Vielteilchen-Wellenfunktionen im Quanten-Hall-Effekt

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms Universität
zu Bonn

vorgelegt von
Raimund Varnhagen
aus
Aachen

Bonn 1994

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms Universität Bonn

Referent:	Prof. Dr. Werner Nahm
Korreferent:	Prof. Dr. Günther von Gehlen
Tag der Promotion:	20. 12. 1994

Inhaltsverzeichnis

> ”. . . kann ich dir, lieber Leser, in den nächsten Kapiteln nicht viel Unterhaltung versprechen. Wenn du dich bei dem ennuyanten Zeug, das darin vorkommen wird, langweilst, so tröste dich mit mir, der all dieses Zeug sogar schreiben mußte. Ich rate dir, überschlag dann und wann eine Seite, dann kömmst du mit dem Buch schneller zu Ende – ach, ich wollt, ich könnt es ebenso machen! ”
>
> H. Heine, Die Bäder von Lucca

I Einleitung

Die Entdeckung der Quantisierung der Hall-Leitfähigkeit in ganzzahlige Vielfache von $\frac{e^2}{h}$ durch K. von Klitzing, G. Dorda und M. Pepper [1] ist neben der Entdeckung der Hochtemperatur-Supraleitung der bedeutendste Erfolg der Festkörperphysik der letzten zwanzig Jahre. Der Quanten-Hall-Effekt (QHE) wurde erstmals im Februar 1980 von K.v. Klitzing und seinen Mitarbeitern bei Untersuchungen des Einflusses von Magnetfeldern auf die elektronischen Eigenschaften von MOS (Metall-Oxid-Semiconductors) Feldeffekttransistoren gemessen, fast genau 100 Jahre nach der Beobachtung des klassischen Hall-Effekts durch Edwin Hall [2]. Die ungeheure Präzission der Quantisierung war sehr überraschend, da es vorher keine theoretischen Anzeichen dafür gegeben hat.

Ebenso erstaunlich war 1982 die Entdeckung durch D. Tsui, H. Strömer und D. Gossard, daß die Hall-Leitfähigkeit auch fraktionale Vielfache von $\frac{e^2}{h}$ annehmen kann. Seitdem unterscheidet man zwischen Integer Quanten-Hall-Effekt (IQHE) und Fraktionalem Quanten-Hall-Effekt (FQHE), insbesondere da bei der theoretischen Beschreibung des FQHE Elektron-Elektron-Wechselwirkungen berücksichtigt werden müssen, die man jedoch beim IQHE vernachlässigen kann. In Laufe der Zeit wurde klar, daß aber nicht beliebige fraktionale Vielfache von $\frac{e^2}{h}$ beim FQHE meßbar sind, sondern daß ausgezeichnete dominieren.

Seit diesen Entdeckungen hat der QHE sowohl Experimentalphysiker, als auch theoretische Physiker gleichermaßen interessiert, wie sich an der Flut von Publikationen in den letzten vierzehn Jahren zeigt. Einerseits liefert der Quanten-Hall-Effekt heute die genaueste Bestimmung der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstanten $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$, der wichtigsten Konstanten der Quantenelektrodynamik, und hat zur Neudefinition des elektrischen Widerstandes geführt. Andererseits ist man weit von einem Verständnis des Quanten-Hall-Effektes entfernt. Es gibt keine vollständige Theorie des QHE, wie zum Beispiel die BCS-Theorie der Supraleitung. Nichtdestotrotz hat der QHE viele neue und wertvolle Erkenntnisse für die theoretische Physik geliefert.

Einen sehr wichtigen Beitrag zum Verständnis topologischer Quantisierung beim IQHE lieferten D.J. Thouless et.al. [12] wie auch J.E. Avron und R. Seiler [14], die die Hall-Leitfähigkeit von der Kubo-Formel ableiteten und zeigten, daß sie als die erste Chernzahl eines Geradenbündels interpretiert werden kann, die automatisch eine ganzzahlige topologische Konstante ist (Abschnitt 2.3).

Eine andere bedeutende Erkenntnis zum Verständnis des QHE, war die Entdeckung von R. Laughlin, daß der Grundzustand eines Quanten-Hall-Systems, insbesondere beim FQHE, sich grundlegend von bisher bekannten Zuständen kondensierter Materie unterscheidet [18]. Er war in der Lage, durch Vergleich mit numerischen Rechnungen explizit ihre Wellenfunktionen, die sich erstmals nicht als Slaterdeterminante ausdrücken ließen, anzugeben. Diese Zustände beschreiben inkompressibele Quantenflüssigkeiten (Abschnitt 3.1).

In dieser Arbeit wird zunächst gezeigt, daß diese Inkompressibilitätseigenschaft des Grundzustandes nicht nur wie schon bekannt im IQHE, sondern auch im Falle des FQHE durch explizite Berücksichtigung der Elektron-Elektron-Wechselwirkungen eine unendlich-dimensionale Symmetrie bewirkt, deren explizite algebraische Formulierung es ermöglicht, das Randanregungsspektrum des QHE zu beschreiben und es mit bestimmten konformen Quantenfeldtheorien zu identifizieren (Abschnitt 3.3 - 3.6). Danach wird gezeigt, wie die oben erwähnten bislang unabhängigen Beschreibungen von Teilaspekten des QHE – topologische Quantisierung und Laughlin-Wellenfunktionen – zusammenhängen, indem ausgehend von Laughlin-Wellenfunktionen mit periodischen Randbedingungen Vektorbündel konstruiert werden, die die Entartung des Grundzustandes beschreiben (Abschnitt 4.1). Es stellt sich heraus, daß die erste Chernzahl dividiert durch den Rang des Vektorbündels die richtige Hall-Leitfähigkeit ergibt. Beschränkt man sich nur auf stabile Vektorbündel, so erhält man, zusammen mit einigen physikalisch natürlichen Bedingungen, nur die experimentell dominierenden Brüche; hier wird also ein Auswahlkriterium angegeben. In diesen Fällen kann man auch die Fluktuationen der Krümmung dieser Vektorbündel berechnen und zeigen, daß sie im Limes unendlich vieler Teilchen gegen Null konvergieren. Einerseits bedeutet dies physikalisch die Unabhängigkeit der Hall-Leitfähigkeit von den Randbedingungen, eine unerläßliche Voraussetzung für die Beobachtbarkeit des QHE, andererseits zeigt es eine neue mathematische Eigenschaft der Laughlin-Wellenfunktionen (Abschnitt 4.2). Der letzte Punkt ist auch für die Mathematik von Interesse, da ein Theorem von Donaldson den Zusammenhang zwischen Stabilität und der Existenz von Metriken mit konstanter Krümmung zeigt, und die Laughlin-Wellenfunktionen genau eine Metrik mit dieser Eigenschaft liefern (Abschnitt 4.3). Dies verdeutlicht das Zusammenspiel von experimenteller Physik, theoretischer Physik und Mathematik.

Dieser Arbeit liegen folgende bereits publizierte Artikel zu Grunde:

M. Flohr, R. Varnhagen, *Infinite Symmetry in the Fractional Quantum Hall Effect*, J. Phys. **A27** Math. Gen. (1994) 3999.

R. Varnhagen, *Topology and Fractional Quantum Hall Effect*, BONN-TH-94-22, hep-th 9411031, eingereicht bei Nucl. Phys. **B**.

I.1 Klassischer Hall-Effekt und Drude-Theorie

Die einfachste Theorie der elektrischen Leitfähigkeit ist halb-klassisch und die Quantenmechanik kommt nur indirekt ins Spiel. Sie basiert auf dem Konzept von mittlerer freier Weglänge l_0 und mittlerer freier Zeit τ_0. In diesem Bild wandert ein Elektron mit Ladung $-e$ und (Fermi-) Geschwindigkeit v_F eine mittlere Distanz $l_0 = v_F \tau_0$, bevor es zu einer neuen Geschwindigkeit gestreut wird, deren Mittelwert null ist. Ist ein schwaches elektrisches Feld E eingeschaltet, so wird das Elektron mit Masse m zwischen zwei Stößen auf die Geschwindigkeit

$$\Delta\vec{v} = \frac{-e\tau_0}{m}\vec{E} \qquad \text{(Driftgeschwindigkeit)} \tag{1.1}$$

beschleunigt. Addiert man nun die Beiträge aller Elektronen auf, erhält man als Stromdichte

$$\vec{j} = -ne\Delta\vec{v}\,, \tag{1.2}$$

wobei n die Elektronendichte bezeichnet. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \sigma_0 \vec{E} && (1.3)\\ \sigma_0 &= \frac{ne^2\tau_0}{m}\,. && (1.4) \end{aligned}$$

Quanteneffekte kommen durch die Bandstruktur, die die Masse der Elektronen m_e zu einer effektiven Masse m ändert, ins Spiel, sowie durch den Wert von τ_0. Außerdem folgt aus dem Pauli-Prinzip, daß nur die Elektronen an der Fermi-Kante zur Leitfähigkeit beitragen. In der Anwesenheit eines magnetischen Feldes wird die Bahn der Elektronen durch die Lorentzkraft F_L gekrümmt.

$$F_L = -e\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \tag{1.5}$$

Faßt man alle Kräfte zusammen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta\vec{v} &= -\frac{e}{m}\tau_0(\vec{E} + \frac{\Delta\vec{v}}{c} \times \vec{B}) && (1.6)\\ \Rightarrow \qquad \vec{j} &= \sigma_0\vec{E} - \frac{\sigma_0}{nec}\vec{j} \times \vec{B}\,. && (1.7) \end{aligned}$$

Von nun spezialisieren wir uns auf zwei Dimensionen, parametrisiert durch (x, y), wobei das Magnetfeld in die z-Richtung zeigt. Von (1.7) kann man leicht den spezifische Widerstands-Tensor ρ ablesen:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_0 & \dfrac{B}{nec} \\ -\dfrac{B}{nec} & \rho_0 \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

mit $\rho_0 = 1/\sigma_0$. Dies zeigt die lineare Abhängigkeit des Hall-Widerstandes vom Magnetfeld B beim klassischen Hall-Effekt. Der Leitfähigkeits-Tensor σ ist das Matrixinverse von ρ, dessen Komponenten wie folgt gegeben sind:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau_0^2} \\ \sigma_{xy} &= -\sigma_{yx} = \frac{nec}{B} + \frac{1}{\omega_c \tau_0} \sigma_{xx} \,. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Die Zyklotron Frequenz ist $\omega_c = \frac{eB}{mc}$. Dies liefert in vielen Experimenten sehr gut Approximationen der erzielten Messungen, insbesondere kann man so Ladungsträgerkonzentrationen bestimmen oder zwischen Elektron- oder Lochleitung unterscheiden. Da bei den bisherigen Überlegungen Quanteneffekte nur minimal berücksichtigt wurden, muß man die Grenzen der halbklassischen Approximation abschätzen, um die experimentellen Rahmenbedingungen für das Auftreten von Quantenphänomenen zu bestimmen. Diese treten dann auf, wenn 1. die Periode der Zyklotronfrequenz viel kleiner als die mittlere freie Zeit der Elektronen im Kristallgitter ist, d.h.

$$\omega_c \tau_0 \gg 1 \,, \tag{1.10}$$

und 2. nur die niedrigsten quantenmechanischen Energiezustände besetzt sind, d.h.

$$\hbar \omega_c \gg kT \,. \tag{1.11}$$

Setzt man eine typische mittlere freie Zeit von $\tau_0 = 10^{-12} s$ voraus, so muß man bei Temperaturen unterhalb von 4-5 Kelvin und Magnetfeldern stärker als 10 Tesla mit dem Auftreten von Quantenphänomenen rechnen, die nicht mehr durch die halbklassische Approximation beschrieben werden können.

I.2 Experimenteller Aufbau

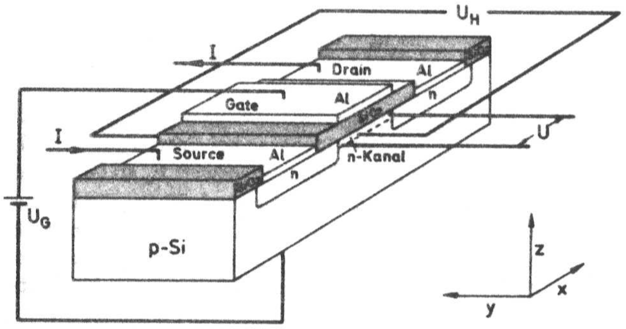


Abbildung 1: Selbstsperrender n-Kanal MOSFET

Abbildung 1 zeigt schematisch den Aufbau eines selbstsperrenden n-Kanal Metal-Oxide-Semiconductor-Field-Effect-Transistors (MOSFET) [7]. Auf eine (100)-Schnittfläche eines p-leitenden Silicium-Einkristalls ist über eine ungefähr 5000Å dicke Isolationsschicht aus SiO_2 eine Metallschicht als sogenannte Gate-Elektrode aufgedampft. Die Stromzuführung erfolgt über zwei als 'Source' und 'Drain' bezeichnete hochdotierte n-leitende Bereiche, die ebenfalls mit metallischen Elektroden versehen sind. Liegt zwischen Gate und Halbleiterkristall keine elektrische Spannung, so ist ein Stromfluß zwischen Source und Drain wegen sich ausbildender Sperrschichten an einem der beiden p-n-Übergängen nicht möglich (deshalb die Bezeichnung selbstsperrend). Durch Anlegen einer positiven Spannung zwischen Gate und Halbleiter wird hingegen unmittelbar an der Grenzfläche zwischen Isolator und Halbleiter (im Abstand von ~ 25 Å) durch Influenz ein n-leitender Kanal zwischen Source und Drain aufgebaut. Seine Leitfähigkeit kann durch die Gate-Spannung U_G gesteuert werden. Das besondere an dieser n-leitenden Randschicht ist nun, daß sie unter geeigneten Bedingungen als eine zwei-dimensionale Ladungsträgerschicht aufgefaßt werden kann. Dies erkennt man an folgender Abbildung.

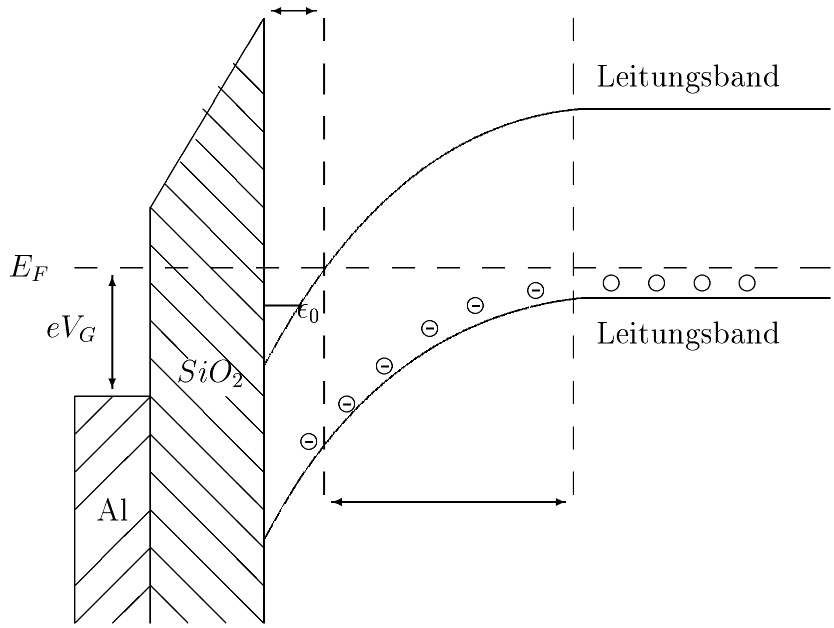


Abbildung 2: Querschnitt durch den MOSFET

Eine positive Spannung zwischen Gate und Halbleiter führt zu einer Absenkung der potentiellen Elektronenenergie in der Randschicht und somit zu der in der Abbildung 2 dargestellten Bandverbiegung. Überschreitet diese Spannung einen bestimmten Schwellenwert, so wird die untere Kante des Leitungsbandes an der Grenzfläche zum Isolator unter das Fermi-Niveau abgesenkt. Die Elektronen können sich allerdings nur parallel zur Grenzfläche bewegen, denn senkrecht zu der Grenzfläche befinden sie sich in einem angenähert dreieckigen Potentialtopf, und ihre Bewegung ist deshalb in dieser Richtung quantisiert. Löst man die Schrödingergleichung für dieses Potential, so sieht man, daß die Energiedifferenz zwischen den beiden untersten Energieniveaus $\epsilon_1 - \epsilon_0$ typischerweise $\sim$ 20 meV (oder $\sim$ 200 K) beträgt (siehe Abbildung 3). Dies ist viel größer als die Temperaturen, bei denen der QHE beobachtet wird, so daß nur der unterste Energiezustand besetzt ist, der eine typische Breite von $30 - 50$Å hat.

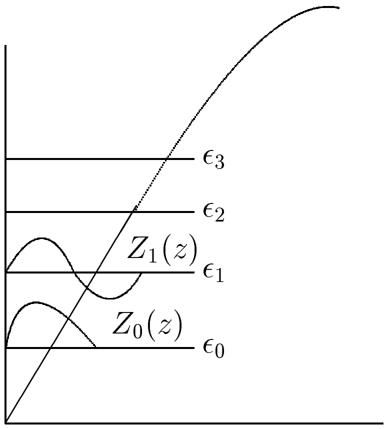


Abbildung 3: Diskrete Energieniveaus senkrecht zur Ladungsträgerschicht

I.3 Experimentelle Resultate

Bei Temperaturen unter 1 Kelvin und bei Magnetfeldern bis zu 20 Tesla fanden K.v. Klitzing und seine Mitarbeiter bei Si/SiO$_2$ Feldeffekttransistoren, daß die Hall-Leitfähigkeit in Abhängigkeit des magnetischen Feldes B, unabhängig von der experimentellen Anordnung, in Vielfache von $\frac{e^2}{h}$ quantisiert ist, sobald die longitudinale Leitfähigkeit σ_{xx} verschwindet. Dies ist abweichend von dem klassischen Ergebnis, das einen linearen Zusammenhang zwischen Hall-Leitfähigkeit und magnetischem Feld vorhersagt. Abbildung 4 zeigt ein solches Experiment für einen GaAs/Al$_x$Ga$_{1-x}$As-Halbleiter; man erkennt sehr deutlich das gleichzeitige Auftreten von Hall-Plateaus und dem Verschwinden der longitudinalen Leitfähigkeit.

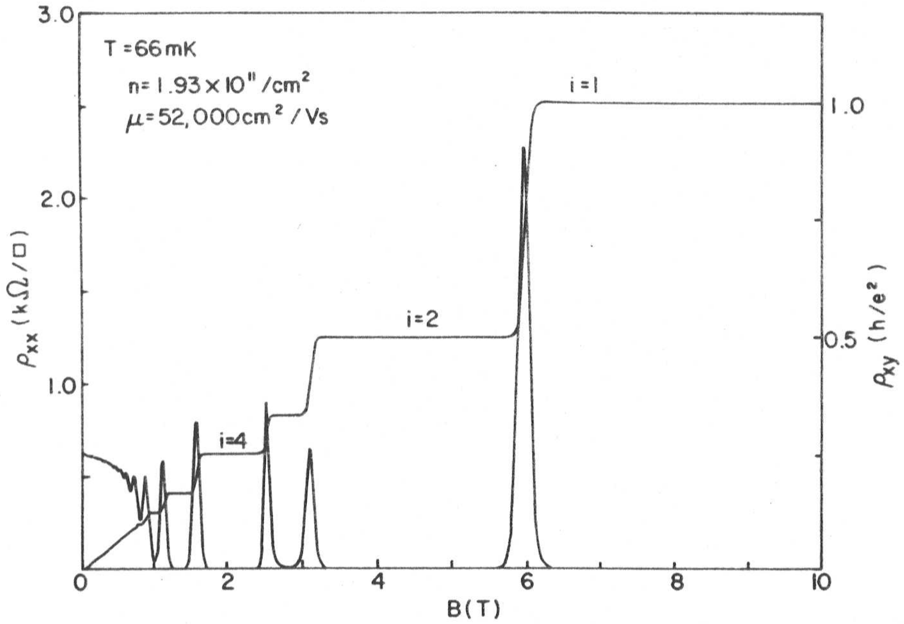


Abbildung 4: ρ_{xx} und ρ_{xy} gegen B

Die ungeheure Präzision (relative Genauigkeit von $\sim 10^{-8}$) dieses Experiments war sehr überraschend, da bisher der elektrische Widerstand oder die elektrische Leitfähigkeit eine materialabhängige Größe waren, die von Temperatur, magnetischem Feld, Frequenz und anderen Größen abhing, vor allem aber von der Größe und Geometrie des Leiters. Der letzte Punkt läßt sich relativ einfach verstehen und ist eine bis dahin nicht berücksichtigte Besonderheit der Zweidimensionalität. Ist b die Breite des Quanten-Hall-Systems, so gilt in diesem quasi zwei-dimensionalen Problem für die Stromdichte: $j = I/b$. Es gilt also:

$$\sigma_H^{\text{spez.}} = \frac{j}{E_H} = \frac{I}{V_H} = \sigma_H \,. \tag{1.12}$$

Somit sind die spezifische Hall-Leitfähigkeit und die Hall-Leitfähigkeit identisch, und die Abmessungen des Systems spielen keine Rolle mehr.

Wie weitere Experimente gezeigt haben, sind Verunreinigungen und Störstellen in den Halbleitern für die Beobachtbarkeit des QHE notwendig. Durch Reduktion der Verunreinigungen und Störstellen und Messung der Hall-Leitfähigkeit bei Temperaturen im Milli-Kelvin-Bereich bei gleichzeitiger Erhöhung der Ladungsträgerkonzentration (dies ist nur in GaAs/Al$_x$Ga$_{1-x}$As Halbleitern möglich), konnten D. Tsui, H. Strömer und D. Gossard 1982 auch eine Quantisierung der Hall-Leitfähigkeit in $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ von $\frac{e^2}{h}$ messen. Wie in Abbildung 2 zu sehen ist, findet man heute ganze Serien fraktionaler Quantisierung. Da durch die Verringerung der Verunreinigungen die Breite der Hall-Plateaus immer schmaler wird und damit auch schwerer meßbar, ist das deutlichste Anzeichen für den FQHE das Verschwinden der longitudinalen Leitfähigkeit, die über drei Größenordnungen variiert.

Abbildung 5: ρ_{xx} und ρ_{xy} gegen B

Deutlich zeigt diese Abbildung, daß bestimmte fraktionale Werte dominieren. Dies wird noch deutlicher in der nächsten Abbildung, die nur den Ausschnitt der Brüche kleiner als 1 zeigt.

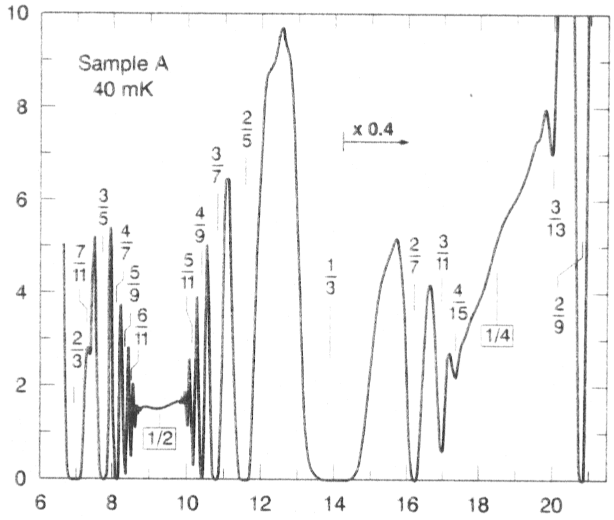


Abbildung 6: ρ_{xx} und ρ_{xy} gegen B für $\nu < 1$

Man sieht leicht, daß die dominierenden, beobachteten, fraktionalen Werte kleiner als 1 sich folgendermaßen in zwei Serien parametrisieren lassen:

$$\nu = \frac{n}{2pn \pm 1} \tag{1.13}$$

$$\nu = 1 - \frac{n}{2pn \pm 1} \tag{1.14}$$

Ziel dieser Doktorarbeit ist es unter anderem, die Dominanz dieser Brüche zu erklären. Es sei aber bemerkt, daß durchaus auch bei anderen fraktionalen Werten der Hall-Leitfähigkeit ein Minimum in der longitudinalen Leitfähigkeit gemessen wird; diese Minima sind aber wesentlich undeutlicher ausgeprägt und ein Hall-Plateau läßt sich nicht nachweisen (siehe z.B. $\nu = \frac{7}{11}$ in Abbildung 6).

> ”The difference between a mathematician and a physicist is that a mathematician is interested in the complex properties of simple systems, but a physicist is interested in the simple properties of complex systems.”
>
> Mark Kac

II Integer Quanten-Hall-Effekt

II.1 Landauproblem

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst das einfachste quantenmechanische Problem eines spinlosen, unabhängigen Elektrons in einem konstanten magnetischen Feld betrachten. Dies ist ein sehr altes und bekanntes Problem und soll der Festlegung der Notation dienen. Die Schrödingergleichung für solch ein Elektron ist folgendermaßen gegeben:

$$H\psi = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2\psi = E\psi \,, \tag{2.1}$$

wobei für das Vektorpotential $\vec{A}$ gilt $B = \partial_x A_y - \partial_y A_x$ und $\vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$. Führt man den Geschwindigkeitsoperator $\vec{v} = \frac{1}{m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})$ ein, so läßt sich der Hamiltonoperator wie folgt schreiben:

$$H = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) \,, \tag{2.2}$$

und es gilt

$$[v_x, v_y] = \frac{\hbar\omega_c}{m} i \quad \text{mit} \quad \omega_c = \frac{eB}{mc} \,. \tag{2.3}$$

Vergleicht man (2.2) und (2.3) mit dem Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators $H_{\text{Oz.}} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega x^2$ und der Vertauschungsrelation $[p, x] = \frac{\hbar}{i}$ und nutzt aus, daß dessen Energieeigenwerte durch $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ gegeben sind, so sieht man durch Koeffizientenvergleich, daß das Energiespektrum eines einzelnen zwei-dimensionalen Elektrons in einem senkrechten magnetischen Feld durch

$$E = \hbar\omega_c (n + \frac{1}{2}) \tag{2.4}$$

bestimmt ist. Aufgrund der Translationsinvarianz ist jedes dieser Energieniveaus – auch Landau-Level genannt – unendlich entartet. Diese Symmetrie wird durch folgende, sogenannte magnetische Translationsoperatoren

$$k_x = \frac{\hbar}{i}\partial_x - \frac{e}{c}A_x - \frac{e}{c}By \tag{2.5}$$

$$k_y = \frac{\hbar}{i}\partial_y - \frac{e}{c}A_y + \frac{e}{c}Bx \tag{2.6}$$

erzeugt. Es gilt

$$[k_x, k_y] = -\hbar m\omega_c i \tag{2.7}$$

$$[k_i\,, v_j] = 0 \qquad \text{für} \qquad i, j \in \{x, y\} \,. \tag{2.8}$$

Die Eigenfunktionen lassen sich am einfachsten konstruieren, wenn man ähnlich wie beim harmonischen Oszillator Auf- und Absteigeoperatoren $a^\dagger$ und a einführt:

$$a = \frac{\sqrt{m}}{2}(iv_x - v_y) \tag{2.9}$$

$$a^\dagger = \frac{\sqrt{m}}{2}(-iv_x - v_y) \,, \tag{2.10}$$

so daß sich der Hamiltonoperator auch schreiben läßt als:

$$H = aa^\dagger + a^\dagger a\,. \tag{2.11}$$

Das Einführen von komplexen Koordinaten vereinfacht die Schreibweise: $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ und $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$, $\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$. Die Auf- und Absteigeoperatoren lauten nun:

$$a = \sqrt{\frac{1}{m}}(\hbar\partial_{\bar{z}} - \frac{ie}{c}A) \tag{2.12}$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{1}{m}}(-\hbar\partial_z + i\frac{e}{c}\bar{A})\,, \tag{2.13}$$

wobei $A = A_x + iA_y$ und $\bar{A} = A_x - iA_y$. Der niedrigste Landau-Level ist durch $a\psi(x,y) = 0$ bestimmt. In der Landau-Eichung ($A_x = -By$, $A_y = 0$) bzw. der symmetrischen Eichung ($A_x = -\frac{1}{2}By$, $A_y = \frac{1}{2}Bx$) sind die Grundzustände wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &= f(z)\exp\left(-\frac{eB}{2\hbar c}y^2\right) \\ &= f(z)\exp\left(-\frac{1}{2l^2}y^2\right) \qquad \text{Landau} - \text{Eichung} \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &= f(z)\exp\left(-\frac{eB}{4\hbar c}\,|z|^2\right) \\ &= f(z)\exp\left(-\frac{1}{4l^2}\,|z|^2\right) \qquad \text{symmetrische Eichung} \end{aligned} \tag{2.15}$$

wobei $f(z)$ eine holomorphe Funktion in z, und $l^2 = \frac{\hbar c}{eB}$ die fundamentale Länge des Quanten-Hall-Systems ist. Deshalb können wir von nun an $\hbar = c = l^2 = m = 1$ setzen. In der symmetrischen Eichung wird die Entartung eines Landau-Levels am besten durch die Einführung der Operatoren

$$\begin{array}{rclcl} b &=& -ik_x + k_y &=& \frac{\bar{z}}{2} + \partial \\ b^\dagger &=& ik_x + k_y &=& \frac{z}{2} - \bar{\partial} \end{array} \tag{2.16}$$

beschrieben. Es gelten nun die Vertauschungsrelationen:

$$[a, a^\dagger] = 1 \qquad [b, b^\dagger] = 1 \tag{2.17}$$

und alle anderen Relationen verschwinden. Das Vakuum ist durch $a\psi_{0,0} = 0$ und $b\psi_{0,0} = 0$ bestimmt und gegeben als:

$$\psi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\frac{1}{4} \mid z \mid^2) \,. \tag{2.18}$$

Mithilfe dieser Operatoren können schließlich die Zustände eines einzelnen zwei-dimensionalen Elektrons in einem senkrechten Magnetfeld ausgedrückt werden:

$$\psi_{n,l} = \frac{(b^\dagger)^l (a^\dagger)^n}{\sqrt{l!n!}} \psi_{0,0} \,, \tag{2.19}$$

wobei n den n-ten Landau-Level charakterisiert (d.h. $E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2})$) und l den Eigenwert zum Drehimpulsoperator $J = b^\dagger b - a^\dagger a$. Diese Eigenzustände sind unendlich entartet, da $l = 0, \ldots, \infty$. In niedrigsten Landau-Level ist der polynomiale Anteil der Wellenfunktion holomorph und im nächsten Landau-Level tritt $\bar{z}$ in höchstens der ersten Potenz auf. Im allgemeinen ist im n-ten Landau-Level die höchste Potenz von $\bar{z}$, $n - 1$.

Betrachtet man nun eine endliche Fläche A, in der sich das Elektron bewegen kann, so kann man zeigen, daß die Entartung pro Landau-Level endlich ist. Die Zahl der Zustände N_S ist nun durch die Anzahl der magnetischen Flußquanten, die auch aus der Supraleitung bekannt sind, bestimmt:

$$N_S = \frac{BA}{\Phi_0} = \frac{\Phi_{\text{mag}}}{\Phi_0} \,, \tag{2.20}$$

wobei $\Phi_0 = \frac{hc}{e}$ der magnetische Fluß eines einzelnen elementaren Flußquants ist. In diesem Fall wird der niedrigste Landau-Level durch

$$\psi_{0,k} \sim z^k \exp(-\frac{1}{4} \mid z \mid^2) \qquad \text{mit} \qquad k = 0, \ldots, N_S - 1 \tag{2.21}$$

aufgespannt.

Man betrachte nun ein N-Teilchen-System und definiere den Filling-Faktor ν als die Zahl der Elektronen pro Landau-Level:

$$\nu = \frac{N}{N_S} = \frac{nhc}{eB} \qquad \text{mit} \qquad n = \frac{N}{A} \,. \tag{2.22}$$

Vergleicht man dies mit der Formel für die Hall-Leitfähigkeit aus der Drude Theorie (1.9):

$$\sigma_{xy} = \frac{nec}{B} = \frac{e^2}{h}\nu \,, \tag{2.23}$$

so könnte man zu der naïven Erklärung kommen, daß bei gefülltem Landau-Level keine Streuung möglich ist und damit σ_{xx} verschwindet, der Integer-Effekt somit durch gefüllte Landau-Level beschrieben wird. Aber dieses Argument kann nicht mehr in nicht-translationsinvarianten Systemen angewandt werden, kann nicht den fraktionalen Effekt erklären, kann nicht die ungeheure Präzission des QHE und die Rolle von Verunreinigungen verständlich machen. Bis heute gibt es keine Theorie des QHE, die all diese Phänomene vollständig beschreiben kann. R. Laughlin hat als erster ein Erklärung gegeben, die zumindest die Bedeutung der Eichinvarianz und der Existenz einer Energielücke für die Quantisierung der Hall-Leitfähigkeit zeigte, wenn die Fermi-Energie in dieser Energielücke liegt [10].

II.2 Laughlins Argument und Randanregungen

R. Laughlin hat ursprünglich für seine Überlegungen eine Zylinder Geometrie gewählt. B.I. Halperin reproduzierte R. Laughlins Argumente in einer ringförmigen Geometrie, konnte aber zusätzlich die Bedeutung von Randanregungen beschreiben, die in Kapitel 3 näher behandelt werden sollen. Er betrachtet eine Ansammlung nicht wechselwirkender Elektronen in einer ringförmigen dünnen Schicht mit einem senkrechten homogenen magnetischen Feld B [11].

Abbildung 7: Ringförmige dünne Schicht mit homogenem Magnetfeld B und Fluß Φ im Innern des Ringes.

Zusätzlich sei ein variabler magnetischer Fluß Φ innerhalb des Ringloches. Weiter sei angenommen, daß kein elektrisches Feld vorhanden ist, so daß das elektrostatische Potential, das die Elektronen im Inneren der Schicht sehen, konstant ist, und daß die beiden Radien des Ringes, r_1 und r_2, sehr groß im Vergleich zum Zyklotronradius $r_c = \frac{c}{\omega_c}$ sind. Wir wählen eine Eichung, so daß das Vektorpotential $\vec{A}$ nur in azimutale ϕ Richtung zeigt und der Betrag nur von der Entfernung vom Ursprung abhängt:

$$A = \frac{1}{2}Br + \frac{\Phi}{2\pi r}\,. \tag{2.24}$$

Der Hallstrom I erzeugt ein magnetisches Moment $\mu = \frac{IS}{c}$, wobei S die eingeschlossene Fläche ist. Nimmt man an, daß der magnetische Fluß Φ im Loch des Ringes sich um $\delta\Phi$ ändert, korrespondiert das zu einer Energieänderung $\delta E = \mu\frac{\delta\Phi}{S}$. Somit finden wir für den Strom die folgende Formel:

$$I = c\frac{\delta E}{\delta\Phi}\,. \tag{2.25}$$

In Entfernung von den Rändern der Schicht haben die elektronischen Einteilchenzustände folgende Form:

$$\psi_{m,\nu}(\vec{r}) \simeq \text{const} \times e^{im\phi} f_\nu(r - r_m)\,, \tag{2.26}$$

wobei m und ν ganze Zahlen sind ($\nu \geq 0$), und f_ν der $(\nu+1)$-te Eigenzustand des eindimensionalen harmonischen Oszillators ist. Der Radius r_m ist bestimmt durch

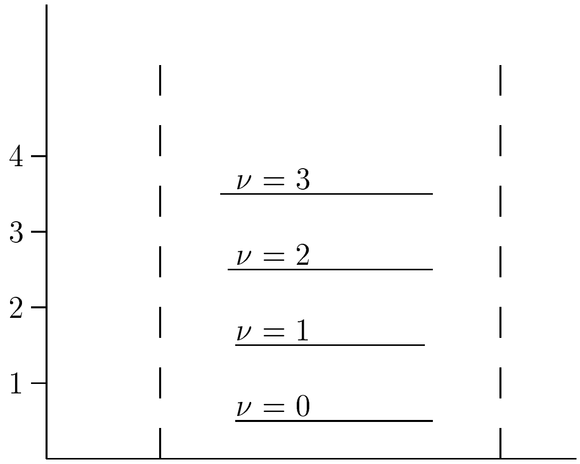
$$B\pi r_m^2 = m\Phi_0 - \Phi\,. \tag{2.27}$$

Die Breite von f_ν ist von der Ordnung r_c, somit gilt Gleichung (2.26) nur, falls $r_1 \ll r_m \ll r_2$ und die Energie dieser Zustände ist wie im letzten Abschnitt

$$E_{m,\nu} = \hbar\omega_c(\nu + \frac{1}{2})\,. \tag{2.28}$$

Da die Wellenfunktionen (2.26) symmetrisch um r_m sind, verschwindet der Gesamtstrom im Inneren der dünnen Schicht.

An den Rändern des Systems sieht dies ganz anders aus. Die Bedingung des Verschwindens der Wellenfunktionen an den Rändern des Systems bewirkt, daß die Energie $E_{m,\nu}$ monoton anwächst, wenn sich r_m den Rändern r_1 oder r_2 nähert und nimmt den Wert $E_{m,\nu} = \hbar\omega_c(2\nu + \frac{1}{2})$ für $r_m = r_1$ oder $r_m = r_2$ an. Die Energiekurve ist in folgender Abbildung skizziert:



æ

Abbildung 8: Energie in den Einheiten $\hbar\omega$ als Funktion von r_m

Da nun die Dichte $\mid \psi_{m,\nu}(\vec{r}) \mid$ nicht mehr symmetrisch um $r = r_m$ ist, kann man auch nicht mehr erwarten, daß für diese Randzustände der Strom verschwindet. Tatsächlich gilt

$$I_{m,\nu} = c \frac{\partial E_{m,\nu}}{\partial \Phi} = -\frac{e}{h} \frac{\partial E_{m,\nu}}{\partial m} \,. \tag{2.29}$$

Man findet $I_{m,\nu} < 0$ für $r_m \simeq r_2$, während $I_{m,\nu} > 0$ für $r_m \simeq r_1$. Man beachte, $\mid \partial E_{m,\nu} / \partial m \mid$ ist nichts anderes als die Energiedifferenz zwischen benachbarten Energieniveaus bei festem ν. Der totale Strom, der von allen Zuständen in einem schmalen Energieintervall δE bei gegeben ν getragen wird, ist also $\frac{e}{h}\delta E$ am inneren Rand und $-\frac{e}{h}\delta E$ am äußeren Rand. Es sei angenommen, daß die Fermi-Energie zwischen den Energien zweier Landau-Level zu $\nu = n$ und $\nu = n-1$ im Innern des Ringes liege, und daß nahe r_2 und r_1 die Fermi-Energien durch $E_F^{(2)}$ und $E_F^{(1)}$ gegeben seien, aber immer noch in dem Intervall zwischen E_n und E_{n-1} liegen. Die Randströme am inneren und äußeren Rand heben sich nun auf, außer in dem Energieintervall zwischen $E_F^{(1)}$ und $E_F^{(2)}$. Dann ist der gesamte Strom, der durch die Randströme getragen wird, durch

$$I = n\frac{e}{h}(E_F^{(2)} - E_F^{(1)}) \tag{2.30}$$

gegeben, wobei jeder Landau-Level niedriger Energie beiträgt, wie in Abbildung 8 zu sehen ist. Mit $E_F^{(2)} - E_F^{(1)} = eU$ gilt für die Hall-Leitfähigkeit

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h}n\,. \tag{2.31}$$

Weiter haben R. Laughlin und B.I. Halperin gezeigt, daß diese Randströme nicht durch schwache Unordnungseffekte oder Verunreinigungen zerstört werden. Weitere Arbeiten von D.J. Thouless et.al. bzw. von J.E. Avron und R. Seiler zeigen noch deutlicher den geometrischen bzw. topologischen Ursprung der Hall-Leitfähigkeit, wie im nächsten Abschnitt dargestellt wird.

II.3 Von der Kubo-Formel zu Chernzahlen

Ein zwei-dimensionales wechselwirkendes Elektonensystem in einem Magnetfeld senkrecht zur Ebene wird durch folgenden N-Teilchen Hamiltonoperator beschrieben:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m}\left(\vec{p}_i - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + \sum_{i=1}^{N} U(x_i, y_i) + \sum_{i<j} V(\mid r_i - r_j \mid)\,. \tag{2.32}$$

Den in y-Richtung fließenden Hallstrom $< j_y >$ kann man durch langsames Einschalten eines elektrischen Feldes E in x-Richtung erhalten. In erster Ordnung Störungstheorie ist die Hall-Leitfähigkeit durch die Kubo-Formel gegeben:

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2\hbar}{iA} \sum_{E^\alpha < E_F < E^\beta} \frac{(v^y)_{\alpha\beta}(v^x)_{\beta\alpha} - (v^x)_{\alpha\beta}(v^y)_{\beta\alpha}}{(E^\alpha - E^\beta)^2}\,, \tag{2.33}$$

wobei E_F die Fermi-Energie bezeichnet, und die Summation über alle Zustände unter- und oberhalb der Fermi-Energie läuft. Die Indizes α und β stehen für die Bänder des N-Teilchen Hamiltonoperators (2.32) ohne eingeschaltetes externes elektrisches Feld. Der Geschwindigkeitsoperator, der in der Kubo-Formel auftaucht, ist gegeben durch:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{m}(\vec{p}_i - \frac{e}{c}\vec{A})\,. \tag{2.34}$$

Der N-Teilchen-Translationsoperator

$$T(\vec{a}) \equiv \prod_{i=1}^{N} t_i(\vec{a}) \tag{2.35}$$

vertauscht mit dem Hamiltonoperator bei geeignetem Potential $U(x,y)$. Um diese Symmetrie zu realisieren soll die Vielteilchen-Wellenfunktion folgende verallgemeinerten periodischen Randbedingungen erfüllen:

$$t_i(L_1)\psi = e^{2\pi i\varphi_1}\psi \tag{2.36}$$

$$t_i(L_2)\psi = e^{2\pi i\varphi_2}\psi\,, \tag{2.37}$$

wobei die Parameter φ_1 und φ_2 wegen der totalen Antisymmetrie der Wellenfunktion unabhängig von den Teilchen-Indizes i sind. Mit Hilfe der Eichtransformation

$$\psi \longrightarrow \exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\tilde{\varphi}_1(x_1+\ldots+x_N)\Big) \tag{2.38}$$

$$\times\exp\Big(-\frac{i}{\hbar}\tilde{\varphi}_2(y_1+\ldots+y_N)\Big)\psi \tag{2.39}$$

$$p_i^x \longrightarrow p_i^x+\tilde{\varphi}_1 \tag{2.40}$$

$$p_i^y \longrightarrow p_i^y+\tilde{\varphi}_2 \tag{2.41}$$

können die Geschwindigkeitsoperatoren in der Kuboformel durch $\frac{1}{\hbar}\partial\tilde{H}/\partial\tilde{\varphi}_1$ und $\frac{1}{\hbar}\partial\tilde{H}/\partial\tilde{\varphi}_2$ ausdrücken werden, wobei $\tilde{H}$ der eichtransformierte Hamiltonoperator ist. So kann nach einigen Umformungen die Kubo-Formel folgendermaßen geschrieben werden:

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{i\hbar}\sum_{E_\alpha<E_F<E_\beta}\left(\langle\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial\varphi_2}\mid\beta\rangle\langle\beta\mid\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial\varphi_2}\rangle-\langle\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial\varphi_1}\mid\beta\rangle\langle\beta\mid\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial\varphi_1}\rangle\right)\,. \tag{2.42}$$

Um weiter fortzufahren, muß man – wie allgemein akzeptiert – annehmen, daß der Grundzustand durch eine Energielücke von den nächsten Anregungen getrennt ist. Das stimmt mit den experimentellen Beobachtungen des Verschwindens der longitudinalen Leitfähigkeit überein, da σ_{xx} proportional zu $\exp(-\frac{\Delta}{kT})$ sein sollte, wobei Δ die Größe der Energielücke ist. Dann läßt sich die Kubo-Formel weiter vereinfachen und für den Fall, daß der Grundzustand nicht entartet ist, erhält man:

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{\hbar i}\left(\langle\frac{\partial\psi^0}{\partial\varphi_1}\mid\frac{\partial\psi^0}{\partial\varphi_2}\rangle-\langle\frac{\partial\psi^0}{\partial\varphi_2}\mid\frac{\partial\psi^0}{\partial\varphi_1}\rangle\right)\,. \tag{2.43}$$

Soweit haben wir nur formale Umformungen gemacht, und man kann nicht sehen, warum die Hall-Leitfähigkeit quantisiert sein sollte. Nimmt man nun an, daß der obige Ausdruck unabhängig von den Randbedingungen ist, so kann man über die unterschiedlichen Randbedingungen mitteln und erhält:

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi_1 d\varphi_2 \left(\langle\frac{\partial\psi^0}{\partial\varphi_1} \mid \frac{\partial\psi^0}{\partial\varphi_2}\rangle - \langle\frac{\partial\psi^0}{\partial\varphi_2} \mid \frac{\partial\psi^0}{\partial\varphi_1}\rangle\right) . \qquad (2.44)$$

Dieses Integral ist eine topologische Invariante. Es ist die erste Chernzahl eines $U(1)$ Geradenbündels der Grundzustandswellenfunktion über der Basismannigfaltigkeit eines Torus T^2, der durch φ_1 und φ_2 parametrisiert ist. Diese Größe ist quantisiert als ganzzahliges Vielfaches von $\frac{e^2}{h}$, falls der Grundzustand nicht entartet ist und durch eine endliches Energielücke von den angeregten Zuständen getrennt ist [12, 13, 14, 16, 17].

Betrachtet man nun einen r-fach entarteten Grundzustand, so muß man Gleichung (2.44) folgendermaßen ersetzten:

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h}\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi_1 d\varphi_2 \left(\langle\frac{\partial\psi_i^0}{\partial\varphi_1} \mid \frac{\partial\psi_i^0}{\partial\varphi_2}\rangle - \langle\frac{\partial\psi_i^0}{\partial\varphi_2} \mid \frac{\partial\psi_i^0}{\partial\varphi_1}\rangle\right) , \qquad (2.45)$$

wobei $\{\psi_i, i = 1..r\}$ eine orthogonale Basis des Grundzustand-Hilbertraumes ist [15]. Diese Integral ist wieder eine topolgische Invariante, nämlich die erste Chernzahl des Vektorbündels mit dem Grundzustands-Hilbertraum als Faser über derselben Basismannigfaltigkeit wie im nicht-entarteten Fall. Die Hall-Leitfähigkeit ist nun als folgender Bruch gegeben:

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h}\frac{c_1}{r} , \qquad (2.46)$$

wobei c_1 die erste Chernzahl des oben genannten Vektorbündels ist.

Der Nachteil dieses Zuganges zum FQHE ist, daß weder die in der Ebene definierten Laughlin-Wellenfunktionen noch Haldanes äquivalente Ausdrücke auf einer sphärischen Oberfläche Entartung zeigen. Auch sollte die Entartung stabil gegen Verunreinigungen und Unordnungeffekten sein, da allgemein angenommen wird, daß diese genauso essentiell für die Beobachtbarkeit des fraktionalen Effektes sind, wie sie es für den ganzzahligen Effekt sind.

III Laughlin-Wellenfunktionen und $W_{1+\infty}$

III.1 Laughlin-Wellenfunktionen

Bei der Beschreibung des IQHE haben wir die Elektron-Elektron-Wechselwirkungen völlig außer acht gelassen. Naïv betrachtet, werden sie durch Verunreinigungen und Unordnung im Festkörper, die für die Beobachtbarkeit des QHE unerläßlich sind, abgeschirmt. Der FQHE tritt aber nur auf, wenn die Verunreinigungen und die Unordnung im Festkörper bei gleichzeitiger Absenkung der Temperatur verringert werden. Nun müssen die Elektron-Elektron-Wechselwirkungen berücksichtigt werden. R. Laughlin war der erste, der erkannte, daß in solch einem System die Wellenfunktionen des Grundzustandes völlig verschieden sind von allen bisher bekannten Vielteilchen-Wellenfunktionen und konnte sie explizite anzugeben.

In Kapitel 2.1 haben wir das Landau-Problem, ein einzelnes zweidimensionales Elektron in einem senkrechten magnetischen Feld, behandelt. Nun wollen wir den Fall von N solchen Elektronen betrachten. Ohne Wechselwirkung zwischen den Elektronen spaltet sich das Vielteilchen-Problem in N Kopien des Einteilchen-Problems auf. Deshalb bekommt man N Operatoren identisch zu den Einteilchen Operatoren a und b, aber nun mit einem das i. Elektron bezeichnend Index i versehen: a_i und b_i.

$$H = \sum_{i=1}^{N} (a_i^\dagger a_i + a_i a_i^\dagger)\,. \tag{3.1}$$

Da das Magnetfeld B die Zahl der Zustände N_S in einem Landau-Level kontrolliert (2.20) und somit die Elektronendichte pro Zustand, kann es als eine Art 'externer Druck' aufgefaßt werden. Tatsächlich ist die richtige quantenmechanische Größe der Elektronendichte der Filling-Faktor:

$$\nu = \frac{N}{N_S}\,. \tag{3.2}$$

In Abschnitt 2.1 haben wir gesehen, daß jeder Landau-Level hoch entartet ist. Die Berücksichtigung der Elektron-Elektron-Wechselwirkung durch ein Potential

$$\sum_{1\leq i<j\leq N} V(|\,r_i - r_j\,|) \tag{3.3}$$

hebt diese Entartung auf. Da diese Wechselwirkung aber sehr schwach ist im Vergleich zu dem sehr starken Magnetfeld B, kann dieses Problem gut in erster Ordnung Störungstheorie bezüglich (3.3) behandelt werden. Man braucht keine Vermischung unterschiedlicher Landau-Level zu berücksichtigen. Der Grundzustand des gestörten Systems ist in symmetrischer Eichung durch eine Vielteilchen-Wellenfunktion der Form

$$\psi(z_1,\ldots,z_N) = f(z_1,\ldots,z_N)\exp(-\frac{1}{4}\sum_i |\,z_i\,|^2) \tag{3.4}$$

gegeben, wobei f eine holomorphe Funktion in den Elektron-Koordinaten $z_i = x_i + iy_i$ bezeichnet. Laughlin hat durch 'numerische Experimente' herausgefunden, daß für den Filling-Faktor $\nu = \frac{1}{2p+1}$ der Grundzustand durch folgende Wellenfunktion gegeben ist [18] (Laughlin-Wellenfunktionen):

$$\psi_p(z_1,\ldots,z_N) = \prod_{1\leq i<j\leq N} (z_i - z_j)^{2p+1}\exp(-\frac{1}{4}\sum_i |\,z_i\,|^2)\,. \tag{3.5}$$

p muß eine positive ganze Zahl sein damit das Pauli-Prinzip erfüllt ist. Dabei spielt es keine Rolle, ob das Potential V in (3.3) von der Form $\frac{1}{r}$, $-\ln(r)$, $\exp(-r^2/2)$ oder kurzreichweitig, d.h. durch Delta-Funktionen beschrieben, ist. Aufwendige numerische Berechnungen zeigen, daß diese Wellenfunktionen erstaunlich nahe bei den numerisch exakten Lösungen sind. Schon für 5-6 Teilchen ist die Übereinstimmung mehr als 99%. Den Zusammenhang zwischen diesen Wellenfunktionen und dem Filling-Faktor ν versteht man am einfachsten mithilfe von (2.21): die höchste Potenz von z_i plus eins ist genau die Zahl der für ein Elektron erlaubten Zustände. Im Falle der Laughlin-Wellenfunktionen ist dies $N_S = (2p+1)(N-1)+1$ für jedes Elektron z_i. Im Limes unendlich viele Elektronen ($N \to \infty$) konvergiert der Filling-Faktor ν gegen $1/(2p+1)$.

Diese Wellenfunktionen beschreiben völlig neue Zustände kondensierter Materie, eine Art Quanten-Flüssigkeit, deren Eigenschaften man am besten in einem Vergleich mit einem zwei-dimensionalen Plasma verstehen kann. Diese Analogie basiert auf der Interpretation der quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsdichte als die kanonische Dichteverteilung eines klassischen Systems wechselwirkender Teilchen. Setzt man zum Beispiel

$$|\,\psi_p(z_1,\ldots,z_N)\,| = \exp(-\frac{U_0}{k_B T})\,, \tag{3.6}$$

dann ist U_0 durch diese Beziehung definiert. Es ist üblich (aber nicht nötig) $k_B T = 2p+1$ zu wählen, so daß

$$U_0 = -(2p+1)^2 \sum_{i<j} \ln |\, z_i - z_j \,| + (2p+1) \sum_i \frac{|\, z_i \,|^2}{4}\,. \tag{3.7}$$

Der erste Term der rechten Seite beschreibt die Wechselwirkung zwischen Teilchen der Ladung $(2p+1)$ in einem zwei-dimensionalen Plasma, während der zweite Term von einer Wechselwirkung mit einem externen elektrischen Potential herrührt. Berücksichtigt man, daß der Laplace-Operator angewandt auf den zweiten Term eine Konstante ergibt, sieht man, daß dieses Potential von einer gleichförmigen Hintergrund Ladungsverteilung

$$\rho_{Hintergrund} = 1 \tag{3.8}$$

kommt. Eine zwingende Eigenschaft eines Plasmas ist seine Ladungsneutralität. Da die Elektronen hier Ladung $(2p+1)$ haben, folgt, daß ihre Dichte

$$\rho_{Elektronen} = \frac{1}{(2p+1)} \tag{3.9}$$

gleichförmig ist.

S.M. Girvin hat gezeigt, daß im thermodynamischen Limes die Transformation $\nu \to 1-\nu$ für bestimmte Hamiltonoperatoren im niedrigsten Landau-Level eine exakte Symmetrie ist [19]. Deshalb kann man aus der Kenntnis eines Zustandes des Systems bei Filling-Faktor ν auch den entsprechenden Zustand des Systems bei Filling-Faktor $1-\nu$ konstruieren, indem man das Vakuum durch den Zustand des gefüllten Landau-Levels ersetzt, und Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren vertauscht.

Verallgemeinerungen dieser Wellenfunktionen zu anderen Filling-Faktoren existieren. Dies sind Wellenfunktionen vom Laughlin-Typ, genauer von folgender Gestalt:

$$\psi_K(\{z_i^I\}) \sim \prod_{\substack{I\\ i<j}} (z_i^I - z_j^I)^{K_{II}} \prod_{\substack{I<J\\ i\leq j}} (z_i^I - z_j^J)^{K_{IJ}} \exp(-\frac{1}{4}\sum_{I,i} \mid z_i^I \mid^2) \tag{3.10}$$

Die Elektronen $\{z_i^I\}$ sind auf n verschiedene Unterbänder verteilt, die mit $I, J = 1, \ldots, n$ bezeichnet werden. Jedes dieser Unterbänder enthält N_I Elektronen. K_{IJ} ist eine symmetrische mit positiven ganzen Zahlen besetzte Matrix, um die Einwertigkeit der Wellenfunktion zu garantieren. Das Pauli-Prinzip ist erfüllt, wenn die Werte auf der Hauptdiagonalen ungerade sind.

Die höchste Potenz von z_i^I plus eins gibt nun die Zahl der Zustände, die durch das Elektron z_i^I besetzt werden können:

$$K_{II}(N_I - 1) + \sum_{I\neq J} K_{IJ}N_J = \sum_J K_{IJ}N_J - K_{II}\,. \tag{3.11}$$

Andererseits ist die Zahl der Zustände durch die Anzahl der magnetischen Flußquanten N_Φ bestimmt, man erhält also für alle I:

$$N_\Phi = \sum_J K_{IJ}N_J - K_{II} \longrightarrow \sum_J K_{IJ}N_J \qquad \text{für} \quad N_I, N_\Phi \longrightarrow \infty\,. \tag{3.12}$$

Es folgt: $N_I = \sum_J (K^{-1}_{IJ}) N_\Phi$. Also ist der Filling-Faktor ν gegeben durch:

$$\nu = \frac{\sum_I N_I}{N_\Phi} = \sum_{IJ} (K^{-1})_{IJ}\,. \tag{3.13}$$

III.2 Composite Fermionen Theorie

Nachdem es in den letzten Jahren immer klarer wurde, daß die experimentell dominierende Serie von fraktionalen Filling-Faktoren durch

$$\nu = \frac{n}{2pn \pm 1} \tag{3.14}$$

beschrieben wird, wurde als eine mögliche Erklärung von J.K. Jain die sogenannte Composite-Fermionen-Theorie vorgeschlagen. Die Grundidee dieser Theorie kommt aus der BCS-Theorie der Supraleitung, wo aufgrund von Phononen-Wechselwirkungen zwei fermionische Elektronen ein 'bosonisches' Cooperpaar bilden. Analog betrachtet man nun 'gebundene' Zustände aus einem Fermion und einer geraden Anzahl magnetischer Flußquanten. Auf diese Weise läßt sich zumindest sehr schnell der Zusammenhang von Laughlin-Wellenfunktionen und Gleichung (3.14) verstehen. Wie letztendlich die Wechselwirkung zwischen Elektronen und Flußquanten zustande kommt, ist bis heute unklar; es gibt kein theoretisches Modell, das das Entstehen solcher gebundener Zustände vernünftig beschreiben kann. Inspiriert durch diesen Ansatz haben B.I. Halperin, P.A. Lee und N. Read [38] aber zeigen können, daß für $\nu = \frac{1}{2}$ fermionische Quasiteilchen existieren, die sich wie Quasiteilchen einer Fermi-Flüssigkeit ohne magnetisches Feld verhalten. Für magnetische Felder, die um ΔB von dem magnetischen Feld $B_{\frac{1}{2}}$, das zu $\nu = \frac{1}{2}$ korrespondiert, abweichen, bewegen sich diese Quasiteilchen mit einem Zyklotronradius r_c, der dem Zyklotronradius des effektiven Feldes ΔB entspricht. Dies hat wichtige experimentelle Konsequenzen, die auch beobachtet werden [39, 40]. Beispielsweise stimmen die theoretischen Werte für r_c mit der experimentellen Bestimmung durch akustische Oberflächenwellen überein.

In Abschnitt 3.4 werden die Inkompressibilitätseigenschaften der Laughlinschen Wellenfunktionen untersucht und überraschenderweise finden diese eine natürliche Erklärung in der Composite-Fermionen-Theorie. Deshalb soll in diesem Abschnitt kurz die ursprünglichen Ideen dieser Theorie dargestellt werden.

Startet man mit dem IQHE und nimmt an, daß n Landau-Level gefüllt sind, dann gilt für die Zahl der magnetischen Flußquanten pro Elektron

$$\frac{\Phi_{\text{mag}}}{N\Phi_0} = \frac{1}{n}\,. \tag{3.15}$$

Heftet man nun Flußschläuche mit Fluß $\Phi = 2p\Phi_0$ an jedes Elektron an, so werden aus den Elektronen Anyonen mit statistischen Parameter $\alpha = e\Phi/2 = 2\pi p$. Ist p eine ganze Zahl, dann ist der statistische Parameter α irrelevant und die Elektronen bleiben Fermionen. Diese Fermionen mit 'angeklebten' Flußquanten nennt man Composite-Fermionen. Unter Verwendung von Mean-Field-Argumenten ergibt sich für den Filling-Faktor:

$$\frac{\Phi_{\text{mag}}}{N\Phi_0} = \frac{1}{n} + 2p \Rightarrow \nu = \frac{n}{2pn+1}\,, \tag{3.16}$$

und erhält folgendes effektives magnetische Feld

$$B_{\text{eff}} = N\frac{\Phi_0}{A}(\frac{1}{n} + 2p) \tag{3.17}$$

Die grundlegende Idee ist, der FQHE wird lediglich als ein IQHE für Composite-Fermionen angesehen.

Wenn man Erwartungswerte via Feynmanschen Pfadintegralen berechnet, tragen nur die geschlossenen Pfade bei, da man die Spur von $\exp(-\beta H)$ betrachtet. Geschlossene Pfade sind gegeben durch den Austausch von zwei Elektronen oder das Herumführen eines Elektrons um ein zweites. Die Phase, die mit jedem dieser Pfade verbunden ist, hat zwei Beiträge. Zum einen die statistische Phase durch die Fermistatistik der Elektronen, zu anderen die Aharanov-Bohm-Phase durch den in der Schleife eingeschlossenen magnetischen Fluß. Jedoch ändert eine gerade Anzahl von Flußquanten nicht die Statistik und der Aharanov-Bohm-Faktor wird identisch eins. Daraus folgt, daß das Anheften einer geraden Anzahl von Flußquanten nicht die quantenmechanischen Erwartungswerte ändert [24].

Mit Hilfe diese Bildes kann man die Laughlin-Wellenfunktionen neu interpretieren. Die Laughlin-Wellenfunktion des IQHE für $\nu = 1$ kann einfach als Slaterdeterminante ausgedrückt werden, da alle Zustände im untersten Landau-Level besetzt sind:

$$\psi_1(z_1,\ldots,z_N) = \prod_{i<j}(z_i - z_j)\exp(-\frac{1}{4}\sum_i |z_i|^2)\,. \tag{3.18}$$

Die Laughlin-Wellenfunktionen zu $\nu = 1/(2p+1)$ lassen sich auch folgendermaßen schreiben:

$$\psi_{2p+1}(z_1, \ldots, z_N) = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{2p} \psi_1(z_1, \ldots, z_N) \,. \tag{3.19}$$

Der Faktor

$$D = \prod_{i<j} (z_i - z_j) \tag{3.20}$$

beschreibt also gerade das oben erwähnte Anheften eines Flußquants. Für den Filling-Faktor $\nu = \frac{n}{2pn \pm 1}$ ist die Wellenfunktion gegeben durch:

$$\psi_\nu = D^{2p} \psi_n \,, \tag{3.21}$$

wobei ψ_n die Wellenfunktion des IQHE mit $\nu = n$ ist.

III.3 Inkompressibilität

In diesem Abschnitt soll der Begriff der Inkompressibilität und seine Bedeutung für den QHE erklärt werden. Die gewöhnliche thermodynamische Definition der isothermen Kompressibilität eines zwei-dimensionales System am absoluten Nullpunkt (d.h. auch die Entropie ist null) ist die relative Flächenabnahme pro Erhöhung des Druckes um eine Einheit.

$$\kappa = -\frac{1}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial P} \right)_T \,. \tag{3.22}$$

Es ist nützlicher die thermodynamischen Eigenschaften als Funktionen der Fläche und nicht des Druckes auszudrücken:

$$\kappa^{-1} = -A \frac{\partial P}{\partial A} = A \frac{\partial^2 E}{\partial A^2} \,. \tag{3.23}$$

Für Vielteilchensysteme ist der Energie im thermodynamischen Limes eine extensive Größe und die Energiedichte hängt nur von der Teilchendichte ab, d.h. $E = N\epsilon(n)$, wobei $n = N/A$ ist. Diese Beziehung erlaubt es, die Kompressibilität mit dem chemischen Potential in Beziehung zu setzen:

$$\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_A = \left(\frac{\partial N \epsilon(n)}{\partial N} \right)_A = \frac{d}{dn} (n \epsilon(n)) \,. \tag{3.24}$$

Andererseits gilt

$$\left(\frac{\partial E}{\partial A}\right)_N = -n^2 \frac{d\epsilon(n)}{dn} . \tag{3.25}$$

Vergleicht man die letzten drei Gleichungen so ergibt sich:

$$\kappa^{-1} = n^2 \frac{d\mu}{dn} . \tag{3.26}$$

Bei einem inkompressibelen System gilt $\kappa = 0$. Dies tritt also immer dann auf, wenn das chemische Potential des Systems als eine Funktion der Teilchendichte diskontinuierlich wächst. Das bedeutet, daß es eine endliche Energie kostet, ein Teilchen-Loch Paar zu erzeugen.

Im folgenden wollen wir zeigen, daß Inkompressibilität am absoluten Nullpunkt eine notwendige Bedingung für das Auftreten des QHE ist, und daß Inkompressibilität bei einer vom Magnetfeld abhängigen Elektronendichte immer zu lückenlosen Anregungen, die an den Rändern lokalisiert sind, führt.

Betrachten wir ein endliches zweidimensionales Elektronengas bei Temperatur Null, wenn das chemische Potential μ in eine Energielücke fällt. Wir wollen nun die Änderung der lokalen Ströme in Abhängigkeit des chemischen Potentials μ untersuchen. Da μ in einer Energielücke liegt, ist die Änderung der im Zentrum des Systems lokalisierten Ströme null. Die Stromdichte kann sich nur an den Rändern des Systems ändern (siehe Abbildung 8 auf Seite 21). Es folgt aus der Ladungserhaltung, daß somit die Randströme konstant sind. Setzt man die Stromänderung in Beziehung zur Änderung der Magnetisierung M, so erhält man:

$$\delta I = \frac{c}{A} \delta M . \tag{3.27}$$

Außerdem gilt:

$$\delta M = \frac{\partial M}{\partial \mu} \mid_B \delta\mu = \frac{\partial N}{\partial B} \mid_\mu \delta\mu , \tag{3.28}$$

wobei die zweite Gleichung aus einer Maxwell Relation folgt. Kombiniert man (3.27) und (3.28), so erhält man folgende Beziehung für die Änderung der

Randströme in Abhängigkeit des chemischen Potentials μ, wenn μ in einer Energielücke liegt:

$$\frac{\delta I}{\delta \mu} = c \frac{\partial n}{\partial B} \,|_{\mu} \ . \tag{3.29}$$

Daraus folgt: Immer wenn die Energielücke bei einer Elektronendichte auftritt, die vom magnetischen Feld abhängt, müssen lückenlose Anregungen an den Rändern des Sytems existieren. Diese Randanregungen formen ein chirales eindimensionales Elektronensystem mit vielen interessanten Eigenschaften, die wir in Abschnitt 3.5 beschreiben wollen. Mikroskopisch gesehen rührt Gleichung (3.29) von der Abhängigkeit des Spektrums vom Vektorpotential und damit auch vom Magnetfeld her

A. Cappelli, C.A. Trugenberger and G.R. Zemba haben als erste für den IQHE eine algebraische Formulierung der Inkompressibilität gefunden. Im folgenden Abschnitt soll diese auf den FQHE verallgemeinert werden, d.h. der Zusammenhang zwischen Inkompressibilität und Laughlin-Wellenfunktionen erklärt werden. Dies ermöglicht es uns, eine komplette algebraische Formulierung des Spektrums der Randanregungen in einer einheitlichen Sichtweise sowohl für den IQHE, als auch für den FQHE zu geben [30].

III.4 Unendliche Symmetrie im FQHE

Eine klassische inkompressibele Flüssigkeit wird durch ihre Verteilungsfunktion beschrieben:

$$\rho(z, \bar{z}, t) = \rho_0 \chi_{O_A(t)}, \qquad \rho_0 = \frac{N}{A}, \tag{3.30}$$

wobei $\chi_{O_A(t)}$ die charakteristische Funktion der Oberfläche $O_A(t)$ ist und z und $\bar{z}$ die komplexen Koordinaten in der Ebene sind. Da Teilchenzahl N und mittlere Dichte ρ_0 konstant sind, ist auch die Fläche A konstant. Die einzige mögliche Änderung als Antwort auf eine äußere Kraft ist die Verformung der Oberfläche. Die Formänderungen bei konstanter Fläche können durch flächenerhaltenden Diffeomorphismen der zwei-dimensionalen Ebene beschrieben werden. Aus dem Liouville-Theorem folgt, daß kanonische Transformationen das Phasenraum-Volumen erhalten. Flächenerhaltende Diffeomorphismen können deshalb auch als kanonische Transformationen in einem zwei-dimensionalen Phasenraum angesehen werden. Um den Formalismus kanonischer Transformationen anzuwenden postuliert man eine nichtverschwindende Poissonklammer zwischen z und $\bar{z}$:

$$\{z, \bar{z}\} = \frac{i}{\rho_0}\,, \tag{3.31}$$

so daß für Funktionen f und g von z und $\bar{z}$ gilt:

$$\{f, g\} = \frac{i}{\rho_0}(\partial f \bar{\partial} g - \bar{\partial} f \partial g)\,. \tag{3.32}$$

Kanonische Transformationen sind gewöhnlich durch erzeugende Funktionen $w(z, \bar{z})$ wie folgt definiert:

$$\delta z = \{w(z, \bar{z}), z\}\,, \qquad \delta \bar{z} = \{w(z, \bar{z}), \bar{z}\}\,. \tag{3.33}$$

Eine Basis dieser Generatoren ist

$$w_{n,m} = \rho_0^{\frac{n+m}{2}} z^n \bar{z}^m\,, \tag{3.34}$$

die die klassische w_∞ Algebra erfüllen:

$$\{w_{n,m}, w_{k,l}\} = -i(mk - nl) w_{n+k-1,m+l-1}\,. \tag{3.35}$$

Diese w_∞ Transformationen erzeugen Anregungen des klassischen Grundzustandes aufgrund von Teilchen-Wechselwirkungen und externen Potentialen, deren explizite Form hier nicht benötigt wird. Angenommen, man hat ein rotationsinvariantes konvexes Potential, dann hat die Konfiguration minimaler Energie die Form einer Scheibe mit Radius R:

$$\rho_{GS}(z, \bar{z}) = \rho_0 \Theta(R^2 - z\bar{z}), \tag{3.36}$$

wobei Θ die Heavysidesche Stufenfunktion ist. Die klassischen kleinen Anregungen sind gegeben durch die infinitesimalen Deformationen von ρ_{GS} unter den flächenerhaltenden Diffeomorphismen:

$$\delta \rho_{n,m} = \{w_{n,m}, \rho_{GS}\}\,. \tag{3.37}$$

Unter Verwendung der Poissonklammern (3.32) erhält man:

$$\delta \rho_{n,m} = i(\rho_0 R^2)^{\frac{n+m}{2}} (n - m) e^{i(n-m)\theta} \delta(R^2 - z\bar{z})\,. \tag{3.38}$$

Diese korrespondieren zu Dichtefluktuationen an den Rändern des klassischen Tropfens.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß die Laughlin-Wellenfunktionen Quantenversionen von chiralen inkompressibelen Flüssigkeiten beschreiben.

Die größte Symmetrie des Vielteilchen-Hamiltonoperators (3.1) wird erzeugt durch

$$\mathcal{L}_{m,n} = \sum_{i=1}^{N} (b_i^\dagger)^{m+1} (b_i)^{n+1} \qquad \text{für} \qquad n, m \leq -1\,. \tag{3.39}$$

Diese Generatoren kommutieren mit dem Hamiltonoperator, da jedes einzelne b_i und $b_i^\dagger$ mit den a_j, $a_j^\dagger$ $(i, j = 1, \ldots, N)$ vertauscht, und erfüllen folgende Kommutator-Relation:

$$[\mathcal{L}_{n,m}, \mathcal{L}_{k,l}] = \sum_{s=0}^{\mathrm{Min}(m,k)} \frac{(m+1)!(k+1)!}{(m-s)!(k-s)!(s+1)!} \mathcal{L}_{n+k-s,m+l-s} - (m \leftrightarrow l, n \leftrightarrow k)\,. \tag{3.40}$$

Dieselbe Algebra erhält man, wenn man die quantisierte Form der w_∞ Algebra betrachtet, die durch die Substitutionen von $i\hbar\{\ ,\ \} \longrightarrow [\ ,\ ]$ und $(z \longrightarrow z\,,\ \bar{z} \longrightarrow \partial)$ gegeben ist. Die durch $\mathcal{L}_{m,n}$ erzeugte Algebra heißt $W_{1+\infty}$. A. Cappelli, C.A. Trugenberger und G.R. Zemba haben gezeigt, daß die Grundzustands-Wellenfunktion des IQHE ψ_1 für $\nu = 1$ durch einen Teil der Generatoren der $W_{1+\infty}$ annihiliert wird:

$$\mathcal{L}_{m,n} \psi_1(z_1, \ldots, z_N) = 0 \qquad n > m \geq -1\,. \tag{3.41}$$

Dies bedeutet, daß ψ_1 ein Höchstgewichts-Vektor der $W_{1+\infty}$ ist, und gibt somit eine algebraische Formulierung der Inkompressibilitätseigenschaften des QHE.

Will man dieses Ergebnis auf den FQHE verallgemeinern, so muß man Elektron-Elektron-Wechselwirkungen berücksichtigen. Dies kann man ad hoc dadurch erreichen, daß man die Definition von b_i auf folgende Weise ändert:

$$b_i = \partial_i + \frac{\bar{z}_i}{2} - 2p \sum_{i \neq j} \frac{1}{z_i - z_j}\,, \tag{3.42}$$

während $b_i^\dagger$ unverändert bleibt. Für $p = 0$ erhält man die alte Definition für b_i und $b_i^\dagger$, so daß man die Notation nicht ändern muß. Die Kommutatoren von b_i und $b_i^\dagger$ erfüllen nun folgende Relationen:

$$\begin{aligned} [b_i, b_i^\dagger] &= 1 + 2p\pi \sum_{i \neq j} \delta(z_i - z_j)\,, && (3.43) \\ [b_i, b_j^\dagger] &= -2p\pi\delta(z_i - z_j) \ \text{ for } \ i \neq j\,. && (3.44) \end{aligned}$$

Definiert man $\mathcal{L}_{mn}$ wie zuvor (3.39), nur mit dem neuen b_i, so erfüllen diese $\mathcal{L}_{mn}$ bis auf einige Deltafunktionsterme die alten Vertauschungsregeln (3.40). Im Falle von Fermionen, die dem Pauli-Prinzip gehorchen müssen, spielen aufgrund der Antisymmetrie Deltafunktionen der Form $\delta(z_i - z_j)$ keine Rolle. Für den untersten Landau-Level, wo die Wellenfunktionen bis auf den exponentiellen Term holomorphe Funktionen sind, kann man die Operatoren b_i und $b_i^\dagger$ vereinfachen, wenn sie nur auf dem holomorphen Anteil der Wellenfunktion operieren:

$$\begin{aligned} b_i &= \partial_i - 2p \sum_{i \neq j} \frac{1}{z_i - z_j} && (3.45) \\ b_i^\dagger &= z_i\,. && (3.46) \end{aligned}$$

Man beachte: $b_i^\dagger$ operiert nur durch Multiplikation. Somit erscheint im untersten Landau-Level auch keine Deltafunktion mehr. In der Standardnotation für die $W_{1+\infty}$, setzt man

$$W_n^{(s)} \sim \mathcal{L}_{n+s-2,s-2} \qquad s \geq 1 \qquad n \geq -s+1\,, \qquad (3.47)$$

wobei $W_n^{(s)}$ die n-te Fourierkomponente eines Spin s Feldes beschreibt. Nach einigen Rechnungen (siehe Anhang A) erhält man die Aktion der Moden $W_n^{(s)}$ auf den Laughlin-Wellenfunktionen ψ_p (3.5):

$$W_n^{(s)}\psi_p = (s-1)! \sum_{1 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_{s-1} \leq N} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ z_{j_0} & z_{j_1} & \cdots & z_{j_{s-2}} & z_{j_{s-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_{j_0}^{s-2} & z_{j_1}^{s-2} & \cdots & z_{j_{s-2}}^{s-2} & z_{j_{s-1}}^{s-2} \\ z_{j_0}^{s-1+n} & z_{j_1}^{s-1+n} & \cdots & z_{j_{s-2}}^{s-1+n} & z_{j_{s-1}}^{s-1+n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ z_{j_0} & z_{j_1} & \cdots & z_{j_{s-2}} & z_{j_{s-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_{j_0}^{s-2} & z_{j_1}^{s-2} & \cdots & z_{j_{s-2}}^{s-2} & z_{j_{s-1}}^{s-2} \\ z_{j_0}^{s-1} & z_{j_1}^{s-1} & \cdots & z_{j_{s-2}}^{s-1} & z_{j_{s-1}}^{s-1} \end{vmatrix}} \psi_p$$

(3.48)

Man sieht sofort, die negativen Moden annihilieren die Laughlin-Wellenfunktionen ψ_p:

$$W_n^{(s)}\psi_p = 0 \qquad \text{für} \qquad -s < n \leq -1\,. \tag{3.49}$$

Dies Resultat bedeutet: Die Laughlin-Wellenfunktionen sind Höchstgewichts-Vektoren der quantisierten Algebra der nicht-singulären flächenerhaltenden Diffeomorphismen, d.h. wir haben eine algebraische Formulierung eines inkompressibelen Quantenfluids gefunden, die sowohl den IQHE für $\nu = 1$ als auch FQHE für $\nu = 1/(2p+1)$ beschreibt. Interessanterweise wird der IQHE automatisch durch eine Einteilchen-Theorie beschrieben, während für den FQHE Elektron-Elektron-Wechselwirkungen berücksichtigt werden müssen. Man beachte, daß wir hier nur die nicht singulären Diffeomorphismen betrachten, die singulären Diffeomorphismen, gegeben durch $n \leq -s$, lassen sich zwar problemlos in die $W_{1+\infty}$ einfügen, beschreiben aber Transformationen, die die Topologie des Quantenfluids verändern, indem im Ursprung eine Singularität entsteht.

An diesem Punkt mag sich der Leser wundern, daß b_i und $b_i^\dagger$ nun nicht mehr zueinander hermitesch konjugiert sind. Jedoch können wir ein inneres Produkt der Form

$$< \psi_1 \,|\, \psi_2 >= \int \psi_1^\dagger \mu \psi_2 \tag{3.50}$$

definieren, so daß b_i und $b_i^\dagger$ wieder zueinander hermitesch konjugiert sind. Dies läßt sich erreichen, wenn μ wie folgt gegeben ist:

$$\mu(z_1, \bar{z}_1, \ldots, z_N, \bar{z}_N) = \prod_{i<j} |\, z_i - z_j \,|^{-4p} \;. \tag{3.51}$$

Man wird im folgenden sehen, daß dieses Maß sehr wichtig ist, insbesondere für die Interpretation des Wechselwirkungsterms bei der Definition von b_i. Die Einführung des nicht-trivialen Maßes bewirkt zunächst, daß der Hamiltonoperator nicht hermitesch wird. D.h. wir müssen auch die Definition von $a_i^\dagger$ folgendermaßen ändern, während a_i unverändert bleibt:

$$a_i^\dagger = -\partial_i + \frac{\bar{z}_i}{2} + 2p \sum_{i<j} \frac{1}{z_i - z_j}\,. \tag{3.52}$$

Die Vertauschungsrelationen sind nun wie folgt gegeben:

$$
\begin{aligned}
[a_i, a_i^\dagger] &= 1 - 2p\pi \sum_{i \neq j} \delta(z_i - z_j)\,, && (3.53)\\
[a_i, a_j^\dagger] &= 2p\pi \delta(z_i - z_j) \;\text{ for }\; i \neq j\,. && (3.54)
\end{aligned}
$$

Der Hamilton ist definiert wie zuvor:

$$H = \sum_i (a_i^\dagger a_i + a_i a_i^\dagger) \tag{3.55}$$

und kommutiert mit der $W_{1+\infty}$ ohne Auftreten von Deltafunktionen. Die Landau-Level Struktur bleibt weiterhin erhalten, und die Laughlin-Wellenfunktionen für $\nu = 1/(2p+1)$ sind Eigenfunktion im niedrigsten Landau-Level.

Der Konfigurationsraum für unterscheidbare Teilchen ist durch

$$C_N = \{(z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C};\; z_i \neq z_j \text{ für } i \neq j\} \tag{3.56}$$

gegeben. Die $(a_i, a_i^\dagger)$ können als kovariante Ableitungen in einem $U(1) \otimes \ldots \otimes U(1)$ Bündel über C_N betrachtet werden, ähnlich wie in dem Papier von E. Verlinde über den nicht abelschen Aharanov-Bohm-Effekt [31]. Somit ist die Krümmung dieses Bündels durch Gleichung (3.53) bestimmt und beschreibt ein konstantes magnetisches Feld plus $2p$ an jedes Elektron angeheftete Flußquanten. Dies entspricht aber genau J.K. Jains Interpretation des FQHE in der Composite-Fermionen-Theorie, die in Abschnitt 3.2 behandelt wurde. Diese Flußquanten können in einer abelschen Chern-Simons-Theorie durch lokalisierte Wilson-Loops beschrieben werden. Da diese Wilson-Loops durch Vertexoperatoren ausgedrückt werden können, sieht man, daß ihre N-Punktfunktionen, lokalisiert bei z_i, proportional zu unserem Maß μ (3.51) sind. Dies erklärt auch frühere Überlegungen über den Zusammenhang von Vertex-Operatoren und Laughlin-Wellenfunktionen [33, 21, 34].

Dieses Bild ist in Übereinstimmung mit den Argumenten von A. Lopez und E. Fradkin [24], daß das Addieren einer geraden Anzahl von Flußquanten zu jedem Elektron die Erwartungswerte invariant läßt. Bestimmt man die Erwartungswerte der Laughlin-Wellenfunktionen, so hat man das Maß μ zu berücksichtigen:

$$\int \psi_p^\dagger \mu \psi_p dz^N\,. \tag{3.57}$$

Es ist einfach zu sehen, daß dieser Ausdruck unabhängig von p ist, d.h. Addieren der Flußquanten ändert nicht den Erwartungswert.

In dieser Formulierung betrachten wir beim FQHE einen Hamiltonoperator ohne expliziten Wechselwirkungsterm wie im Falle des IQHE, aber führen indirekt die Wechselwirkung über ein nicht triviales Maß ein. Dieses rührt von einer N-Punktfunktion der Flußquanten in einer abelschen Chern-Simons-Theorie her.

An dieser Stelle mag sich der Leser fragen, ob unser Bild vom FQHE nicht nur eine komplizierte Sichtweise des IQHE ist. Jedoch haben wir gesehen, daß das Addieren von $2p$ Flußquanten nicht alle Observabelen unverändert läßt, sondern daß das effektive magnetische Feld sich durch die Transformation der b_i, $b_i^\dagger$, a_i und $a_i^\dagger$ auch ändert. E. Verlinde hat sogar gezeigt, daß bei einem Hamiltonoperator ähnlich dem unseren ohne Magnetfeld die obige Transformation die S-Matrix ändert. Unser Bilde vom FQHE ist somit nicht nur eine mathematische Umformulierung des IQHE, sondern auch zur Beschreibung neuer physikalischer Effekte nützlich.

III.5 Randanregungen

Falls das Hall-System in einem quantisierten Zustand ist, dann gibt es eine Energielücke für die delokalisierten Zustände im Zentrum des Systems. Jedoch existieren auch lückenlose Anregungen entlang den Rändern der Anordnung, wie wir in Abschnitt 2.2 gesehen haben. Elektronen an den Rändern des Systems haben eine Gruppen-Geschwindigkeit parallel zum Rand in einer Richtung, die von der Drift-Geschwindigkeit $\vec{E} \times \vec{B}$ herrührt. X.G. Wen hat gezeigt, daß diese Randanregungen auch durch chirale Kac-Moody-Ströme beschrieben werden können [20]. Dabei betrachtet man die Anregungen als ein Wellenpaket, daß mit konstanter Geschwindigkeit am Rand entlang läuft. Diese Welle, die am Rand entlang wandert, kann auch als eine flächenerhaltende Deformation eines Quantenfluids verstanden werden. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie man mit Hilfe der $W_{1+\infty}$ alle Randanregungszustände explizit konstruieren kann, einheitlich für den IQHE und den FQHE.

Betrachtet man die QHE Zustände als inkompressibele Flüssigkeit, so werden die Randanregungen alle durch eine Höchstgewichts-Darstellung der $W_{1+\infty}$

beschrieben, d.h. die Randzustände sind wie folgt gegeben:

$$W^{s_1}_{n_1} W^{s_2}_{n_2} \cdots W^{s_k}_{n_k} \psi_p \quad s_i \geq s_{i+1} \quad \text{und} \quad n_i \geq n_{i+1} \quad \text{falls} \quad s_i = s_{i+1} \,. \tag{3.58}$$

Aus Gleichung (3.48) folgt, daß eine Mode der $W_{1+\infty}$-Generatoren, angewandt auf ψ_p, wieder ψ_p multipliziert mit einer symmetrischen Funktion ergibt, da der Bruch der Determinanten identisch mit der Schurfunktion $\mathcal{S}^{\{0,0,\ldots,n\}}$ ist. Führt man folgende Definition ein:

$$D^{\{m_1,m_2,\ldots,m_n\}} = \begin{vmatrix} z_1^{m_1} & z_2^{m_1} & \cdots & z_n^{m_1} \\ z_1^{1+m_2} & z_2^{1+m_2} & \cdots & z_n^{1+m_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{n-1+m_n} & z_2^{n-1+m_n} & \cdots & z_n^{n-1+m_n} \end{vmatrix} \,, \tag{3.59}$$

dann läßt sich jede Schurfunktion wie folgt ausdrücken:

$$\mathcal{S}^{\{m_1,m_2,\ldots,m_n\}} = \frac{D^{\{m_1,m_2,\ldots,m_n\}}}{D^{\{0,0,\ldots,0\}}} \,. \tag{3.60}$$

Induktive folgt nun, daß die Monome (3.58) auch symmetrische Funktionen multipliziert mit ψ_p sind, da jeder dieser Zustände wieder antisymmetrisch sein muß. Da aber ψ_p immer wieder reproduziert wird, kann man es nur mit einem symmetrischen Polynom multiplizieren. Es ist leicht sehen, daß schon der Strom $j \equiv W^{(1)}$ alleine das komplette Spektrum der symmetrischen Funktionen erzeugt, und zwar als Produkt der Summen $s_k = \sum_{i=1}^N z_i^k$:

$$j_{n_1} j_{n_2} \cdots j_{n_k} \psi_p = s_{n_1} s_{n_2} \cdots s_{n_k} \psi_p \,, \tag{3.61}$$

da

$$W_k^{(1)} = \sum_{i=1}^N (b_i^\dagger)^k \quad \text{für} \quad k \geq 0 \tag{3.62}$$

wegen (3.46) auf Zuständen der Form $f(z_1, \ldots, z_N) \exp(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mid z_i \mid^2)$ nur durch Multiplikation mit s_k operiert. Dies liefert eine Basis der symmetrischen Funktionen, vorausgesetzt $n_i \geq n_{i+1}$.

Die $W_{1+\infty}$ liefert so alle möglichen Randanregungen, die das Pauli-Prinzip respektieren. Das resultierende Spektrum ist durch die Menge der symmetrischen Polynome gegeben und die Zustandsumme wie folgt bestimmt:

$$Z(q = e^{2\pi i \tau}) = \sum_{n=0}^\infty p(n) = \prod_{n=0}^\infty \frac{1}{1 - q^n} \,, \tag{3.63}$$

wobei $p(n)$ die Zahl der Partitionen der ganzen positiven Zahl n bezeichnet. Da die positiven Moden des Stromes $j = W^{(1)}$ allein alle Randanregungen erzeugen, können sie auch als Oberflächenwellen, die alle in dieselbe Richtung mit derselben Geschwindigkeit laufen, interpretiert werden. Deshalb ist das Spektrum auch äquivalent zu dem einer $U(1)$ Kac-Moody-Algebra zu Level $k = 1$ mit zentraler Ladung $c = 1$.

III.6 Verallgemeinerungen

Die Betrachtungen des letzten Kapitels lassen sich problemlos auf die verallgemeinerten Laughlin-Wellenfunktionen (3.10) aus Abschnitt 3.1 ausdehnen. Es ist einfach zu sehen, daß die $W_{1+\infty}$ genauso konstruiert werden kann wie zuvor, wenn man b_i und $b_i^\dagger$ folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} b_i^I &= \partial_i^I + \frac{\bar{z}_i^I}{2} + \sum_{J\neq I} A_{I,J} \sum_{i\leq j} \frac{1}{z_i^I - z_j^J} + A_{I,I} \sum_{i<j} \frac{1}{z_i^I - z_j^I}\,, && (3.64) \\ b_i^{I\dagger} &= -\bar{\partial}_i^I + \frac{z_i^I}{2}\,, && (3.65) \end{aligned}$$

und damit ihre Generatoren

$$\mathcal{L}_{m,n} = \sum_{I,i} (b_i^{I\dagger})^{m+1} (b_i^I)^{n+1}\,. \tag{3.66}$$

Die Höchstgewichts-Bedingung wird nun erfüllt, falls

$$A = \pm \mathbb{1} - K \tag{3.67}$$

gesetzt wird, wobei $\mathbb{1}$ die $m \times m$ Einheitsmatrix ist. Zum Beispiel kann man den $\nu = \frac{m}{2pm\pm 1}$ FQHE durch folgende $m \times m$ Matrix K erhalten [36, 22]:

$$K = \begin{pmatrix} 2p\pm 1 & 2p & \dots & 2p \\ 2p & 2p\pm 1 & & 2p \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 2p & \dots & 2p & 2p\pm 1 \end{pmatrix}\,. \tag{3.68}$$

Jetzt ist A wie folgt gegeben:

$$A = -2p \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}\,, \tag{3.69}$$

wobei A wieder als das Anheften von $2p$ Flußquanten an jedes Elektron verstanden werden kann.

Völlig analog werden die Randanregungen durch die Aktion der $W_{1+\infty}$ erzeugt, nur mit dem Unterschied, daß im Falle $m > 1$ nicht mehr der Strom $j \equiv W^{(1)}$ alleine ausreicht, um alle Anregungen zu erzeugen. Es ist leicht zu sehen, daß nun die Zustandssumme (3.63) durch ihre m-te Potenz ersetzt werden muß, das bedeutet, die Anregungen werden also durch m unabhängige Ströme erzeugt. Die zentrale Ladung der korrespondierenden konformen Feldtheorie ist $c = m$.

V. Kac und A. Radul [41] haben 1993 in einer mathematischen Arbeit alle quasiendlichen, unitären Höchstgewichts-Darstellungen der $W_{1+\infty}$ klassifiziert. Vergleicht man deren Resultat mit den Ergebnissen dieses Abschnitts, so sieht man, daß alle quasiendlichen, unitären Darstellungen der $W_{1+\infty}$ schon mit Hilfe des FQHE erzeugt werden können [27].

Wie in Kapitel 4 gezeigt wird, sind auch Laughlin-Wellenfunktionen mit periodischen Randbedingungen wichtig für das Verständnis des FQHE. G. Cristofano et.al. haben alle unsere Ergebnisse aus Abschnitt 3.4 bis 3.6 auf diesen Fall verallgemeinern können [42].

Aufbauend auf die Ideen der letzten drei Abschnitte hat M. Eliashvili [43, 44, 45] den von in Referenz [30] schon angedeuteten Zusammenhang zur Chern-Simons-Theorie ausgearbeitet. Dies führte zu folgender interessanter Bemerkung. Die von uns eingeführten Transformationen

$$b_i \longrightarrow b_i - 2p \sum_{i \neq j} \frac{1}{z_i - z_j} \tag{3.70}$$

$$a_i^\dagger \longrightarrow a_i^\dagger + 2p \sum_{i \neq j} \frac{1}{z_i - z_j} \tag{3.71}$$

können auch durch folgende Ähnlichkeitstransformation $S_p(z_1, \ldots, z_N)$ erzeugt werden:

$$\psi_p(z_1, \ldots, z_N) = S_p(z_1, \ldots, z_N)\psi_1(z_1, \ldots, z_N) \tag{3.72}$$

$$\hat{O}_p = S_p(z_1, \ldots, z_N)\hat{O}_1 S_p^{-1}(z_1, \ldots, z_N)\,, \tag{3.73}$$

wobei

$$S_p(z_1, \ldots, z_N) = \prod_{i<j} (z_i - z_j)^{2p} = D^{2p}\,. \tag{3.74}$$

Setzt man für O_1 b_i, $b_i^\dagger$, a_i, $a_i^\dagger$ oder $\mathcal{L}_{nm}$ so erhält man die gewünschte Transformation von $\nu = 1$ zu $\nu = 1/(2p+1)$. Man beachte, die Singularität für $z_i \to z_j$ bewirkt die Nichttrivialität dieser Transformation. Das Maß μ ist nun nichts anderes als:

$$\mu(z, \bar{z})^{-1} = \prod_{i<j} |\, z_i - z_j \,|^{4p} = S_p^\dagger S_p \,. \tag{3.75}$$

Transformiert man die Phasenraum-Variablen z_i, $\bar{z}_i$ und ihre kanonischen Impulse p_i, $\bar{p}_i$, so erhält man:

$$\begin{array}{rclcl} z_i & \to & S_p z_i S_p^{-1} & = & z_i \\ \bar{z}_i & \to & S_p \bar{z}_i S_p^{-1} & = & \bar{z}_i \\ p_i & \to & S_p p_i S_p^{-1} & = & p_i \\ \bar{p}_i & \to & S_p \bar{p}_i S_p^{-1} & = & \bar{p}_i + 2pi \sum_{i \neq j} \frac{1}{z_i - z_j} \end{array} \tag{3.76}$$

Die Substitution $p \to p - \frac{e}{2} a$ und $\bar{p} \to p - \frac{e}{2} \bar{a}$ kann als Einführung eines komplexen Vektorpotentials verstanden werden:

$$a_i(r_1, \ldots, r_N) \equiv a_i^x + i a_i^y = 0 \tag{3.77}$$

$$\bar{a}_i(r_1, \ldots, r_N) \equiv a_i^x - i a_i^y = -2pi \sum_{i \neq j} \frac{1}{z_i - z_j} \,. \tag{3.78}$$

Das magnetische Feld, das mit dem k-ten Teilchen wechselwirkt, ist nun:

$$B_k = i(\bar{\partial}_k \bar{a}_k - \partial_k a_k) = 2p\pi \sum_{j \neq k} \frac{1}{z_k - z_j} \,. \tag{3.79}$$

Dies stimmt mit Gleichung (3.53) überein.

> ”Ars mathematica damnabilis et interdicta est. ”
> (Die Kunst der Mathematik ist verwerflich und verboten.)
>
> Römisches Recht

IV Topologie und FQHE

IV.1 Laughlin-Wellenfunktionen auf dem Torus

In Abschnitt 2.3 haben wir gesehen, daß bei nicht entartetem Grundzustand die Argumente für eine ganzzahlige Quantisierung so stark sind, daß es sehr erstaunlich ist, fraktionale Hall-Leitfähigkeit überhaupt zu messen. Andererseits folgt aus der Annahme eines entarteten Grundzustandes ganz natürlich das Auftreten gebrochener Hall-Leitfähigkeit. Aber die in der zweidimensionalen Ebene definierten Laughlin-Wellenfunktionen des letzten Kapitels geben keinen Hinweis auf eine Entartung des Grundzustandes. Desgleichen gilt für Laughlin-Wellenfunktionen, die auf einer 2-Sphäre definiert sind. D. Yoshioka et.al. und W.P. Su [46, 47] waren die ersten, die bei numerischen Rechnungen mit periodischen Randbedingungen die gewünschte Entartung beobachteten. Später haben F.D.M. Haldane und E.H. Rezayi Laughlin-Wellenfunktionen mit periodischen Randbedingungen (also definiert auf einem Torus) für die Filling-Faktoren $\nu = 1/m$ konstruiert [48]. Kürzlich wurde dies von E. Keski-Vakkuri und X.G. Wen auf die anderen Wellenfunktionen vom Laughlin-Typ (3.10) verallgemeinert [49].

Haldane und Rezayi folgend hat die Wellenfunktion eines Teilchen im niedrigsten Landau-Level in der Landau-Eichung ($\vec{A} = -By\vec{e}_x$) die analytische Form:

$$\psi(x,y) = f(z)\exp(-\frac{1}{2}y^2), \qquad z = x + iy\,, \tag{4.1}$$

wobei $f(z)$ eine holomorphe Funktion ist. Die periodischen Randbedingungen an diese Wellenfunktion (2.37) sind durch folgende Restriktionen an $f(z)$ gegeben ($\tau = L_2 e^{i\theta}$):

$$\begin{aligned} f(z+L_1) &= e^{2\pi i\varphi_1} f(z) && (4.2)\\ f(z+L_2e^{i\theta}) &= e^{2\pi i\varphi_2}\exp(i\pi N_s[(2z/L_1)+\tau])f(z)\,, && (4.3)\end{aligned}$$

wobei N_S wieder die Zahl der magnetischen Flußquanten bestimmt. Da $f(z)$ eine analytische Funktion ist, bestimmt das Integral über $\frac{1}{2\pi i}\frac{f'(z)}{f(z)}$ entlang des Randes, daß die Zahl der Nullstellen genau N_S sein muß. Die mögliche analytische Struktur von $f(z)$ ist damit stark eingeschränkt, und die allgemeinste Form laßt sich mit Hilfe der ϑ_1-Funktionen ausdrücken:

$$\begin{aligned} f(z) &= \exp(ikz)\prod_{n=1}^{N_s}\vartheta_1\left((z-z_n)/L_1 \mid \tau\right) && (4.4)\\ \vartheta_1(z\mid\tau) &= \sum_n \exp(i\tau\pi(n+\frac{1}{2}) + 2\pi i(n+\frac{1}{2})(z+\frac{1}{2}))\,, && (4.5)\end{aligned}$$

mit noch zusätzliche Bedingungen an k, z und z_n, die garantieren, daß die Zahl der linear unabhängigen Lösungen gleich der Zahl der Nullstellen ist [48]. Dies läßt sich am leichtesten überprüfen, wenn man berücksichtigt, daß die ϑ_1-Funktion folgende quasiperiodische Randbedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} \vartheta_1(z+1\mid\tau) &= -\vartheta_1(z\mid\tau) && (4.6)\\ \vartheta_1(z+\tau\mid\tau) &= -e^{-i\pi(2z+\tau)}\vartheta_1(z\mid\tau)\,. && (4.7)\end{aligned}$$

Betrachtet man nun die Vielteilchen-Wellenfunktion, so haben F.D.M. Haldane und E.H. Rezayi gezeigt, daß sie als ein Produkt eines Schwerpunkttermes und eines Faktors, der nur relative Koordinaten enthält, geschrieben werden müssen. Analog zu R. Laughlin haben sie die Grundzustands-Wellenfunktion für $\nu = 1/m$ mit periodischen Randbedingungen (2.37) hingeschrieben. Dies ist von E. Keski-Vakkuri und X.G. Wen für periodische Randbedingungen mit $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 0$ für andere Filling-Faktoren verallgemeinert worden. Sie haben die Wellenfunktion auf die folgende Art ausgedrückt:

$$\psi_K(\{z_i^I\}) = F^{c.m.}(Z_1, \ldots, Z_N) \prod_{\substack{I \\ i<j}} \vartheta(z_i^I - z_j^I)^{K_{II}} \prod_{\substack{I<J \\ i\leq j}} \vartheta(z_i^I - z_j^J)^{K_{IJ}} \quad (4.8)$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2l^2}\sum_{I,i}(y_i^I)^2\right) , \quad (4.9)$$

wobei die Z_I Schwerpunktskoordinaten sind:

$$Z_I := \sum_{k=1}^{N_I} z_k^I \, . \quad (4.10)$$

Von der Quasiperiodizität der ϑ_1-Funktion erhielten sie folgende Bedingung an die Schwerpunktsfunktion:

$$\begin{aligned} F^{c.m.}(Z^I + 1) &= F^{c.m}(Z^I) && (4.11)\\ F^{c.m.}(Z^I + \tau) &= \exp(-i\pi\tau K_{II} - 2\pi i \sum_J K_{IJ} Z_J) F^{c.m}(Z^I) \, . && (4.12) \end{aligned}$$

Daraus folgt: Es existieren genau $\mid \det(K) \mid$ linear unabhängige Lösungen für $F^{c.m}(Z_1, \ldots, Z_n)$, die den $\mid \det(K) \mid$-fach entarteten Grundzustand des Quanten-Hall-Systems beschreiben.

Will man den Einfluß der Randbedingungen untersuchen, muß man quasiperiodischen Randbedingungen einführen und erhält für die Schwerpunktsfunktion:

$$\begin{aligned} F^{c.m.}(Z^I + 1) &= e^{2\pi i \varphi_1} F^{c.m}(Z^I) && (4.13)\\ F^{c.m.}(Z^I + \tau) &= e^{2\pi i \varphi_2} \exp(-i\pi\tau K_{II} - 2\pi i \sum_J K_{IJ} Z_J) F^{c.m}(Z^I) \, . && (4.14) \end{aligned}$$

Die $|\det(K)|$ linear unabhängigen Lösungen von $F^{c.m}(Z_1, \ldots, Z_n)$ können wie folgt ausgedrückt werden (siehe Anhang B):

$$\begin{aligned} F^{c.m.}_{\vec{\alpha}}(\vec{Z}) = \sum_{\vec{m}\in Z^n} & \exp\left(i\pi\tau\vec{m}^t K\vec{m} + 2\pi i\tau\vec{m}(\vec{\alpha}+\varphi_1\vec{e}) - 2\pi i\vec{m}\varphi_2\vec{e}\right) \\ \times & \exp\left(2\pi i(\vec{\alpha}+K\vec{m}+\varphi_1\vec{e})\,\vec{Z}\right), \end{aligned} \tag{4.15}$$

wobei $\vec{e}$ der Vektor mit allen Einträgen gleich eins ist. $\vec{\alpha}$ ist ein Element des Kosets $\mathbb{Z}^n/K\mathbb{Z}^n$ und charakterisiert den Grundzustand. $\mathbb{Z}^n/K\mathbb{Z}^n$ hat genau $|\det(K)|$ Elemente.

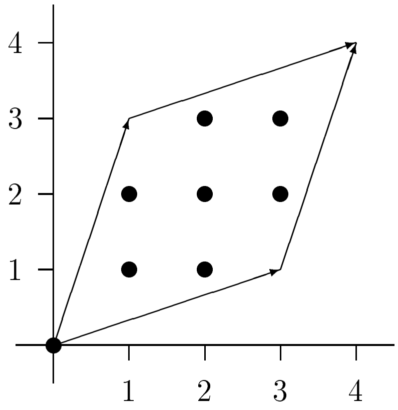
Beispiel:

$$K = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow K^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

Es gilt $\det(K) = 8$ und $\nu = \frac{1}{8}(3-1+3-1)$. Somit ist der Grundzustand achtfach entartet und eine Basis wird durch folgende Vektoren $\vec{\alpha}$ beschrieben:

$$\vec{\alpha} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}. \tag{4.17}$$

Dies kann auch graphisch veranschaulicht werden:



Von nun an wollen wir einige physikalische Restriktionen an unsere Matrix K stellen. Jedes Subband soll dieselbe Anzahl von Teilchen enthalten: $N_I = N_J = N, \quad I, J = 1, \dots, n$. Mit Gleichung (3.12) folgt, daß $\vec{e}$ ein Eigenvektor von K sein muß. Weiter wollen wir annehmen, daß unser System invariant unter beliebigen Permutationen aller Unterbänder sein soll. Diese Symmetrie impliziert, daß $K_{IJ} = K_{\sigma(I)\sigma(J)}$, wobei σ eine beliebige Permutation von $\{1, \dots, n\}$ bezeichnet. Im nächsten Abschnitt wird auch der Fall diskutiert, wenn diese letzte Bedingung nicht erfüllt ist.

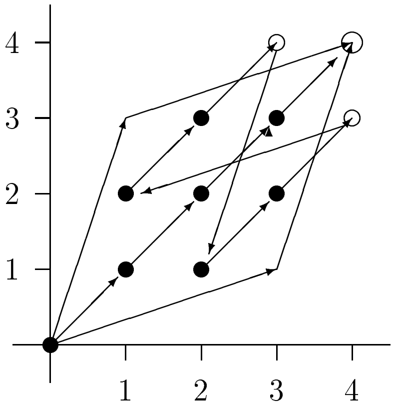
IV.2 Vektorbündel über der magnetischen Brillouinzone

Zunächst soll gezeigt werden, daß die entarteten Grundzustände eine Faser eines nicht trivialen Vektorbündels über dem 2-Torus, der durch φ_1 und φ_2 parametrisiert wird, aufspannen. Der Filling-Faktor kann durch eine topologische Größe, erste Chernzahl dividiert durch den Rang des Vektorbündels, ausgedrückt werden.

Nur der Schwerpunktsanteil der Wellenfunktionen des letzten Abschnitts hängt explizit von φ_1 und φ_2 ab. Somit definiert dieser Teil der Wellenfunktion alleine die Struktur des Vektorbündels:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 \to \varphi_1 + 1 \quad &: \quad F^{c.m.}_{\vec{\alpha}}(\vec{Z}) \to F^{c.m.}_{\vec{\alpha}+\vec{e}}(\vec{Z}) && (4.18)\\
\varphi_2 \to \varphi_2 + 1 \quad &: \quad F^{c.m.}_{\vec{\alpha}}(\vec{Z}) \to F^{c.m.}_{\vec{\alpha}}(\vec{Z}) && (4.19)\\
F^{c.m.}_{\vec{\alpha}+\vec{K}_I}(\vec{Z}) \quad &= \quad \exp(\pi K_{II} + 2\pi\alpha_I + 2\pi(\varphi_1 + i\varphi_2))F^{c.m.}_{\vec{\alpha}}(\vec{Z})\,, && (4.20)
\end{aligned}$$

wobei $\vec{K}_I$ die I-te Spalte der Matrix K beschreibt. Bei gegebener Matrix K ist der Rang dieses Vektorbündels $|\det(K)|$. Mit Bezug auf das Beispiel im letzten Abschnitt kann die Aktion von φ_1 graphisch wie folgt dargestellt werden:



Die erste Chernzahl oder den Grad dieser Vektorbündel kann man am einfachsten berechnen, wenn man die Zahl der Nullstellen des entsprechenden Determinanten-Bündels bestimmt. Das Determinanten-Bündel ist bestimmt durch den Schnitt, der durch ein Produkt über die Basis

$$F^{c.m.}_{\vec{\alpha}_1} \cdot \ldots \cdot F^{c.m.}_{\vec{\alpha}_{\det(K)}} \tag{4.21}$$

gegeben ist, d.h. der Grad des Bündels ist durch die Zahl der Nullstellen dieses Produktes festgelegt. Wie schon in Abschnitt 4.1 erwähnt, ist die Zahl der Nullstellen eines holomorphen Schnittes durch das Integral entlang des Randes über $\frac{1}{2\pi i}\frac{f'}{f}$ festgelegt. Also läßt sich nun mit Hilfe von (4.20) die erste Chernzahl bestimmen und ist folgendermaßen gegeben:

$$c_1 = |\det(K)|\,|\sum_{I,J}(K^{-1})_{I,J}| \ . \tag{4.22}$$

Somit stimmt die topologische Größe

$$\mu = \frac{c_1}{r} \tag{4.23}$$

mit dem Filling-Faktor ν überein, da ν immer positiv ist, falls $\vec{e}$ ein Eigenvektor von K ist.

Im folgenden definieren wir ein unzerlegbares Vektorbündel E als eine Vektorbündel, das nicht als direkte Summe zwei anderer Bündel E_1 und E_2 über derselben Basismannigfaltigkeit M geschrieben werden kann: $E = E_1 \oplus E_2$. Ein Vektorbündel wird einfach genannt, falls $\dim_{\mathbb{C}} H^0(M, \mathrm{End}(E)) = 1$. Falls E ein einfaches Vektorbündel ist, dann ist E unzerlegbar und mit Hilfe des Riemann-Roch Theorems folgt $\dim_{\mathbb{C}} H^1(M, \mathrm{End}(E)) = n^2(g-1)+1$ [50]. Untersucht man die obigen Vektorbündel genauer, so ist einfach zu sehen, daß $\dim_{\mathbb{C}} H^0(M, \mathrm{End}(E)) = \mathrm{ggT}(c_1, r)$. Somit sind die unzerlegbaren Vektorbündel durch die Bedingung $\mathrm{ggT}(c_1, r) = 1$ bestimmt und durch die folgenden Matrizen gegeben:

$$K = \begin{pmatrix} 2p \pm 1 & 2p & \dots & 2p \\ 2p & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 2p \\ 2p & \dots & 2p & 2p \pm 1 \end{pmatrix} \tag{4.24}$$

mit Filling-Faktor

$$\nu = \frac{n}{2pn \pm 1}\,. \tag{4.25}$$

Bemerkenswerterweise ist das gerade die Hälfte der fraktionalen Werte, die experimentell beobachtet werden. Die Elektron-Loch-Dualität, die ν nach $1-\nu$ transformiert, gibt die andere Hälfte (siehe Abschnitt 3.1). Somit haben wir hier ein topologisches Kriterium gefunden, das die richtigen Filling-Faktoren für den FQHE auswählt. Die Bedingung der Permutationssymmetrie an die Matrix K ist nicht sehr restriktiv. Läßt man sie fallen, dann erhält man zusätzlich nur noch die Filling-Faktoren $\nu = \frac{2n}{2pn \pm 1}$. So eine Serie ist aber bisher experimentell nicht beobachtet.

Es gibt noch eine andere äquivalente, aber kompliziertere Möglichkeit, die Chernzahl eines Vektor Bündels zu bestimmen. In Abschnitt 2.3 haben wir gesehen, daß man die Hall-Leitfähigkeit, also auch die Chernzahl, durch Mittelung über alle Randbedingungen erhält. Dies entspricht einer anderen Definition der ersten Chernzahl:

$$c_1 = \frac{1}{2\pi i} \int d\varphi^2 \mathrm{tr}(F)\,. \tag{4.26}$$

Die Krümmung ist gegeben durch die hermitesche Struktur, welche aber physikalisch natürlich durch das quantenmechanische Skalarprodukt gegeben ist.

Vergleicht man diesen Ausdruck mit Gleichung (2.45), so ist $F^{\vec{\alpha}\vec{\beta}}$ wie folgt gegeben:

$$F^{\vec{\alpha}\vec{\beta}} = \langle \frac{\partial \psi_{\vec{\alpha}}}{\partial \varphi_1} \mid \frac{\partial \psi_{\vec{\beta}}}{\partial \varphi_2} \rangle - \langle \frac{\partial \psi_{\vec{\alpha}}}{\partial \varphi_2} \mid \frac{\partial \psi_{\vec{\beta}}}{\partial \varphi_1} \rangle \,, \tag{4.27}$$

wobei $\psi_{\vec{\alpha}}$ die normalisierten Wellenfunktionen bezeichnen. Die explizite Berechnung von $\mathrm{tr}(F^{\vec{\alpha}\vec{\beta}})$ ist sehr langwierig und deshalb im Anhang C skizziert. Man muß dafür über alle Elektronen-Koordinaten $\{z_i^I\}$ integrieren, um das Skalarprodukt auszuführen. Nur wenn man die gesamte Laughlin-Wellenfunktion und nicht nur den Schwerpunktsanteil, der schon alleine das Vektorbündel bestimmt, berücksichtigt, ist es möglich, einen expliziten Ausdruck für $F^{\vec{\alpha}\vec{\beta}}$ anzugeben. Die technischen Schwierigkeiten rühren daher, daß man mit einer großen Anzahl von Summen hantieren muß, die von den unterschiedlichen ϑ_1-Funktionen kommen. Für den Fall $n = 1$ und $K = (p)$ und mehr als zwei Teilchen (d.h. $N > 1$) kann $\mathrm{tr}(F^{\vec{\alpha}\vec{\beta}})$ folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(F^{\vec{\alpha}\vec{\beta}}) &= \frac{1}{Z} \sum_{r_1,\dots,r_{N-1}=0}^{2pN-1} \alpha(r_1,\dots,r_{N-1}) \times \\ & \quad \sqrt{\frac{2}{pN}} \sum_k \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} \exp\left(-\frac{2\pi}{pN} (\varphi_1 + k + r_j)^2 \right) . \qquad (4.28) \\ & \qquad (4.29) \end{aligned}$$

Die Ableitung dieser Formel ist in Anhang C gegeben, wo man auch die Definitionen von $\alpha(r_1,\dots,r_{N-1})$ und Z findet. Falls K von der Form (4.24) ist, kann $\mathrm{tr}(F^{\vec{\alpha}\vec{\beta}})$ ähnlich ausgedrückt werden; p muß nur durch λ, dem Eigenwert von K zum Eigenvektor $\vec{e}$, ersetzt werden. Wie man sieht, ist $\mathrm{tr}(F^{\vec{\alpha}\vec{\beta}})$ unabhängig von φ_2 für mehr als zwei Teilchen; als Funktion von φ_1 oszilliert es um einen Mittelwert. Es ist jedoch bewerkenswert, daß diese Fluktuationen exponentiell mit der Teilchenzahl verschwinden. Im Limes unendlich vieler Teilchen ist $\mathrm{tr}(F^{\vec{\alpha}\vec{\beta}})$ also unabhängig von φ_1 und φ_2 und gleich $2\pi i c_1$. Dies ist eine sehr wichtige, neue Eigenschaft der Laughlin-Wellenfunktionen, da es die Unabhängigkeit des QHE von Randbedingungen erklärt, was eine essentielle Voraussetzung für die Beobachtbarkeit des Effektes ist. Nur dadurch lassen sich die exakten Messungen für unterschiedliche experimentelle Anordnungen erklären. Es rechtfertigt außerdem die Mittelung der Hall-Leitfähigkeit in Abschnitt 2.3, um sie als Chernzahl ausdrücken zu können.

IV.3 Donaldson-Theorem

In diesem Abschnitt sollen kurz die obigen Resultate von einem mathematischen Standpunkt aus betrachtet werden. Die topologische Größe

$$\mu = \frac{c_1}{r}\,, \tag{4.30}$$

erste Chernzahl dividiert durch den Rang des Bündels ist eine der wichtigsten Größen zur Definition von stabilen Vektorbündeln. Stabilität ist eine sehr nützliche Eigenschaft, um den Modulraum bestimmter Vektorbündel zu beschränken. Die Notation von Stabilität eines Vektorbündels über einer kompakten Riemannschen Fläche wurde von D. Mumford [52] eingeführt, um zu beweisen, daß die Äquivalenzklassen stabiler Vektorbündel von festem Rang und Grad die natürliche Struktur einer nicht singulären, quasi-projektiven, algebraischen Varietät haben.

Ein Vektorbündel E über der Basismannigfaltigkeit M heißt stabil (semistabil), falls für jedes Unterbündel F von E über M gilt:

$$\mu(F) < \mu(E) \qquad (\,\mu(F) \leq \mu(E)\,)\,. \tag{4.31}$$

In der Regel ist es relativ schwierig zu entscheiden, ob ein gegebenes Vektorbündel stabil ist oder nicht. Für den Fall, daß die Riemannsche Fläche ein Torus ist (g=1), kann man zeigen, daß Stabilität und Unzerlegbarkeit äquivalent sind. Für den allgemeinen Fall hat S.K. Donaldson gezeigt [51], daß ein unzerlegbares holomorphes Vektorbündel E über einer kompakten Riemannschen Fläche stabil ist genau dann, wenn eine unitärer Metrik existiert, so daß die zentrale Krümmung $\mathrm{tr}(F)$ konstant ist.

In der Quantenmechanik haben wir ganz natürlich ein unitäres Skalarprodukt im Hilbertraum definiert, und somit auch eine unitären Metrik auf den Vektorbündeln der beiden letzten Abschnitte. Gleichung (4.29) erklärt nicht nur die Unabhängigkeit des QHE von den Randbedingungen, sondern die Laughlin-Wellenfunktionen geben im Limes unendlich vieler Teilchen genau die Metrik, die für die Beschreibung stabiler Vektorbündel notwendig ist. Das Theorem von Donaldson liefert also den Zusammenhang zwischen stabilen bzw. unzerlegbaren Vektorbündeln und der Meßbarkeit des QHE.

> ”So eine Arbeit wird eigentlich nie fertig, man muß sie für fertig erklären, wenn man nach Zeit und Umständen das möglichste getan hat. ”
>
> J.W. Goethe, Italienische Reise, 16.3.1787

V Zusammenfassung und Ausblick

V.1 Zusammenfassung

Zentrales Thema dieser Arbeit sind die Laughlin-Wellenfunktionen. Zum einen wurde eine algebraische Formulierung der Inkompressibilitätseigenschaften der Laughlin-Wellenfunktionen gefunden, die die bisher nur im IQHE bekannte Formulierung durch explizite Berücksichtigung der Elektron-Elektron-Wechselwirkungen verallgemeinert. Es stellte sich heraus, daß diese Verallgemeinerung eine ganz natürliche Erklärung in der Composite-Fermionen-Theorie hat. Dabei wurde gezeigt, daß die negativen Moden, der Algebra der nicht-singulären flächenerhaltenden Diffeomorphismen ($W_{1+\infty}$) die Laughlin-Wellenfunktionen annihilieren. Daraus resultiert, daß die $W_{1+\infty}$-Algebra die zugrundeliegende Symmetrie aller Randanregungen sowohl im IQHE wie auch im FQHE ist. Dadurch konnte eine vereinheitlichende Sichtweise von früheren Arbeiten von M. Stone, X.G. Wen und J.K. Jain gegeben werden.

Zum anderen wurde ausgehend von Laughlin-Typ-Wellenfunktionen mit periodischen Randbedingungen, die den entarteten Grundzustand eines Quanten-Hall-Systems beschreiben, explizit r-dimensionale Vektorbündel konstruiert. Es stellt sich heraus, daß der Filling-Faktor durch die topologische Größe $\frac{c_1}{r}$ gegeben ist, wobei c_1 die erste Chernzahl eines Vektorbündels ist. Diese vereinheitlichende Sichtweise ermöglicht es zu zeigen, daß unter einigen physikalischen natürlichen Annahmen die stabilen Vektorbündel zu der experimentell dominierenden Serie fraktionaler Filling-Faktoren $\nu = \frac{n}{2pn \pm 1}$ korrespondieren. Bemerkenswerterweise, konvergieren die Fluktuationen der Krümmung dieser Vektorbündel nur aufgrund der speziellen Form der Laughlin-Wellenfunktionen im Limes unendlich vieler Teilchen gegen Null. Diese zeigt eine neue mathematische Eigenschaft dieser Wellenfunktionen. Physikalisch bedeutet das, daß die Hall-Leitfähigkeit im Limes unendlich vieler Teilchen unabhängig von den Randbedingungen wird, eine notwendige Voraussetzung für die Beobachtbarkeit des QHE. Mathematisch gesehen liefern die Laughlin-Wellenfunktionen gerade eine Metrik auf diesen Vektorbündeln die durch ein Theorem von Donaldson besonders ausgezeichnet ist, das den Zusammenhang von stabilen Vektorbündeln und der Meßbarkeit des QHE liefert.

V.2 Offene Fragen und Ausblick

Die hier behandelten Probleme geben Anstoß zu einer Fülle neuer Fragestellungen.

- Wie transformiert sich die S-Matrix unter dem Anheften von zwei $2p$ Flußquanten. Läßt sich so ein Zusammenhang zu der Arbeit von B.I. Halperin, P.A. Lee und N. Read herstellen [38]?

- Befindet sich das Quanten-Hall-System in einem quantisierten Zustand, so können die Randanregungen mithilfe einer $c = 1$ konformen Quantenfeldtheorie oder einem Tensorprodukt mehrerer solcher beschrieben werden. Allen Anschein nach sind die Phasenübergänge zwischen zwei Hall-Plateaus Phasenübergänge zweiter Ordnung und sollten durch nicht-unitäre konforme Quantenfeldtheorien beschrieben werden [53]. Ein universeller kritischer Exponent mit Wert $2.34 \pm 0.04 \simeq \frac{7}{3}$ ist relativ genau und von mehreren experimentellen Gruppen gemessen worden [54]. Gibt es vielleicht einen Zusammenhang zu den nicht-unitären Theorien mit effektiver zentraler Ladung $c_{\text{eff}} = 1$, deren $SL(2, \mathbb{Z})$-Symmetrie, sehr gut zur Symmetrie des Phasendiagramms des QHE paßt, und die sehr viel Ähnlichkeit mit unitären $c = 1$ Theorien aufweisen [55, 56, 57]? Die Untersuchung der Renormierungsflüsse in diesen Theorien sollte sehr aufschlußreich sein, als auch ein geometrisches Verständnis dieser Theorien.

• Kann man mithilfe der Eigenschaft, daß die Fluktuationen der Krümmung der konstruierten Vektorbündel verschwinden, Korrekturen der Laughlin-Wellenfunktionen z.B in $\frac{1}{N}$ oder $\frac{1}{\ln(N)}$ finden, indem man von einem Vektorbündel von festem Rang und Grad startet, und Bedingungen an die Wellenfunktionen findet, so daß die Krümmung konstant wird?

• In dem Beweis von S.K. Donaldson über den Zusammenhang von stabilen Vektorbündeln und der Existenz einer bestimmten Metrik auf diesem Vektorbündel werden bestimmte Funktionale eingeführt, die minimiert werden müssen. Was ist die physikalische Bedeutung dahinter? Die effektiven Lagrangefunktionen, die in der Theorie verunreinigter Systeme auftreten, zeigen eine erstaunliche Ähnlichkeit.

Danksagung

Mein Dank gilt vor allem meinem Doktorvater Professor Werner Nahm für die immerwährende Diskussionsbereitschaft und die zahlreichen guten Ratschläge, besonders aber auch für die uneingeschränkte Freiheit, die er mir gewährt hat, ein interessantes Thema zu finden.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinem Mitstreiter Michael Flohr für die freundschaftliche Zusammenarbeit.

Wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit hat das einmalige wissenschaftliche, aber auch kameradschaftliche Klima der Bonner Theoriegruppe beigetragen. Deshalb möchte ich mich ganz herzlich bei Ralph Blumenhagen, Wolfgang Eholzer, Andreas Honecker, Ralf Hübel, Johannes Kellendonk, Albrecht Kliem, Steffen Mallwitz, Nouredine Mohammedi, Andreas Recknagel, Michael Rösgen, Rolf Schimmrigk, Michael Terhoeven und Andreas Wißkirchen für ihre stete Hilfsbereitschaft und die zahllosen Diskussionen bedanken.

Mein Dank gilt auch Inga Daase und Reiner Leister für manch wertvollen Hinweis und Professor G.v. Gehlen für das Korreferat.

A Anhang

In diesem Anhang skizzieren wir die Ableitung der Gleichung (3.48). Als erstes zeigt man induktiv, daß

$$(b_i)^n \psi_p = \sum_{\substack{1 \leq j_k \neq j_l \leq N \\ j_k, j_l \neq i \\ (1 \leq k < l \leq n)}} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{z_i - z_{j_k}} \psi_p \,, \tag{A.1}$$

Also ist die Wirkung von $W_n^{(s)}$ auf ψ_p folgendermaßen gegeben:

$$W_n^{(s)} \psi_p = \sum_{\substack{1 \leq j_k \neq j_l \leq N \\ (0 \leq k < l \leq s-1)}} \prod_{k=1}^{s-1} \frac{z_{j_0}^{n+s-1}}{z_{j_0} - z_{j_k}} \psi_p \,. \tag{A.2}$$

Man beachte: Diese Gleichung hängt nicht explizit von p ab. Nun können die Summen durch Determinanten ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{1 \leq j_k \neq j_l \leq N \\ (0 \leq k < l \leq s)}} \prod_{k=1}^{s} \frac{z_{j_0}^r}{z_{j_0} - z_{j_k}} && \text{(A.3)} \\
= \; & \sum_{1 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_s \leq N} \; \sum_{\sigma \in S_{s+1}/S_s} |S_s| \frac{z_{\sigma(j_0)}^r}{z_{\sigma(j_0)} - z_{\sigma(j_k)}} && \text{(A.4)} \\
= \; & s! \sum_{1 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_s \leq N} \; \sum_{l=0}^{s} (-)^{l+1} z_{j_l}^r \prod_{k=1}^{l-1} (z_{j_k} - z_{j_l})^{-1} \prod_{k=l+1}^{s} (z_{j_l} - z_{j_k})^{-1} && \text{(A.5)} \\
= \; & s! \sum_{1 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_s \leq N} \frac{\sum_{l=0}^{s} (-)^{l+1} z_{j_l}^r \prod_{\substack{m<n \\ m,n \neq l}} (z_{j_m} - z_{j_n})}{\prod_{i<k} (z_{j_i} - z_{j_k})} \,, && \text{(A.6)}
\end{aligned}$$

wobei man über alle fixpunktfreien Permutationen von S_{s+1} summiert. Der letzte Ausdruck ist nichts anderes als die Expansion einer Determinante dividiert durch eine Vandermonde-Determinante, d.h. wir erhalten Gleichung (3.48).

B Anhang

Hier soll kurz die Ableitung der Schwerpunktsfunktionen $F^{c.m.}_{\vec{\alpha}}(Z_1,\ldots,Z_N)$ (4.15) skizziert werden. Es seien

$$\vec{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_N \end{pmatrix}, \qquad \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{B.1}$$

und $\vec{e}_i$ der i-te Einheitsvektor. Für eine analytische Funktion $f(\vec{Z})$ soll gelten:

$$\begin{array}{rrcl} i) & f(\vec{Z}+\vec{e}_i) & = & e^{2\pi i\varphi_1} f(\vec{Z}) \\ ii) & f(\vec{Z}+\tau\vec{e}_i) & = & e^{2\pi i\varphi_2}\exp(-i\pi\tau K_{II} - 2\pi i \sum_J K_{IJ} Z_J) f(\vec{Z})\,. \end{array} \tag{B.2}$$

Aus Bedingung $i)$ folgt sofort, daß sich f in folgende Fourierreihe entwickeln läßt:

$$f(\vec{Z}) = \sum_{\vec{n}\in\mathbb{Z}} a(\vec{n}) \exp\Big(2\pi i(\vec{n}+\varphi_1\vec{e})\vec{Z}\Big)\,. \tag{B.3}$$

Setzt man diesen Ansatz in Bedingung $ii)$ ein, so erhält man eine Rekursionsbeziehung für die Koeffizienten $a(\vec{n})$:

$$a(\vec{n}+K\vec{m}) = a(\vec{n}) \exp\Big(i\pi\tau\vec{m}^t K\vec{m} + 2\pi i\tau\vec{m}(\vec{n}+\varphi_1\vec{e}) - 2\pi i\vec{m}\varphi_2\vec{e}\Big)\,. \tag{B.4}$$

Hieraus folgt: Es existiert für jeden Vektor α aus dem Koset $\mathbb{Z}^n/K\mathbb{Z}^n$ eine Lösung, d.h. es gibt genau $|\det(K)|$ linear unabhängige Lösungen für $f(\vec{Z})$:

$$\begin{aligned} f_{\vec{\alpha}}(\vec{Z}) = \sum_{\vec{m}\in Z^n} & \exp\left(i\pi\tau\vec{m}^t K\vec{m} + 2\pi i\tau\vec{m}(\vec{\alpha}+\varphi_1\vec{e}) - 2\pi i\vec{m}\varphi_2\vec{e}\right) \\ \times\ & \exp\left(2\pi i(\vec{\alpha}+K\vec{m}+\varphi_1\vec{e})\,\vec{Z}\right), \end{aligned} \tag{B.5}$$

C Anhang

Im folgenden benötigen wir Multisummations-Indizes mit den folgenden Eigenschaften:

$$n_r^{ij} = -n_r^{ji}\,, \qquad 1 \leq i,j \leq N\,, \qquad r = 1\dots p \tag{C.1}$$

$$l_r^{ij} = -l_r^{ji}\,, \qquad 1 \leq i,j \leq N\,, \qquad r = 1\dots p \tag{C.2}$$

$$n^{ij} = \sum_{r=1}^{p} n_r^{ij} \tag{C.3}$$

$$l^{ij} = \sum_{r=1}^{p} l_r^{ij} \tag{C.4}$$

$$g^i = \sum_{j\neq i} (n^{ij} + l^{ij}) \tag{C.5}$$

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt\,. \tag{C.6}$$

Es sei $K = (p) \Rightarrow \nu = 1/p$ und $\alpha = 0, \dots, p-1$. Die Laughlin-Wellenfunktionen mit periodischen Randbedingungen sind dann wie folgt gegeben (4.9):

$$\tilde{\psi}_\alpha(z_1, \dots, z_N) = F_\alpha^{c.m.}(z_1 + \dots + z_N) \prod_{i<j} \vartheta_1(z_i - z_j)^p \exp(-\pi N p \sum_{i=1}^{N} y_i^2) \tag{C.7}$$

mit ϑ_1 wie in (4.5) und

$$F_\alpha^{c.m.}(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \exp(-\pi p m^2 - 2\pi m(\alpha+\varphi_1) - 2\pi i m \varphi_2) \exp(2\pi i(\alpha + pm + \varphi_1) z)\,. \tag{C.8}$$

$$\Rightarrow \tilde{\psi}_\alpha(z_1, \dots, z_N) = \tag{C.9}$$

$$\sum_{\substack{m \in \mathbf{Z} \\ n_1^{ij}, \dots, n_p^{ij} \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2} \\ 1 \leq i < j \leq N}} \begin{array}{l} \exp\left(-\pi p m^2 - 2\pi m(\alpha + \varphi_1) - 2\pi i m \varphi_2\right) \times \\ \exp\left(2pi(\alpha + pm + \varphi_1)(z_1 + \dots + z_N)\right) \times \\ \exp\left(-\pi \sum_{i<j} (n^{ij})^2 + 2\pi i \sum_{i<j} n^{ij}(z_i - z_j + \frac{1}{2})\right) \times \\ \exp\left(-\pi N p \sum_{i=1}^{N} y_i^2\right)\,. \end{array}$$

Man erhält dann

$$
\begin{aligned}
< \tilde{\psi}_\alpha \,|\, \tilde{\psi}_\beta > \quad &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (C.10) \\
\sum_{\substack{m \in \mathbf{Z} \\ n_1^{ij},\ldots,n_p^{ij} \in \mathbf{Z}+\frac{1}{2} \\ l_1^{ij},\ldots,l_p^{ij} \in \mathbf{Z}+\frac{1}{2} \\ 1 \le i < j \le N}} \quad & \exp\Bigl(- \pi p(m^2 + k^2) - 2\pi m(\alpha + \varphi_1) - 2\pi k(\beta + \varphi_1) \\
& \qquad -2\pi i(m-k)\varphi_2 - \pi \sum_{\substack{i<j \\ r}} \bigl((n_r^{ij})^2 + (l_r^{ij})^2\bigr)\Bigr) \times \\
\times \int \cdots \int d^2 z_1 \cdot \ldots \cdot d^2 z_N \quad & \exp\Bigl(2\pi i(\alpha + pm + \varphi_1)(z_1 + \ldots + z_N) \\
& \qquad -2\pi i(\beta + pk + \varphi_1)(\bar{z}_1 + \ldots + \bar{z}_N)\Bigr) \\
& \exp\Bigl(2\pi i \sum_{i<j} n^{ij}(z_i - z_j + \frac{1}{2}) - 2\pi i \sum_{i<j} l^{ij}(\bar{z}_i - \bar{z}_j + \frac{1}{2})\Bigr) \\
& \exp\left(-2\pi Np \sum_{i=1}^{N} y_i^2\right) .
\end{aligned}
$$

Die Integration läßt sich unter Verwendung der Errorfunktion $\mathrm{erf}(x)$ (C.6) leicht ausführen und man erhält:

$$
\begin{aligned}
< \tilde{\psi}_\alpha \,|\, \tilde{\psi}_\beta > \quad &= \quad \delta_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{8pN}\right)^{\frac{N}{2}} \exp\left(\frac{2\pi}{p}(\alpha + \varphi_1)^2\right) \times \\
\sum_{\substack{m \in \mathbf{Z} \\ n_1^{ij},\ldots,n_p^{ij} \in \mathbf{Z}+\frac{1}{2} \\ l_1^{ij},\ldots,l_p^{ij} \in \mathbf{Z}+\frac{1}{2} \\ 1 \le i < j \le N \\ \sum_{j=1}^{N}(n^{ij} - l^{ij}) = 0}} \quad & \exp\Bigl(- \pi \sum_{\substack{i<j \\ r}} \bigl((n_r^{ij})^2 + (l_r^{ij})^2\bigr) - \tfrac{\pi}{2Np}\bigl(\sum_i (g_i)^2\bigr)\Bigr) \\
& \times \prod_{i=1}^{N} \Bigl(\mathrm{erf}\bigl(\tfrac{\pi}{2pN}(2(\alpha + \varphi_1) + 2p(m+N) + g_i)\bigr) \\
& \qquad -\mathrm{erf}\bigl(\tfrac{\pi}{2pN}(2(\alpha + \varphi_1) + 2pm + g_i)\bigr)\Bigr)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow < \tilde{\psi}_\alpha | \tilde{\psi}_\beta >= \delta_{\alpha\beta} \frac{N}{(2pN)^{\frac{N}{2}}} \exp\left(\frac{2\pi}{p}(\alpha+\varphi_1)^2\right) \sum_{r_1,\dots,r_{N-1}=0}^{2pN-1} \alpha(r_1,\dots,r_{N-1})\,, \tag{C.11}$$

wobei

$$\alpha(r_1,\dots,r_{N-1}) = \sum_{\substack{n_1^{ij},\dots,n_p^{ij} \\ l_1^{ij},\dots,l_p^{ij} \\ 1\le i<j\le N \\ n_1^{1i}=0 \\ \sum_{j=1}^N (n^{ij}-l^{ij})=0 \\ g_i = r_i (\bmod 2pN)}} \exp\Big(-\pi \sum_{\substack{i<j \\ r}} ((n_r^{ij})^2 + (l_r^{ij})^2) - \frac{\pi}{2Np}(\sum_i g_i^2)\Big) \tag{C.12}$$

und

$$Z := \sum_{r_1,\dots,r_{N-1}=0}^{2pN-1} \alpha(r_1,\dots,r_{N-1}) \tag{C.13}$$

Mit der Definition des Zusammenhangs

$$A_1^{\alpha\beta} = < \psi_\alpha | \partial_{\varphi_1} \psi_\beta > \tag{C.14}$$

$$A_2^{\alpha\beta} = < \psi_\alpha | \partial_{\varphi_2} \psi_\beta > \tag{C.15}$$

$$F^{\alpha\beta} = \partial_{\varphi_1} A_2^{\alpha\beta} - \partial_{\varphi_2} A_1^{\alpha\beta} \tag{C.16}$$

erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\mathrm{tr}(\partial_{\varphi_1} A_2^{\alpha\beta}) &= \frac{1}{Z} \sum_{r_1,\dots,r_{N-1}=0}^{2pN-1} \alpha(r_1,\dots,r_{N-1}) \times \\ & \sqrt{\frac{2}{pN}} \sum_k \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \exp\left(-\frac{2\pi}{pN}(\varphi_1 + k + \frac{r_j}{2})^2\right) \end{aligned} \tag{C.17}$$

$$\text{mit} \quad r_N = -r_1 - \dots - r_{N-1}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\mathrm{tr}(\partial_{\varphi_2} A_1^{\alpha\beta}) = 0 \qquad \text{if} \qquad N \geq 2 \tag{C.18}$$

und

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2\pi i}\int d^2\varphi\ \mathrm{tr}(F^{\alpha\beta}) = \frac{1}{2N}\frac{1}{Z}\sum_{r_1,\ldots,r_{N-1}=0}^{2pN-1}\alpha(r_1,\ldots,r_{N-1})\times \\ &\sum_k\sum_{j=1}^{N}\Big(\mathrm{erf}(\sqrt{\frac{2\pi}{pN}}(k+1+\frac{r_j}{2})) - \mathrm{erf}(\sqrt{\frac{2\pi}{pN}}(k+1+\frac{r_j}{2}))\Big) \\ &= \frac{1}{Z}\sum_{r_1,\ldots,r_{N-1}=0}^{2pN-1}\alpha(r_1,\ldots,r_{N-1}) = 1\,. \end{aligned} \tag{C.19}$$

Literatur

[1] K. Klitzing, G. Dorda,M. Pepper, *New Methods for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance*, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 494

[2] E. Hall, Amer. J. Math. **2** (1879) 287

[3] D.C. Tsui, H.L. Strömer, A.C. Gossard, *Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit*, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 1559

[4] R. Varnhagen, *Topology and Fractional Quantum Hall Effect*, BONN-TH-94-22, hep-th 9411031

[5] R.R. Du, H.L. Strömer, D.C. Tsui, L.N. Pfeiffer, K.W. West, *Experimental Evidence for New Particles in the Fractional Quantum Hall Effect*, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 2944

[6] R.L. Willet, R.R., Ruel, M.A. Paalanen, K.W. West, L.N. Pfeiffer, *Enhanced Finite-Wave-Vector Conductivity at Multiple Even-Denominator Filling Factors in Two-Dimensional Electron Systems*, Phys. Rev. B **47** (1993) 7344

[7] K. Kopitzki, *Einführung in die Festkörperphysik*, (1986) Teubner, Stuttgart

[8] R.E. Prange, S.M. Girvin, *The Quantum Hall Effect*, (1987) Berlin: Springer

[9] M. Stone, *Quantum Hall Effect*, (1992) World Scientific

[10] R.B. Laughlin, *Quantized Hall Conductivity in Two Dimensions*, Phys. Rev. B **23** (1981) 5632-5623

[11] F.D.M. Haldane, *Quantized Hall Conductance, Current-Carrying Edge States and the Existence of Extended States in a Two-Dimensional Disordered Potential*, Phys. Rev. B **25** (1982) 2185

[12] D.J. Thouless, M. Kohmoto, M.P. Nightingale, M. den Nijs, *Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential*, Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 405-408

[13] J.E. Avron, R. Seiler, B. Simon, *Homotopy and Quantization in Condensed Matter Physics*, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 51-53

[14] J.E. Avron, R. Seiler, *Quantization of the Hall Conductance for General Multiparticle Schrödinger Hamiltonians*, Phys. Rev. Lett. **54** (1985) 259-262

[15] Q. Niu, D.J. Thouless, Y.S. Wu, *Quantized Hall Conductance as a Topological Invariant*, Phys. Rev. B **31** (1985) 3372-3377

[16] M. Kohmoto, *Topological Invariant and the Quantization of the Hall Conductance*, Ann. Phys. (N.Y.) **160** (1985) 343-354

[17] Q. Niu, D.J. Thouless, *Quantum Hall Effect with Realistic Boundary Conditions*, Phys. Rev. B **35,5** (1987) 2188-2197

[18] R.B. Laughlin, *Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations*, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 1395-1398

[19] S.M. Girvin, *Particle-Hole Symmetry in the Anomalous Quantum Hall Effect* Phys. Rev. B **29** (1984) 6012

[20] X.G. Wen, *Theory of Edge States in Fractional Quantum Hall Effect*, Int. J. Mod. Phys. **B6** (1992) 1711-1762

[21] M. Stone, *Vertex Operators in the Quantum Hall Effect*, Int. J. Mod. Phys. **B5** (1991) 509

[22] X.G. Wen, A. Zee, *A Classification of Abelian Quantum Hall States and Matrix Formulation of Topological Fluids* Preprint NST-ITP-92-10 (1992)

[23] J.K. Jain, *Incompressible Quantum Hall States* Phys. Rev. B **40** (1989) 8079-8082

[24] A. Lopez, E. Fradkin, *Fractional Quantum Hall Effect and Chern-Simons Gauge Theories*, Phys. Rev. B **44** (1990) 5246, *Universality in the Fractional Quantum Hall Effect*, Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)**33C** (1993) 67-91

[25] A. Cappelli, C.A. Trugenberger, G.R. Zemba, *Infinite Symmetry in the Quantum Hall Effect*, Nucl. Phys. **B396** (1993) 465

[26] A. Cappelli, C.V. Dunne, C.A. Trugenberger, G.R. Zemba, *Conformal Symmetry and Universal Properties of Quantum Hall States*, Nucl. Phys. **B398** (1993) 531, Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)**33C** (1993) 21

[27] A. Cappelli, C.A. Trugenberger, G.R. Zemba, *Large N limit in the Quantum Hall Effect*, Phys. Lett. **306B** (1993) 100

[28] A. Cappelli, C.A. Trugenberger, G.R. Zemba, *Classification of Quantum Hall Universality Classes by $W_{1+\infty}$ symmetry*, Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 1902

[29] A. Cappelli, C.A. Trugenberger, G.R. Zemba, *$W_{1+\infty}$ Dynamics of Edge Excitations in the Quantum Hall Effect*, MPI-PhT/94-35, DFTT-16/94

[30] M. Flohr, R. Varnhagen, *Infinite Symmetry in the Fractional Quantum Hall Effect*, J. Phys. A: Math. Gen. **27** (1994) 3999-4010

[31] E. Verlinde, *A Note on Braid Statistics and the Non-abelian Aharanov-Bohm Effect* in *Modern Quantum Field Theory*, World Scientific (1991) 450-461 or in ref. [9] 258-269

[32] A.P. Balachandran, G. Bimonte, K.S. Gupta, A. Stern, *The Chern-Simons Source as a Conformal Family and its Vertex-Operators*, Int. J. Mod. Phys. **A7** (1992) 5855-5876, *Conformal Edge Currents in Chern-Simons Theories*, Int. J. Mod. Phys. **A7** (1992) 4655-4670

[33] S. Fubini, *Vertex Operators and Quantum Hall Effect* Mod. Phys. Lett. **A6** (1991), 347

[34] C. Cristofano, G. Maiella, R. Musto, F. Nicodemi, *Coulomb Gas Appraoch to Quantum Hall Effect*, Phys. Lett. **262B** (1991) 88, *Coulomb Gas Description of the Collective States for the Fractional Quantum Hall Effect*, Mod. Phys. Lett. **A6** (1991) 1779, *Theoretical Aspects of Quantum Hall Effect and Two-Dimensional CFT*, Mod. Phys. Lett. **A6** (1991) 2985

[35] G. Moore, N. Read, *Fractional Quantum Hall Effect and Non-Abelian Statistics*, Nucl. Phys. **B360** (1991) 362

[36] J. Fröhlich, A. Zee, *Large Scale Physics of the Quantum Hall Fluid*, Nucl. Phys. **B364** (1991) 517

[37] J.K. Jain, *Composite Fermion Approach to the Quantum Hall Effect*, Phys. Rev. Lett. **63** (1989) 199-202

[38] B.I. Halperin, P.A. Lee, N. Read, *Theory of Half-Filled Landau Level*, Phys. Rev. B **47** 7312

[39] R.L. Willett, R.R. Ruel, K.W. West, L.N. Pfeiffer, *Experimental Demonstration of a Fermi Surface at One-Half Filling of the Lowest Landau Level*, Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 3846

[40] W. Kang, H.L. Stromer, L.N. Pfeiffer, K.W. Baldwin, K.W. West, *How Real Are Composite Fermions?*, Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 3850

[41] V. Kac, A. Radul, *Quasifinite Highest Weight Modules over the Lie Algebra of Differntial Operators on the Circle* Commun. Math. Phys. **157** (1993) 429

[42] G. Cristofano, G. Maiella, R. Musto, F. Nicodemi, *FQHE and Jain's approach on the Torus*, DSF-T-94/17, INFN-NA-IV-94/17, cond-mat/9407033

[43] M. Eliashvili, *The Infinite Symmetry and Interplay Between Integer and Fractional Quantum Hall Effect*, ENSLAPP-A-462/94, hep-th/9404070

[44] M. Eliashvili, $W_{1+\infty}$*, Similarity Transformation and Interplay Between Interger and Fractional Quantum Hall Effect*, ESLAPP-A-466/94, hep-th/9404090

[45] M. Eliashvili, *On the Composite Fermion Approach in the FQHE*, ENSLAPP-A-478/94, hep-th/9407126

[46] D. Yoshioika, B.I. Halperin, P.A. Lee, *Groundstate of Two-Dimensional Electrons in Strong Magnetic Fields and* $\frac{1}{3}$ *Quantized Hall Effect*, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 1219

[47] W.P. Su, *Ground-state Degeneracy and Fractionally Charged Excitations in the Anomalous Quantum Hall Effect*, Phys. Rev. B **30** (1984) 1069

[48] F.D.M. Haldane, E.H. Rezayi, *Periodic Laughlin-Jastrow Wave Functions for the Fractional Quantum Hall Effect*, Phys. Rev. B **31,4** (1985) 2529-2531

[49] E. Keski-Vakkuri, X.G. Wen, *The Groundstate Structure and Modular Transformations of Fractional Quantum Hall States on a Torus*, Int. J. Mod. Phys. **B7** (1993) 4227-4260

[50] M.S. Narasimhan, C.S. Seshadri, *Stable and Unitary Vector Bundles on a Compact Riemann Surface*, Ann. Math. **82** (1965) 540-567

[51] S.K. Donaldson, *A New Proof of a Theorem of Narasimhan and Seshadri*, J. Diff. Geom. **18** (1983) 269-278

[52] D. Mumford, *Projective Invariants of Projective Structures and applications*, Proc. Intern. Cong. Math., Stockholm (1962) 526-530

[53] I. Affleck, private Mitteilung

[54] S. Koch, R.J. Haug, K.v. Klitzing, K. Ploog, *Size-Dependent Analysis of the Metal-Isulator Transition in the Integral Quantum Hall Effect*, Phys. Rev. Lett. **67,7** (1991) 883

[55] M. Flohr, *W-Algebras, New Rational Models and the Completeness of the* $c = 1$ *Classification*, Commun. Math. Phys. **157** (1993) 179

[56] M. Flohr, *Curiosities at Effective* $c = 1$, Mod. Phys. Lett. **A9** (1994) 1071

[57] M. Flohr, *Die rationalen konformen Quantenfeldtheorien in zwei Dimensionen mit effektiver Ladung* $c_{\text{eff}} \leq 1$, Doktorarbeit, BONN-IR-94-11

[58] J. Fröhlich, U.M. Studer, E. Thiran, *An ADE-O Classification of Minimal Incompressible Quantum Hall Fluids*, K.U. Leuven-preprint, cond-mat/9406009