r))^2\right\}\right]^{1/2}\ . \tag{A.9}$$

- Deuteron effective range: $\rho(-\epsilon, -\epsilon)$

$$A_S^2 \simeq A_S^2(1+\eta^2) = \frac{2\alpha}{1 - \alpha\,\rho(-\epsilon,-\epsilon)}\ . \tag{A.10}$$

- Gemischte effektive Reichweite $\rho(-\epsilon, 0)$:

$$\rho(-\epsilon, 0) = \frac{2}{\alpha}\left(1 - (\alpha\, a_t)^{-1}\right)\ , \tag{A.11}$$

  wobei a_t die Triplett-Streulänge ist.

- Effektive Reichweite:

$$r = \frac{4}{M}\,\frac{\frac{q_1}{\tan\delta_1} - \frac{q_2}{\tan\delta_2}}{E_{lab}^{(1)} - E_{lab}^{(2)}}\ . \tag{A.12}$$

- Streulänge:

$$\frac{1}{a} = \frac{M}{4} r E_{lab}^{(i)} - \frac{q_i}{\tan\delta_i} \qquad \text{mit} \qquad i = 1 \ \text{oder}\ 2\ . \tag{A.13}$$

B Das Residuum des Deuteron Propagators

Zunächst wird der einfachere Fall für Rang 1 betrachtet. Die Verallgemeinerung auf höhere Ränge ist aufwendiger und folgt im Anschluß. In beiden Fällen wird die Drehimpulsabhängigkeit weggelassen, da sie lediglich eine weitere Summe über L bewirkt und hier der Übersichtlichkeit wegen nicht aufgeführt wird. Der Propagator ist gegeben durch:

$$\Delta(E+i0) = \frac{1}{\lambda^{-1} - \int_0^\infty \mathrm{d}p\, p^2\, g(p)\, G_0(E+io)\, g(p)} \tag{B.14}$$

und hat einen Pol bei $E = E_d$. Um das Polverhalten abzuspalten, benutzt man folgende Relation für die Green-Funktion

$$G_0(E_d) - G_0(E) = (E + i0 - E_d)\, G_0(E_d)\, G_0(E+i0)\,. \tag{B.15}$$

Nach dem Einsetzen dieser Beziehung ist der Nenner von (B.14) gegeben durch:

$$\underbrace{\lambda^{-1} - \int_0^\infty \mathrm{d}p\, p^2\, g(p)\, G_0(E_d)\, g(p)}_{=0} + (E + i0 - E_d) \int_0^\infty \mathrm{d}p\, p^2\, g(p)\, G_0(E_d) G_0(E+i0)\, g(p)\,. \tag{B.16}$$

Die ersten beiden Terme verschwinden, da dies genau die Bedingung für einen Pol bei der Deuteron-Bindungsenergie ist

$$\Delta(E+i0) = \frac{1}{(E+i0-E_d) \int_0^\infty \mathrm{d}p\, p^2\, g(p)\, G_0(E_d)\, G_0(E+i0)\, g(p)}\,. \tag{B.17}$$

Nutzt man nun die Beziehung $|\psi_d\rangle = G_0(E_d)|g\rangle$ und $\langle\psi_d|\psi_d\rangle = 1$, d.h. die Wellenfunktion wird als normiert angenommen, folgt für $E \to E_d$, daß das Integral gerade gleich 1 ist. Der Propagator ist damit gegeben durch:

$$\Delta(E+i0) = P\Delta(E+i0) + i\pi\delta(E - E_d)\,.$$

Die Verallgemeinerung auf eine Wechselwirkung vom Rang n ist aufwendiger [100]. Dort ist der Propagator gegeben durch

$$[\Delta(E+i0)]_{ij} = [\left(\Lambda^{-1} - \mathcal{G}_0(E+i0)\right)^{-1}]_{ij}\,, \tag{B.18}$$

mit

$$[\mathcal{G}_0(E+i0)]_{ij} = \langle\, g_i \,|\, G_0(E+i0) \,|\, g_j \,\rangle\,. \tag{B.19}$$

Die Matrixelemente von Λ^{-1} sind gegeben durch:

$$[\Lambda^{-1}]_{ij} = \langle\, \phi_i \,|\, V \,|\, \phi_j \,\rangle \qquad \text{mit} \qquad |g_i\rangle = V\,|\phi_i\rangle\ . \tag{B.20}$$

Die $|\phi_i\rangle$ sind Lösungen von

$$\begin{aligned} |\phi_i\rangle &= \qquad\quad G_0(E_i)\,V\ |\phi_i\rangle \qquad \text{für } E_1 \text{ im } {}^3S_1\text{-}{}^3D_1 \text{ Kanal} \\ |\phi_i\rangle &= |k\rangle \ +\ G_0^P(E_i)\,V\ |\phi_i\rangle \qquad \text{sonst}\,. \end{aligned} \tag{B.21}$$

Weiter gilt für den ersten Formfaktor:

$$|\Psi_d\rangle = G_0(E_d)\,V\ |\Psi_d\rangle = G_0(E_d)\,V\ |\phi_1\rangle = G_0(E_d)\ |g_1\rangle\ . \tag{B.22}$$

Durch Einsetzen von (B.21) in (B.20) erhält man

$$[\Lambda^{-1}]_{1j} = [\Lambda^{-1}]_{j1} = \langle\, g_1 \,|\, G_0^P(E_d) \,|\, g_j \,\rangle\,. \tag{B.23}$$

Die Elemente des inversen Propagators lassen sich damit und unter Benutzung von (B.15) schreiben als

$$\begin{aligned} [\Lambda^{-1} - \mathcal{G}_{\mathbf{0}}(E+i0)]_{1j} &= [\Lambda^{-1} - \mathcal{G}_{\mathbf{0}}(E+i0)]_{1j} \\ &= \langle\, g_1 \,|\, G_0(E_d) \,|\, g_j \,\rangle - \langle\, g_1 \,|\, G_0(E+i0) \,|\, g_j \,\rangle \\ &= (E + i0 - E_d)\,\langle\, g_1 \,|\, G_0(E_d)G_0(E+i0) \,|\, g_j \,\rangle\,. \end{aligned} \tag{B.24}$$

Die explizite Form der anderen Elemente der Matrix muß nicht bekannt sein. Wichtig ist nur, daß in ihnen der Faktor $(E + i0 - E_d)$ nicht vorkommt. Der Propagator läßt sich nun berechnen über

$$[\Lambda^{-1} - \mathcal{G}_0(E+i0)]_{ij} = \frac{A^{ji}}{\det a}\,, \tag{B.25}$$

wobei die Kofaktoren A^{ji} gegeben sind durch

$$A^{ji} = \frac{1}{n!}\,\epsilon^{j\beta\gamma\ldots\xi\omega}\,\epsilon^{ikl\ldots pq}\,a_{\beta k}\,a_{\gamma l}\ldots a_{\xi p}\,a_{\omega q} \tag{B.26}$$

und die Einsteinsche Summenkonvention verwendet wird. Die Determinante ist

$$\begin{aligned} \det a &= \sum_{k=1}^{N} a_{1k}\,A^{1k} \\ &= (E + i0 - E_d) \sum_{k=1}^{N} \langle\, g_1 \,|\, G_0(E_d)\,G_0(E+i0) \,|\, g_k \,\rangle\, A^{1k}\,, \end{aligned} \tag{B.27}$$

mit

$$A^{1k} = \epsilon^{kij...pq}\, a_{2i}\, a_{3j} ... a_{n-1,p}\, a_{nq}\,. \tag{B.28}$$

Wenn man sich nun die Kofaktoren ansieht, stellt man fest, daß im Element A^{11} kein Faktor $(E + i0 - E_d)$ enthalten ist. Dies liegt daran, daß der Faktor in den Elementen a_{ij} für $i, j > 1$ nicht vorkommt und daß a_{j1} wegen des ϵ-Tensors nicht vorkommen kann. Alle anderen Elemente A^{1k} haben den Faktor, da sie eines der Elemente a_{j1} enthalten. Wenn man nun den Grenzwert $E \to E_d$ betrachtet, bleibt von der Summe nur das Element mit A^{11} übrig:

$$\begin{aligned} \det a \quad &\underset{E \to E_d}{\widetilde{\quad}} \quad (E - E_d)\, \langle\, g_1 \,|\, G_0(E_d)\, G_0(E_d) \,|\, g_1 \,\rangle\, A^{11} \\ &= \quad (E - E_d)\, \langle \Psi_d | \Psi_d \rangle\, A^{11} = (E - E_d)\, A^{11}\,. \end{aligned} \tag{B.29}$$

Auch alle A^{k1} für $k > 1$ haben einen Faktor $(E - E_d)$. Für allen anderen A^{ij} gilt, daß für beitragende Terme in (B.26) jeweils ein Index $\beta\gamma...\xi\omega$ und ein Index $kl...pq$ 1 sein muß. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder trägt a_{11} oder $a_{\mu 1} a_{1m}$ mit $\mu > 1$ und $m > 1$ bei. Im ersten Fall führt dies zu einem Faktor $(E - E_d)$ im zweiten zu $(E - E_d)^2$. Im Zähler von (B.25) bleibt daher nur das Element A^{11} übrig. Es gilt also

$$\lim_{E \to E_d} (E - E_d)[(\Lambda^{-1} - \mathcal{G}_0(E + i0))^{-1}]_{ij} = \delta_{i1}\delta_{j1}\,. \tag{B.30}$$

Damit gilt für den Propagator:

$$[\Delta(E + i0)]_{ij} = P[\Delta(E + i0)]_{ij} + i\pi\delta(E - E_d)\delta_{i1}\delta_{j1}\,. \tag{B.31}$$

C Koordinatentransformation

Dieses Kapitel enthält die Formeln zur Umrechnung der Jacobi-Koordinaten in unterschiedlichen Clusterungen. Dabei ist die Nukleonenmasse $m = 1$ und $\hbar = 1$ gesetzt. $(\alpha\beta\gamma)$ ist eine zyklische Permutation von (123).

C.1 Ortskoordinaten

Für die Transformation der Ortskoordinaten gilt:

$$\begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{r}_\alpha \\ \vec{\rho}_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_\alpha \\ \vec{x}_\beta \\ \vec{x}_\gamma \end{pmatrix} . \tag{C.32}$$

Die umgekehrte Transformation ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_\alpha \\ \vec{x}_\beta \\ \vec{x}_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{r}_\alpha \\ \vec{\rho}_\alpha \end{pmatrix} . \tag{C.33}$$

Die Transformation von Ortskoordinaten in unterschiedlichen Koordinatensätzen ergibt sich aus

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_\alpha \\ \vec{\rho}_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_\beta \\ \vec{\rho}_\beta \end{pmatrix} \tag{C.34}$$

und

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_\beta \\ \vec{\rho}_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_\alpha \\ \vec{\rho}_\alpha \end{pmatrix} . \tag{C.35}$$

C.2 Impulskoordinaten

Aus den Einzelimpulsen $\vec{k}_i$ lassen sich der Gesamtimpuls $\vec{P}$ und die Relativimpulse $\vec{p}_\alpha$ und $\vec{q}_\alpha$ in einem festen Koordinatensatz (α) berechnen:

$$\begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{q}_\alpha \\ \vec{p}_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{k}_\alpha \\ \vec{k}_\beta \\ \vec{k}_\gamma \end{pmatrix} . \tag{C.36}$$

Die umgekehrte Transformation ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \vec{k}_\alpha \\ \vec{k}_\beta \\ \vec{k}_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{P} \\ \vec{q}_\alpha \\ \vec{p}_\alpha \end{pmatrix} . \tag{C.37}$$

Die Transformation von Impulsen in unterschiedlichen Koordinatensätzen ergibt sich aus

$$\begin{pmatrix} \vec{q}_\alpha \\ \vec{p}_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{q}_\beta \\ \vec{p}_\beta \end{pmatrix} \tag{C.38}$$

und

$$\begin{pmatrix} \vec{q}_\beta \\ \vec{p}_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{q}_\alpha \\ \vec{p}_\alpha \end{pmatrix} . \tag{C.39}$$

D Basistransformation (Kopplungsschemata)

In der Literatur werden drei Kopplungsschemata verwendet. Jedes von ihnen bietet in gewissen Rechnungen Vor- und Nachteile. Zur besseren Übersicht sollen hier die Umrechnungen zwischen ihnen angegeben werden.

D.1 LSJ-Basis $\leftrightarrow$ Kanalspinbasis

$$\begin{aligned}
&\langle((Ll)\mathcal{L},(Ss)\mathcal{S})\Gamma M_\Gamma| \\
=\;& \sum_{Jk}(-)^{L+S+l+s+\mathcal{L}+\mathcal{S}+2k}\hat{J}\hat{\mathcal{L}}\hat{\mathcal{S}}\hat{k}\begin{Bmatrix} L & \mathcal{S} & k \\ s & J & S \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} L & \mathcal{S} & k \\ \Gamma & l & \mathcal{L} \end{Bmatrix}\langle((((LS)Js)kl)\Gamma M_\Gamma|
\end{aligned} \tag{D.40}$$

D.2 JI-Basis $\leftrightarrow$ Kanalspinbasis

$$\langle((((LS)Js)kl)\Gamma M_\Gamma| = \sum_I (-)^{J+I+\Gamma}\hat{k}\hat{I}\begin{Bmatrix} J & s & k \\ l & \Gamma & I \end{Bmatrix}\langle(((LS)J,(ls)I)\Gamma M_\Gamma| \tag{D.41}$$

D.3 JI-Basis $\leftrightarrow$ LSJ-Basis

$$\langle(((LS)J,(ls)I)\Gamma M_\Gamma| = \sum_{LS}\hat{J}\hat{I}\hat{\mathcal{L}}\hat{\mathcal{S}}\begin{Bmatrix} L & S & J \\ l & s & I \\ \mathcal{L} & \mathcal{S} & J \end{Bmatrix}\langle((Ll)\mathcal{L},(Ss)\mathcal{S})\Gamma M_\Gamma| \tag{D.42}$$

E Wirkungsquerschnitt

E.1 $\gamma + t \to n + d$

In erster Ordnung Störungstheorie ist der differentielle Wirkungsquerschnitt gegeben durch ($\hbar = c = 1$)

$$d\sigma = \frac{2\pi}{\hbar}\,|\langle\, f\,|\,H_{em}\,|\,i\,\rangle|^2\,\frac{\rho_f}{F}\,, \tag{E.1}$$

wobei

$$\begin{aligned} \langle f| &= \frac{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{V}}\,{}^{(-)}\langle\Psi_\alpha| \;=\; \frac{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{V}}\,\langle\Phi_\alpha|\,\Omega_\alpha^{(-)\dagger}\mathcal{A} \quad \text{der Streuzustand,} \\ |i\rangle &= |\Psi_T\rangle \qquad\qquad\qquad \text{der Eingangszustand (Triton, Helium)}\,, \end{aligned} \tag{E.2}$$

ρ die Endzustandsdichte, F die Eingangsstromdichte der Photonen und V das Quantisierungvolumen darstellen. Für die Endzustandsdichte ρ_f gilt:

$$\rho_f\;dE_f = \frac{V}{(2\pi)^3}\,d^{\,3}k_f = \frac{V}{(2\pi)^3}\,k_f^2\,dk_f\,d\Omega. \tag{E.3}$$

Hieraus erhält man mit

$$E_f = \frac{(\hbar k_f)^2}{2\,\mu_f} \tag{E.4}$$

und der reduzierten Masse des Streuzustandes

$$\frac{1}{\mu_f} = \frac{1}{m_N} + \frac{1}{2\,m_N} = \frac{3}{2}\frac{1}{m_N} \tag{E.5}$$

den Ausdruck

$$\rho_f = \frac{V}{(2\pi)^3}\,\frac{2m_N}{3\hbar^2}k_f\,d\Omega\,. \tag{E.6}$$

Der Strom F der einlaufenden Photonen ergibt sich aus

$$F = \frac{c}{V}(1 + \frac{E_t}{m_t\,c^2}) \approx \frac{c}{V}\,, \tag{E.7}$$

mit der Targetmasse m_t. Die Übergangsamplitude vom gebundenen Zustand $|i\rangle$ in einen angeregten Bindungs- oder eine freien Streuzustand $\langle f|$ läßt sich schreiben als

$$\langle\, f\,|\,H_{em}\,|\,i\,\rangle \;= \hbar c\sqrt{\frac{2\pi}{E_t V}}\,\langle\, f\,|\,T_{em}(\vec{k}_\gamma,\lambda)\,|\,i\,\rangle\,. \tag{E.8}$$

Hier wurde der üblicherweise verwendete Operator $T_{em}(\vec{k}_\gamma,\lambda)$ eingeführt, der bis auf eine Normierungskonstante mit dem elektromagnetischen Hamiltonoperator übereinstimmt. Die

Größen $E_\gamma = \hbar c|\vec{k}_\gamma|$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}_\gamma$ und λ beschreiben die Freiheitsgrade des Photons, also Energie, Impuls und Polarisation. Mit diesen Beziehungen ergibt sich nun für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(q,\vartheta,\lambda) = m_N\hbar\,\frac{(2\pi)^3}{3\pi}\,\frac{q}{E_\gamma}\;|\langle\,\Phi_\alpha\,|\,\Omega_\alpha^{(-)\dagger}\mathcal{A}\,T_{em}(\vec{k}_\gamma,\lambda)\,|\,\Psi_t\,\rangle|^2\,. \tag{E.9}$$

Zwischen dem Impuls q und der Photonenenergie E_γ besteht der Zusammenhang

$$E_\gamma = \tfrac{3}{4}q^2 + E_d - E_t\,, \tag{E.10}$$

wobei E_d die Deuteron- und E_t die Triton-Bindungsenergie sind.

E.2 $n + d \to \gamma + t$

Der Wirkungsquerschnitt der sog. capture-Reaktion, also dem Einfang von Neutronen durch Deuteronen, läßt sich mit Hilfe des detaillierten Gleichgewichts aus der Photospaltung berechnen, z.B. [137]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}^{cap} = \frac{2}{3}\,\frac{E_\gamma^2}{q}\,\frac{d\sigma}{d\Omega}^{dis}\,. \tag{E.11}$$

Hier ist E_γ die Energie des Photons und q der Impuls des Neutrons (bzw. Protons) oder des Deuterons.

E.3 $\gamma + d \to n + p$

Die obigen Überlegungen lassen sich einfach auf den Fall der Deuteron-Photodesintegration übertragen. Der einzige Unterschied besteht in der reduzierten Masse des Deuterons:

$$\frac{1}{\mu_f} = \frac{1}{m_N} + \frac{1}{m_N} = \frac{2}{m_N}\,. \tag{E.12}$$

Für den Wirkungsquerschnitt ergibt sich damit:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(p,\vartheta,\lambda) = m_N\hbar\,\frac{(2\pi)^2}{2}\,\frac{p}{E_\gamma}\;|\langle\,\vec{p}\,|\,\Omega^{(-)\dagger}\,T_{em}(\vec{k}_\gamma,\lambda)\,|\,\Psi_d\,\rangle|^2\,, \tag{E.13}$$

mit $E_\gamma = p^2 - E_d$.

F Umkopplungskoeffizient

In diesem Kapitel wird auf die Berechnung des Umkopplungskoeffizienten, der im effektiven Potential steht, eingegangen. Der Umkopplungskoeffizient ist diagonal im Betrag des Gesamtdrehimpulses und Gesamtspins und deren 3-Komponente, da nur die zu koppelnden Drehimpulse in einer anderen Reihenfolge gekoppelt werden. Die 3-Komponenten werden daher nicht weiter notiert. Zunächst kann die Isospin-Umkopplung abgespalten und separat ausgeführt werden:

$$\begin{aligned}
&\langle(\alpha)\, p\, q\, c\, \Gamma M_\Gamma; I M_I | p'\, q'\, c'\, \Gamma M_\Gamma; I M_I\, (\beta)\rangle \\
&= \langle(\alpha)\, p\, q\, (((LS)Js)kl)\Gamma; (T\tau)I | p\, q\, \big(((L'S')J's')k'l'\big)\Gamma; (T'\tau')I\, (\beta)\rangle \\
&= \underbrace{\langle(\alpha)\, p\, q\, \big(((LS)Js)kl\big)\Gamma |\, p\, q\, (((L'S')J's')k'l')\Gamma\, (\beta)\rangle}_{G_\Gamma^{cc'}}\ \underbrace{\langle(\alpha)\, (T\tau)I | (T'\tau')I\, (\beta)\rangle}_{T_I^{cc'}}\,.
\end{aligned} \tag{F.1}$$

Die Isospin-Umkopplung zu festem Gesamtisospin $I = \frac{1}{2}$ und $\tau = \tau' = \frac{1}{2}$ ergibt:

$$T_I^{cc'} = (-)^{T'}\, \hat{T}\hat{T}' \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & T' \end{Bmatrix}\,. \tag{F.2}$$

Die Drehimpulszustände werden zunächst zu Gesamtspin und Gesamtbahndrehimpuls umgekoppelt:

$$\begin{aligned}
G_\Gamma^{cc'} &= \sum_{\mathcal{L},\mathcal{S}} \hat{J}\hat{J}'\hat{k}\hat{k}'\, (-)^{S+S'+2\Gamma+1} \\
&\quad\times \begin{Bmatrix} L & S & J \\ \frac{1}{2} & k & \mathcal{S} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{S} & L & k \\ l & \Gamma & L \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L' & S' & J' \\ \frac{1}{2} & k' & \mathcal{S} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{S} & L' & k' \\ l' & \Gamma & L \end{Bmatrix} \\
&\quad\times \langle(\alpha)\big((Ss)\mathcal{S}, (lL)\mathcal{L}\big)\Gamma | \big((S's')S, (l'L')\mathcal{L}\big)\Gamma\, (\beta)\rangle\,.
\end{aligned} \tag{F.3}$$

Die Spin-Umkopplung in (F.3) kann separat ausgeführt werden:

$$G_\Gamma^{cc'} = \sum_{\mathcal{L}} \hat{\mathcal{L}}^2\, C_\Gamma^{cc'}(\mathcal{L})\, \langle(\alpha)\, p\, q\, (lL)\mathcal{L} | p'\, q'\, (l'L')\mathcal{L}'\, (\beta)\rangle\,, \tag{F.4}$$

mit

$$C_\Gamma^{cc'}(L) = \hat{J}\hat{J}'\hat{k}\hat{k}'S\hat{S}'\,(-)^{S+2\Gamma+1}$$

$$\times \quad \sum_{\mathcal{S}} \hat{\mathcal{S}}^2 \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & S \\ \frac{1}{2} & \mathcal{S} & S' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L & S & J \\ \frac{1}{2} & k & \mathcal{S} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{S} & L & k \\ l & \Gamma & L \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L' & S' & J' \\ \frac{1}{2} & k' & \mathcal{S} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{S} & L' & k' \\ l' & \Gamma & L \end{Bmatrix} . \tag{F.5}$$

Der aufwendige Teil ist nun die Berechnung von $\langle(\alpha)\,p\,q\,(lL)\mathcal{L}|p'\,q'\,(l'L')\mathcal{L}\,(\beta))\rangle$. Man schiebt dazu je eine Vollständigkeitsrelation im Koordinatensatz (α) und (β) ein:

$$\begin{aligned} X_{\alpha\beta} \quad &= \quad \int d\hat{p}_\alpha \int d\hat{q}_\alpha \int d\hat{p}'_\beta \int d\hat{q}'_\beta \,\langle(\alpha)\,p\,q\,(lL)\mathcal{L}M\,|\vec{p}_\alpha\vec{q}_\alpha\rangle\,\langle\vec{p}_\alpha\vec{q}_\alpha|\vec{p}'_\beta\vec{q}'_\beta\rangle \\ &\quad \times \langle\vec{p}'_\beta\vec{q}'_\beta|\,p'\,q'\,(l'L')\mathcal{L}M\,(\beta)\rangle\,. \end{aligned} \tag{F.6}$$

Bei der weiteren Vorgehensweise hat man nun die Wahl, nach welchen Variablen man $\langle\vec{p}_\alpha\vec{q}_\alpha|\vec{p}'_\beta\vec{q}'_\beta\rangle$ auflöst. Eine mögliche Wahl ist:

$$\begin{aligned} \langle\vec{p}_\alpha\vec{q}_\alpha|\vec{p}'_\beta\vec{q}'_\beta\rangle \quad &= \quad \delta(\vec{p}_\alpha - \vec{p}'_\alpha(\vec{q}_\alpha,\vec{q}'_\beta))\,\delta(\vec{p}_\beta - \vec{p}'_\beta(\vec{q}_\alpha,\vec{q}'_\beta)) \\ &= \quad \delta(\vec{p}_\alpha - (\tfrac{1}{2}\vec{q}_\alpha + \vec{q}'_\beta))\,\delta(\vec{p}_\beta - (-\vec{q}_\alpha - \tfrac{1}{2}\vec{q}'_\beta)) \end{aligned} \tag{F.7}$$

Die nach Auswertung der Deltadistributionen noch auftretenden Kugelflächenfunktionen können dann schrittweise mit Hilfe von Additionstheoremen zusammengefaßt werden. Man erhält schließlich für den Umkopplungskoeffizienten [34]:

$$\langle(\alpha)\,p\,q\,L\,b\,\Gamma M_\Gamma I M_I|p'\,q'\,L'\,b'\,\Gamma M_\Gamma I M_I(\beta)\rangle =$$

$$q^{L+L'} \sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} \sum_{h=0}^{L'+L} \left(\frac{q'}{q}\right)^h U_{\Gamma I}^{cc'}(\ell,h)\,\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx \frac{\delta(p-p_\alpha(x))\,\delta(p'-p'_\beta(x))}{p'^2\,p^2} \frac{P_\ell(x)}{p_\alpha(x)^L p'_\beta(x)^{L'}}\,, \tag{F.8}$$

mit $\ell_{max} = \frac{1}{2}(L'+L+l+l')$ und

$$\begin{aligned} p_\alpha(x) \quad &= \quad \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + q'^2 + qq'x} \\ p'_\beta(x) \quad &= \quad \sqrt{q^2 + \tfrac{1}{4}q'^2 + qq'x}\,. \end{aligned} \tag{F.9}$$

Der geometrische Faktor ist gegeben durch:

$$U_{\Gamma I}^{cc'}(\ell,h) = F_{\Gamma}^{cc'}(\ell,h)\, T_I^{cc'}\,, \tag{F.10}$$

wobei $T_I^{cc'}$ durch (F.2) gegeben ist und

$$F_{\Gamma}^{cc'}(\ell,h) = \sum_{f=|L'-h|}^{L'+L-|L-h|} \tfrac{1}{2}(1+(-)^{L+f-h})\,\delta_{f',\frac{1}{2}(L+f-h)}\,\delta_{f,\frac{1}{2}(f+h-L)}\,E_{\Gamma}^{cc'}(l,f,f')\,, \tag{F.11}$$

bzw.

$$\begin{aligned} E_{\Gamma}^{cc'}(l,f,f') \;&=\; (-)^{L+l+l'}\hat{L}^2\hat{L}'^2 ll' \left(\tfrac{1}{2}\right)^{f+f'}\sqrt{\binom{2L}{2f}\binom{2L'}{2f'}} \\ &\times \sum_{hh'}\hat{h}^2\hat{h}'^2 \begin{pmatrix} l & f & h \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l' & f' & h' \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h & D' & \ell \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} h' & D & \ell \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \\ &\times \sum_{\mathcal{L}} \begin{Bmatrix} D & f & L \\ l & \mathcal{L} & h\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} D' & f' & L' \\ l' & \mathcal{L} & h'\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} D & \ell & h' \\ D' & \mathcal{L} & h\end{Bmatrix} C_{\Gamma}^{cc'}(\mathcal{L})\,. \end{aligned} \tag{F.12}$$

Hier ist $C_{\Gamma}^{cc'}(\mathcal{L})$ durch (F.5) gegeben und $D = L - f$, bzw. $D' = L' - f'$. Eine etwas kompaktere Form des Umkopplungskoeffizienten ist in [103] zu finden. Die numerischen Werte stimmen jedoch überein. Die obige Form ist besonders für kleine Werte von q und $q = 0$ geeignet. Für kleine Werte von p ist diese Form numerisch bei höheren Partialwellen nicht geeignet. Daher wird in diesem Fall die sog. 'qq' Form des Umkopplungskoeffizienten verwendet. Man erhält sie einfach, indem man bei der obigen Ableitung die Deltadistributionen nach q anstelle nach p auflöst. Schließlich erhält man für den Umkopplungskoeffizienten:

$$\begin{aligned} &\langle(\alpha)\, p\, q\, L\, b\, \Gamma M_\Gamma I M_I | p'\, q'\, L'\, b'\, \Gamma M_\Gamma I M_I(\beta)\rangle = \\ &p^{l+l'}\sum_{\ell=0}^{\ell_{max}}\sum_{h=0}^{l'+l}\left(\frac{p'}{p}\right)^h \tilde{U}_{\Gamma I}^{cc'}(\ell,h)\,\frac{2}{3}\int_{-1}^{1} dx \frac{\delta(q-q_\alpha(x))\,\delta(q'-q'_\beta(x))}{q'^2\,q^2}\frac{P_\ell(x)}{q_\alpha(x)^l q'_\beta(x)^{l'}}\,, \end{aligned} \tag{F.13}$$

mit $\ell_{max} = \frac{1}{2}(L' + L + l + l')$ und

$$\begin{aligned} q_\alpha(x) &= \sqrt{\tfrac{4}{9}p^2 + \tfrac{16}{9}p'^2 + \tfrac{16}{9}pp'x} \\ q'_\beta(x) &= \sqrt{\tfrac{16}{9}p^2 + \tfrac{4}{9}p'^2 + \tfrac{16}{9}pp'x}\,. \end{aligned} \tag{F.14}$$

Der geometrische Faktor ist gegeben durch:

$$\tilde{U}^{cc'}_{\Gamma I}(\ell, h) = \tilde{F}^{cc'}_{\Gamma}(\ell, h)\, T^{cc'}_{I}\,, \tag{F.15}$$

wobei $T^{cc'}_I$ unverändert bleibt und

$$\tilde{F}^{cc'}_{\Gamma}(\ell, h) = \sum_{f=|l-h|}^{l+l'-|l'-h|} \tfrac{1}{2}(1+(-)^{l+f-h})\, \delta_{f',\frac{1}{2}(L+f-h)}\, \delta_{f,\frac{1}{2}(f+h-L)}\, \tilde{E}^{cc'}_{\Gamma}(l, f, f')\,, \tag{F.16}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\tilde{E}^{cc'}_{\Gamma}(l, f, f') \;&=\; (-)^{l}\, \hat{l}^{2}\, \hat{l}'^{2}\, L\, L'\, \left(\tfrac{2}{3}\right)^{f+f'} \left(\tfrac{4}{3}\right)^{l+l'-f-f'} \sqrt{\binom{2l}{2f}\binom{2l'}{2f'}} \\
&\times \sum_{hh'} \hat{h}^{2}\hat{h}'^{2} \begin{pmatrix} L & f & h \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & f' & h' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & d' & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h' & d & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\times \sum_{\mathcal{L}} \begin{Bmatrix} d & f & L \\ l & \mathcal{L} & h \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d' & f' & L' \\ l' & \mathcal{L} & h' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d & \ell & h' \\ d' & \mathcal{L} & h \end{Bmatrix} C^{cc'}_{\Gamma}(\mathcal{L})\,.
\end{aligned} \tag{F.17}$$

Hier ist $d = l - f$, bzw. $d' = l' - f'$ und $C^{cc'}_{\Gamma}(\mathcal{L})$ bleibt natürlich unverändert. Diese Form ist für kleine Werte von p geeignet. Im Sonderfall für $p = 0$ vereinfacht sich der Ausdruck.

G Matrixelemente

G.1 Matrixelemente von Tensorprodukten

Das „Tensorprodukt n-ter Stufe“ zweier Tensoroperatoren $A^{(n_1)}$ und $B^{(n_2)}$ der Stufen n_1 und n_2 ist definiert als [138]

$$\left[A^{(n_1)} \otimes B^{(n_2)}\right]^n_\nu = \sum_{\nu_1\nu_2} \langle n_1\nu_1 n_2\nu_2 | n\nu\rangle \, A^{(n_1)}_{\nu_1} \, B^{(n_2)}_{\nu_2} \,. \tag{G.1}$$

Die Matrixelemente von Tensorprodukten lassen sich auf die der Faktoren zurückführen. Man muß jedoch beachten, ob die Operatoren $A^{(n_1)}$ und $B^{(n_2)}$ auf dieselben oder auf verschiedene Koordinaten wirken. Im ersten Fall gilt

$$\begin{aligned} &\langle\, j \,\|\, \left[A^{(n_1)} \otimes B^{(n_2)}\right]^{(n)} \,\|\, j' \,\rangle \\ &\quad = (-)^{j+n+j'} \hat{n} \sum_{j''} \begin{Bmatrix} n_1 & n_2 & n \\ j' & j & j'' \end{Bmatrix} \langle\, j \,\|\, A^{(n_1)} \,\|\, j'' \,\rangle \, \langle\, j'' \,\|\, B^{(n_2)} \,\|\, j' \,\rangle \,. \end{aligned} \tag{G.2}$$

Wirken die Operatoren auf unterschiedliche Koordinaten, so gilt

$$\begin{aligned} &\langle\, (j_1 j_2) j \,\|\, \left[A^{(n_1)} \otimes B^{(n_2)}\right]^{(n)} \,\|\, (j_1' j_2') j' \,\rangle \\ &\quad = \hat{n}\,\hat{j}\,\hat{j}' \begin{Bmatrix} j_1' & j_2' & j' \\ n_1 & n_2 & n \\ j_1 & j_2 & j \end{Bmatrix} \langle\, j_1 \,\|\, A^{(n_1)} \,\|\, j_1' \,\rangle \, \langle\, j_2 \,\|\, B^{(n_2)} \,\|\, j_2' \,\rangle \,, \end{aligned} \tag{G.3}$$

mit den beiden Spezialfällen

$$\begin{aligned} &\langle\, (j_1 j_2) j \,\|\, A^{(n_1)} \,\|\, (j_1' j_2') j' \,\rangle \\ &\quad = (-)^{j_1+j_2+j'+n_1} \langle j_2 | j_2' \rangle \, \hat{j}\,\hat{j}' \begin{Bmatrix} j_1 & j_1' & n_1 \\ j' & j & j_2 \end{Bmatrix} \langle\, j_1 \,\|\, A^{(n_1)} \,\|\, j_1' \,\rangle \end{aligned} \tag{G.4}$$

$$\begin{aligned} &\langle\, (j_1 j_2) j \,\|\, A^{(n_2)} \,\|\, (j_1' j_2') j' \,\rangle \\ &\quad = (-)^{j_1'+j_2'+j+n_2} \langle j_1 | j_1' \rangle \, \hat{j}\,\hat{j}' \begin{Bmatrix} j_2 & j_2' & n_2 \\ j' & j & j_1 \end{Bmatrix} \langle\, j_2 \,\|\, A^{(n_2)} \,\|\, j_2' \,\rangle \,. \end{aligned} \tag{G.5}$$

Im Falle des Tritons wurden die Matrixelemente in [12] unter der Voraussetzung angegeben, daß die Operatoren jeweils nur im Subsystem oder im Relativsystem wirken. Bei Berücksichtigung der Quadrupolwechselwirkung tritt jedoch auch ein gemischter Anteil auf, der auf die Drehimpulse j_1 und j_6 wirkt. Eine entsprechende Zerlegung des Matrixelements wurde bereits in [14] angegeben, sie lautet

$$\begin{aligned}
&\langle\, ((((j_1 j_2) j_3 j_4) j_5 j_6) j \,\|\, \left[A^{(n_1)} \otimes B^{(n_2)}\right]^{(n)} \,\|\, ((((j_1' j_2') j_3' j_4') j_5' j_6') j' \,\rangle \\
&= (-)^{j_1+j_2+j_3+j_3'+j_5'} \langle j_2 | j_2' \rangle \langle j_4 | j_4' \rangle \, \hat{j}_3 \, \hat{j}_3' \hat{j}_5 \, \hat{j}_5' \, \hat{j} \, \hat{j}' \hat{n} \begin{Bmatrix} j_1 & j_1' & n_1 \\ j_3' & j_3 & j_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_3 & j_3' & n_1 \\ j_5' & j_5 & j_4 \end{Bmatrix} \\
&\quad \times \begin{Bmatrix} j_5 & j_6 & j \\ j_5' & j_6' & j' \\ n_1 & n_2 & n \end{Bmatrix} \langle\, j_1 \,\|\, A^{(n_1)} \,\|\, j_1' \,\rangle \langle\, j_6 \,\|\, B^{(n_2)} \,\|\, j_6' \,\rangle \,. \qquad \text{(G.6)}
\end{aligned}$$

Den Beweis dieser Gleichung führt man, indem man zunächst das Tensorprodukt und alle Zustände mittels Clebsch-Gordan-Koeffizienten entkoppelt und dann schrittweise die Summen über die m-Quantenzahlen ausführt. Es ergeben sich die folgenden Spezialfälle, wenn einer der Produktoperatoren der Einsoperator ist. Für den Subsystemoperator erhält man

$$\begin{aligned}
&\langle\, ((((j_1 j_2) j_3 j_4) j_5 j_6) j \,\|\, A^{(n_1)} \,\|\, ((((j_1' j_2') j_3' j_4') j_5' j_6') j' \,\rangle \\
&= (-)^{j_1+j_2+j_3+j_4+j_5+j_6+j_3'+j_5'+j'+n_1} \, \hat{j}_3 \, \hat{j}_3' \hat{j}_5 \, \hat{j}_5' \, \hat{j} \, \hat{j}' \langle j_2 | j_2' \rangle \langle j_4 | j_4' \rangle \langle j_6 | j_6' \rangle \\
&\quad \times \begin{Bmatrix} j & j' & n_1 \\ j_5' & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_5 & j_5' & n_1 \\ j_3' & j_3 & j_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_3 & j_3' & n_1 \\ j_1' & j_1 & j_2 \end{Bmatrix} \langle\, j_1 \,\|\, A^{(n_1)} \,\|\, j_1' \,\rangle \qquad \text{(G.7)}
\end{aligned}$$

und entsprechend für den Operator im Relativsystem

$$\begin{aligned}
&\langle\, ((((j_1 j_2) j_3 j_4) j_5 j_6) j \,\|\, B^{(n_2)} \,\|\, ((((j_1' j_2') j_3' j_4') j_5' j_6') j' \,\rangle \\
&= (-)^{j_5+j_6'+j+n_2} \, \hat{j} \, \hat{j}' \langle j_1 | j_1' \rangle \langle j_2 | j_2' \rangle \langle j_3 | j_3' \rangle \langle j_4 | j_4' \rangle \langle j_5 | j_5' \rangle \, \delta(j_1 j_2 j_3) \, \delta(j_3 j_4 j_5) \\
&\quad \times \begin{Bmatrix} j_6 & j_6' & n_2 \\ j' & j & j_5 \end{Bmatrix} \langle\, j_6 \,\|\, B^{(n_2)} \,\|\, j_6' \,\rangle \,. \qquad \text{(G.8)}
\end{aligned}$$

G.2 Matrixelemente der benötigten Operatoren

In diesem Abschnitt werden alle in der Arbeit benötigten Matrixelemente angegeben. Zunächst werden einfache Matrixelemente berechnet, aus denen sich nachher die komplizierteren ableiten lassen. In dieser Arbeit wird folgende gängige Phasenkonvention verwendet [138]:

$$\langle \Omega_p | lm \rangle = \langle \hat{p} | lm \rangle = Y_{lm}(\Omega_p) \qquad \text{bzw.} \qquad \langle lm | \Omega_p \rangle = Y^*_{lm}(\Omega_p)\,. \tag{G.9}$$

Für die renormierten Kugelfunktionen

$$C_{lm}(\Omega) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Y_{lm}(\Omega) \tag{G.10}$$

ergibt sich für das reduzierte Matrixelemente mit Impulsraumzuständen:

$$\langle\, l \,\|\, C^{(n)}(\Omega_p) \,\|\, l' \,\rangle = (-)^l\, \hat{l}\hat{l}' \begin{pmatrix} l & n & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{G.11}$$

Im Unterschied dazu gilt im Ortsraum:

$$\langle\, l \,\|\, C^{(n)}(\Omega_r) \,\|\, l' \,\rangle = i^{l+l'}\, \hat{l}\hat{l}' \begin{pmatrix} l & n & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{G.12}$$

In [12–14,16] wurde dieses Matrixelement auch im Impulsraum benutzt. Der falsche Phasenfaktor macht sich bei S-Wellen nicht bemerkbar, führt bei Rechnungen mit $J \leq 1^+$ zu unwesentlichen Änderungen, während es bei noch höheren Partialwellen und den E2-Rechnungen zu deutlich anderen Ergebnissen kommt.

Der Ortsoperator läßt sich im Impulsraum in Anlehnung an Referenz [138] schreiben als:

$$\begin{aligned} R^{(1)}_\nu &= \frac{1}{\sqrt{c_a}} \vec{R}\,\vec{e}^{(1)}_\nu = \vec{R}\,\vec{e}^{(1)}_\nu = i\hbar \nabla^{(1)}_\nu \\ &= -\hbar \left(C^{(1)}_\nu(\Omega_p) \frac{\partial}{\partial p} - \left[C^{(1)}(\Omega_p) \times L^{(1)} \right]^{(1)}_\nu \frac{\sqrt{2}}{p} \right), \end{aligned} \tag{G.13}$$

wobei c_a das Zeitumkehrverhalten darstellt und hier gleich $+1$ ist. Für die Matrixelemente folgt:

$$\begin{aligned} &\langle\, l \,\|\, R^{(1)} \,\|\, l' \,\rangle \\ &= (-)^{l+1} \hbar\, \hat{l}\, \hat{l}' \begin{pmatrix} l & 1 & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{l(l+1) - l'(l'+1) - 2}{2\,p} \right). \end{aligned} \tag{G.14}$$

Hiermit lassen sich nun alle weiteren berechnen.

1a. $\langle\, L \,\|\, \nabla^{(1)} \,\|\, L' \,\rangle$

$$= i\,(-)^L\, \hat{L}\, \hat{L}' \begin{pmatrix} L & 1 & L' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{L(L+1) - L'(L'+1) - 2}{2\,p'} \right) \tag{G.15}$$

1b. $\langle\, pL \,\|\, \nabla^{(1)} \,\|\, pL' \,\rangle$

$$= i\,(-)^L\,\hat{L}\,\hat{L}' \begin{pmatrix} L & 1 & L' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{L(L+1) - L'(L'+L) - 2}{2\,p'} \right) \frac{\delta(p-p')}{p^2} \qquad \text{(G.16)}$$

1c. $\langle\, ql \,\|\, \nabla^{(1)} \,\|\, ql' \,\rangle$

$$= i\,(-)^l\,\hat{l}\,\hat{l}' \begin{pmatrix} l & 1 & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial q'} - \frac{l(l+1) - l'(l'+1) - 2}{2\,q'} \right) \frac{\delta(q-q')}{q^2} \qquad \text{(G.17)}$$

2a. $\langle\, p\,L\,M_L \,|\, \mathcal{Y}_{1m}(\vec{\rho}) \,|\, p'L'M_L' \,\rangle$

$$\begin{aligned} &= \langle\, p\,L\,M_L \,|\, \rho\,Y_{1m}(\hat{\rho}) \,|\, p'L'M_L' \,\rangle = \langle\, p\,L\,M_L \,|\, \frac{1}{i}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\epsilon_m\,\vec{\rho}\,\,|\, p'L'M_L' \,\rangle \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\hbar\langle\, p\,L\,M_L \,|\, \epsilon_m\vec{\nabla} \,|\, p'L'M_L' \,\rangle = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\hbar\ \langle p|\,\langle\, L\,M_L \,|\, \nabla_m^{(1)} \,|\, L'M_L' \,\rangle\,|p'\rangle \qquad \text{(G.18)} \end{aligned}$$

2b. $\langle\, p\,L \,\|\, \mathcal{Y}_1(\vec{\rho}) \,\|\, p'L' \,\rangle$

$$= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\hbar\,i\,(-)^L\,\hat{L}\,\hat{L}' \begin{pmatrix} L & 1 & L' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{L(L+1) - L'(L'+1) - 2}{2\,p'} \right) \frac{\delta(p-p')}{p'^2} \qquad \text{(G.19)}$$

2c. $\langle\, q\,l \,\|\, \mathcal{Y}^{(1)}(\vec{r}) \,\|\, q'l' \,\rangle$

$$= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\hbar\,i\,(-)^l\,\hat{l}\,\hat{l}' \begin{pmatrix} l & 1 & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial q'} - \frac{l(l+1) - l'(l'+1) - 2}{2\,q'} \right) \frac{\delta(q-q')}{q'^2} \qquad \text{(G.20)}$$

2d. $\langle\, p\,L \,\|\, \mathcal{Y}_2(\vec{\rho}) \,\|\, p'L' \,\rangle$

$$= 5\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,(-)^{L+L'} \sum_{L''} \begin{Bmatrix} 2 & L & L' \\ L'' & 1 & 1 \end{Bmatrix} \int_0^\infty dp''\,p''^2 \langle\, p\,L \,\|\, \mathcal{Y}_1(\vec{\rho}) \,\|\, p''\,L'' \,\rangle \langle\, p''\,L'' \,\|\, \mathcal{Y}_1(\vec{\rho}) \,\|\, p'\,L' \,\rangle$$

$$= \frac{15\hbar^2}{2\sqrt{6}\pi}\,\hat{L}\,\hat{L}'\sum_{L''}\hat{L}''^2 \begin{Bmatrix} 2 & L & L' \\ L'' & 1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} L & 1 & L'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L'' & 1 & L' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\times \left(\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{L(L+1) - L''(L''+1) - 2}{2\,p'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{L''(L''+1) - L'(L'+1) - 2}{2\,p'}\right)$$
$$\times \frac{\delta(p-p')}{p'^2} \qquad \text{(G.21)}$$

2e. $\langle\, q\, l \,\|\, \mathcal{Y}_2(\vec{r}\,) \,\|\, q' l' \,\rangle$

$$= \frac{15\hbar^2}{2\sqrt{6}\pi}\,\hat{l}\,\hat{l}'\sum_{l''}\hat{l}''^2 \begin{Bmatrix} 2 & l & l' \\ l'' & 1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} l & 1 & l'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l'' & 1 & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\times \left(\frac{\partial}{\partial q'} - \frac{l(l+1) - l''(l''+1) - 2}{2\,q'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial q'} - \frac{l''(l''+1) - l'(l'+1) - 2}{2\,q'}\right)$$
$$\times \frac{\delta(q-q')}{q'^2} \qquad \text{(G.22)}$$

Mit Hilfe dieser Matrixelemente können nun die für die sphärischen Harmonischen aus dem Dipol- und Quadrupoloperator mit Zuständen in der Kanalspinbasis berechnet werden. Beim Dipoloperator werden die Matrixelemente von $\mathcal{Y}^{(1)}(\vec{\rho}\,)$ und $\mathcal{Y}^{(1)}(\vec{r}\,)$ benötigt:

3a. $\langle\, p\, q\, c\, \Gamma \,\|\, \mathcal{Y}^{(1)}(\vec{\rho}\,) \,\|\, p'\, q'\, c'\, \Gamma' \,\rangle$

$$= (-)^{L+S+J+\frac{1}{2}+k+l+J'+k'+\Gamma'+1}\;\delta_{SS'}\delta_{ll'}\,\hat{J}\hat{J}'\hat{k}\hat{k}'\hat{\Gamma}\hat{\Gamma}'\,\frac{\delta(q-q')}{q'^2}$$
$$\times \begin{Bmatrix} \Gamma & \Gamma' & 1 \\ k' & k & l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k & k' & 1 \\ J' & J & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J & J' & 1 \\ L' & L & S \end{Bmatrix} \langle\, pL \,\|\, \mathcal{Y}^{(1)}(\vec{\rho}\,) \,\|\, p'L' \,\rangle$$
$$= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\hbar\, i\,(-)^L(-)^{L+S+J+\frac{1}{2}+k+l+J'+k'+\Gamma'+1}\;\delta_{SS'}\,\delta_{ll'}\,\hat{L}\,\hat{L}'\hat{J}\hat{J}'\hat{k}\hat{k}'\hat{\Gamma}\hat{\Gamma}'$$
$$\times \begin{pmatrix} L & 1 & L' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Gamma & \Gamma' & 1 \\ k' & k & l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k & k' & 1 \\ J' & J & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J & J' & 1 \\ L' & L & S \end{Bmatrix}$$
$$\times \frac{\delta(q-q')}{q'^2}\left(\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{L(L+1) - L'(L'+1) - 2}{2\,p'}\right)\frac{\delta(p-p')}{p'^2} \qquad \text{(G.23)}$$

3b. $\langle\, p\, q\, c\, \Gamma \,\|\, \mathcal{Y}^{(1)}(\vec{r}\,) \,\|\, p'\, q'\, c'\, \Gamma' \,\rangle$

$$
\begin{aligned}
&= (-)^{k+l'+\Gamma+1}\, \hat{\Gamma}\, \hat{\Gamma}' \delta_{kk'}\, \delta_{LL'}\, \delta_{SS'}\, \delta_{JJ'} \begin{Bmatrix} l & l' & 1 \\ \Gamma' & \Gamma & k \end{Bmatrix} \frac{\delta(p-p')}{p'^2} \langle\, q\, l \,\|\, \mathcal{Y}^{(1)}(\vec{r}\,) \,\|\, q' l' \,\rangle \\
&= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\, \hbar\, i\, (-)^{k+l+l'+\Gamma+1}\, \hat{l}\, \hat{l}'\, \hat{\Gamma}\, \hat{\Gamma}' \delta_{kk'} \delta_{LL'} \delta_{SS'} \delta_{JJ'} \begin{pmatrix} l & 1 & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \begin{Bmatrix} l & l' & 1 \\ \Gamma' & \Gamma & k \end{Bmatrix} \frac{\delta(p-p')}{p'^2} \left(\frac{\partial}{\partial q'} - \frac{l(l+1) - l'(l'+1) - 2}{2\, q'} \right) \frac{\delta(q-q')}{q'^2}
\end{aligned}
\tag{G.24}
$$

Entsprechend werden beim Quadrupolterm die Matrixelemente von $\mathcal{Y}^{(2)}(\vec{\rho}\,)$, $\mathcal{Y}^{(2)}(\vec{r}\,)$ und $\left[\mathcal{Y}^{(1)}(\vec{\rho}\,) \otimes \mathcal{Y}^{(1)}(\vec{r}\,)\right]^{(2)}$ gebraucht:

4a. $\langle\, p\, q\, c\, \Gamma \,\|\, \mathcal{Y}^{(2)}(\vec{\rho}\,) \,\|\, p'\, q'\, c'\, \Gamma' \,\rangle$

$$
\begin{aligned}
&= (-)^{L+S+J+\frac{1}{2}+k+l+J'+k'+\Gamma'+2}\, \delta_{SS'} \delta_{ll'}\, \hat{J} \hat{J}' \hat{k} \hat{k}' \hat{\Gamma} \hat{\Gamma}'\, \frac{\delta(q-q')}{q'^2} \\
&\quad \times \begin{Bmatrix} J & J' & 2 \\ L' & L & S \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k & k' & 2 \\ J' & J & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Gamma & \Gamma' & 2 \\ k' & k & l \end{Bmatrix} \langle\, p\, L \,\|\, \mathcal{Y}^{(2)}(\vec{\rho}\,) \,\|\, p' L' \,\rangle \\
&= \frac{15\hbar^2}{2\sqrt{6\pi}} (-)^{L+S+J+\frac{1}{2}+k+l+J'+k'+\Gamma'}\, \delta_{SS'} \delta_{ll'}\, \hat{L} \hat{L}' \hat{J} \hat{J}' \hat{k} \hat{k}' \hat{\Gamma} \hat{\Gamma}' \begin{Bmatrix} \Gamma & \Gamma' & 2 \\ k' & k & l \end{Bmatrix} \\
&\quad \times \begin{Bmatrix} k & k' & 2 \\ J' & J & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J & J' & 2 \\ L' & L & S \end{Bmatrix} \sum_{L''} \hat{L}''^2 \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ L & L' & L'' \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} L & 1 & L'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & 1 & L'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \frac{\delta(q-q')}{q'^2} \left(\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{L(L+1) - L''(L''+1) - 2}{2\, p'} \right) \\
&\quad \times \left(\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{L''(L''+1) - L'(L'+1) - 2}{2\, p'} \right) \frac{\delta(p-p')}{p'^2}
\end{aligned}
\tag{G.25}
$$

4b. $\langle\, p\, q\, c\, \Gamma \,\|\, \left[\mathcal{Y}^{(1)}(\vec{\rho}\,) \otimes \mathcal{Y}^{(1)}(\vec{r}\,)\right]^{(2)} \,\|\, p'\, q'\, c'\, \Gamma' \,\rangle$

$$
\begin{aligned}
&= (-)^{L+S+J+\frac{1}{2}+J'+k'} \delta_{SS'}\, \hat{J} \hat{J}' \hat{k} \hat{k}' \hat{\Gamma} \hat{\Gamma}' \hat{2} \begin{Bmatrix} L & L' & 1 \\ J' & J & S \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} J & J' & 1 \\ k & k & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k & l & \Gamma \\ k' & l' & \Gamma \\ 1 & 1 & 2 \end{Bmatrix} \\
&\quad \times \langle\, pL \,\|\, \mathcal{Y}^{(1)}(\vec{\rho}\,) \,\|\, p' L' \,\rangle \, \langle\, ql \,\|\, \mathcal{Y}^{(1)}(\vec{r}\,) \,\|\, q' l' \,\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3\sqrt{5}\hbar^2}{4\pi}\,(-)^{L+S+J+\frac{1}{2}+J'+k'}\,(-)^{L+l+1}\,\delta_{SS'}\,\hat{L}\hat{L}'\hat{J}\hat{J}'\hat{k}\hat{k}'\hat{l}\hat{l}'\hat{\Gamma}\hat{\Gamma}'\,\begin{Bmatrix} L & L' & 1 \\ J' & J & S \end{Bmatrix} \\
&\quad \times \begin{Bmatrix} J & J' & 1 \\ k & k & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k & l & \Gamma \\ k' & l' & \Gamma \\ 1 & 1 & 2 \end{Bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial p'} - \frac{L(L+1) - L'(L'+1) - 2}{2\,p'} \right) \\
&\quad \times \left(\frac{\partial}{\partial q'} - \frac{l(l+1) - l'(l'+1) - 2}{2\,q'} \right) \frac{\delta(p-p')}{p'^2} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} \qquad \text{(G.26)}
\end{aligned}
$$

4c. $\langle\, p\, q\, c\, \Gamma \,\|\, \mathcal{Y}^{(2)}(\vec{r}\,) \,\|\, p'\, q'\, c'\, \Gamma' \,\rangle$

$$
\begin{aligned}
&= (-)^{k+l'+\Gamma+2}\,\delta_{LL'}\delta_{SS'}\delta_{JJ'}\delta_{kk'}\hat{\Gamma}\hat{\Gamma}'\,\begin{Bmatrix} \Gamma & \Gamma' & 2 \\ l' & l' & k \end{Bmatrix} \frac{\delta(p-p')}{p'^2}\,\langle\, q\, l \,\|\, \mathcal{Y}^{(2)}(\vec{r}\,) \,\|\, q' l' \,\rangle \\
&= \frac{15\hbar^2}{2\sqrt{6}\pi}(-)^{k+l'+\Gamma}\,\delta_{LL'}\,\delta_{SS'}\,\delta_{JJ'}\,\delta_{kk'}\,\delta(LSJ)\,\delta(J\tfrac{1}{2}k)\,\hat{l}\hat{l}'\hat{\Gamma}\hat{\Gamma}'\,\begin{Bmatrix} \Gamma & \Gamma' & 2 \\ l' & l & k \end{Bmatrix} \\
&\quad \times \sum_{l''} \hat{l}''^2 \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ l & l' & l'' \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} l & 1 & l'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l' & 1 & l'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \times \frac{\delta(p-p')}{p'^2} \left(\frac{\partial}{\partial q'} - \frac{l(l+1) - l''(l''+1) - 2}{2\,q'} \right) \\
&\quad \times \left(\frac{\partial}{\partial q'} - \frac{l''(l''+1) - l'(l'+1) - 2}{2\,q'} \right) \frac{\delta(q-q')}{q'^2} \qquad \text{(G.27)}
\end{aligned}
$$

G.3 Matrixelemente der elektrischen Multipoloperatoren

In Abschnitt 8.2.1 wurden die Matrixelemente des elektromagnetischen Wechselwirkungsoperators zerlegt in:

$$
\begin{aligned}
&\langle\, p\, q\, \xi \,|\, T_{em}(\vec{k}_\gamma, \lambda) \,|\, p'\, q', \xi' \,\rangle \\
&= \Big\{ \langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E1}_{Sub}(k_\gamma, \lambda, p\, q) \,|\, \xi' \,\rangle + \langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E1}_{Rel}(k_\gamma, \lambda, p\, q) \,|\, \xi' \,\rangle \\
&\quad + \langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E2}_{Sub}(k_\gamma, \lambda, p\, q) \,|\, \xi' \,\rangle + \langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E2}_{Mix}(k_\gamma, \lambda, p\, q) \,|\, \xi' \,\rangle + \langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E2}_{Rel}(k_\gamma, \lambda, p\, q) \,|\, \xi' \,\rangle \Big\} \\
&\quad \times \frac{\delta(p - p')}{p'^2}\, \frac{\delta(q - q')}{q'^2}\, .
\end{aligned} \tag{G.28}
$$

Die darin benutzen Operatoren sind wie folgt definiert:

1. Elektrischer Dipolübergang im Subsystem:

$$
\begin{aligned}
&\langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E1}_{Sub}(k_\gamma, \lambda; p\, q) \,|\, \xi' \,\rangle\, \frac{\delta(p - p')}{p'^2}\, \frac{\delta(q - q')}{q'^2} \\
&= -\frac{ie}{3}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\, k \,\langle\, p\, q\, \xi \,|\, \mathcal{Y}_{1\lambda}(\vec{\rho}\,)\, \tfrac{3}{2}(\tau_3^{(2)} - \tau_3^{(3)}) \,|\, p'\, q'; \xi' \,\rangle \\
&= -\frac{ie}{3}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\, k\, (-)^{\Gamma - M_\Gamma} \begin{pmatrix} \Gamma & 1 & \Gamma' \\ -M_\Gamma & \lambda & M'_\Gamma \end{pmatrix} \langle\, (T\tfrac{1}{2}) I M_I \,|\, \mathcal{T}_1 \,|\, (T'\tfrac{1}{2}) I' M'_I \,\rangle \\
&\quad \times \langle\, p\, q\, (((LS)J\tfrac{1}{2})kl)\Gamma \,\|\, \mathcal{Y}_{1\lambda}(\vec{\rho}\,) \,\|\, p'\, q'\, (((L'S')J'\tfrac{1}{2})k'l')\Gamma' \,\rangle\, .
\end{aligned} \tag{G.29}
$$

2. Elektrischer Dipolübergang im Relativsystem:

$$
\begin{aligned}
&\langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E1}_{Rel}(k_\gamma, \lambda; p\, q) \,|\, \xi' \,\rangle\, \frac{\delta(p - p')}{p'^2}\, \frac{\delta(q - q')}{q'^2} \\
&= -\frac{ie}{3}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\, k \,\langle\, p\, q\, \xi \,|\, \mathcal{Y}_{1\lambda}(\vec{r}\,)\, (2\tau_3^{(1)} - \tau_3^{(2)} - \tau_3^{(3)}) \,|\, p'\, q'; \xi' \,\rangle \\
&= -\frac{ie}{3}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\, k\, (-)^{\Gamma - M_\Gamma} \begin{pmatrix} \Gamma & 1 & \Gamma' \\ -M_\Gamma & \lambda & M'_\Gamma \end{pmatrix} \langle\, (T\tfrac{1}{2}) I M_I \,|\, \mathcal{T}_2 \,|\, (T'\tfrac{1}{2}) I' M'_I \,\rangle \\
&\quad \times \langle\, p\, q\, (((LS)J\tfrac{1}{2})kl)\Gamma \,\|\, \mathcal{Y}_{1\lambda}(\vec{r}\,) \,\|\, p'\, q'\, (((L'S')J'\tfrac{1}{2})k'l')\Gamma' \,\rangle\, .
\end{aligned} \tag{G.30}
$$

3. Elektrischer Quadrupolübergang im Subsystem:

$$
\begin{aligned}
&\langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E2}_{Sub}(k_\gamma, \lambda; p\, q) \,|\, \xi' \,\rangle \, \frac{\delta(p-p')}{p'^2} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} \\
&= \frac{e}{2}\sqrt{\frac{\pi}{15}}\, k^2 \,\langle\, p\, q\, \xi \,|\, \mathcal{Y}_{2\lambda}(\vec{\rho})\, \tfrac{1}{4}(2+\tau_3^{(2)}+\tau_3^{(3)}) \,|\, p'\, q'; \xi' \,\rangle \\
&= \frac{e}{2}\sqrt{\frac{\pi}{15}}\, k^2\, (-)^{\Gamma-M_\Gamma} \begin{pmatrix} \Gamma & 2 & \Gamma' \\ -M_\Gamma & \lambda & M'_\Gamma \end{pmatrix} \langle\, (T\tfrac{1}{2})IM_I \,|\, \mathcal{T}_3 \,|\, (T'\tfrac{1}{2})I'M'_I \,\rangle \\
&\quad \times \langle\, p\, q\, (((LS)J\tfrac{1}{2})kl)\Gamma \,\|\, \mathcal{Y}_{2\lambda}(\vec{\rho}) \,\|\, p'\, q'\, (((L'S')J'\tfrac{1}{2})k'l')\Gamma' \,\rangle\,. \qquad \text{(G.31)}
\end{aligned}
$$

4. Gemischter elektrischer Quadrupolübergang:

$$
\begin{aligned}
&\langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E2}_{Mix}(k_\gamma, \lambda; p\, q) \,|\, \xi' \,\rangle \, \frac{\delta(p-p')}{p'^2} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} \\
&= \frac{e}{2}\sqrt{\frac{\pi}{15}}\, k^2 \,\langle\, p\, q\, \xi \,|\, \sqrt{\frac{10\pi}{3}}\, [\mathcal{Y}_{1\lambda}(\vec{\rho}) \otimes \mathcal{Y}_{1\lambda}(\vec{r})]^{(2)}\; \tfrac{1}{3}(-\tau_3^{(2)}+\tau_3^{(3)}) \,|\, p'\, q'; \xi' \,\rangle \\
&= \frac{e\pi}{3\sqrt{2}}\, k^2\, (-)^{\Gamma-M_\Gamma} \begin{pmatrix} \Gamma & 2 & \Gamma' \\ -M_\Gamma & \lambda & M'_\Gamma \end{pmatrix} \langle\, (T\tfrac{1}{2})IM_I \,|\, \mathcal{T}_4 \,|\, (T'\tfrac{1}{2})I'M'_I \,\rangle \\
&\quad \times \langle\, p\, q\, (((LS)J\tfrac{1}{2})kl)\Gamma \,\|\, [\mathcal{Y}_{1\lambda}(\vec{\rho}) \otimes \mathcal{Y}_{1\lambda}(\vec{r})]^{(2)} \,\|\, p'\, q'\, (((L'S')J'\tfrac{1}{2})k'l')\Gamma' \,\rangle\,. \qquad \text{(G.32)}
\end{aligned}
$$

5. Elektrischer Quadrupolübergang im Relativsystem:

$$
\begin{aligned}
&\langle\, \xi \,|\, \mathbf{t}^{E2}_{Rel}(k_\gamma, \lambda; p\, q) \,|\, \xi' \,\rangle \, \frac{\delta(p-p')}{p'^2} \frac{\delta(q-q')}{q'^2} \\
&= \frac{e}{2}\sqrt{\frac{\pi}{15}}\, k^2 \,\langle\, p\, q\, \xi \,|\, \mathcal{Y}_{2\lambda}(\vec{\rho})\, \tfrac{1}{9}(6+4\tau_3^{(1)}+\tau_3^{(2)}+\tau_3^{(3)}) \,|\, p'\, q'; \xi' \,\rangle \\
&= \frac{e}{2}\sqrt{\frac{\pi}{15}}\, k^2\, (-)^{\Gamma-M_\Gamma} \begin{pmatrix} \Gamma & 2 & \Gamma' \\ -M_\Gamma & \lambda & M'_\Gamma \end{pmatrix} \langle\, (T\tfrac{1}{2})IM_I \,|\, \mathcal{T}_5 \,|\, (T'\tfrac{1}{2})I'M'_I \,\rangle \\
&\quad \times \langle\, p\, q\, (((LS)J\tfrac{1}{2})kl)\Gamma \,\|\, \mathcal{Y}_{2\lambda}(\vec{r}) \,\|\, p'\, q'\, (((L'S')J'\tfrac{1}{2})k'l')\Gamma' \,\rangle\,. \qquad \text{(G.33)}
\end{aligned}
$$

Die Matrixelemente der Isospinoperatoren sind im folgenden Abschnitt zu finden, die der sphärischen Harmonischen im vorherigen.

G.4 Isospin-Matrixelemente

Dieser Abschnitt enthält die Matrixelemente der Isospinoperatoren $\mathcal{T}_1 \ldots \mathcal{T}_5$:

$$\mathcal{T}_1 = \tfrac{3}{2}\left(\tau_3^\beta - \tau_3^\gamma\right) \qquad \mathcal{T}_2 = 2\,\tau_3^\alpha - \tau_3^\beta - \tau_3^\gamma$$

$$\mathcal{T}_3 = \tfrac{1}{4}\left(2 + \tau_3^\beta + \tau_3^\gamma\right) \qquad \mathcal{T}_4 = \tfrac{1}{3}\left(-\tau_3^\beta + \tau_3^\gamma\right)$$

$$\mathcal{T}_5 = \tfrac{1}{9}\left(6 + 4\,\tau_3^\alpha + \tau_3^\beta + \tau_3^\gamma\right)$$

In den folgenden Tabellen sind die Matrixelemente für $M_I = M_{I'} = -\frac{1}{2}$ (^{3}H Triton) und $M_I = M_{I'} = +\frac{1}{2}$ (^{3}He Helium) in Abhängigkeit von T, T', I und I' angegeben.

$\langle\, TIM_I \,\vert\, \mathcal{T}_1 \,\vert\, T'I'M_I' \,\rangle$	$T' = 0,\ I' = \frac{1}{2}$		$T' = 1,\ I' = \frac{1}{2}$		$T' = 1,\ I' = \frac{3}{2}$	
	^{3}H	^{3}He	^{3}H	^{3}He	^{3}H	^{3}He
$T' = 0,\ I' = \frac{1}{2}$	0	0	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$
$T' = 1,\ I' = \frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	0	0	0	0
$T' = 1,\ I' = \frac{3}{2}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{6}$	0	0	0	0

Tabelle 33: Matrixelemente von $\mathcal{T}_1$

$\langle\, TIM_I \,\vert\, \mathcal{T}_2 \,\vert\, T'I'M_I' \,\rangle$	$T' = 0,\ I' = \frac{1}{2}$		$T' = 1,\ I' = \frac{1}{2}$		$T' = 1,\ I' = \frac{3}{2}$	
	^{3}H	^{3}He	^{3}H	^{3}He	^{3}H	^{3}He
$T' = 0,\ I' = \frac{1}{2}$	-2	2	0	0	0	0
$T' = 1,\ I' = \frac{1}{2}$	0	0	2	-2	$-2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$
$T' = 1,\ I' = \frac{3}{2}$	0	0	$-2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	0	0

Tabelle 34: Matrixelemente von $\mathcal{T}_2$

$\langle TIM_I \,|\, \mathcal{T}_3 \,|\, T'I'M_I' \rangle$	$T'=0,\ I'=\frac{1}{2}$		$T'=1,\ I'=\frac{1}{2}$		$T'=1,\ I'=\frac{3}{2}$	
	^{3}H	^{3}He	^{3}H	^{3}He	^{3}H	^{3}He
$T'=0,\ I'=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
$T'=1,\ I'=\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$
$T'=1,\ I'=\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Tabelle 35: Matrixelemente von $\mathcal{T}_3$

$\langle TIM_I \,|\, \mathcal{T}_4 \,|\, T'I'M_I' \rangle$	$T'=0,\ I'=\frac{1}{2}$		$T'=1,\ I'=\frac{1}{2}$		$T'=1,\ I'=\frac{3}{2}$	
	^{3}H	^{3}He	^{3}H	^{3}He	^{3}H	^{3}He
$T'=0,\ I'=\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$
$T'=1,\ I'=\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	0	0	0	0
$T'=1,\ I'=\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	0	0	0

Tabelle 36: Matrixelemente von $\mathcal{T}_4$

$\langle TIM_I \,|\, \mathcal{T}_5 \,|\, T'I'M_I' \rangle$	$T'=0,\ I'=\frac{1}{2}$		$T'=1,\ I'=\frac{1}{2}$		$T'=1,\ I'=\frac{3}{2}$	
	^{3}H	^{3}He	^{3}H	^{3}He	^{3}H	^{3}He
$T'=0,\ I'=\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{10}{9}$	0	0	0	0
$T'=1,\ I'=\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{9}\sqrt{2}$	$-\frac{2}{9}\sqrt{2}$
$T'=1,\ I'=\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{2}{9}\sqrt{2}$	$-\frac{2}{9}\sqrt{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{9}$

Tabelle 37: Matrixelemente von $\mathcal{T}_5$

H Funktionen

H.1 Vektorkugelfunktionen

$$\begin{aligned}\vec{Y}_{lj;m} &= \left[Y^{(l)}(\Omega) \times \vec{e}^{\,(1)}\right]^{(j)}_m \\ &= \sum_{m'\,m''} \left(\begin{array}{cc|c} l & 1 & j \\ m' & m'' & m \end{array}\right) Y_{lm'}(\Omega)\, \vec{e}^{\,(1)}_{m''}\end{aligned} \tag{H.1}$$

H.2 Sphärische Harmonische

Die sphärischen Harmonischen sind definiert als

$$\mathcal{Y}_{lm}(\vec{r}\,) = r^l\, Y_{lm}(\hat{r})\,. \tag{H.2}$$

Die Parität unter Raumspiegelung folgt aus der Parität der Kugelflächenfunktion

$$\mathcal{Y}_{lm}(-\vec{r}\,) = (-)^l\, r^l\, Y_{lm}(\hat{r}) = (-)^l\, \mathcal{Y}_{lm}(\vec{r}\,)\,. \tag{H.3}$$

Für sie gilt nach [112] das Additionstheorem:

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_{lm}(\vec{r} - \vec{\rho}\,) &= \sqrt{4\pi} \sum_{L=0}^{l} \sum_{M=-L}^{L} (-)^L \left[\frac{(2l+1)!}{(2L+1)!(2l-2L+1)!}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\begin{array}{cc|c} l-L & L & l \\ m-M & M & m \end{array}\right) \mathcal{Y}_{LM}(\vec{\rho}\,)\, \mathcal{Y}_{l-L\,m-M}(\vec{r}\,)\,.\end{aligned} \tag{H.4}$$

Damit erhält man für die hier verwendeten sphärischen Harmonischen

$$\mathcal{Y}_{1m}(\alpha\,\vec{r} + \beta\,\vec{\rho}\,) = \alpha\,\mathcal{Y}_{1m}(\vec{r}\,) + \beta\,\mathcal{Y}_{1m}(\vec{\rho}\,) \tag{H.5}$$

$$\mathcal{Y}_{2m}(\alpha\,\vec{r} + \beta\,\vec{\rho}\,) = \alpha^2\,\mathcal{Y}_{2m}(\vec{r}\,) + 2\,\alpha\,\beta\,\sqrt{\tfrac{10\pi}{3}}\,[\mathcal{Y}_1(\vec{r}\,) \times \mathcal{Y}_1(\vec{\rho}\,)]_{2m} + \beta^2\,\mathcal{Y}_{2m}(\vec{\rho}\,)\,. \tag{H.6}$$

Für die Kugelflächenfunktionen gelten folgende Beziehungen:

$$\sum_{m_1 m_2} \left(\begin{array}{cc|c} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{array}\right) Y_{l_1 m_1}(\Omega)\, Y_{l_2 m_2}(\Omega) = \frac{\hat{l}_1 \hat{l}_2}{\hat{l}\sqrt{4\pi}} \left(\begin{array}{cc|c} l_1 & l_2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) Y_{lm}(\Omega) \tag{H.7}$$

und

$$Y_{l_1m_1}(\Omega)\,Y_{l_2m_2}(\Omega) = \sum_{lm} \frac{\hat{l}_1\hat{l}_2}{\hat{l}\sqrt{4\pi}} \left(\begin{array}{cc|c} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} l_1 & l_2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) Y_{lm}(\Omega)\,. \tag{H.8}$$

Daraus folgt für die sphärischen Harmonischen für $L = 2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{2m}(\vec{r}\,) &= \sqrt{\frac{10\pi}{3}} \sum_{m_1m_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ m_1 & m_2 & m \end{array}\right) \mathcal{Y}_{1m_1}(\vec{r}\,)\,\mathcal{Y}_{1m_2}(\vec{r}\,) \\ &= \sqrt{\frac{10\pi}{3}}\, [\mathcal{Y}_1(\vec{r}\,) \otimes \mathcal{Y}_1(\vec{r}\,)]_{2m}\,. \end{aligned} \tag{H.9}$$

I Polintegration

An mehreren Stellen muß eine Polintegration durchgeführt werden, dazu wird folgende Beziehung benutzt:

$$\frac{1}{x \pm i0} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{x \pm i\epsilon} = P(1/x) \mp i\pi\delta(x)\,. \tag{I.10}$$

Damit ergibt sich folgende Gleichung:

$$\int dq\, q^2 \frac{f(q,p)}{k^2 - q^2 + i0} = \int dq\, \frac{q^2 f(q,p) - k^2 f(k_\gamma, p)}{k^2 - q^2} - i\frac{\pi k}{2} f(k_\gamma, p)\,. \tag{I.11}$$

J Distributionstheoretische Beziehungen

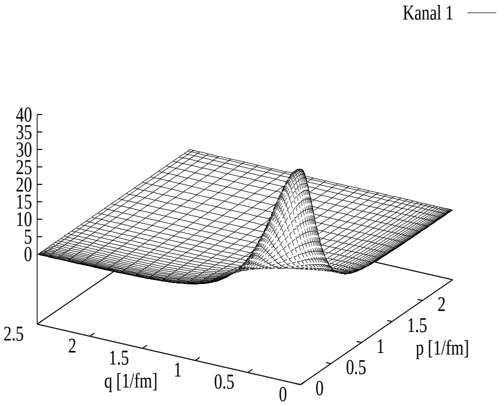
Bei der Berechnung der Matrixelemente für die Born-Amplitude sind folgende Relationen hilfreich. $\delta^{(m)}$ bedeutet dabei die m-te Ableitung der δ-Distribution.

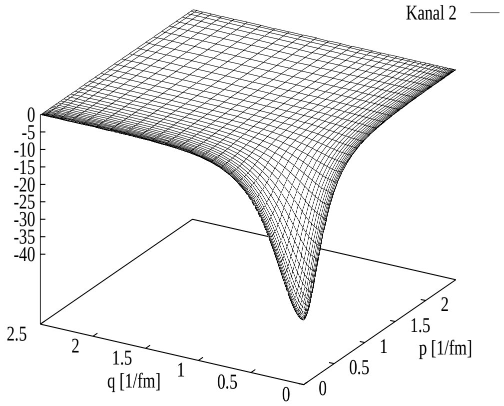
$$\delta^{(m)}(x) = (-)^m\, \delta^{(m)}(-x) \tag{J.12}$$

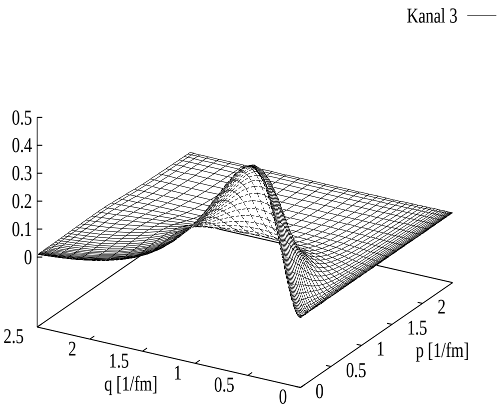
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta^{(m)}(x-y)\,\delta^{(n)}(x-y)\,dx = \delta^{(m+n)}(x-a) \tag{J.13}$$

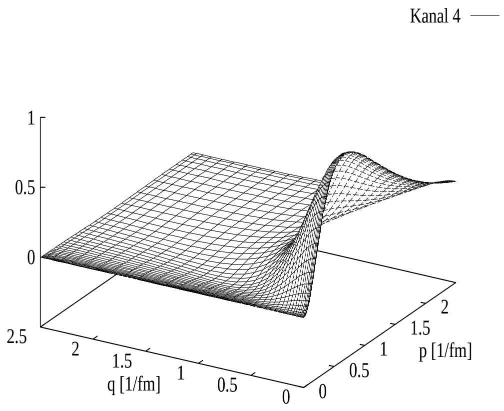
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) f(x)\,dx = -f'(0) \tag{J.14}$$

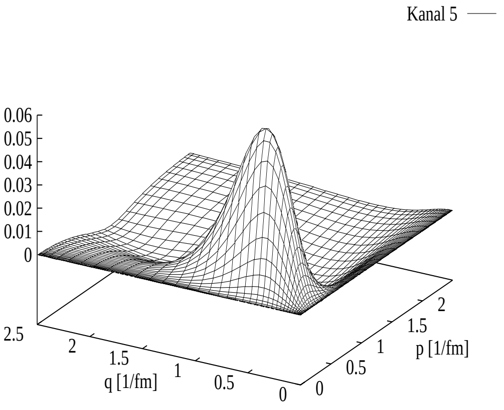
K Wellenfunktion mit Paris (PEST)

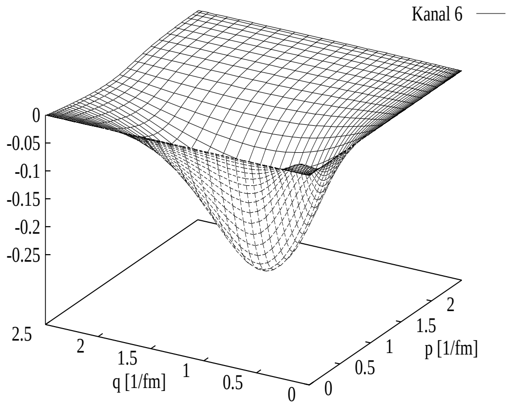


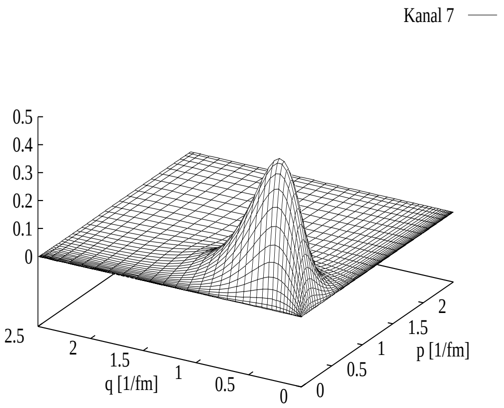


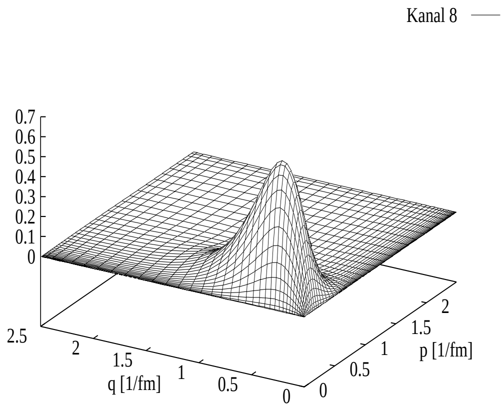


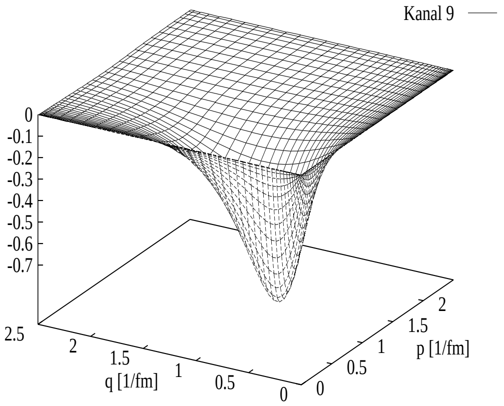


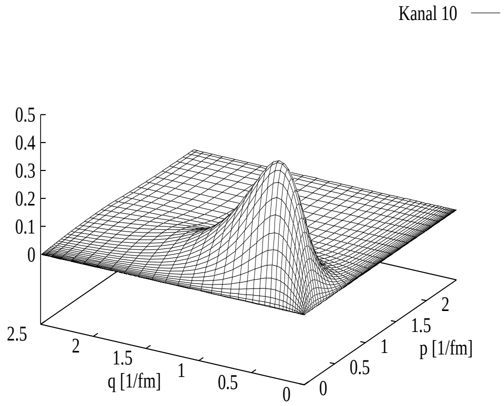


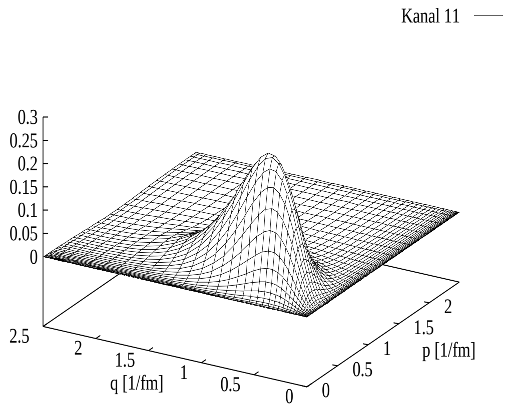


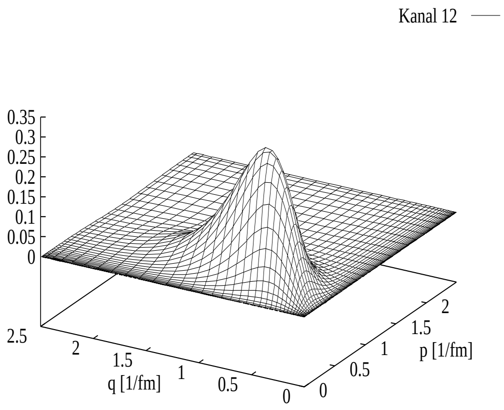

Kanal 7
q [1/fm]
p [1/fm]

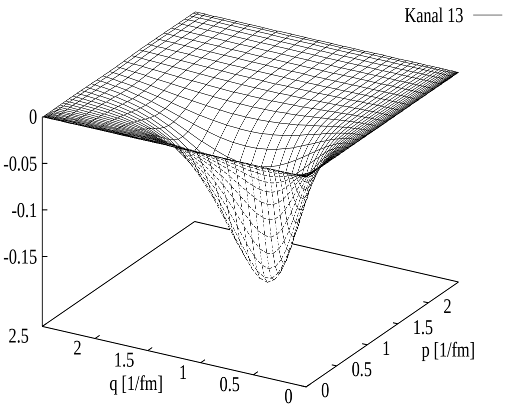

Kanal 8
q [1/fm]
p [1/fm]

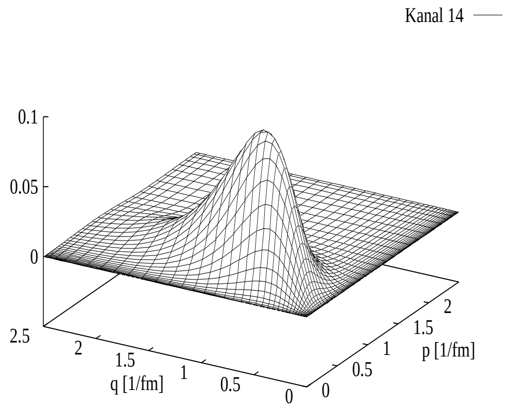

Kanal 9
q [1/fm]
p [1/fm]

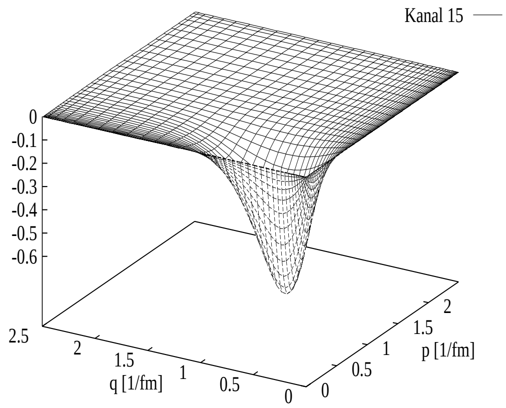

Kanal 10
q [1/fm]
p [1/fm]

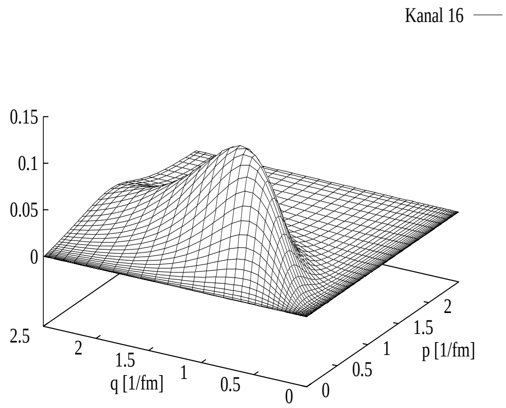

Kanal 11
q [1/fm]
p [1/fm]

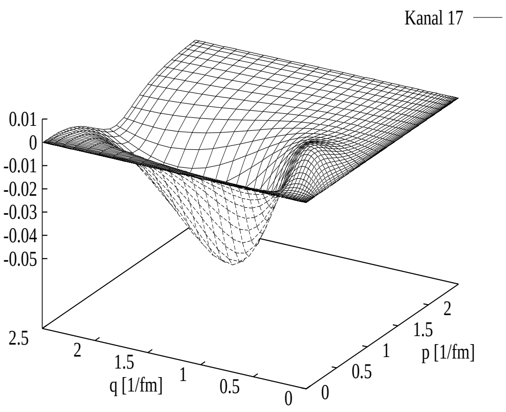

Kanal 12
q [1/fm]
p [1/fm]

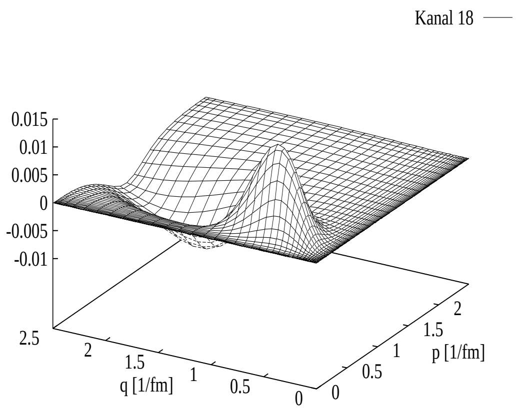

Kanal 13
0
-0.05
-0.1
-0.15
2.5
2
1.5
1
0.5
0
q [1/fm]
0
0.5
1
1.5
2
p [1/fm]


Kanal 14
0.1
0.05
0
2.5
2
1.5
1
0.5
0
q [1/fm]
0
0.5
1
1.5
2
p [1/fm]

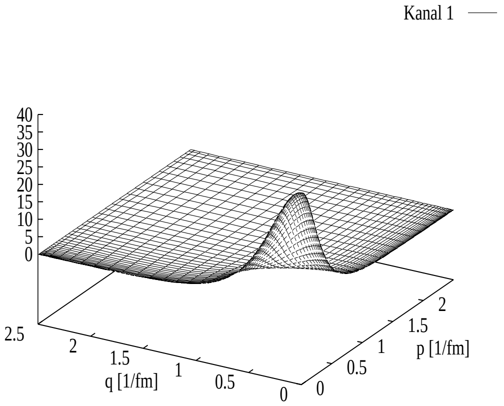

Kanal 15
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
2.5
2
1.5
1
0.5
0
q [1/fm]
0
0.5
1
1.5
2
p [1/fm]

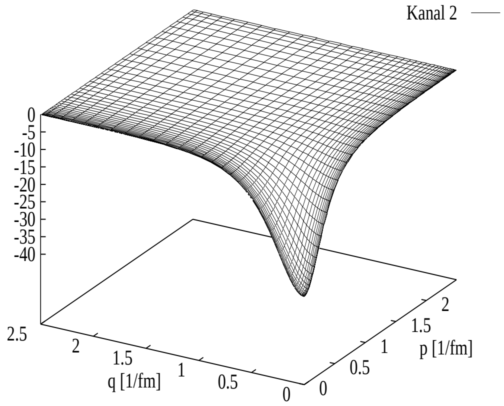

Kanal 16
0.15
0.1
0.05
0
2.5
2
1.5
1
0.5
0
q [1/fm]
0
0.5
1
1.5
2
p [1/fm]

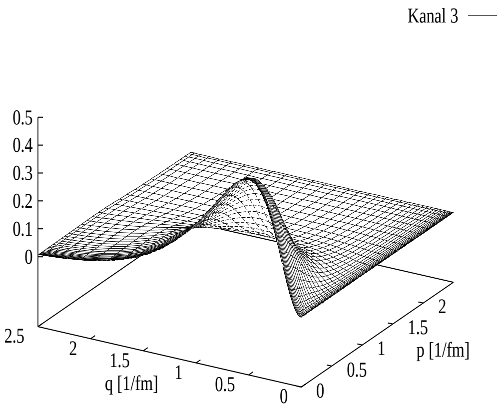

Kanal 17
0.01
0
-0.01
-0.02
-0.03
-0.04
-0.05
2.5
2
1.5
1
0.5
0
q [1/fm]
0
0.5
1
1.5
2
p [1/fm]

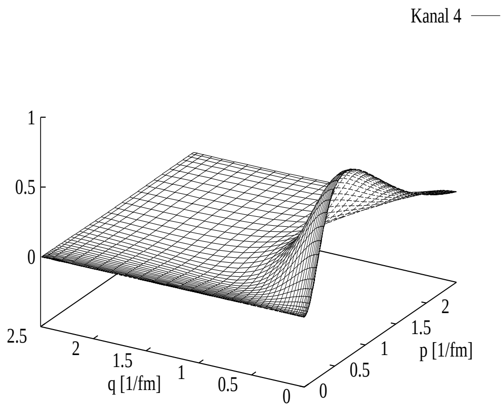

Kanal 18
0.015
0.01
0.005
0
-0.005
-0.01
2.5
2
1.5
1
0.5
0
q [1/fm]
0
0.5
1
1.5
2
p [1/fm]

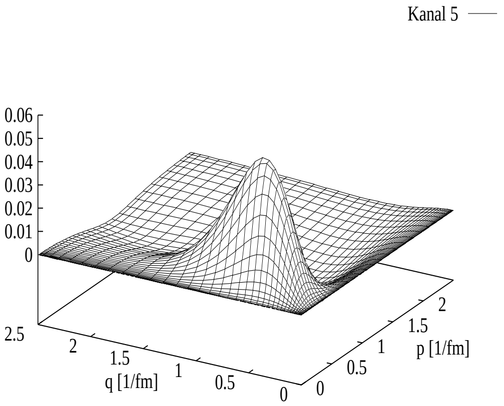
L Wellenfunktion mit Bonn A (BAEST)

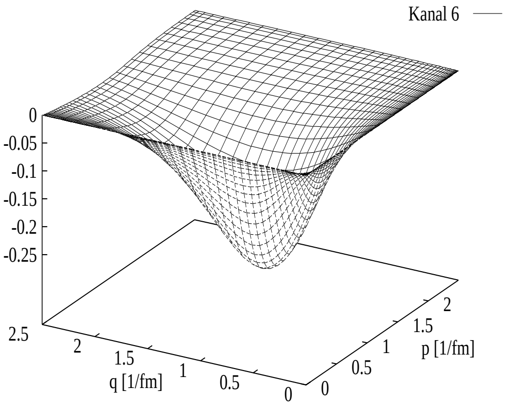


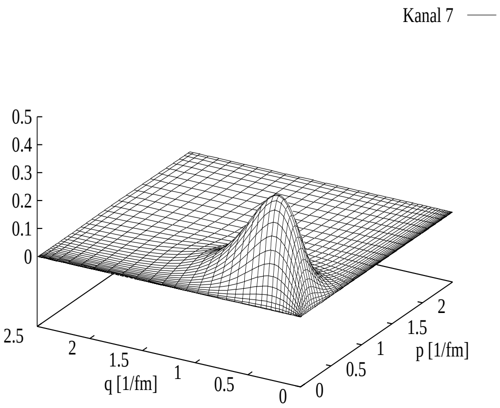


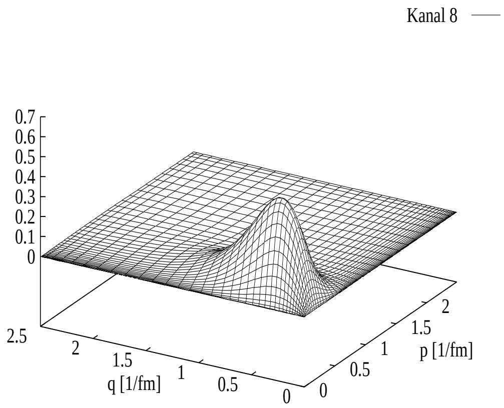


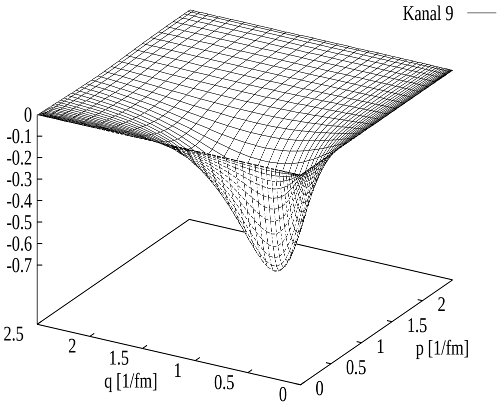


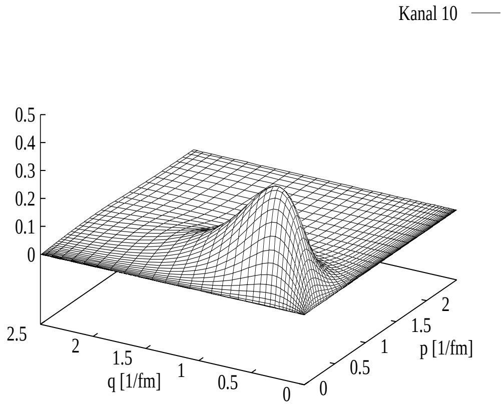


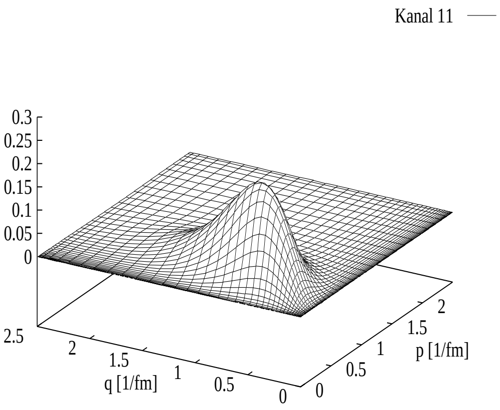


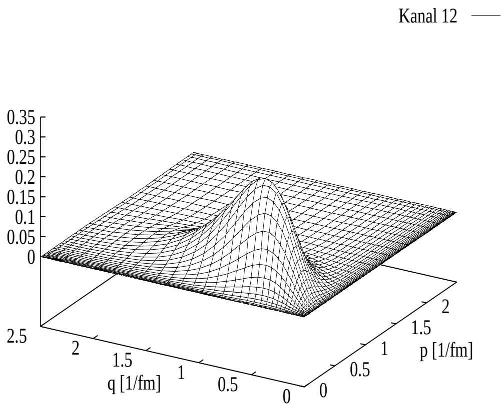

Kanal 7
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
2.5
2
1.5
1
0.5
0
q [1/fm]
0
0.5
1
1.5
2
p [1/fm]

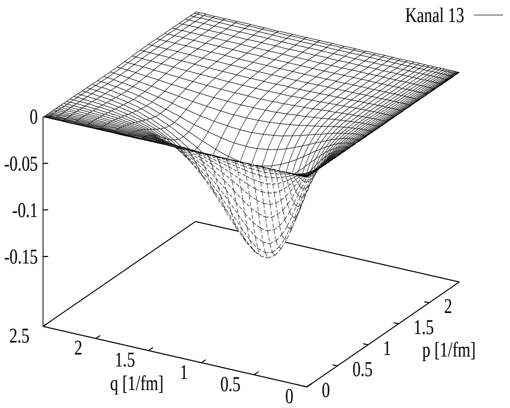

Kanal 8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
2.5
2
1.5
1
0.5
0
q [1/fm]
0
0.5
1
1.5
2
p [1/fm]

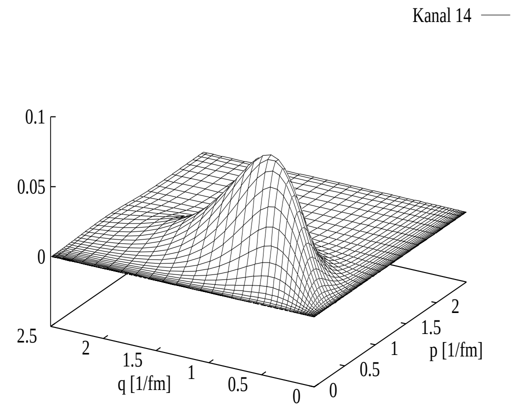

Kanal 9
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
-0.7
2.5
2
1.5
1
0.5
0
q [1/fm]
0
0.5
1
1.5
2
p [1/fm]

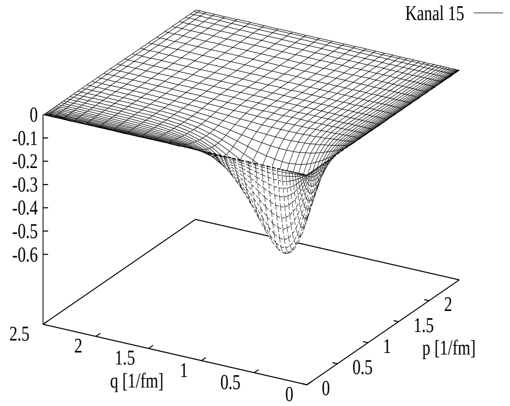

Kanal 10
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
2.5
2
1.5
1
0.5
0
q [1/fm]
0
0.5
1
1.5
2
p [1/fm]

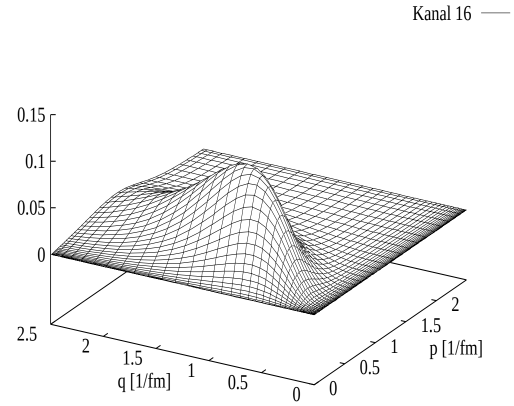

Kanal 11
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
2.5
2
1.5
1
0.5
0
q [1/fm]
0
0.5
1
1.5
2
p [1/fm]

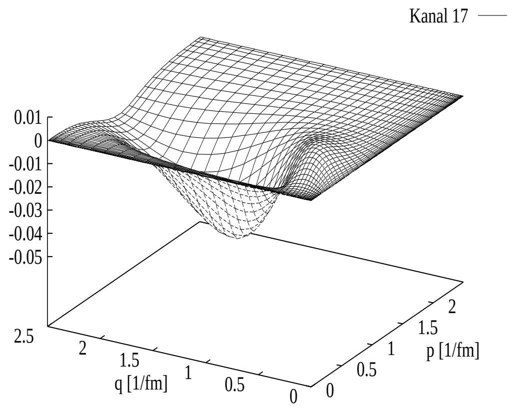

Kanal 12
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
2.5
2
1.5
1
0.5
0
q [1/fm]
0
0.5
1
1.5
2
p [1/fm]

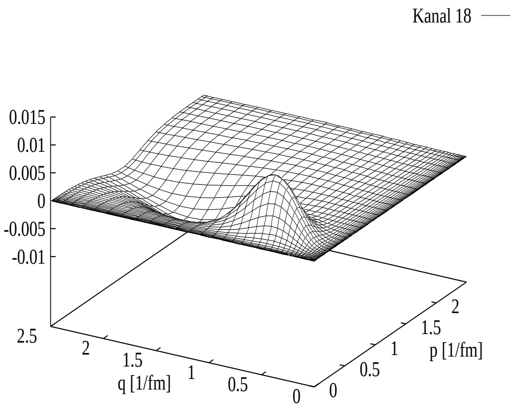

Kanal 13
q [1/fm]
p [1/fm]


Kanal 14
q [1/fm]
p [1/fm]

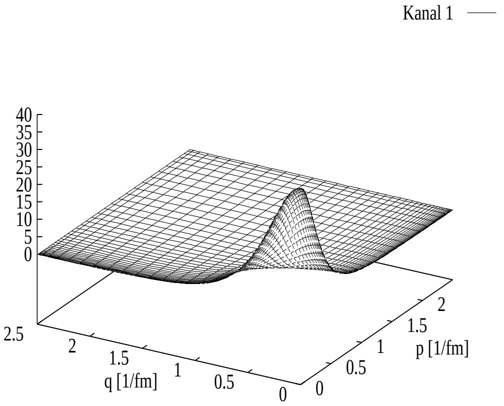

Kanal 15
q [1/fm]
p [1/fm]

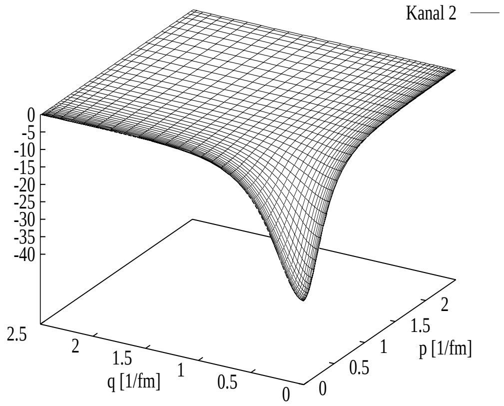

Kanal 16
q [1/fm]
p [1/fm]

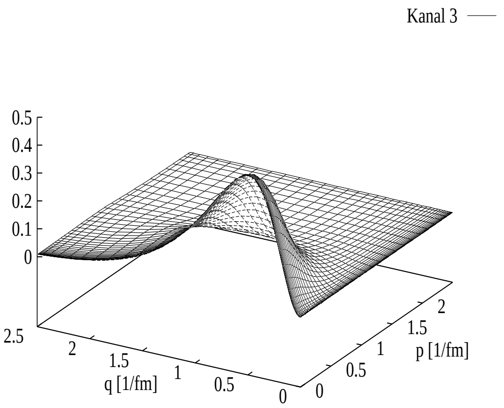

Kanal 17
q [1/fm]
p [1/fm]

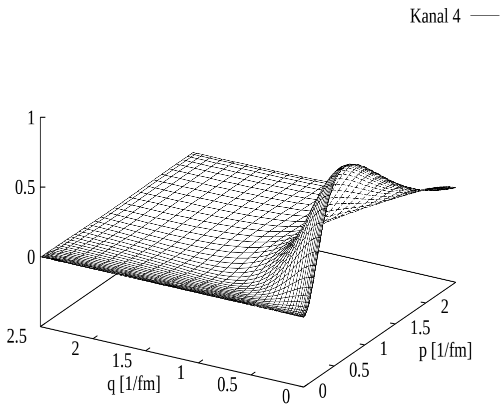

Kanal 18
q [1/fm]
p [1/fm]

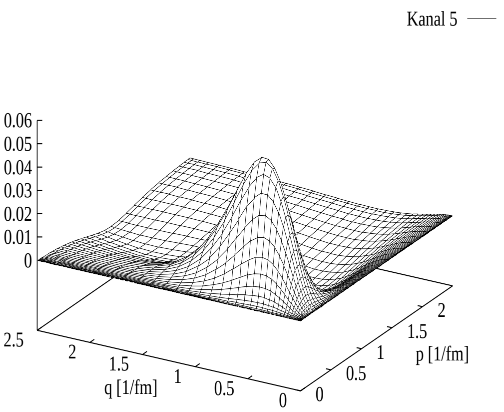
M Wellenfunktion mit Bonn B (BBEST)

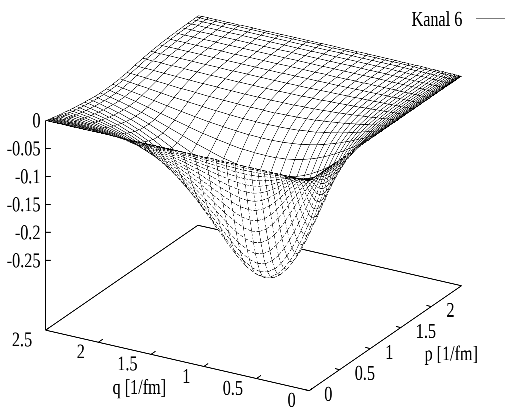


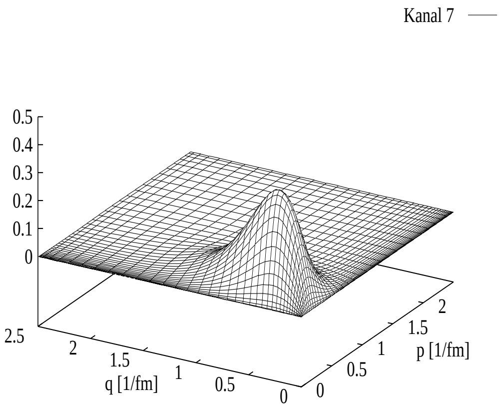


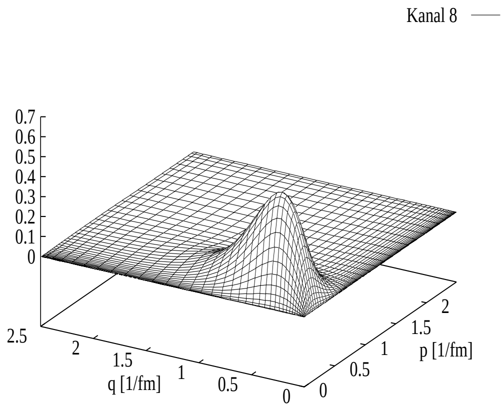


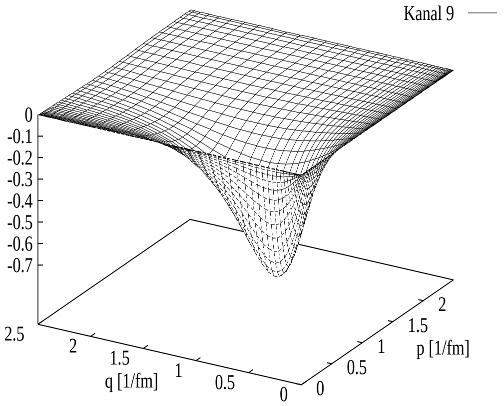


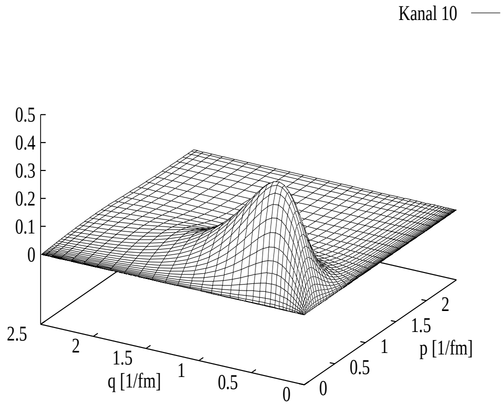


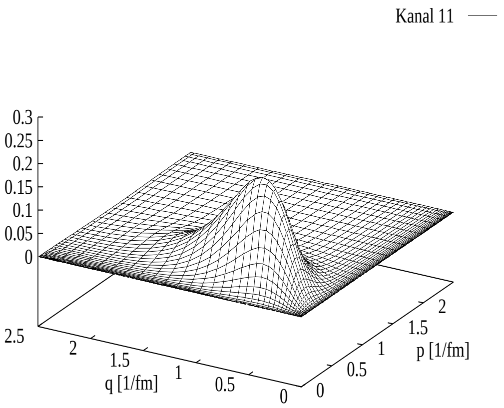


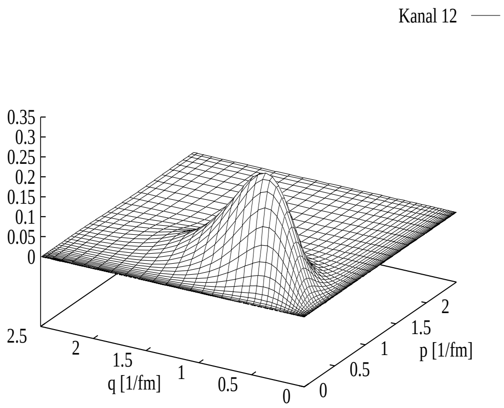

Kanal 7
q [1/fm]
p [1/fm]

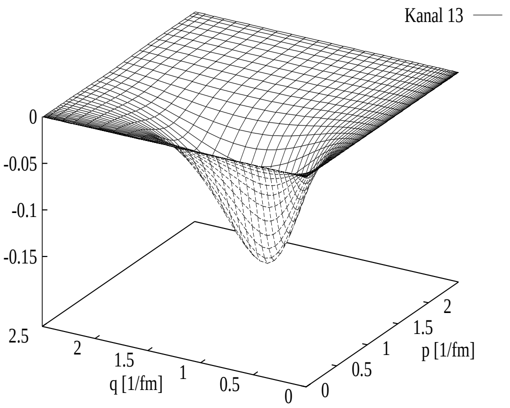

Kanal 8
q [1/fm]
p [1/fm]

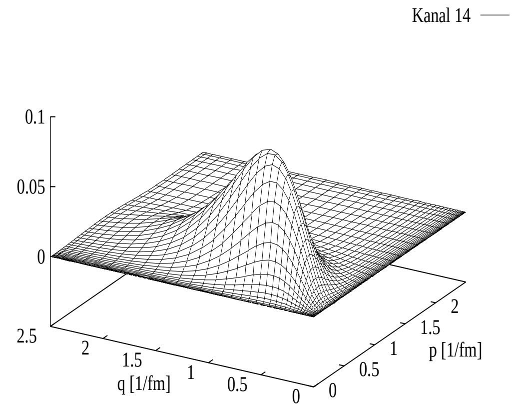

Kanal 9
q [1/fm]
p [1/fm]

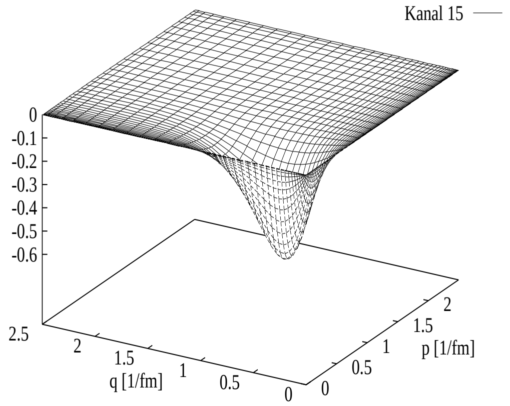

Kanal 10
q [1/fm]
p [1/fm]

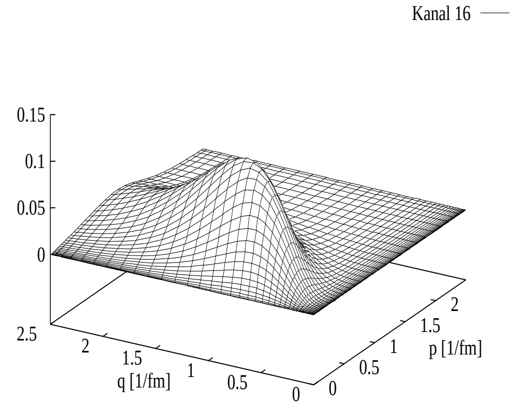

Kanal 11
q [1/fm]
p [1/fm]

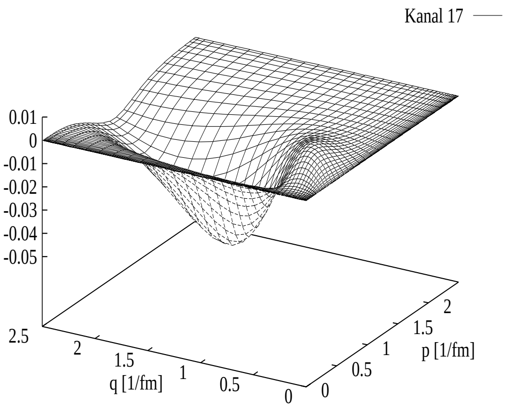

Kanal 12
q [1/fm]
p [1/fm]

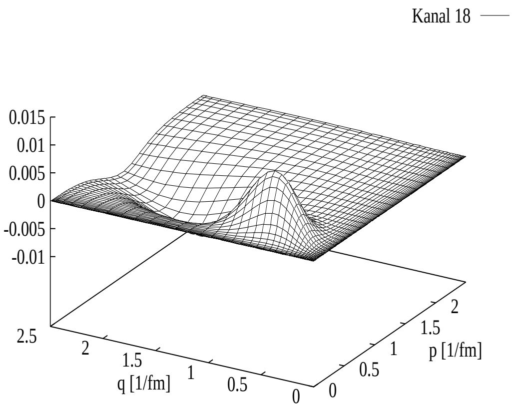

Kanal 13
0
-0.05
-0.1
-0.15
2.5
2
1.5
1
0.5
0
q [1/fm]
0
0.5
1
1.5
2
p [1/fm]


Kanal 14
0.1
0.05
0
2.5
2
1.5
1
0.5
0
q [1/fm]
0
0.5
1
1.5
2
p [1/fm]


Kanal 15
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
2.5
2
1.5
1
0.5
0
q [1/fm]
0
0.5
1
1.5
2
p [1/fm]


Kanal 16
0.15
0.1
0.05
0
2.5
2
1.5
1
0.5
0
q [1/fm]
0
0.5
1
1.5
2
p [1/fm]


Kanal 17
0.01
0
-0.01
-0.02
-0.03
-0.04
-0.05
2.5
2
1.5
1
0.5
0
q [1/fm]
0
0.5
1
1.5
2
p [1/fm]


Kanal 18
0.015
0.01
0.005
0
-0.005
-0.01
2.5
2
1.5
1
0.5
0
q [1/fm]
0
0.5
1
1.5
2
p [1/fm]

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Literatur

[1] I. M. Barbour and A. C. Phillips, *Photodisintegration of Three-Particle Nuclei*, Phys. Rev. Lett. **19**, 1388 (1967).

[2] I. M. Barbour and A. C. Phillips, *Photodisintegration of Three-Particle Nuclei*, Phys. Rev. C **1**, 165 (1970).

[3] I. M. Barbour and J. A. Hendry, *The E2 Transition in the Photodisintegration of* ^3He, Phys. Lett. **38B**, 151 (1972).

[4] B. F. Gibson and D. R. Lehman, *Two-body photodisintegration of* ^3He *and* ^3H, Phys. Rev. C **11**, 29 (1975).

[5] B. F. Gibson and J. G. J. Stephenson, *Charge asymmetry effects and the trinucleon binding energy. II. Inclusion of the tensor force and singlet repulsion*, Phys. Rev. C **11**, 1448 (1976).

[6] J. Jourdan *et al.*, $p-\vec{d}$ *radiative capture and the* ^3He *d-state*, Nucl. Phys. **A453**, 220 (1986).

[7] A. C. Fonseca and D. R. Lehman, *Exact three-body calculation of the polarization observables in* $^3H(\vec{d},\gamma)\ ^3He$, Phys. Lett. B **267**, 159 (1991).

[8] S. Ishikawa and T. Sasakawa, $p+\vec{d}\rightarrow\ ^3He+\gamma$ *reaction with realistic three-nucleon wave functions*, Phys. Rev. C **45**, R1428 (1992).

[9] A. C. Fonseca and D. R. Lehman, in *Few-Body Systems, Suppl. 6* (Springer-Verlag, Wien, 1992).

[10] G. Reiss, *Photospaltung des Tritons mit Hilfe der W-Matrix-Methode*, Diplomarbeit, TU Wien, 1991.

[11] J. Richter, *Photodisintegration des Tritons für das Paris-Potential unter Anwendung der W-Matrix-Methode innerhalb der AGS-Theorie*, Diplomarbeit, Universität Bonn, 1993.

[12] W. Schadow, *Behandlung der Triton-Photodisintegration mit Hilfe gekoppelter Integralgleichungen*, Diplomarbeit, Universität Bonn, 1993.

[13] W. Schadow, J. Richter, and W. Sandhas, in *14th Int. IUPAP Conf. on Few Body Problems in Physics* (CEBAF, F. Gross ed., Virginia, USA, 1994).

[14] Th. Heck, *Behandlung der Triton-Photodisintegration unter Berücksichtigung der E2-Übergänge*, Diplomarbeit, Universität Bonn, 1994.

[15] A. C. Fonseca and D. R. Lehman, in *Proceedings of the 14th International IUPAP Conference on Few-Body Problems in Physics, Williamsburg, VA 1994,Ed. Franz Gross* (AIP, New York, 1995).

[16] W. Schadow and W. Sandhas, *Photodisintegration of the triton with realistic potentials*, Phys. Rev. C **55**, 1074 (1997).

[17] R. B. Bösch, J. Lang, R. Müller, and W. Wölfli, *Photodisintegration of ^3H*, Phys. Lett. **8**, 120 (1964).

[18] R. B. Bösch, J. Lang, R. Müller, and W. Wölfli, *Kernphotoeffekt an ^3H*, Helv. Phys. Acta **38**, 753 (1965).

[19] W. Wölfli, R. B. Bösch, J. Lang, and R. Müller, *Proton Capture by Deuterons*, Phys. Lett. **22**, 75 (1966).

[20] W. Wölfli *et al.*, *Einfang von Protonen durch Neutronen*, Helv. Phys. Acta **40**, 946 (1967).

[21] R. Kosiek, D. Müller, and R. Pfeiffer, *Zum Kernphotoeffekt am Tritium*, Phys. Lett. **21**, 199 (1966).

[22] B. D. Belt, C. R. Bingham, M. L. Halbert, and A. van der Woude, *Radiative Capture of Deuterons by Protons*, Phys. Rev. Lett. **24**, 1120 (1970).

[23] G. Ticcioni, S. N. Gardiner, J. L. Matthews, and R. O. Owens, *The Two-Body Photodisinegration of ^3He*, Phys. Lett. B **46**, 368 (1973).

[24] D. D. Faul, B. L. Berman, P. Meyer, and D. L. Olson, *Photodisintegration of ^3H*, Phys. Rev. Lett. **44**, 129 (1980).

[25] D. D. Faul, B. L. Berman, P. Meyer, and D. L. Olson, *Photodisintegration of ^3H and ^3He*, Phys. Rev. C **24**, 849 (1981).

[26] D. M. Skopik, D. H. Beck, J. Asai, and J. J. Murphy II, *Cross section and angular dependence of the $^3H(\gamma,d)n$ reaction*, Phys. Rev. C **24**, 1791 (1981).

[27] S. King, N. R. Robertson, H. R. Weller, and D. R. Tilley, *Polarized and unpolarized proton capture on deuterium*, Phys. Rev. C **30**, 21 (1984).

[28] G. Ellerkmann, *Behandlung der Photodisintegration von ^4He mit Hilfe gekoppelter Integralgleichungen*, Doktorarbeit, Universität Bonn, 1995.

[29] G. Ellerkmann, W. Sandhas, S. A. Sofianos, and H. Fiedeldey, *Integral equation calculations for the photodisintegration process $^4He(\gamma,n)^3He$*, Phys. Rev. C **53**, 2638 (1995).

[30] Th. Januschke, *Das 3-Nukleonen-Problem mit Input über 2-Teilchen-W-Matrix*, Diplomarbeit, Universität Bonn, 1987.

[31] T. Frank, *Neutron-Deuteron-Aufbruchrechnungen mit Hilfe der W-Matrix-Methode*, Diplomarbeit, Universität Bonn, 1988.

[32] H. Witała, T. Cornelius, and W. Glöckle, *Elastic scattering and break-up processes in the n-d system*, Few-Body Systems **3**, 123 (1988).

[33] W. Glöckle, H. Witała, and Th. Cornelius, *Three-nucleon scattering - a test for nuclear dynamics*, Nucl. Phys. **A508**, 115 (1990).

[34] Th. Januschke, *Elastische Neutron-Deuteron-Streuung mit W-Matrix-Formulierung des 2-Teilchen-Inputs für das Paris-Potential*, Doktorarbeit, Universität Bonn, 1990.

[35] T. Frank, *Neutron-Deuteron Aufbruchrechnungen mit Hilfe der W-Matrix-Methode*, Doktorarbeit, Universität Bonn, 1991.

[36] Th. Januschke, T. N. Frank, W. Sandhas, and H. Haberzettl, *Neutron-deuteron scattering calculations with the Paris potential using the W-Matrix representation of the two-body input*, Phys. Rev. C **47**, 1401 (1993).

[37] W. Glöckle *et al.*, *The three-nucleon continuum: achievements, challenges and applications*, Phys. Rep. **274**, 107 (1996).

[38] W. Glöckle, *Effects of the two-pion exchange three-nucleon force in the triton and ^3He*, Nucl. Phys. **A381**, 343 (1982).

[39] S. Ishikawa and T. Sasakawa, *Triton binding energy and three-nucleon potential*, Few-Body Systems **1**, 1 (1986).

[40] S. Ishikawa and T. Sasakawa, *Faddeev partial-wave calculations with a three-nucleon potential for the triton ground state*, Few-Body Systems **1**, 143 (1986).

[41] D. Hüber, H. Witała, A. Nogga, and W. G. H. Kamada, *A new look into the partial-wave decomposition of three-nucleon systems*, Few-Body Systems **22**, 107 (1997).

[42] M. Lacombe, B. Loiseau, J. M. Richard, and R. Vinh Mau, *Parametrization of the Paris N-N potential*, Phys. Rev. C **21**, 861 (1980).

[43] R. Machleidt, K. Holinde, and Ch. Elster, *The Bonn Meson-Exchange Model for the Nucleon-Nucleon Interaction*, Phys. Rep. **149**, 1 (1987).

[44] R. Machleidt, in *Advances in Nuclear Physics*, edited by J. W. Negele and E. Vogt (Plenum Press, London, New York, 1989), Vol. 19, Chap. 2, p. 189.

[45] M. M. Nagels, T. A. Rijken, and J. J. de Swart, *Low energy nucleon-nucleon potetial from Regge-pole theory*, Phys. Rev. D **17**, 768 (1978).

[46] V. G. J. Stoks, R. A. M. Klomp, M. C. M. Rentmeester, and J. J. de Swart, *Partial-wave analysis of all nucleon-nucleon scattering data below 350MeV*, Phys. Rev. C **48**, 792 (1994).

[47] V. G. J. Stoks, R. A. M. Klomp, C. P. F. Terheggen, and J. J. de Swart, *Construction of high-quality NN potential models*, Phys. Rev. C **49**, 2950 (1994).

[48] Y. Yamaguchi, *Two-Nucleon Problem when the potential is nonlocal but separable I*, Phys. Rev. **95**, 1628 (1954).

[49] Y. Yamaguchi, *Two-Nucleon Problem when the potential is nonlocal but separable II*, Phys. Rev. **95**, 1635 (1954).

[50] R. A. Malfliet and J. A. Tjon, *Solution of the Faddeev Equations for the Triton Problem using Local Two-Particle Interactions*, Nucl. Phys. **A127**, 161 (1969).

[51] R. A. Malfliet and J. A. Tjon, *Three-nucleon calculations with realistic forces*, Ann. Phys. **61**, 425 (1970).

[52] L. D. Faddeev, Zh. Eksp.. Teor. Fiz **39**, 1459 (1960).

[53] L. D. Faddeev, *Scattering Theory for a three-particle system*, Sov. Phys. JETP **12**, 1014 (1961).

[54] E. O. Alt, P. Grassberger, and W. Sandhas, *Reduction of the three-particle collision problem to multi-channel two-particle Lippmann-Schwinger equations*, Nucl. Phys. **B2**, 167 (1967).

[55] E. A. Bartnik, H. Haberzettl, and W. Sandhas, *Two-body bound state problem and nonsingular scattering equations*, Phys. Rev. C **34**, 1520 (1986).

[56] A. J. F. Siegert, *Note on the interaction between nuclei and electromagnetic interaction*, Phys. Rev. **52**, 787 (1937).

[57] H. Haberzettl, *Separable expansion for the two-body T matrix based on a nonsingular scattering equation*, Phys. Rev. C **40**, 1147 (1989).

[58] G. Pisent, K. Amos, P. J. Dortmans, and L. Canton, *Separable expansions of the NN t matrix via exact half-off-the-energy-shell calculations*, Phys. Rev. C **48**, 64 (1993).

[59] P. J. Dortmans, L. Canton, G. Pisent, and K. Amos, *Complex conjugate pairs in stationary Sturmian eigenstates*, Phys. Rev. C **49**, 2828 (1994).

[60] D. J. Ernst, C. M. Shakin, and R. M. Thaler, *Separable representation of two-body interactions*, Phys. Rev. C **8**, 46 (1973).

[61] D. J. Ernst, C. M. Shakin, and R. M. Thaler, *Separable representation of T matrices valid in the vicinity of off-shell points*, Phys. Rev. C **9**, 1780 (1974).

[62] J. Haidenbauer and W. Plessas, *Separable representation of the Paris nucleon-nucleon potential*, Phys. Rev. C **30**, 1822 (1984).

[63] J. Haidenbauer and W. Plessas, *Modified s¡eparable representation of the Paris nucleon-nucleon potential in the $^1S_0$ an $^3P_0$ states*, Phys. Rev. C **32**, 1424 (1985).

[64] J. Haidenbauer, Y. Koike, and W. Plessas, *Separable representation of the Bonn nucleon-nucleon potential*, Phys. Rev. C **33**, 439 (1986).

[65] J. Haidenbauer, , priv. Mitteilung .

[66] W. Sandhas, *The three-body problem*, Acta Physica Austriaca Suppl. **IX**, 57 (1972).

[67] L. Canton, G. Cattapan, P. J. Dortmans, G. Pisent, W. Schadow and J. P.Svenne, in *Proc. of the VI Workshop on Theoretical Nuclear Physics Problems* (I. Bombaci, A. Bonaccorso, A. Fabrocini, A. Kviesky, S. Rosati, and M. Viviani eds., Cortona, Italy, 1995).

[68] L. Canton and W. Schadow, *The $p\,d \leftrightarrow \pi^+\,t$ reaction around the Δ resonance*, Phys. Rev. C **56**, 1231 (1997).

[69] Th. L. Houk, *Neutron-proton scattering cross section at a few electron Volts and charge independence*, Phys. Rev. C **3**, 1886 (1971).

[70] C. van der Leun and C. Alderliesten, *The Deuteron binding energy*, Nucl. Phys. **A380**, 261 (1982).

[71] G. L. Greene, E. G. Kessler Jr., and R. D. Deslattes, *New determination of the deuteron energy and the neutron mass*, Phys. Rev. Lett. **56**, 819 (1986).

[72] R. V. Reid and M. L. Vaida, *Quadrupole moment of the deuteron*, Phys. Rev. Lett. **29**, 494 (1972).

[73] R. V. Reid and M. L. Vaida, *Errata: Quadrupole moment of the deuteron*, Phys. Rev. Lett. **34**, 1064 (1975).

[74] D. M. Bishop and L. M. Cheung, *Quadrupole moment of the deuteron from a precise calculation of the electric field gradient in D_2*, Phys. Rev. A **20**, 381 (1979).

[75] T. E. O. Ericson, *The Deuteron properties*, Nucl. Phys. **A416**, 281c (1984).

[76] I. Lindgren, in *Alpha-, Beta-, Gamma-Ray Spectroscopy, Ed. K. Siegbahn*, edited by K. Siegbahn (North-Holland, Amsterdam, 1965), Chap. A4, p. 1621.

[77] N. L. Rodning and L. D. Knutson, *Asymptotic D-state to S-state ratio of the Deuteron*, Phys. Rev. C **41**, 898 (1990).

[78] R. W. Bérard *et al.*, *Elastic electron deuteron scatttering*, Phys. Lett. **47B**, 355 (1973).

[79] G. G. Simon, Ch. Schmitt, and V. H. Walther, *Elastic electric and magnetic $e-d$ scattering at low momentum transfer*, Nucl. Phys. **A364**, 285 (1981).

[80] O. Dumbrajs *et al.*, *Compilation of the coupling constants and low-energy parameters*, Nucl. Phys. **B216**, 277 (1983).

[81] G. L. Payne, J. L. Friar, B. F. Gibson, and I. R. Afnan, *Configuration space Faddeev Calculations. I. Triton ground state properties*, Phys. Rev. C **22**, 823 (1980).

[82] B. L. G. Bakker, *Exploration of Phillips plot using separable potentials*, Ph.d. thesis, Vrije Universiteit te Amsterdam, 1973.

[83] N. W. Schellingerhout, *Factorizibility in the Numerical Few-Body Problem*, Ph.d. thesis, Rijksuniversiteit Groningen, 1995.

[84] J. L. Friar and B. F. Gibson, *Configuration space Faddeev calculations. V. Variational bounds*, Phys. Rev. C **24**, 2279 (1981).

[85] G. L. Payne, in *Models and Methods in few-body physics. Proceedings of the 8th Autumn School on the Models and Methods in Few-Body Physics held in Lisboa, Portugal, October 13-18, 1986, edited by L. S. Ferreira, A. C. Fonseca, and L. Streit, number 273 in Lecture Notes in Physics, pp 64* (Springer-Verlag, Berlin, 1987).

[86] G. Ellerkmann, *Untersuchung des anomalen Schwellenverhaltens der elastischen Neutron-Deuteron-Streuung mit Hilfe der W-Matrix-Methode*, Diplomarbeit, Universität Bonn, 1990.

[87] U. Kerwath, *Die W-Matrix-Methode im Dreinukleonenproblem: QBA-Rechnungen mit ungenähertem Restterm und Formulierung einer 3-Teilchen-W-Matrix*, Doktorarbeit, Universität Bonn, 1990.

[88] R. Machleidt, F. Sammarruca, and Y. Song, *Nonlocal nature of the force and its impact on nuclear structure*, Phys. Rev. C **53**, R1483 (1996).

[89] R. V. Reid, *Local phenomenological nucleon-nucleon potentials*, Ann. Phys. (N.Y.) **50**, 411 (1968).

[90] Chr. von Ferber, *W-Matrix-Formulierung der Deuteron Photodisintegration*, Diplomarbeit, Universität Bonn, 1988.

[91] C. B. Kuhl, *W-Matrix-Darstellung der Off-Shell-Amplituden für das Bonn-Potential*, Diplomarbeit, Universität Bonn, 1990.

[92] C. Lovelace, *Practical theory of three-particle states. I. Nonrelativistic*, Phys. Rev. **135**, B1225 (1964).

[93] M. G. Fuda, *The tensor force and the Faddeev equations*, Nucl. Phys. **A 116**, 83 (1968).

[94] J. Haidenbauer and Y. Koike, *Convergence of a separable expansion method in three-nucleon calculations*, Phys. Rev. C **34**, 1187 (1986).

[95] J. C. Aarons and I. H. Sloan, *Vector and tensor polarizations in nucleon-deuteron scattering*, Nucl. Phys. **A182**, 369 (1972).

[96] I. H. Sloan and J. C. Aarons, *Vector and tensor polarizations in nucleon-deuteron sacttering I*, Nucl. Phys. **A198**, 321 (1972).

[97] G. Derrick and J. M. Blatt, *Classification of Triton Wave Functions*, Nucl. Phys. **8**, 310 (1958).

[98] E. P. Harper, Y. E. Kim, and A. Tubis, *Trinucleon bound-state properties from an exact solution of theFaddeev equations with realistic nuclear forces*, Phys. Rev. Lett. **28**, 1533 (1972).

[99] J. L. Friar, B. F. Gibson, D. R. Lehman, and G. L. Payne, *Trinucleon asymptotic normalization constants: Comparison of ^{3}He and ^{3}H*, Phys. Rev. C **37**, 2859 (1988).

[100] W. C. Parke, Y. Koike, D. R. Lehman, and L. C. Maximon, *Quality of the Three-Nucleon Bound-State Wave Function from a Two-Nucleon-Separable Expansion Method*, Few-Body Systems **11**, 89 (1991).

[101] C. de Boor, *A Practical Guide to Splines* (Springer, New York, 1978).

[102] C. Gignoux and A. Laverne, *Three-nucleon bound state from Faddeev equations with a relistic potential*, Phys. Rev. Lett. **29**, 436 (1972).

[103] W. Glöckle, *The Quantum Mechanical Few-Body Problem* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1983).

[104] W. Glöckle, G. Hasberg, and A. R. Neghabian, *Numerical Treatment of Few-Body Equations in Momentum Space by Spline Method*, Z. Phys. **A305**, 217 (1982).

[105] W. Glöckle, *Computational Nuclear Phyics I. Nuclear Structure, Edited by K. Lagranke, J. A. Maruhn, and S. E. Koonin, pp 152* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1991).

[106] R. A. Brandenburg, Y. E. Kim, and A. Tubis, *Momentum-cutoff sensitivity in Faddeev calculations of trinucleon properties*, Phys. Rev. C **12**, 1368 (1975).

[107] Ch. Hajduk and P. U. Sauer, *Reliability of Faddeev Calculations in momentum Space for the Bound Three-Nucleon System*, Nucl. Phys. **A369**, 321 (1981).

[108] E. P. Harper, Y. E. Kim, and A. Tubis, *Faddeev Equations for Realistic Three-Nucleon Systems. I. Complete Angular Momentum Reduction and Antisymmetrization of States*, Phys. Rev. C **2**, 877 (1970).

[109] E. P. Harper, Y. E. Kim, and A. Tubis, *Faddeev Equations for Realistic Three-Nucleon Systems. II. Bound State Wave Functions*, Phys. Rev. C **6**, 126 (1972).

[110] H. Arenhövel, *Exchange Currents in electric transitions and the role of Siegert's theorem: A case study in deuteron photodisintegration*, Z. Phys. **25**, 302 (1981).

[111] J. L. Friar and S. Fallieros, *Extended Siegert Theorem*, Phys. Rev. C **29**, 1645 (1984).

[112] J. M. Eisenberg and W. Greiner, *Excitation Mechanisms of the Nucleus* (North-Holland, Amsterdam, 1970).

[113] M. M. Gianini and G. Ricco, *Photoreactions above the Giant Dipole Resonances* (Springer, New York, 1985).

[114] F. Partovi, *Deuteron photodisintegration and n-p capture below pion production threshold*, Phys. Rev. C **27**, 79 (1964).

[115] J. J. de Swart, *Theory of the photodisintegration of the deuteron and n-p capture*, Physica **25**, 233 (1959).

[116] A. Cambi and B. Mosconi and P. Ricci, *Cross section and polarization in deuteron photodisintegration: General formulas*, Phys. Rev. C **26**, 2358 (1982).

[117] A. Cambi and B. Mosconi and P. Ricci, *Relativistic and mesonic corrections to the forward cross section for* $d(\gamma, p)n$, Phys. Rev. Lett. **48**, 462 (1982).

[118] P. Wilhelm, W. Leidemann, and H. Arenhövel, *The relativistic spin-orbit current in deuteron photodisintegration below and above* π*-threshold*, Few-Body Systems **3**, 111 (1988).

[119] K.-H. Schmitt and H. Arenhövel, *Meson-retardation effects in deuteron photodisintegration below* π *threshold*, Few-Body Systems **6**, 117 (1989).

[120] J. M. Laget, *Photo- and electrodisintegration of few-body systems at intermediate energies: an introduction*, Cand. J. Phys **62**, 1046 (1984).

[121] Chr. v. Ferber, W. Sandhas, and H. Haberzettl, *Calculating the deuteron photodisintegration amplitudes using nonsingular scattering equations*, Phys. Rev. C **40**, 1923 (1989).

[122] H. Arenhövel and M. Sanzone, *Photodisintegration of the Deuteron (Few-Body Systems Suppl. 3* (Springer-Verlag, Wien, 1991).

[123] C. A. Barnes, J. H. Carver, G. H. Stafford, and D. H. Wilkinson, *The photodisintegration of the deuteron at intermediate energies. I.*, Phys. Rev. **86**, 359 (1952).

[124] Y. Birenbaum, S. Kahane, and R. Moreh, *Absolute cross section for the photodisintergation of deuterium*, Phys. Rev. C **32**, 1825 (1985).

[125] D. M. Skopik, Y. M. Shin, M. C. Phenneger, and J. J. Murphy, *Photodisintegration of deuterium determined from the electrodisintegration process*, Phys. Rev. C **9**, 531 (1974).

[126] De Pascale *et al.*, *Polarization asymmetry in the photodisintegration of the deuteron*, Phys. Rev. C **32**, 1830 (1985).

[127] De Pascale *et al.*, *A critcal review of the deuteron photodisinegration data*, Phys. Lett. **119B**, 30 (1982).

[128] K. H. Krause *et al.*, *Physics with MAMI, S. 85* (Institut für Kernphysik/SFB 201, Universität Mainz, 1988).

[129] H. Arenhövel and M. Schwamb, *priv. Mitteilung*, .

[130] L. Canton *et al.*, *A mseon-exchange isobar model for the $\pi^+ d \leftrightarrow pp$ reaction*, Can. J. Phys. **74**, 209 (1996).

[131] G. J. Lolos *et al.*, *Analyzing power of the $p\,d \to t\,\pi^+$ reaction at 305, 330, 375 and 400 MeV*, Nucl. Phys. **A386**, 477 (1982).

[132] P. Weber *et al.*, *Two-nucleon absorption of π^+ and π^- on ^3He across the Δ-resonance region*, Nucl. Phys. **A501**, 765 (1989).

[133] J. M. Cameron *et al.*, *Differential cross section and analyzing powers for the $p\,d \to {}^3He\,\pi^0$ reaction in the Δ-resonance region*, Nucl. Phys. **A472**, 718 (1987).

[134] C. B. Kuhl, *Integralgleichungs-Rechnungen zum Neutron-Deuteron-Streuproblem mit energieabhängiger Zweiteilchen-Wechselwirkung*, Doktorarbeit, Universität Bonn, 1996.

[135] F. Sperison *et al.*, *Comparison of a nearly complete $p\,d$ elastic scattering data set with faddeev calculations*, Nucl. Phys. **A422**, 81 (1984).

[136] W. Grübeler, *priv. Mitteilung*, .

[137] B. A. Craver, Y. E. Kim, and A. Tubis, *Proton-deuteron radiative capture and the two-body photodisintegration of ^3He*, Nucl. Phys. **A276**, 237 (1977).

[138] A. Lindner, *Drehimpulse in der Quantenmechanik* (Teubner, Stuttgart, 1984).

Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr. W. Sandhas für die Betreuung der Arbeit, sowie für die Freiheiten, die ich bei der inhaltlichen Gestaltung hatte. Besonders erwähnt werden sollen auch die zahlreichen Konferenzreisen und die daraus resultierenden Kontakte, zu denen ich Gelegenheit hatte.

Mein Dank gilt auch Prof. Dr. L. Canton und Prof. Dr. G. Cattapan für ihre Einladungen an die Universität Padova und die finanzielle Unterstützung in dieser Zeit. Außerdem sei für das Interesse an dieser Arbeit sowie an gemeinsamen Projekten gedankt.

Herrn Prof. Dr. H. Haberzettl und Prof. Dr. S. A. Sofianos verdanke ich weiterführende Diskussionen.

Herrn Priv. Doz. Dr. J. Haidenbauer danke ich für die Parameter der EST-Entwicklung der Potentiale.

Frau Prof. Dr. Ch. Elster danke ich für die Programm-Routinen und Parameter zu den Bonn Potentialen und dem Interesse an dieser Arbeit.

Allen Kollegen der Arbeitsgruppe, Mario Ackers, Michael Decker, Gert Ellerkmann, Thorsten Heck, Ralf Kersting, Clemens B. Kuhl, Jörg Richter, Bernhard Wierig, sowie Heide Wolf-Gazo, sei für die gute Unterstützung und das sehr freundliche Arbeitsklima gedankt.

Nicht zuletzt bin ich meiner Frau für ihr großes Verständnis und ihre Rücksicht sehr dankbar. Auch meinen Eltern und allen anderen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, möchte ich für die Unterstützung danken.