Universität Bonn
Physikalisches Institut

(0,2)–supersymmetrische Stringvakua

by

Andreas Wißkirchen

Abstract

Using the simple current technique a new, manifestly asymmetric construction of a modular invariant partition function for the heterotic string compactified to four dimensions is presented. This yields exactly solvable models with GUT gauge groups SO(10), SU(5) and SU(3)$\times$SU(2), respectively. By computing the Yukawa couplings and the chiral ring structure some of these generalised Gepner models can be identified with certain points in the moduli space of Distler/Kachru models based on vector bundles. So, the triality CFT/CY/LG is established also in the (0,2) framework. Applying the construction to (0,4) models and further breaking the hidden E_8 gauge group provide dual pairs of heterotic and type II strings. Then, successive Higgsing leads into new branches of the parameter space of heterotic N=2 strings. For one of the simplest (0,2) models all three and four point functions are calculated. Those reveal flat directions in the moduli space, its phase structure and the explicit form of the Kähler modulus. Finally, by generating thousands of (0,2) LG models via a move (2,2)$\to$(0,2), mirror symmetry is extended to the (0,2) case.

Post address:
Nußallee 12
D-53115 Bonn
Germany
e–mail:
wisskirc@avzw02.physik.uni–bonn.de

BONN–IR–97–09
Bonn University
May 1997
ISSN–0172–8741

Universität Bonn
Physikalisches Institut

(0,2)–supersymmetrische Stringvakua

von

Andreas Wißkirchen

Dieser Forschungsbericht wurde als Dissertation von der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn angenommen.

Angenommen am:	12.5.97
Referent:	Prof. Dr. Werner Nahm
Korreferent:	Prof. Dr. Rainald Flume

Inhalt

1. Einleitung 1
2. Allgemeines über Strings und $(0,2)-$Modelle 8
   2.1. Typen von Strings 8
   2.2. Gepnermodelle 12
   2.3. Phasenstruktur und Distler/Kachru–Modelle 17
3. Die Konstruktion exakt lösbarer $(0,2)-$Stringtheorien 21
   3.1. Die Methode der einfachen Ströme 21
   3.2. Exakt lösbare Stringmodelle mit $(0,2)-$Supersymmetrie 22
   3.3. Die Berechnung des masselosen Spektrums 28
   3.4. Beispiele für exakt lösbare Modelle 29
   3.5. Bemerkungen zu speziellen Konstruktionen 35
   3.6. Zusammenfassung 36
4. Das $(0,2)-$Dreigespann 37
   4.1. Das $(80,0)-SO(10)-(0,2)-$Modell 38
   4.2. Chiraler Ring und σ–Modell–Struktur des $(80,0)-$Modells 40
   4.3. Ein $(64,0)-SU(5)-$Modell 44
   4.4. Ein $(50,0)-E_3-$Modell 49
   4.5. Vergleich der Modelle und Zusammenfassung 53
5. Modelle mit $N=2$ Raumzeit–Supersymmetrie 54
   5.1. $(0,4)-$Modelle über K_3 54
   5.2. Spezielle Punkte erweiterter Symmetrie 55
   5.3. Das Brechen der versteckten E_8 58
   5.4. Beispiele für diese Brechung 59
   5.5. Zusammenfassung 62
6. Der Parameterraum eines $(0,2)-$Modells 63
   6.1. Singlets und Eichgruppenerweiterung 63
   6.2. Die Landau–Ginzburg–Phase 65
   6.3. Singletkopplungen im Superpotential 67
   6.4. Konsequenzen für den Parameterraum von $(0,2)-$Strings 72
   6.5. Zusammenfassung 76
7. Die $(0,2)-$Spiegelsymmetrie 77
   7.1. Das verallgemeinerte $(0,2)-$Dreigespann 77
   7.2. $(0,2)$–Landau–Ginzburg–Theorien 83
   7.3. $(2,2)-$Spiegelsymmetrie 89
   7.4. $(0,2)-$Spiegelsymmetrie 94
   7.5. Diskussion der Vollständigkeit der Spiegelsymmetrie 97
   7.6. Zusammenfassung 99
8. Zusammenfassung und Ausblick 100
Danksagung 101
Anhang 102
Referenzen 104

1. Einleitung

Ein großes Ziel der Physik ist das Auffinden einer vereinheitlichten Theorie aller fundamentalen Wechselwirkungen, die Natur wäre um einiges ästhetischer. Nach ersten Anfängen von Kaluza und Klein [1], die eine Vereinheitlichung der damals bekannten Wechselwirkungen der Gravitation und des Elektromagnetismus anstrebten und durch Hinzunahme einer fünften, zu einem Kreis kompaktifizierten Dimension die Quantisierung der elektrischen Ladung als Impuls in dieser Dimension erklären wollten, war es in den sechziger Jahren gelungen, die elektromagnetische mit der schwachen Wechselwirkung zu vereinheitlichen [2]. Nun stellte sich die Frage, wie man dieses Konzept fortführen kann, prinzipielle Gründe dagegen gibt es jedenfalls nicht. In der Tat ist es so, daß sich die extrapolierten Kopplungskonstanten dreier Wechselwirkungen (die Gravitation bleibt erst einmal außen vor) bei einer Energie von $10^{15}GeV$ wenigstens ungefähr schneiden. Es liegt also nahe, eine vereinheitlichte Theorie zu formulieren, in der eben bei $10^{15}GeV$ die Abspaltung der starken Wechselwirkung erfolgt und ferner in der Gegend der Masse des Z_0 die weitere Auffächerung in elektromagnetische und schwache Wechselwirkung. Die betreffende Theorie müßte allerdings diese verschiedenen Skalen der Symmetriebrechung, das sog. Problem der Eichhierarchie, zufriedenstellend erklären. Ferner ist eine gehörige Feinabstimmung nötig, um den Ursprung der so stark unterschiedlichen Massenskalen der drei Fermionfamilien zu ergründen. Allerdings sagen alle vereinheitlichten Theorien den Protonzerfall voraus, wobei die experimentell ermittelte Untergrenze der Lebensdauer des Protons viele nicht–supersymmetrische Theorien schon zu Fall gebracht hat. Es ist also nicht nur aus theoretischen Gründen besser, die Theorie supersymmetrisch zu formulieren, wobei die Brechung der Supersymmetrie oberhalb der Z_0-Masse erfolgen muß. Hinzu kommt, daß sich in einem supersymmetrischen Standardmodell die drei Kopplungskonstanten wirklich schneiden. Allerdings handelt man sich so weitere Teilchen ein, die man noch nicht experimentell gesehen hat.

Ein Ansatz für dieses Problem ist die Stringtheorie, dort wird das Konzept des Punktteilchens aufgegeben und durch das einer Linie ersetzt. Mehr noch, da alle Versuche, für die Quantisierung der Gravitation eine renormierbare Quantenfeldtheorie zu finden, zum Scheitern verurteilt sind, könnte hier auch die Stringtheorie helfen, kann man doch auf relativ einfache Weise in niedrigster Ordnung der Störungstheorie die einsteinschen Feldgleichungen ableiten [3], wobei die höheren Ordnungen Korrekturen vorsehen, die das ganze renormierbar machen. Hier könnte mithin ein Ansatzpunkt für eine Theorie aller Wechselwirkungen liegen, die aber erst jenseits der Planckskala von $10^{19}GeV$ zutage treten wird, denn ab hier werden Quantenkorrekturen zur Gravitation sichtbar, die man etwa in der Gravitonstreuung erwarten könnte. Eine brauchbare Theorie zur Quantengravitation ist allerdings noch nicht gefunden worden, aber immerhin gab es in dieser Hinsicht einen Lichtblick, nämlich die mikroskopische Erklärung der Bekenstein/Hawking–Entropie schwarzer Löcher im Rahmen der Stringtheorie mittels Branen [4] unter Nutzung der Verallgemeinerung der wohlbekannten Dualität des Elektromagnetismus' [5] auf $N = 2$ supersymmetrische Yang/Mills–Theorien [6].

In letzter Zeit kam es im Zusammenhang mit dieser Dualität zu einer rapiden Belebung der Stringtheorie, ferner wurden zur Beschreibung dieser Dualitäten übergeordnete Theorien gesucht, mit der $M-$Theorie [7] wurde eine alte Idee ausgegraben und mit der $F-$Theorie [8] eine neue entwickelt. Doch spielen diese Sachverhalte in der vorliegenden Arbeit nur eine untergeordnete Rolle, daher wird hierauf im weiteren Verlauf nur noch am Rande eingegangen. Nichtsdestotrotz werden duale Paare heterotischer Strings und Strings vom Typ II präsentiert werden.

Abgesehen von diesen weit weg jeden Experimentes liegenden Energieskalen kann man sich auch darauf bescheiden, aus einer Stringtheorie durch Ausintegration der massiven Freiheitsgrade eine effektive Feldtheorie abzuleiten, die die Phänomene in den heute zugänglichen Energiebereichen beschreibt [9]. Dazu muß allerdings auf vier Dimensionen kompaktifiziert werden, ferner sollte eine Eichgruppe nicht zu großen Rangs bzw. Dimension vorhanden sein sowie schließlich drei Familien von Materie existieren.

Ein guter Ansatzpunkt für eine solche Niederenergiefeldtheorie ist der heterotische String [10], der nur die Eichgruppen $SO(32)$ oder $E_8 \times E_8$ erlaubt [11]. Da es keine nicht–störungstheoretische Beschreibung von Stringtheorien ("String–Feldtheorie") gibt, ist man auf perturbative Methoden angewiesen. Im letzten Jahrzehnt wurden diese klassischen Lösungen mit $N = 1$ Raumzeit–Supersymmetrie intensiv untersucht. Dabei stellte sich heraus, daß der kompaktifizierte sechsdimensionale Teil der Raumzeit eine Calabi/Yau–Mannigfaltigkeit (CYM) bilden [12] bzw. die interne superkonforme Feldtheorie (SKFT) $(0,2)$–Weltflächen–Supersymmetrie aufweisen muß [13], denn die ganze Raumzeit–Supersymmetrie entstammt nur dem rechtslaufenden Sektor. Diese CYM bzw. SKFT bestimmt dann sowohl die Eichgruppe als auch das beobachtbare Teilchenspektrum. Allerdings hatte man bei diesen allgemeinen $(0,2)-$Theorien gesehen, daß sie durch Instantonkorrekturen destabilisiert werden [14–17], so daß ein konformer Fixpunkt, nämlich die SKFT, gar nicht existieren sollte. Hinzu kam, daß diese asymmetrischen Modelle nur schwer handhabbar sind, und deshalb konzentrierte man sich im weiteren auf die Untersuchung von Modellen mit $(2,2)$–Weltflächen–Supersymmetrie.

Diese Spezialisierung entspricht der Spezifizierung, die linkslaufenden Fermionen als Schnitte im Tangentialbündel der CYM zu wählen, was einen der beiden Faktoren der generischen Eichgruppe $E_8 \times E_8$ auf E_6 herunterbricht. Der andere ist sowieso nicht beobachtbar, da unter E_8 nur Singlets auftreten können. Eine besondere Rolle spielen hierbei die sog. Gepnermodelle [18], bei denen als interne SKFT Tensorprodukte minimaler Modelle der $N = 2$ Super–Virasoroalgebra, diese sind zugleich unitär und erlauben damit später eine Interpretation von Wahrscheinlichkeiten, gewählt werden und die die Eichgruppe $E_6 \times E_8$ zzgl. einiger Faktoren $U(1)$ aufweisen. Es ist nicht zu leugnen, daß hier viele Einsichten gewonnen wurden, so fand man Dreigenerationenmodelle mit kleinen Eichgruppen [19,20] und es wurden weitere fundamentale Fragen aufgeworfen, wie z.B. Kegelübergänge im frühen Universum [21,22], die exakte Lösung von CY–σ–Modellen [18,23–26] sowie gewisse besondere Eigenschaften des Parameterraums studiert, etwa spezielle Geometrien [27], Weltflächen–Supersymmetrie [28,29], Raumzeit–Supersymmetrie [30–32], Skalenverhalten [33] und Zusammenhangsfragen [34], um nur einige Aspekte zu nennen. Die meisten dieser Probleme wurden selbst im $(2,2)-$Kontext bis heute nicht vollständig gelöst.

Allerdings sind die $(0,2)-$Modelle halt der allgemeine Fall und wegen der kleineren Eichgruppe phänomenologisch attraktiv [35] und so zeigten Distler und Greene [15], daß das Auflassen der Restriktion auf das Tangentialbündel auf kleinere und damit realistischere Eichgruppen wie $E_5 = SO(10)$ oder $E_4 = SU(5)$ führt. In diesem Fall der Eichgruppe E_{9-r} sind die linkslaufenden Fermionen nun Schnitte in einem allgemeineren stabilen Vektorbündel vom Rang r. Ferner wurden SKFTen mit freien Bosonen bzw. Fermionen und mittels Faktortheorien konstruiert [36,37], deren Beziehung zu $\sigma-$Modellen über CYMen aber nicht enthüllt werden konnte. Da aber damit immer noch keine $(0,2)-$SKFT explizit konstruierbar war und es ferner die oben erwähnten Konsistenzprobleme gab, gerieten diese Modelle schnell in Vergessenheit. Dagegen gab es im $(2,2)-$Bereich viele Fortschritte, dort wurde in [20,23,24,38,39] bzw. [40,41] gezeigt, daß die konformen Fixpunkte gewisser einfacher CY–σ–Modelle Gepner– [18] oder Kazama/Suzuki–Modellen [42,43] entsprechen.

Einige Jahre später wurden die $(0,2)-$Modelle durch eine bahnbrechende Arbeit von Witten [44] wiederbelebt. Dort wurden nichtlineare $\sigma-$Modelle über CYMen und Landau/Ginzburg–Theorien (LG–Theorien) als Phasen eines sog. linearen $\sigma-$Modells interpretiert. Die Anwendung dieser Einsicht auf den $(0,2)-$Fall durch Distler und Kachru ergab eine LG–Beschreibung, aus der man detaillierte Vorhersagen über einen möglichen konformen Fixpunkt extrahieren konnte [45]. Insbesondere muß man sich in diesem Rahmen keine Gedanken über Singularitäten und deren Auflösungen machen. In [16] wurde gezeigt, daß man zumindest in der Umgebung eines $(2,2)-$Modells, das man mit marginalen Deformationen stört, die nicht die $(2,2)-$Struktur erhalten, eine SKFT angeben kann. Später zeigten Silverstein und Witten [17], daß für alle $(0,2)-$Modelle, die durch lineare $\sigma-$Modelle beschrieben werden, die SKFTen existieren, die insbesondere nicht destabilisiert werden, denn die entsprechenden Terme im vierdimensionalen Raumzeit–Superpotential können nicht auftreten, da die Singletkopplungen keine Singularitäten aufweisen. Nichtsdestotrotz war die explizite Konstruktion solcher SKFTen immer noch nicht gefunden. Glücklicherweise kann man wichtige strukturelle Merkmale der SKFT bereits im Rahmen der LG–Theorie ableiten [45]: wegen der linkslaufenden $R-$Invarianz gibt es einen linkslaufenden $U(1)_L-$Strom, der den globalen linkslaufenden $U(1)-$Strom der $(2,2)-$Theorie ersetzen wird, den es in $(0,2)-$Theorien nicht gibt. Der zugehörige Operator des spektralen Flusses erweitert $SO(16-2r)$ zu E_{9-r}. Ferner kann man die zentralen Ladungen angeben, sie lauten $(c,\overline{c}) = (6+r, 9)$. Daher schien es eine schwierige Aufgabe, modular invariante Zustandssummen für solche asymmetrischen SKFTen zu finden. Die modulare Invarianz ist deshalb wichtig, da sie dafür sorgt, daß Wahrscheinlichkeitsamplituden nur von der Topologie, d.h. dem Geschlecht der Weltfläche abhängen [46].
Dieses Problem wurde in [47] gelöst: die dort konstruierten SKFTen erfüllen alle oben erwähnten Bedingungen und liefern Nettozahlen von Generationen, die sich auch im Rahmen der LG–Theorie ergeben. Hierbei wird die Methode der einfachen Ströme von Schellekens und Yankielowicz [48] bzw. Intriligator [49] benutzt, mit der sich neue modular invariante Zustandssummen konstruieren lassen. Sie läßt sich ebenfalls für die Konstruktion der $(0,2)-$Stringvakua nutzen. Man startet in Lichtkegeleichung mit der diagonalen Zustandssumme einer SKFT mit der zentralen Ladung $(c,\overline{c}) = (24, 24)$, die aus der zweidimensionalen transversalen Raumzeit, einer $N = 2$ SKFT mit $(c,\overline{c}) = (9,9)$, die ein Tensorprodukt $N = 2$ minimaler Modelle ist, $(r-3)$ Faktoren $U(1)_2$ und der Kac/Moody–Algebra $SO(16-2r) \times E_8$ der Stufe eins besteht. Zunächst wird durch einen einfachen Strom rechts $SO(16-2r) \times U(1)_2^{r-3}$ auf $SO(10)$ erweitert, wonach die bosonische Stringabbildung angewendet werden kann, so daß rechts ein Superstring mit $\overline{c} = 12$ (in Lichtkegeleichung) entsteht. Durch weitere Projektionen ist dafür zu sorgen, daß in der Theorie mit $(c,\overline{c}) = (9,9)$ nur gleiche Sektoren aneinander koppeln, d.h. man bildet das Tensorprodukt im supersymmetrischen Sinne. Die letzte nötige Operation auf der rechten Seite ist die sog. Gliozzi/Scherk/Olive–Projektion [50] auf gerade totale Ladung. Würde man hier aufhören, so ergäben sich die Gepnermodelle [18]. Wegen der neuen Faktoren $U(1)_2$ kann man aber nun weitere Ströme wählen, die verhindern, daß die bisherigen Projektionen auch auf der linken Seite wirken, was i.a. die Eichgruppe E_6 und die $(2,2)-$Supersymmetrie des Gepnermodells brechen wird. Schließlich ist links noch eine solche $GSO-$Projektion anzubringen, die $SO(16-2r) \times U(1)_{c=9} \times U(1)_2^{r-3}$ auf $E_{9-r} \times U(1)^{r-3}$ erweitert. Diese Projektion ist nicht dieselbe wie auf der rechten Seite. Diese Konstruktion liefert eine modular invariante Zustandssumme für die Eichgruppe E_{9-r} und die zentrale Ladung $(c,\overline{c}) = (6+r, 9)$. Da es nun neue masselose linkslaufende Anregungen gibt, ändert sich das Spektrum gegenüber dem Gepnermodell drastisch. Sogar die Modelle mit Eichgruppe E_6, die sich durch zufällige Erweiterung ergeben kann, sind nicht in den Spektren der Gepnermodelle enthalten, aber immerhin noch in der

Liste der LG–Theorien [51,52], womit sie $(0,2)-$Deformationen von $(2,2)-$Theorien sein könnten. Vergleicht man die Nettozahlen mit denen aus Distler/Kachru–Modellen, d.h. einem stabilen Bündel über einer glatten CYM, so ergeben sich Anzeichen, daß diese SKFTen tatsächlich gewisse Punkte im Parameterraum dieser Modelle beschreiben.

In [53] wurde dieses Identifikationsproblem im Ansatz gelöst, denn je ein Vertreter der exakt lösbaren Modelle mit den verschiedenen Eichgruppen wurde mit den Distler/Kachru–Modellen in Verbindung gebracht. Die dort verwendeten Techniken entsprechen denen aus [29], wo gezeigt wurde, daß für gewisse diskrete Symmetrien, die auf einem exakt lösbaren $(2,2)-$Modell oder der entsprechenden LG–Theorie wirken, sowohl die Dimensionen der chiralen primären Felder als auch das zugehörige Superpotential bzw. der chirale Ring ermittelt werden können. Diese Übertragung ist möglich, da die einfachen Ströme wie diskrete Symmetrien wirken, indem sie die konformen Dimensionen der Felder ändern. Durch die genaue Untersuchung des masselosen Spektrums ließ sich auch der chirale Ring ermitteln und die Produktstruktur mit den Yukawakopplungen vergleichen, was bis auf einige Reskalierungen zu einer perfekten Übereinstimmung führte. Da der chirale Ring auch von einem speziellen linearen $\sigma-$Modell vom Distler/Kachru–Typ abgeleitet werden kann, das sowohl eine LG– als auch eine CY–Phase besitzt, beschreibt das exakt lösbare Modell die grundlegende SKFT wenigstens an einem Punkt im Parameterraum und nach den Aussagen von [16,17] folgt, daß zumindest die Theorien in der Nachbarschaft konform invariant sind. Somit gibt es das Dreigespann CYM/LG/SKFT auch in den $(0,2)-$Theorien.

Diese drei Identifikationen konnten aber nur der Anfang sein. Da die die SKFT bestimmenden Daten derart von denen des linearen $\sigma-$Modells verschieden sind, ist ein weiteres analoges Vorgehen zu aufwendig. Für Modelle mit $N=2$ Raumzeit–Supersymmetrie gestaltet sich die Sache einfacher, denn als CYM für ein exakt lösbares Modell kommt nur $K_3 \times T^2$ in Frage, womit nur noch das Bündel für die linkslaufenden Fermionen ermittelt werden muß, wohingegen die Methode der expliziten Konstruktion ohne Mühe übertragen werden konnte. Dies geschah in [54]. Außerdem entsprechen die exakt lösbaren SKFTen Punkten im Parameterraum mit erweiterter Eichgruppe, bei den Gepnermodellen sind es Produkte von $U(1)$en. Daher wurden ferner SKFTen konstruiert, die (nichtabelsche) Erweiterungen der Eichgruppe aufweisen. Man mag sich fragen, warum man diese phänomenologisch uninteressanten Modelle betrachtet. Diese heterotischen Modelle mit $N=2$ Raumzeit–Supersymmetrie sind für die Verallgemeinerung der Seiberg/Witten–Dualität [6] von $N=2$ Yang/Mills–Theorien auf Strings von Belang. Es gibt viele Argumente, daß manche heterotische Strings auf $K_3 \times T^2$ eine duale Beschreibung als String vom Typ II besitzen, der auf einer dreidimensionalen CYM kompaktifiziert ist [30,32,55], welche aber die spezielle Eigenschaft besitzen muß, eine K_3-Faserung zu sein [31,56]. Topologieändernde Übergänge zwischen verschiedenen CYM–Parameterräumen [22,57] für den String vom Typ II entsprechen Punkten nichtperturbativ(!) erweiterter Eichsymmetrie, bei denen neue Higgsphasen auftreten. Diese Erweiterung läßt sich mit dem Higgsmechanismus teilweise brechen und es ergeben sich Modelle, für die eine duale Beschreibung vom Typ II existiert, die in der Liste der K_3-Faserungen in [31,58] vorkommt. Eine ähnliche Rechnung wurde in [59] ausgeführt, wo Faktortheorie–Techniken für $T^4/\mathbb{Z}_M \times T^2$ verwendet wurden. Somit kann die Analyse hier als die Verallgemeinerung dieser Betrachtungen auf gepnerähnliche SKFTen angesehen werden.

Eine andere Vorgehensweise besteht darin, auch den zweiten, bislang versteckten Faktor E_8 der Eichgruppe zu brechen. Solange man das nicht tut, ist die Anzahl der generischen Vektormultiplets größer als neun, was die möglichen Modelle stark einschränkt. Die exakt lösbare Konstruktion ließ sich auch auf diesen

Fall übertragen. Die Identifikation mit Bündeln über K_3 gestaltete sich wieder relativ einfach und die verschiedenen Higgsphasen ergaben wieder Kandidaten für Dualitäten mit Modellen vom Typ II.

Dies waren aber nur die Parameterräume ganz spezieller $(0,4)-$Modelle und es sollte auch der eines echten $(0,2)-$Modells untersucht werden. Dazu wurden in [60] erstmals alle Drei– und Vierpunktkopplungen der Singlets am exakt lösbaren Punkt berechnet. In [16] wurde anhand der Quintik mittels der LG–Beschreibung bereits gezeigt, daß es neben dem schon vorher bekannten $(2,2)-$Parameterraum [61], der die komplexen und Kählerdeformationen enthält, weitere flache Richtungen des Superpotentials gibt, die auf das Konto der Deformationen des Tangentialbündels gehen, wobei zumindest die Zustände aus den unverdrehten Sektoren zu gegenseitig integrablen Deformationen führen. In [62] wurde für die Quintik abgeleitet, daß sogar alle Parameter des linearen $\sigma-$Modells Deformationen für jeden Wert der Kählerklasse sind. In der LG–Phase schließt dies auch Beiträge verdrehter Sektoren ein. Somit gibt es für die Quintik einen 326–dimensionalen $(0,2)-$Parameterraum mit einem 102–dimensionalen $(2,2)-$Unterraum.

Kennt man das exakt lösbare Modell eines $(0,2)-$Stringvakuums, so kann man Aussagen über nichtverschwindende Superpotentialkopplungen machen, wenigstens in allen Ordnungen der Störungstheorie. Für eins der drei schon vorher identifizierten Modelle wurde dieses Programm durchgeführt. Zunächst stellte sich heraus, daß die exakt lösbare SKFT in der LG–Phase des linearen $\sigma-$Modells liegt, denn durch eine andere Wahl der definierenden Polynome kommt man auf 339 Singlets statt 350 wie beim exakt lösbaren Modell. Die überzähligen elf sind nur an diesem speziellen Punkt im Parameterraum enthalten, sieben von ihnen kommen von der Erweiterung der Eichgruppe und vier aus einem speziellen verdrehten Sektor. Diese 339 sind aber mehr als die 329, die die CY–Phase vorhersagt, womit nicht alle diese Singlets flachen Richtungen entsprechen können. Das zeigte sich in der Berechnung der Kopplungen der 350 Singlets, die nicht alle verschwanden. Da es im Gegensatz zum $(2,2)-$Fall [38,63] keine algebraische Unterscheidung zwischen komplexen, Kähler– und Bündeldeformationen gibt, konnte die Kählerklasse nicht exakt bestimmt werden, allerdings mit einigen plausiblen Annahmen und Nutzung der Flachheit bzgl. der erweiterten Eichsymmetrie in niedrigster Ordnung zumindest bis auf zwei Parameter.

Nach all diesen Beispielen fragt man sich, ob man die $(0,2)-$Modelle nicht auch allgemeiner behandeln kann, insbesondere, ob sich Phänomene aus $(2,2)$ übertragen. Als erstes springt hier die Spiegelsymmetrie ins Auge, die im $(2,2)-$Fall in [28,64] entdeckt wurde und viele Entwicklungen angestoßen hat, die in den Dualitäten stark/schwacher Kopplung [7,8,30,65] und der Vereinheitlichung von Stringvakua [21,22,66] kulminierten. Es ist nun die Frage, ob diese Spiegelsymmetrie nur ein Artefakt der Beschränkung auf $(2,2)$ ist oder nicht. Dieses Thema wurde in [67] behandelt, dort wurde das Augenmerk auf exakt lösbare Modelle und LG–Theorien gelegt. Um eine größere Basis von Modellen zu erhalten, wurden die Ergebnisse aus [53] zum Dreigespann CYM/LG/SKFT verallgemeinert. Dabei zeigt sich wieder, daß die Daten der exakt lösbaren Theorie eher mit dem Bündel denn mit der CYM zu tun haben. Es ist aber zusätzlich möglich, den verantwortlichen einfachen Strom aus dem exakt lösbaren Kontext zu lösen und eine (Weitergabe–)Abbildung anzugeben, die aus $(2,2)-$Theorien solche vom Typ $(0,2)$ macht. Die Bezeichnung "Weitergabe" hat ihren Ursprung darin, daß die Daten der CYM des $(2,2)-$Modells die neuen Bündeldaten des $(0,2)-$Modells werden. Zur Beschreibung der Spiegelsymmetrie muß man sich erst einmal Gedanken machen, was denn ausgetauscht wird. Bei $(2,2)$ sind es die beiden Kohomologiegruppen der komplexen $H^1(M,TM)$ und Kählerdeformationen $H^1(M,TM^*)$. Die Zuordnung der Deformationen zu den Kohomologiegruppen mit

Koeffizienten geht auf Kodaira und Spencer zurück [68]. Im physikalischen Terminus nennt man sie Generationen und Antigenerationen. Mittels der holomorphen Dreiform (diese existiert, da die Stringtheorie ein antisymmetrisches Graviton hat) und der Kählerklasse kann man zeigen, daß diese beiden Gruppen zu den Kohomologiegruppen $H^{(2,1)}(M)$ bzw. $H^{(1,1)}(M)$ isomorph sind. Der Austausch entspricht dann der Spiegelung des Hodgediamanten der CYM an einer Diagonalen. Bei $(0,2)$ ist das linkslaufende Eichbündel nicht das Tangentialbündel der CYM, sondern ein allgemeineres holomorphes stabiles Vektorbündel V. Die Generationen zählen daher $H^1(M,V)$ und die Antigenerationen $H^1(M,V^*)$ ab. Im $(2,2)-$Fall war einfach $V = TM$. Es sind diese beiden Gruppen, die ausgetauscht werden. Die entsprechenden SKFTen sind über ein Vorzeichen in der Ladung isomorph, was aber keine weiteren Aufschlüsse über das Spiegelbild zuläßt. Die Abbildung auf das Spiegelbild erhält man vielmehr durch die Übertragung der $(2,2)-$Spiegelabbildung mit Vor– bzw. Nachschaltung der Weitergabe. Die Weitergabe wurde einige Wochen später als in [67] auch in [69] veröffentlicht, in [70] wurde kurz darauf über weitere Aspekte der Spiegelabbildung spekuliert. Kürzlich erschien in [71] ein Vorschlag, die Spiegelsymmetrie in einem erweiterten Rahmen zu untersuchen.

Diese Arbeit enthält die Untersuchungen und Ergebnisse aus den Referenzen [47,53,54,60,67] und ist wie folgt aufgebaut.

Im zweiten Kapitel werden zunächst einige Konstruktionen vorgestellt. Nach einer Einführung in die verschiedenen Stringtheorien werden die Gepnermodelle präsentiert. Am Beispiel der Quintik wird die Beziehung zu einer LG–Theorie und deren chiralem Ring dargestellt. Anschließend werden das wittensche Phasenbild und die linearen $\sigma-$Modelle in Einheit mit den Distler/Kachru–Modellen eingeführt, womit die für das weitere Verständnis nötige Basis gelegt ist.

Im dritten Kapitel geht es um die Verallgemeinerung der gepnerschen Konstruktion auf den $(0,2)-$Fall. Dazu wird zunächst die Methode der einfachen Ströme rekapituliert und darauf die Konstruktion der modular invarianten Zustandssumme Stück für Stück durchgegangen. Nach einer kurzen Bemerkung über die Berechnung des masselosen Spektrums folgt eine Vielzahl von Beispielen, die die Vielfalt dieser neuen Modelle verdeutlicht.

Anschließend wird im vierten Kapitel zuerst die Relation zwischen einem exakt lösbaren Modell und einem linearen $\sigma-$Modell hergestellt. Dazu werden bis auf die Singlets alle Felder des masselosen Spektrums in der exakten Theorie angegeben und die Dreipunktkopplungen berechnet, wonach der chirale Ring einschl. seiner Produktstruktur ableitbar ist, welche mit den Yukawakopplungen übereinstimmt. Schließlich werden auch das Bündel und die CYM des zugehörigen Distler/Kachru–Modells ermittelt, womit nach schon erwähnten Argumenten die konforme Invarianz auch in der Umgebung des exakt lösbaren Modells garantiert ist. Diese Untersuchung wird dann in analoger Weise für zwei weitere Modelle mit anderen Eichgruppen durchgeführt und damit das Dreigespann CYM/LG/SKFT auch in $(0,2)$ etabliert.

Im darauffolgenden fünften Kapitel werden Modelle mit $(0,4)$–Weltflächen–Supersymmetrie betrachtet. Nach einer Einführung in die geometrische Berechnung des masselosen Spektrums wird eine Auswahl von SKFT–Modellen präsentiert, die nach derselben Methode wie oben berechnet wurden, und mit den geometrischen Modellen in Verbindung gebracht. Sodann erfolgt für einige Beispiele eine Untersuchung der Modellkaskade, die durch sukzessive Symmetriebrechung entsteht. In diesen Higgsphasen lassen sich duale Paare ausmachen. Anschließend wird die exakt lösbare Konstruktion auf den Fall verallgemeinert, wo auch die bislang versteckte E_8-Eichsymmetrie gebrochen wird. Wieder werden an einigen Beispielen die Higgsphasen und die dualen Paare unter die Lupe genommen.

Dann erfolgt im sechsten Kapitel die genaue Untersuchung des Parameterraums eines schon im vierten Kapitel untersuchten exakt lösbaren Modells. Zunächst wird gezeigt, daß dieses exakt lösbare Modell in der LG–Phase des entsprechenden linearen $\sigma-$Modells liegt. Darauf werden alle Singlets der Theorie explizit angegeben und alle ihre Drei– und Vierpunktfunktionen berechnet. Dies erlaubt die Bestimmung flacher Richtungen und der Kählerklasse. Abschließend wird über weitere flache Richtungen sinniert, die evtl. nicht zum Parameterraum des linearen $\sigma-$Modells gehören und auf andere Modelle führen könnten.
Im vorletzten siebten Kapitel wird das im vierten Kapitel eingeführte Dreigespann auf eine Vielzahl von Modellen erweitert, wobei die vorherigen drei Beispiele Vertreter davon sind. Es zeigt sich, daß die Anwendung spezieller einfacher Ströme sich auf LG–Niveau zu einer Abbildung abstrahieren läßt, die aus einer $(2,2)-$ eine $(0,2)-$Theorie macht. Mit diesem Handwerkszeug und der Vielzahl von Modellen läßt sich klären, ob sich die Spiegelsymmetrie auf $(0,2)$ überträgt. Da jedoch bei $(0,2)$ die Felder nicht mehr so eindeutig den Kohomologiegruppen zugeordnet werden können, ist eine neue Definition der Spiegelsymmetrie nötig, die sich natürlich für $(2,2)$ auf den alten Fall überträgt. Damit kann dann gezeigt werden, daß die bekannten Spiegelkonstruktionen für $(2,2)$ via der Weitergabe solche auf $(0,2)-$Ebene induzieren. Diese Methoden werden vorgestellt und die Übertragung an Beispielen demonstriert. Am Ende erfolgt die Diskussion der Vollständigkeit der Spiegelsymmetrie.
Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung samt Ausblick. Zwecks besserer Lesbarkeit steht zudem am Ende eines jeden Kapitels eine kurze Zusammenfassung. In den Tabellen im Anhang findet man Dreigenerationenmodelle, die unter den Modellen im dritten bzw. siebten Kapitel auftraten.

Dieser Arbeit liegen folgende bereits publizierte Artikel zu Grunde:

Kapitel 3: R. Blumenhagen und A. Wißkirchen, *Exactly solvable* $(0,2)$ *supersymmetric string vacua with GUT gauge groups*, Nucl. Phys. **B454** (1995) 561, hep–th/9506104

Kapitel 4: R. Blumenhagen, R. Schimmrigk und A. Wißkirchen, *The* $(0,2)$ *exactly solvable structure of chiral rings, Landau–Ginzburg theories and Calabi–Yau manifolds*, Nucl. Phys. **B461** (1996) 460, hep–th/9510055

Kapitel 5: R. Blumenhagen und A. Wißkirchen, *Exactly solvable points in the moduli space of heterotic* $N=2$ *strings*, Mod. Phys. Lett. **A11** (1996) 1475, hep–th/9601050

Kapitel 6: R. Blumenhagen und A. Wißkirchen, *Exploring the moduli space of* $(0,2)$ *strings*, Nucl. Phys. **B475** (1996) 225, hep–th/9604140

Kapitel 7: R. Blumenhagen, R. Schimmrigk und A. Wißkirchen, $(0,2)$ *mirror symmetry*, Nucl. Phys. **B486** (1997) 598, hep-th/9609167

2. Allgemeines über Strings und (0,2)–Modelle

Am Anfang werden einige Fakten über Strings und notwendige Hilfsmittel erläutert, genaueres findet man in [72] und den Originalarbeiten, letztere sind an entsprechender Stelle zitiert.

2.1. Typen von Strings

Die Stringtheorie ist ein vielleicht geeignetes Hilfsmittel, die fundamentalen Wechselwirkungen zu vereinheitlichen, wie schon in der Einleitung diskutiert wurde. Ein Vorgriff auf das Spektrum einer Stringtheorie erfolgte auch in der Theorie der Reggepole und der Venezianoamplitude [73], womit der Zusammenhang zwischen Spin und Masse von Mesonen vorhergesagt werden sollte.

Der bosonische String

Ein String ist die Verallgemeinerung eines Punktteilchens zu einer Linie, es gibt dann keine Weltlinie mehr, sondern eine Weltfläche. Die Wirkung für den String wird analog zu der eines Teilchens definiert, statt der Länge der Weltlinie wird nun folgende (Polyakov–)Wirkung minimiert:

$$S = \frac{1}{4\alpha'} \int d\sigma d\tau \sqrt{|\det g|} g^{ab} \partial_a x^\mu \partial_b x_\mu, \tag{2.1}$$

wobei g die Metrik auf der Weltfläche, σ und τ deren interne Koordinaten sowie x^μ die Koordinaten des minkowskischen Umgebungsraums $\mathbb{R}^{1,D-1}$ bezeichnen. α' ist die Stringspannung und kann klassisch frei gewählt werden, nach der Quantisierung ist sie aber eine Kopplungskonstante. Es gibt auch eine klassisch dazu äquivalente Wirkung, nämlich die von Nambu/Goto [74], die direkt der Größe der Weltfläche entspricht, diese enthält aber die Koordinaten unter einer Wurzel und macht Schwierigkeiten bei der Quantisierung.
Das Spektrum eines Strings besteht in seinen Eigenmoden. Leider hat dieser bosonische String als Grundzustand im Spektrum ein Tachyon, d.h. ein Teilchen mit imaginärer Masse, was das Modell nicht gerade attraktiv erscheinen läßt, zumal dieses für Infrarotdivergenzen sorgt. Dieses Problem wird aber mit der Einführung der Supersymmetrie behoben. Die nächsthöheren Moden entsprechen masselosen Teilchen, dabei heißt "masselos" immer klein gegen die Planckmasse $M_p = \sqrt{\hbar c/\gamma} \approx 20\mu g$. Es gibt aber erfreulicherweise darunter ein masseloses Teilchen mit Spin zwei, das Graviton, sowie sein antisymmetrisches Gegenstück, manchmal Torsion genannt. Wichtig ist auch noch das Dilaton Φ, das Goldstoneboson zum Brechen der Skaleninvarianz. Sein Vakuumerwartungswert (VEW) bzw. seine Masse sorgt für Abweichungen vom newtonschen Kraftgesetz und bei verschwindender Masse sollte sich seine Existenz in einer Modifikation des Äquivalenzprinzips bemerkbar machen sowie sogar für eine Zeitabhängigkeit der Naturkonstanten sorgen. Entsprechende Experimente dazu werden in [75] beschrieben.
Gegenüber einem Punktteilchen sind also neue Freiheitsgrade und noch mehr Symmetrien hinzugekommen. Letztere bestehen in der Wahl der Koordinaten der Weltfläche, d.h. Reparametrisierungen, und der internen Metrik, d.h. weylschen Reskalierungen, darauf. Die übliche Eichung ist, die Metrik minkowskisch mit einem Vorfaktor e^Φ zu wählen. Die Bewegungsgleichungen der Stringtheorie dürfen ähnlich der Eichfreiheit in der Elektrodynamik nicht von der Wahl dieser Größen abhängen, das zugehörige Feld dazu, der Energie/Impuls–Tensor $T^{ab} = \frac{\delta S}{\delta g_{ab}}$ muß verschwinden, dies ist eine extrem wichtige Nebenbedingung. Dieses Feld bildet eine Virasoroalgebra, die eine konforme Theorie auf der Weltfläche definiert, deren zentrale Ladung für die Raumzeit–Dimension $D = 26$ verschwindet.

Die Wechselwirkung von Strings wird wie in der Teilchenphysik störungstheoretisch in der sog. String–Schleifen–Kopplung, die von der Größenordnung der gravitativen Kopplung ist und durch den VEW des Dilatons festgelegt ist, durch Feynmandiagramme berechnet. Die dabei auftretende Ordnung ist genau das Geschlecht der Weltfläche, die an die Stelle des Graphen tritt, in diesem Diagramm. Man kann diese Diagramme mit Korrelationsfunktionen von Vertexoperatoren einer (1+1)–dimensionalen konformen Feldtheorie auf der Weltfläche in Verbindung bringen, diese ist die eines zweidimensionalen nichtlinearen $\sigma-$Modells: die Wirkung (2.1) sieht formal genauso aus wie die der Feldtheorie eines freien Bosons, enthält also nur die kinetische Energie.

Die Quantisierung kann auf zwei Arten erfolgen: zum einen ergeben die Euler/Lagrange–Gleichungen zur Wirkung (2.1) eine Wellengleichung $(\partial_\sigma^2 - \partial_\tau^2)x^\mu = 0$, die durch links– bzw. rechtslaufende Wellen $x^\mu_{L/R} = x^\mu(\sigma \pm \tau)$ gelöst wird. Deren Moden entsprechen denen eines harmonischen Oszillators und die Quantisierung erfolgt in gewohnter Weise. Hier wird die Stringspannung so gewählt, daß die fundamentale Länge des Oszillators eins wird. Diese kovariante Quantisierung ist für $D = 26$ geistfrei, d.h. es gibt keine negativ definiten Zustände. Die andere, modernere Methode benutzt den Pfadintegral– und BRST–Formalismus, dabei wird über alle möglichen Metriken auf und Parametrisierungen der Weltfläche integriert, wobei man die Mehrdeutigkeiten aufgrund von Umeichungen wieder loswerden muß [76]. Dies kann man mit der Methode der Fadeev/Popov–Geister bewerkstelligen. Die Geister entkoppeln bzw. die konformen Anomalien heben sich weg nur für die Raumzeitdimension $D = 26$, wie sollte es auch anders sein. Ferner ist nur in dieser Dimension der BRST–Operator nilpotent.

Alternativ kann man in der sog. Lichtkegeleichung [77] arbeiten, die zwar nicht kovariant ist, aber dafür keine Geistzustände aufweist, dies hat sein Analogon in der Coulombeichung der Elektrodynamik, die für Transversalwellen sorgt. Hierbei ergibt sich $D = 26$ daraus, daß die Lorentzalgebra die Quantisierung unbeschadet übersteht. In diesem Formalismus kann man auch weitere Hintergrundfelder hinzunehmen. Aus der Forderung, daß die entsprechende zweidimensionale Feldtheorie konform invariant ist, d.h. die $\beta-$Funktion, die eine Potenzreihe in α' ist, verschwindet, ergeben sich in nullter Ordnung $D = 26$, in erster die einsteinschen Gleichungen und in den höheren Ordnungen Korrekturen in den Hintergrundfeldern, die diese Theorie renormierbar machen.

Der fermionische String

Die $N-$Supersymmetriealgebra enthält N nilpotente Superladungen, man kann sie auf einem Superraum mit Graßmannvariablen darstellen. Die Supersymmetrie ist die bislang einzig bekannte Möglichkeit, die Poincarégruppe zu erweitern, denn nach einem Theorem von Coleman/Mandula geht das für $D \geq 3$ nicht bosonisch. Die Supersymmetrie faßt die Felder in Multiplets zusammen, die umso größer sind, je höher N ist. Ferner kann man kovariante Ableitungen definieren, die Felder, die darunter verschwinden, haben kleinere Multiplets und heißen chiral. Im einfachsten Fall $N = 1$ werden immer ein Boson und ein Fermion zu einem Paar. Durch diese Struktur hat eine supersymmetrische Theorie gute Renormierbarkeitseigenschaften, da sich viele Schleifen wegen des zusätzlichen Vorzeichens bei Fermionen wegheben, so ist die vierdimensionale Yang/Mills–Theorie mit $N = 4$ endlich und braucht gar nicht renormiert zu werden, in der entsprechenden Theorie mit $N = 2$ ist das nur auf Einschleifenniveau nötig. Hinzu kommt, daß die Massen klein bleiben, denn die Bosonenmassen sind via Supersymmetrie an die der Fermionen gekoppelt, die multiplikativ und nicht additiv renormiert werden.

Für den String bedeutet dies, daß jede Raumzeitkoordinate einen Superpartner, im explizit raumzeit–supersymmetrischen Green/Schwarz–Formalismus [78] einen Majoranaspinor, bekommt. Die Quantisierung geht wieder nur in bestimmten Dimensionen, und alle Argumente liefern wie oben denselben Wert. Zum einen muß die zentrale Ladung der (nun Super–) Virasoroalgebra verschwinden, zum anderen müssen die Spinoren auch Weyl–Spinoren sein, was nur für $D = 10$ zu machen ist. Durch die GSO–Projektion [50] auf gerade Fermionenzahl wird dann das unerwünschte Tachyon beseitigt und das Raumzeit–Teilchenspektrum supersymmetrisch. Das ist aber nicht die einzige Bedingung, denn die $GSO-$Projektion kann als Summation über alle Spinstrukturen verstanden werden, sie ist nur möglich, wenn die Theorie einen $N = 1$ Gravitino–Vertexoperator besitzt, was der Existenz eines Operators des spektralen Flusses in der internen Theorie gleichkommt [79]. Denn dieser läßt sich nur dann als lokales Feld definieren, wenn alle Felder der Theorie ganzzahlige $U(1)-$Ladung haben.

Typen von Superstrings

Strings können offen oder geschlossen sein, danach unterscheidet man die Typen I und II. Beim Typ II muß man noch die Händigkeit der beiden Graßmannvariablen des $N = 2$ Superraums beachten, der zur Weltfläche gehört. Neben dem irrelevanten globalen Vorzeichen kann man das relative verschieden oder gleich wählen, was den Typen IIA bzw. IIB entspricht. Bei offenen Strings (Typ I) muß dagegen die Händigkeit aus Stetigkeitsgründen bei Reflektion von Wellen am Stringende gleich sein, bei den geschlossenen konnten diese einfach umlaufen. Das Spektrum des Typs I hier $N = 1$ supersymmetrisch, ferner ist eine Eichgruppe vorhanden, die allerdings im Quantenfall nur $SO(32)$ sein kann. Der Typ IIA ist links/rechts–symmetrisch und erlaubt keine Eichgruppe, der Typ IIB ist dagegen chiral (asymmetrisch). In beiden Fällen hat das Spektrum die Supersymmetrie $N = 2$, der Feldinhalt ist aber total verschieden und läßt sich erst nach Kompaktifizierung vergleichen. Die Niederenergietheorie dieser Strings vom Typ II entspricht zehndimensionaler Supergravitation, wobei der Typ IIA sogar einer dimensionalen Reduktion der elfdimensionalen entstammt, die entsprechenden Felder sind das Dilaton, ein Eichvektorfeld, das Graviton, die Torsion und ein antisymmetrisches Tensorfeld dritter Stufe, die sich in Multiplets arrangieren lassen. Dabei wird die Stringspannung von der Ordnung der Planckfläche ℓ_P^2 gewählt, damit die String–Schleifen–Kopplung $g \approx \frac{\kappa^2}{\alpha'}$ in der Größenordnung der gravitativen Kopplung κ liegt. Dies bewirkt ferner, daß die Massenskala der Eichbosonen nicht viel kleiner als M_P ist. Schließlich zeigt die Theorie damit ein weiches Ultraviolettverhalten, denn wegen der Längendualität $r \leftrightarrow \frac{\alpha'}{r}$ ist $\sqrt{\alpha'}$ die kleinste Skala.

Die oben genannten Typen sind phänomenologisch schlecht zu gebrauchen (allerdings haben in letzter Zeit Strings vom Typ II wegen Dualitätsrelationen, vor allem im Zusammenhang mit $F-$Theorie, wieder Interesse geweckt), entweder ist die Supersymmetrie zu hoch oder aber die Eichgruppe $SO(32)$ läßt sich nicht zu vernünftigen Gruppen kleinen Rangs herunterbrechen. Hier gelang der Durchbruch mit dem heterotischen String [10]. Dieser nutzt aus, daß linke und rechte Moden entkoppeln und hat links einen bosonischen und rechts einen fermionischen String. Durch diese manifeste Asymmetrie ist Platz für eine Eichgruppe, von der sich zeigt, daß sie nur $SO(32)$ oder $E_8 \times E_8$ sein kann, was mit der Existenz von geraden selbstdualen Gittern in 16 Dimensionen zusammenhängt. Letztere läßt sich auf Gruppen wie $SO(10)$ oder $SU(5)$, die wiederum auf das Standardmodell führen können, herunterbrechen. Das Raumzeit–Spektrum ist wie beim Typ I $N = 1$ supersymmetrisch, die wichtigsten masselosen Multiplets sind das Dilaton/Dilatino, Graviton/Gravitino und die Gluonen/Gluinos der Eichgruppe. Man kann übrigens beim heterotischen String die Anzahl der Anregungen auf der ersten (massiven) Stufe berechnen, es sind 18.883.584.

Das einzige, was jetzt noch nicht stimmt, ist die Dimension, denn die kritische Dimension aller dieser Superstrings ist $D = 10$. Diese entstammt der Bedingung der Anomaliekürzung. Ein Analogon für eine Anomalie im Standardmodell ist der Zerfall eines Z_0 in zwei $\gamma-$Quanten über eine fermionische Dreiecksschleife, die Amplitude dieses Prozesses verschwindet aber, da sich die Ladungen der Mitglieder aller Familien einschl. des Farbfaktors zu Null addieren. Anomalien zerstören die wünschenswerten Eigenschaften einer Feldtheorie, so würde diese Zerstrahlung des Eichbosons die Eichinvarianz in Wohlgefallen auflösen und damit die ganze Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung hinfällig machen.

Die Kompaktifizierung auf D = 4

Die Idee ist einfach: von den zehn Dimensionen nehme man einen vierdimensionalen Minkowskiraum weg, es bleibt ein sechsdimensionales Gebilde K über, dessen charateristische Länge in der Größenordnung der Plancklänge $\ell_P = \hbar/M_p c \approx 10^{-33} cm$ liegt, so daß diese Dimensionen bei "kleinen" Energien nicht beobachtbar sind. Es zeigt sich, daß die Mannigfaltigkeit K folgende Bedingungen erfüllen muß.
Besteht man auf einem $N = 1$ raumzeit–supersymmetrischen Spektrum (die noch vorkommenden Fermionen sind das Dilatino, das Gravitino und die Gluinos der Eichgruppe), so muß K wegen der Existenz des Gravitinos einen kovariant konstanten Spinor fester Helizität besitzen [80]. Dies ist der Fall, wenn die Mannigfaltigkeit die Holonomiegruppe $SU(3)$ hat, die besagt, wie sich Tangentenvektoren bei Parallelverschiebung längs geschlossener Kurven verhalten. Bei einer reellen, orientierbaren Mannigfaltigkeit mit riemannscher Metrik ist diese Gruppe eine Untergruppe von $SO(\dim(M))$. Mannigfaltigkeiten der Dimension $2n$ mit der Holonomiegruppe $U(n)$ haben zunächst eine fast–komplexe Struktur, deren Integrabilität zu einer komplexen Struktur aus dem Verschwinden des sog. Nijenhuistensors folgt. Zudem existiert eine Kählermetrik, d.h. die Metrik ist die Ableitung eines Potentials, aber nur lokal in den Karten, sie muß dann in den Überlappungsgebieten zusammengeschweißt werden. Eine globale Metrik konnte für diese Mannigfaltigkeiten bis heute nicht formuliert werden. Da zudem die Holonomiegruppe von K sogar $SU(3)$ ist, muß noch die erste Chernklasse des Tangentialbündels verschwinden ($c_1(K) = 0$), was heißt, daß K ricciflach ist. Hinter dieser letzten Aussage steht eine Vermutung von Calabi, die später von Yau bewiesen wurde [81]. Alle diese Bedingungen lassen sich in der Forderung zusammenfassen, daß K eine CYM sein muß.
Die weitere Forderung nach der Existenz der Gluinos erfordert ferner, daß das Eichfeld ein holomorpher Zusammenhang in einem holomorphen Bündel V sein und dieses Bündel die Donaldson/Uhlenbeck/Yau–Gleichung [82] erfüllen muß, welche impliziert, daß es stabil ist. Diese Eigenschaft besagt, daß die durch den Rang dividierte Chernklasse größer als der entsprechende Ausdruck aller Unterbündel ist. Dies ist eine milde topologische Bedingung, die z.B. bewirkt, daß die Klassen dieser Bündel die Struktur einer algebraischen Varietät haben.
Weiterhin muß die Bianchi–Identität für die Feldstärke H des antisymmetrischen Gravitons erfüllt sein. Man kann sich die Sache einfach machen und $H = 0$ setzen, dann muß man allerdings den Spinzusammenhang von $SU(3)$ in den Eichzusammenhang einer der beiden E_8en einbetten, was die Eichgruppe auf $E_6 \times E_8$ bricht (der Fall $SO(32)$ bleibt außen vor). Allgemein erfordert diese Bedingung $c_2(V) = c_2(TK)$, die sog. Anomaliekürzung.
Die zu betrachtende Konfiguration ist mithin eine CYM mit einem stabilen, holomorphen Bündel V mit $c_1(V) = 0$ und $c_2(V) = c_2(TK)$. Wählt man $V = TK$, so sind diese Bedingungen offenbar erfüllt und man hat $(2, 2)-$Modelle. Die Wahl eines anderen Bündels zerstört die linkslaufende Supersymmetrie, was zu

$(0,2)-$Theorien führt. Die ganze obige Betrachtung erfolgte in niedrigster perturbativer Ordnung, man kann weiter argumentieren, daß die Bewegungsgleichungen in allen Ordnungen der Störungstheorie des $\sigma-$Modells erfüllt sind. Durch Instantonkorrekturen ist es aber möglich, daß die Modelle destabilisiert werden.
Einfache Modelle wurden bald gefunden, so ist die Quintik in $\mathbb{P}_4$, die durch die Gleichung $\sum_{i=1}^5 z_i^5 = 0$ definiert ist, und mit $\mathbb{P}_4[5]$ (die Fünf steht für den Grad des definierenden Polynoms) bezeichnet wird, ein klassisches Beispiel. Dieses Modell hat die Supersymmetrie $(2,2)$ und die Eichgruppe E_6 sowie die entsprechenden Teilchenzahlen 101 in der Darstellung **27** (Generationen) und 1 in der $\overline{\mathbf{27}}$ (Antigenerationen), die den beiden unabhängigen Hodgezahlen $h^{2,1}$ bzw. $h^{1,1}$ (diese geben die Anzahlen der jeweiligen harmonischen $(i,j)-$holomorphen/antiholomorphen Formen an) entsprechen und daher genau zu den komplexen und Kählerdeformationen korrespondieren, erstere sind die 101 Deformationen des definierenden Polynoms, die sich als $\binom{9}{5} - 5^2$ zusammensetzen, d.h. die Anzahl der Polynome vom Grad fünf abzgl. der linearen Redefinitionen. Die Eulerzahl der CYM ist $\chi = 2(h^{1,1} - h^{2,1}) = -200$ und gibt die doppelte Nettogenerationenzahl an, weil in der entsprechenden Feldtheorie aufgrund des Renormierungsgruppenflusses nur diese eine Rolle spielt, denn eine Generation und eine Antigeneration können sich paaren, damit eine Masse bekommen und so aus dem leichten Spektrum verschwinden, was allerdings bei $(2,2)-$Supersymmetrie nicht passieren kann [63,83]. Ferner gibt es noch weitere 224 Singlets, die Deformationen $H_1(\mathrm{End}(TK))$ des Tangentialbündels entsprechen.
Erwähnt werden sollten hier noch Techniken wie Wilsonlinien [84], um bei einer nicht–einfach zusammenhängenden CYM die Eichgruppe zu brechen, und Faktortheorien [85], um die Nettogenerationenzahl zu verkleinern. So gelang es, aus diesem Modell eins mit vier Generationen zu konstruieren. Modelle mit drei Generationen sind dagegen dünn gesät. Nicht verschwiegen werden sollte auch die Spiegelsymmetrie, d.h. zu einer CYM gibt es eine ansonst gleiche, wobei nur die Rollen von $h^{1,1}$ und $h^{2,1}$ vertauscht sind. Darauf wird in dieser Arbeit noch ausführlich eingegangen werden. Wichtig ist diese Spiegelsymmetrie, um beispielsweise Dreipunktkopplungen $\langle\overline{\mathbf{27}}^3\rangle$ zu berechnen, denn diese werden durch nichtperturbative Korrekturen wie Instantonen gestört, die Kopplung $\langle\mathbf{27}^3\rangle$ allerdings nicht. Man kann daher das Spiegelbild nutzen, um die exakten Kopplungen zu ermitteln.
Was jetzt noch fehlt, ist eine Beschreibung exakt lösbarer Modelle im Rahmen einer SKFT, um mehr Größen direkt berechnen zu können.

2.2. Gepnermodelle

Diese Modelle wurden in [18] entwickelt und werden hier kurz vorgestellt, einschl. der wichtigsten Konsequenzen daraus.

Die gepnersche Konstruktion

Die Anomaliebilanz der zugrundeliegenden Theorie in $D \in \{4,6,8\}$ Dimensionen lautet in Lichtkegeleichung:

Bestandteil	c	$\overline{c}$
Lichtkegel	2	3
$(D-2)$-dim. transversale Raumzeit, x^μ	$D-2$	$D-2$
Superpartner ψ^μ der x^μ	–	$\frac{D-2}{2}$
Interne SKFT	$15-\frac{3}{2}D$	$15-\frac{3}{2}D$
Eichgruppe $SO(D+6)\times E_8$	$8+\frac{D+6}{2}$	–

Tabelle 1: *Anomaliestruktur des Gepnermodells.*

Das Spektrum soll die Raumzeit–Supersymmetrie $N = 1$ tragen, daher hat die interne Theorie $N = 2$ und deshalb ist als interne SKFT eine entsprechend supersymmetrische Theorie zu wählen. Da liegen zunächst Tensorprodukte minimaler Modelle der $N = 2$ Super–Virasoroalgebra auf der Hand, man hat es auch mit Kazama/Suzuki–Modellen [42] versucht. Das Hauptproblem ist, eine modular invariante Zustandssumme hinzuschreiben, was für ein asymmetrisches Modell wie den heterotischen String sehr schwierig ist. Daher startet man mit einem links/rechts–symmetrischen Modell mit $c = \overline{c} = 15$ (bzw. 12 in Lichtkegeleichung), d.h. auf beiden Seiten befindet sich jeweils ein Superstring, und macht es mit ein paar Kniffen asymmetrisch, was auch bei den $(0, 2)-$Modellen einer der entscheidenden Schritte sein wird.
Die Tensorprodukte unitärer Darstellungen der $N = 2$ Virasoroalgebra sind durch die Quantenzahlen

$$\begin{aligned} &c = \frac{3k}{k+2}, \quad h^l_{m,s} = \frac{l(l+2)-m^2}{4(k+2)} + \frac{s^2}{8} \bmod 1, \quad q^l_{m,s} = -\frac{m}{k+2} + \frac{s}{2} \bmod 2, \\ &k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq l \leq k, \quad -1 \leq s \leq 2, \quad -l+\epsilon \leq m \leq l+\epsilon, \quad l+m+s = 0 \bmod 2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

klassifiziert, wobei die Quantenzahlen m mod $2(k + 2)$ und s mod 4 zu nehmen sind. Ferner ist $\epsilon = 0$ für $s \in \{0, 2\}$ (Neveu–Schwarz/$NS-$Sektor) und $\epsilon = 1$ für $s \in \{-1, 1\}$ (Ramond/$R-$Sektor), dabei wird die übliche Aufspaltung der Charaktere in zwei nichtsupersymmetrische Teile verwendet:

$$\chi^l_m = \chi^l_{m,s} + \chi^l_{m,s+2}. \tag{2.3}$$

Die Fusionsregeln haben u.a. die Form

$$(l, m, s) \times (0, m', s') = (l, m + m', s + s'), \tag{2.4}$$

womit die Darstellungen mit $l = 0$ sog. einfache Ströme sind.
Die zugehörigen kompletten Felder des Modells lauten

$$\Phi^{l,m,s}_{\overline{l},\overline{m},\overline{s}} = \begin{bmatrix} l & m & s \\ \overline{l} & \overline{m} & \overline{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & \begin{matrix} m \\ \overline{m} \end{matrix} & \begin{matrix} s \\ \overline{s} \end{matrix} \end{bmatrix} \ (\text{für } l = \overline{l}) \tag{2.5}$$

mit der Identifikation

$$\begin{bmatrix} l & m & s \\ \overline{l} & \overline{m} & \overline{s} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} k-l & m+(k+2) & s+2 \\ k-\overline{l} & \overline{m}+(k+2) & \overline{s}+2 \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

womit man die Indizes links oder rechts in den Standardbereich (2.2) bringen kann.
Zuerst sollte man bemerken, daß für die hier vorliegenden D die Raumzeitkoordinaten x^μ mit ihren Superpartnern ψ^μ (im nicht explizit supersymmetrischen $NS/R-$Formalismus tragen diese einen Vektor– und keinen Spinorindex) eine $N = 2$ Supersymmetrie aufweisen, denn man kann die entsprechenden Superströme $G^\pm$ und den $U(1)-$Strom J wie folgt definieren:

$$J = \psi^*_\mu \psi^\mu, \ G^+ = -\sqrt{2}\psi_\mu \partial_z x^\mu, \ G^- = -\sqrt{2}\psi^*_\mu \partial_z x^{\mu *}, \tag{2.7}$$

womit das ganze Modell die Supersymmetrie $(2, 2)$ hat. Dieser "Zufall" hat seinen Ursprung in der geraden Raumzeit–Dimension und der Flachheit des Raumes. Allgemein muß man verlangen, daß die Hintergrundmannigfaltigkeit eine Kählerstruktur aufweist [86].

Das Tensorprodukt der r minimalen Faktoren muß im supersymmetrischen Sinne gebildet werden, d.h. nur gleiche Sektoren werden aneinander gekoppelt, also (NS, NS) und (R, R). Bei der Wahl der modularen Invarianten in den einzelnen minimalen Faktoren hat man freie Auswahl, man kann irgendeine affine Invariante vom $ADE-$Typ [87] wählen.

Die $N = 2$ Super–Virasoroalgebra enthält eine einparametrige Schar von Abbildungen, den sog. spektralen Fluß [88], der für den Wert $\eta = \frac{1}{2}$ seines Parameters die Sektoren R und NS vertauscht, auf den Moden der Superströme $G^{\pm}$ wirkt er z.B. als $(G_r^{\pm})' = G_{r+\eta}^{\pm}$. Diesen Operator kann man auch für das ganze Modell definieren, er ist das Tensorprodukt der (Anti–)Spinordarstellung von $SO(D-2)$ mit dem internen Operator der SKFT zum Parameter $\eta = \frac{1}{2}$

$$\Sigma_{L/R} = \Phi_{s/c}^{SO(D-2)} e^{\frac{i}{2}\sqrt{\frac{10-D}{2}}\phi}, \tag{2.8}$$

wobei die Summe der $U(1)-$Ströme der minimalen Faktoren als $j^{U(1)} = i\sqrt{c/3}\partial_z\phi$ geschrieben wird. Dieser Operator erfüllt genau die Vertauschungsrelationen der Supersymmetrie–Ladungen und hat die konforme Dimension

$$h = \frac{1}{2} = \frac{D-2}{16} + \frac{10-D}{16}, \tag{2.9}$$

womit er also Bosonen und Fermionen vertauscht. Aus Charakteren $\chi_{h,q}$ der SKFT bildet man Bahnen unter dem spektralen Fluß gemäß

$$\chi_{h,q}^{L/R} = \sum_n (-1)^n \Sigma_{L/R}^n \chi_{h,q}, \tag{2.10}$$

m.a.W. man bildet die $GSO-$Projektion bzgl. des Operators $(-1)^F = e^{\pi i J}$, F ist der Fermionenzahloperator. Dabei haben die Charaktere $\chi_{h,q}^{L/R}$ das gleiche modulare Transformationsverhalten wie die $\chi_{h,q}$, sofern sie nicht herausprojiziert worden sind. Dieses Verfahren der Bahnbildung wird auch bei den Faktortheorien verwendet.

Die Heterosis wird nun durch die bosonische Stringabbildung $SO(D-2) \to SO(D+6) \times E_8$

$$\begin{array}{ll} \chi_0^{SO(D-2)} \to \chi_v^{SO(D+6)\times E_8}, & \chi_v^{SO(D-2)} \to \chi_v^{SO(D+6)\times E_8} \\ \chi_s^{SO(D-2)} \to -\chi_c^{SO(D+6)\times E_8}, & \chi_c^{SO(D-2)} \to -\chi_s^{SO(D+6)\times E_8} \end{array} \tag{2.11}$$

auf der rechten Seite erreicht. Diese Abbildung nutzt aus, daß sich das modulare Verhalten der Charaktere von $SO(n)$ modulo acht nicht ändert und daß die von E_8 sich trivial transformieren (E_8 hat nur eine Darstellung). Man kann also diese Ersetzung machen, ohne die modulare Invarianz zu zerstören und gewinnt so die Eichgruppe nur auf einer Seite, wie es für den heterotischen String sein muß. Die nichtdiagonale Ersetzung und die Vorzeichen in (2.11) sorgen im übrigen für den richtigen Zusammenhang zwischen Spin und Statistik im Teilchenspektrum. Ferner verschwindet die $N = 2$ Supersymmetrie auf dieser Seite (die interne Theorie ist allerdings immer noch überflüssigerweise links/rechts–symmetrisch) und die konforme Dimension des entsprechenden Operators des spektralen Flusses ist nun

$$h = 1 = \frac{D+6}{16} + \frac{10-D}{16}, \tag{2.12}$$

womit das Spektrum nicht $N = 2$, sondern $N = 1$ supersymmetrisch wird.

Durch die Bahnbildung (2.10) kommt es auch links zu der erforderlichen Erweiterung der Eichgruppe von $SO(D+6) \times E_8$ auf $E_{4+\frac{D}{2}} \times E_8$. Dazu nutzt man aus, daß sich die adjungierten Darstellungen der exzeptionellen Liealgebren $E_{4+\frac{D}{2}}$ wie folgt nach denen der maximalen Unteralgebra $SO(D+6) \times U(1)$ zerlegen:

$$\mathbf{78} = \mathbf{45}_0 + \mathbf{16}_{-\frac{3}{2}} + \overline{\mathbf{16}}_{\frac{3}{2}} + \mathbf{1}_0, \;\; \mathbf{133} = \mathbf{66} + \mathbf{32} + \mathbf{32} + \mathbf{3}, \;\; \mathbf{248} = \mathbf{91} + \mathbf{64} + \overline{\mathbf{64}} + \mathbf{14} + \mathbf{14} + \mathbf{1}. \tag{2.13}$$

Für $D=6$ bilden der spektrale Fluß, sein ladungskonjugiertes und die Summe der $U(1)-$Ströme der minimalen Faktoren eine $SU(2)$, daher die **3**. Die Zerlegungen der fundamentalen Darstellungen lauten entsprechend

$$\mathbf{27} = \mathbf{10_{-1}} + \mathbf{16_{\frac{1}{2}}} + \mathbf{1_2},\ \overline{\mathbf{27}} = \mathbf{10_1} + \overline{\mathbf{16}}_{-\frac{1}{2}} + \mathbf{1_{-2}},\ \mathbf{56} = \mathbf{12} + \mathbf{12} + \mathbf{32}, \tag{2.14}$$

wobei zwecks späteren Rückgriffs bei E_6 die Ladungen mitgeschrieben wurden. Dabei ist der erforderliche $U(1)-$Strom die Summe derer aus den r minimalen Modellen, womit noch $(r-1)$ Ströme überbleiben, die die Eichgruppe um $U(1)^{r-1}$ erweitern.

Das masselose Spektrum enthält zunächst die universellen Teilchen wie in der Einführung beschrieben, samt der Bosonen der Eichgruppe einschl. ihrer Superpartner. Hinzu kommen die Materiefelder **27** und $\overline{\mathbf{27}}$ sowie die Higgsteilchen **1** in der adjungierten Darstellung. Sie entsprechen gemäß den Zerlegungen (2.14) den Teilchen in den entsprechenden Darstellungen von $SO(D+6)$, die durch Anwendung des spektralen Flusses mit $(h,q)=(\frac{3}{8},\frac{3}{2})$ ineinander übergehen. Am zweckmäßigsten wählt man das sog. kanonische Geistbild und sucht nach folgenden Kombinationen $(h,q,\overline{h},\overline{q})$:

Darstellung	**1**	**27**	$\overline{\mathbf{27}}$
Spin 0	$(1,0;\frac{1}{2},\pm 1)$	$(\frac{1}{2},1;\frac{1}{2},\pm 1)$	$(\frac{1}{2},-1;\frac{1}{2},\pm 1)$
Spin 1	$(1,0;0,0)$	$(\frac{1}{2},1;0,0)$	$(\frac{1}{2},-1;0,0)$

Tabelle 2: *Masseloses Spektrum für E_6.*

Die Teilchen mit Spin 1 koppeln an das rechtsseitige Vakuum und sind weitere Eichbosonen. Teilchen in der adjungierten Darstellung erhöhen lediglich die Dimension der Eichgruppe, i.a. um $U(1)-$Faktoren, während Teilchen in der fundamentalen Darstellung gemäß der Zerlegung $E_7 \to E_6 \times U(1)$

$$\mathbf{133} = \mathbf{78} + \mathbf{27} + \overline{\mathbf{27}} + \mathbf{1} \tag{2.15}$$

den Rang erhöhen, normalerweise E_6 auf E_7, was mit einer Erweiterung der Supersymmetrie auf $N=2$ einhergeht, das rechte Vakuum koppelt dann nämlich an den spektralen Fluß.

Es sei bemerkt, daß sich diese Konstruktion mit dem Konzept der einfachen Ströme durchsichtig(er) gestalten läßt. Man kann das ganze auch so verstehen, daß zunächst die bosonische Seite des heterotischen Strings auf dem Torus einer Liegruppe G vom Rang $11+\frac{D}{2}$ kompaktifiziert wird, so daß auf diese Weise schon einmal die zentralen Ladungen symmetrisch werden, auf jeder Seite $15-\frac{3}{2}D$. Das zugehörige bosonische System wird durch die entsprechende Kac/Moody–Algebra der Stufe eins beschrieben. G muß natürlich aus Anomaliekürzungsgründen eine Untergruppe von $SO(32)$ oder $E_8 \times E_8$ sein und ferner $SO(D-2)$ als Untergruppe enthalten. Letztere sorgt für die nötigen fermionischen Freiheitsgrade auf der bosonischen Seite, damit mit den Fermionen auf der supersymmetrischen Seite eine modulare Invariante gebildet werden kann. Nach soviel Konstruktionsvorschriften nun aber eine Anwendung.

Ein schon klassisches Beispiel

Diesem liegt das Tensorprodukt des minimalen $N=2$ Modells mit $k=3$ zugrunde, es wird auf $D=4$ kompaktifiziert, daher braucht man fünf Kopien. Das masselose Spektrum lautet

Darstellung	**1**	**27**	$\overline{\mathbf{27}}$
Spin 0	330	101	1
Spin 1	4	0	0

Tabelle 3: *Masseloses Spektrum des Gepnermodells* $(3)^5$.

Wie erwartet ist die Eichgruppe um vier Dimensionen erweitert, das ist die übliche $U(1)^4$. Das Spektrum $(101, 1)$ erinnert an die Quintik, und dieses Modell beschreibt tatsächlich einen Punkt im Parameterraum derselben. Wie kommt die 330 zustande? Nun, da sind die $224 + 101 + 1 = 326$ Deformationen der Quintik, hier kommen die vier Higgsteilchen zur Eichgruppenerweiterung $U(1)^4$ hinzu. Ferner stimmt die Symmetriegruppe überein, es ist eine $(S_5 \ltimes \mathbb{Z}_5^5)/\mathbb{Z}_5$, denn man hat einmal eine Permutationssymmetrie der Koordinaten bzw. der minimalen Faktoren sowie die Phasen im projektiven Raum bzw. im minimalen Modell, letztere weisen eine Symmetrie $\mathbb{Z}_{k+2}$ auf.
Ferner gibt es den chiralen Ring $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_5]/\langle z_i^4 = 0\rangle$, das ist ein Polynomring, aus dem ein Ideal herausdividiert wurde. Dieser Ring steht in direkter Beziehung zu den Monomen vom Grade fünf, mit der die polynomiale Bestimmungsgleichung $\sum_{i=1}^5 z_i^5 = 0$ deformiert werden kann, die Produktstruktur entspricht gerade dem Kohomologiering der CYM. Auf der Seite der SKFT gibt es die chiralen Felder, das sind Felder mit $2h = |q|$. Da dies ein Grenzfall der generischen Bedingung $2h \geq |q|$ ist, bleiben diese Felder bei Operatorproduktentwicklung (OPE) unter sich. Da es ferner wegen der Rationalität der Theorie nur endlich viele Felder gibt, ist der Ring endlich und nilpotent. Die Produktstruktur spiegelt sich in den Yukawa– bzw. Dreipunktkopplungen wieder, es verschwinden nur die Kopplungen $\langle \mathbf{27}^3 \rangle$ nicht, für die sich die drei Monome zu $\prod_{i=1}^5 z_i^3$ multiplizieren. Die Felder **27**, die diesen Ring bilden, lauten in exakter bzw. monomialer Darstellung:

Typ	exaktes Feld	Monom	Vielfachheit
I	$\left[3\begin{matrix}3 & 0\\ 3 & 0\end{matrix}\right]\left[2\begin{matrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right]^3$	$z_i^3 z_j^2$	20
II	$\left[3\begin{matrix}3 & 0\\ 3 & 0\end{matrix}\right]\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]^2\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right]^2$	$z_i^3 z_j z_k$	30
III	$\left[2\begin{matrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{matrix}\right]^2\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right]^2$	$z_i^2 z_j^2 z_k$	30
IV	$\left[2\begin{matrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{matrix}\right]\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]^3\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right]$	$z_i^2 z_j z_k z_l$	20
V	$\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]^5$	$z_1 z_2 z_3 z_4 z_5$	1

Tabelle 4: **27***er des Gepnermodells* $(3)^5$.

Man sieht also, daß die Identifikation $z_i = \left[1\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right]$ für den i-ten Faktor gilt. Die eine Antigeneration **27** lautet in exakter Darstellung $\left[1\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right]^5$, der zugehörige (anti–)chirale Ring hat nur eine Variable und die Dreipunktkopplung dieser Antigeneration verschwindet nicht. Dieser Zusammenhang mit einem geometrischen Modell ist kein Einzelfall, so gehört das Gepnermodell $(k_1, \ldots, k_5)$ zu dem gewichteten projektiven Raum $\mathbb{P}_{(\frac{d}{k_1+2}, \ldots, \frac{d}{k_5+2})}[d]$, wobei $d = \mathrm{kgV}(k_i + 2)$, einer CYM vom fermatschen Typ.

Bemerkungen zum Dreigespann

LG–Theorien sind $N = 2$ supersymmetrische Feldtheorien mit einem holomorphen Superpotential $\mathcal{W}$, deren Fixpunkt des Renormierungsgruppenflusses eine $N = 2$ SKFT ist. Zu einem Gepnermodell gehört (für fünf Faktoren mit diagonalen Invarianten) das Potential $\mathcal{W} = \sum_{i=1}^{5} \Phi_i^{k_i+2}$. Der chirale Ring [43] ist hier durch das Ideal, was durch $\frac{\partial W}{\partial \Phi_i} = 0$ erzeugt wird, definiert und seine Felder werden durch das Poincarépolynom abgezählt. Er entspricht nach [25] dem lokalen Ring der Singularität. Es gibt also ein Dreigespann CYM/LG/SKFT. Nun aber zu den $(0,2)$–Theorien.

2.3. Phasenstruktur und Distler/Kachru–Modelle

Obwohl man wußte, daß es reicht, interne Theorien mit $(0,2)-$ anstatt $(2,2)-$Supersymmetrie zu betrachten, wurde dies lange nicht verfolgt. Grund dafür war, daß das Vakuum einer $(0,2)-$Theorie durch Instanton–Korrekturen destabilisiert wird. Der Durchbruch gelang erst mit dem Phasenbild von Witten [44] und den expliziten Modellen von Distler und Kachru [45], indem die Modelle auf die solide Basis von LG–Feldtheorien gestellt wurden. Dies soll im folgenden vorgestellt werden.

Das lineare σ – Modell

Ausgangspunkt ist eine $(0,2)-$supersymmetrische Eichtheorie, die ein nichtkonformes Mitglied der Universalitätsklasse einer $(0,2)-$SKFT repräsentiert. Die Eichgruppe muß mindestens einen Faktor $U(1)$ enthalten, wichtig ist vor allem $SO(16-2r) \times U(1)$, was später zu der Eichgruppe E_{9-r} des LG/CY–Modells führt, die Serie lautet E_6, $E_5 = SO(10)$, $E_4 = SU(5)$ und $E_3 = SU(3) \times SU(2)$. Die Theorie soll neben Eichmultiplets Θ_l der Ladung $(-m_l)$ noch N_i chirale Superfelder Φ_j der Ladung w_j enthalten. Die zugehörige Wirkung S dieses Modells lautet

$$S = S_g + S_k + S_{\mathcal{W}} + S_{F.I.}, \tag{2.16}$$

wobei S_g und S_k die kinetischen Terme des Eich– bzw. Materiesektors sind, ferner $S_{\mathcal{W}}$ der Beitrag des Superpotentials und $S_{F.I.}$ der D–Term nach Fayet/Iliopoulos.
Dieser Term hat für ein vektorielles Superfeld P die Form

$$S_{F.I.} = -R \int d^2z \, d^2\theta \; P. \tag{2.17}$$

Das Superpotential $\mathcal{W}$ ist dagegen eine quasihomogene holomorphe Funktion chiraler Superfelder (i.d.R. ein Polynom) und der Term in der Wirkung hat die allgemeine Form

$$S_{\mathcal{W}} = \int d^2z d\theta \left[\Sigma^r W_r(\Phi_j) + \Theta_l \Lambda^a F_a^l(\Phi_j) \right], \tag{2.18}$$

wobei $W_r(\Phi_j)$ Polynome vom Grade d_r und $F_a^l(\Phi_j)$ Polynome vom Grad $\mathrm{grad}(F_a^l) = m_l - n_a$ sind. Ferner wurden Superfelder Σ_r mit Ladung $(-d_r)$ und Λ^a mit Ladung n_a hineingenommen, die sich später als Lagrangemultiplikatoren herausstellen werden, hier noch einmal eine kurze Auflistung der beteiligten Felder und ihrer Ladungen:

$$\begin{aligned} &q(\Phi_j) = w_j, \quad j = 1, \ldots, N_i; && q(\Sigma^r) = -d_r, \quad r = 1, \ldots, N_R \\ &q(\Lambda^a) = n_a, \quad a = 1, \ldots, N_a = r + N_L; && q(\Theta_l) = -m_l, \quad l = 1, \ldots, N_L. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Die Phasenstruktur

Integriert man die Hilfsfelder des Eichmultiplets und der chiralen fermionischen Superfelder aus, so ergibt sich (der Einfachheit halber für die Eichgruppe $U(1)$, also $N_L = 1$ mit der Kopplung e) das bosonische Potential

$$U = |W(\phi_j)|^2 + |\theta|^2 \sum_a |F_a(\phi_j)|^2 + \frac{e^2}{2} \left(\sum_j w_j |\phi_j|^2 - m|\theta|^2 - R \right)^2 , \tag{2.20}$$

dabei stehen ϕ_j und θ für die niedrigsten Komponenten der Superfelder Φ_j bzw. Θ.
Dreht man nun an diesem Parameter R, so durchläuft das Modell verschiedene "Phasen". Minimiert man das klassische bosonische Potential U für $R \gg 0$, so ergibt sich

$$\sum_j w_j |\phi_j|^2 = R, \; W(\phi_j) = 0, \; |\theta| = 0. \tag{2.21}$$

Bildet man den Quotienten bzgl. der Operation der Eichgruppe $U(1)$, so beschreiben diese Gleichungen eine CYM X als Nullstellenmenge des homogenen Polynoms $W(\phi_j)$ in dem gewichteten projektiven Raum $\mathbb{P}_{(w_1,\ldots,w_{N_i})}[d_1 \ldots d_{N_R}]$, in dem die Kählerklasse proportional zu R ist. Die rechtslaufenden Fermionen ψ_j (die Superpartner der ϕ_j) koppeln an das Tangentialbündel von X, während die linkslaufenden λ_a (die niedrigsten Komponenten der Superfelder Λ_a) an ein Vektorbündel V vom Rang r koppeln, das durch die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow \bigoplus_{a=1}^{r+N_L} \mathcal{O}(n_a) \xrightarrow{F} \bigoplus_{l=1}^{N_L} \mathcal{O}(m_l) \longrightarrow 0 \tag{2.22}$$

definiert ist. Dabei ist $\mathcal{O}(n)$ das bis auf Diffeomorphismen eindeutig bestimmte Linienbündel über $\mathbb{C}P^N$ mit $c_1 = n$ bzw. die globalen Schnitte sind homogene Polynome vom Grad n oder noch anders formuliert, die Übergangsfunktion von der Karte U_i auf U_j ist $(z_i/z_j)^n$ (in U_i ist $z_i \neq 0$, $\mathbb{C}P^N$ hat offenbar $(N+1)$ solche Karten). $\mathcal{O}(-1)$ ist das sog. tautologische Bündel, dort ist die Faser über einem Punkt in $\mathbb{C}P^N$ der entsprechende Strahl in $\mathbb{C}P^{N+1}$. $\mathcal{O}(1)$, das duale Bündel zu $\mathcal{O}(-1)$, wird auch Hyperflächenbündel genannt, denn es hat einen globalen holomorphen Schnitt, der entlang einer Hyperfläche verschwindet. Es gilt ferner $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(1)^{\otimes n}$. Somit ergibt sich, daß das geeichte lineare σ–Modell im Infrarotlimes zu einem $(0,2)$ CY–σ–Modell wird, wobei die CYM eine Hyperfläche in einem gewichteten projektiven Raum ist und noch ein Eichvektorbündel vom Rang r eingebettet ist. Dieses Bündel ist stabil, was eben die Destabilisierung des Stringvakuums verhindert. Das ist aber nicht der Ursprung dieser Bezeichnung.
Für $R \ll 0$ liefert das Verschwinden des bosonischen Potentials die Bedingung

$$\phi_j = 0 \text{ für alle } j, \quad |\theta|^2 = -\frac{R}{m}. \tag{2.23}$$

In diesem Fall werden θ und der Superpartner massiv und fallen aus der Niederenergietheorie heraus. Ferner wird die Eichgruppe $U(1)$ zu einer endlichen Untergruppe $\mathbb{Z}_m$ gebrochen, weil θ die Ladung m trägt. Somit handelt es sich hier um eine Faktortheorie eines $(0,2)$–LG–Modells im Infrarotlimes, wobei man den VEW $|\theta|$ von θ in einer Reskalierung der Felder aufgehen lassen kann.
Zusammenfassend kann man sagen, daß CY–σ– und LG–Modelle als zwei Phasen ein– und derselben Theorie angesehen werden können.

Abschließend sei gesagt, daß diese Sichtweise auch auf die allgemeineren torischen Varietäten übertragen werden kann, womit man auch singuläre CYMen bzw. deren Auflösungen studieren kann.
Eine letzte Bemerkung besteht darin, daß natürlich jedes $(2,2)-$ auch als $(0,2)-$Modell aufgefaßt werden kann. Das Bündel V wird dann als das Tangentialbündel der CYM gewählt. War das Superpotential der $(2,2)-$Theorie $\mathcal{W}'$, so lautet das der $(0,2)-$Theorie $\mathcal{W} = \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i \frac{\partial \mathcal{W}'}{\partial \Phi_i} + \Lambda \mathcal{W}'$.

Anomaliekürzung und Nettozahl

Die Bündelstruktur konnte übersichtlich in der kurzen exakten Sequenz (2.22) zusammengefaßt werden, was die Berechnung der Chernklasse

$$c(V) = \frac{c\left(\bigoplus_{a=1}^{r+N_L} \mathcal{O}(n_a)\right)}{c\left(\bigoplus_{l=1}^{N_L} \mathcal{O}(m_l)\right)} \tag{2.24}$$

erlaubt, die mit den Identitäten

$$c\left(\bigoplus_{a=1}^{r+N_L} \mathcal{O}(n_a)\right) = \prod_a c(\mathcal{O}(n_a)) = \prod_a (1 + c_1(\mathcal{O}(n_a)) = \prod_a (1 + n_a h) \tag{2.25}$$

und (h bezeichnet die Kählerklasse)

$$c(\bigoplus_{l=1}^{N_L} \mathcal{O}(m_l)) = \prod_l c(\mathcal{O}(m_l)) = \prod_l (1 + m_l h) \tag{2.26}$$

in die Form

$$c(V) = \frac{\prod_a (1 + n_a h)}{\prod_l (1 + m_l h)} \tag{2.27}$$

übergeht. Entwickelt man diesen Ausdruck in eine Potenzreihe, so ergeben sich die einzelnen Chernklassen

$$\begin{aligned} c_1(V) &= \left[\sum_a n_a - \sum_l m_l\right] h \\ c_2(V) &= \frac{1}{2}\left[\sum_l m_l^2 - \sum_a n_a^2\right] h^2 \\ c_3(V) &= -\frac{1}{3}\left[\sum_l m_l^3 - \sum_a n_a^3\right] h^3. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Für einen vollständigen Polynomschnitt der Form $\mathbb{P}_{(w_1,\ldots,w_{N_i})}[d_1 \; \cdots d_{N_R}]$ ist die zweite Chernklasse durch $c_2(TM) = \frac{1}{2}\left[\sum_r d_r^2 - \sum_i w_i^2\right]$ gegeben, womit sich die Anomaliekürzungsbedingung wie folgt schreiben läßt:

$$\sum_l m_l^2 - \sum_a n_a^2 = \sum_r d_r^2 - \sum_i w_i^2. \tag{2.29}$$

Zudem ist $c_1(V) = 0$, damit ein kovariant konstanter Spinor existiert, dies kann man mit der linearen Bedingung

$$\sum_a n_a = \sum_l m_l \tag{2.30}$$

formulieren.

Zusätzlich muß noch die CYM–Bedingung $c_1(TM) = 0$ gelten, d.h.

$$\sum_j w_j = \sum_r d_r \tag{2.31}$$

und $N_i - N_R = 4$, damit die CYM komplex–dreidimensional ist. Der einfachste Fall ist $N_i = 5$ und $N_R = 1$, zu dem z.B. die Quintik gehört, bei ihr ist $d = 5$ und $w_j = 1$ für $j = 1, \ldots, 5$. Schließlich gibt es noch ein paar Regularitätsbedingungen an Bündel und CYM, die man in [45] nachlesen kann.
Aus c_3 läßt sich schließlich mittels des Atiyah–Singer–Indextheorems leicht die Nettogenerationenzahl zu

$$N_{\text{gen}} = \frac{1}{2} \Big| \int_M c_3(V) \Big| \tag{2.32}$$

berechnen, wogegen die Berechnung der anderen Daten im Spektren viel schwieriger ist, wie man im Verlauf dieser Arbeit sehen wird.
Kurzum definieren die W_r die CYM und die F_a^l die globale Struktur des Bündels. Daher kann man in der Wirkung (2.18) die Σ_r als Lagrangemultiplikatoren zum einen Satz Nebenbedingung $W_r = 0$, den Hyperflächengleichungen ansehen, während der zweite Term erzwingt, daß die Eichfermionen λ^a Schnitte des Bündels V sind.
Eigentlich muß die oben präsentierte Konstruktion mit Garben statt Bündeln durchgeführt werden, um auch singuläre CYMen im Rahmen der Auflösungstheorie [89] behandeln zu können, aber für die hier behandelte Klasse von Modellen reichen Bündel aus. Allerdings ist nach dem Erscheinen von [89] in dieser Richtung noch wenig geschehen.

Doch nun genug der Vorrede.

3. Die Konstruktion exakt lösbarer (0,2)–Stringtheorien

Um eine Konstruktion nach dem Vorbild von Gepner im $(2,2)-$Fall durchführen zu können, wird das Konzept der einfachen Ströme benötigt, das im folgenden kurz vorgestellt werden soll.

3.1. Die Methode der einfachen Ströme

Dieser Abschnitt enthält nur eine sehr kurze Zusammenfassung der Arbeit von Schellekens und Yankielowicz. Es geht im folgenden darum, neue modulare Invarianten aus bereits bekannten zu konstruieren. Genauere Information kann den Originalartikeln [48] entnommen werden, die Darstellung nach Intriligator [49] ist weniger verständlich.

Man startet mit einer rationalen konformen Feldtheorie (RKFT) mit mindestens einer modular invarianten Zustandssumme, z.B. der diagonalen. Wenn diese Theorie einfache Ströme J enthält, das sind Felder (genauer gesagt Höchstgewichtsdarstellungen), deren Fusion mit einem primären Feld der Theorie genau ein anderes primäres Feld ergibt, d.h. $J \times \Phi_i = \Phi_j$, so kann man in der folgenden Weise eine neue modular invariante Zustandssumme konstruieren: zunächst definiert man den Index N des einfachen Stroms als die minimale natürliche Zahl, so daß $J^N = \mathbb{1}$. Diese Zahl existiert, da in einer RKFT nur endlich viele primäre Felder vorhanden sind. Weiterhin definiert man den Monodromieparameter r über die konforme Dimension des Stroms gemäß

$$h(J) = \frac{r(N-1)}{2N} \mod 1, \tag{3.1}$$

womit r modulo N für ungerades und modulo $2N$ für gerades N definiert ist. Zu dieser Monodromie gehört auch eine Ladung, die für ein primäres Feld Φ durch

$$q(\Phi) = h(\Phi) + h(J) - h(J \times \Phi) \mod 1 \tag{3.2}$$

gegeben ist und die Werte $\frac{t}{N}$, $t \in \mathbb{Z}$ annimmt. Die Operation des einfachen Stroms auf der Menge der primären Felder der RKFT sortiert diese in Bahnen $\{\Phi, J \times \Phi, \ldots, J^{d-1} \times \Phi\}$, wobei d ein Teiler von N ist. Die Ladungen der Felder $J^n \times \Phi$ in dieser Bahn sind $\frac{t+rn}{N} \mod 1$.

Nun kann es nur weitergehen, wenn r gerade ist. Dann läßt sich folgende neue modular invariante Zustandssumme hinschreiben:

$$Z(\tau, \overline{\tau}) = \sum_{k,l} \chi_k(\tau)\, M_{kl}\, \chi_l(\overline{\tau}), \tag{3.3}$$

wobei die Matrix M wie folgt definiert ist:

$$M_{kl} = \sum_{p=1}^{N} \delta(\Phi_k, J^p \Phi_l)\, \delta^1\left(\hat{q}(\Phi_k) + \hat{q}(\Phi_l)\right). \tag{3.4}$$

Dabei ist $\delta^1(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Z}$ und sonst Null. Die leicht abgeänderte Ladung $\hat{q}$ ist auf jeder Bahn durch

$$\hat{q}(J^n \Phi) = \frac{t+rn}{2N} \mod 1 \tag{3.5}$$

definiert.

Man muß zwei grundlegende Typen von Invarianten unterscheiden. Die erste Sorte sind die, die durch einfache Ströme ganzzahliger konformer Dimension erzeugt werden. Diese kann man als diagonale Invariante

von Bahnen ansehen, und zwar von den Bahnen mit ganzzahliger Ladung. Daher werden einige Felder aus der Zustandssumme herausprojiziert. Die zweite Art wird dementsprechend von einfachen Strömen nichtganzzahliger Dimension erzeugt, was einem Automorphismus der Fusionsalgebra entspricht. Es ändert sich also nur die Verknüpfung der Felder links und rechts, es wird nichts herausprojiziert. Im übrigen entsprechen einfache Ströme nach [90] gerade den Faktortheorien, wenn auch die konkrete Abbildung im einzelnen schwierig zu finden ist, vgl. das Kapitel über die Spiegelsymmetrie.
Offenbar definieren Summe und Produkt zweier Matrizen (3.4) ebenfalls eine modular invariante Zustandssumme. Allerdings kann nur im Produktfall die neue Zustandssumme durch die Multiplizität des Vakuums dividiert werden (Normierung). Das ist auch der Grund, warum r gerade sein muß. Man kann also allgemeinere Zustandssummen der Form

$$Z(\tau,\overline{\tau}) \sim \vec{\chi}(\tau)\, M(J_n) \ldots M(J_2)\, M(J_1)\, \vec{\chi}(\overline{\tau}) \tag{3.6}$$

hinschreiben. Es gilt allerdings $M(J_1)M(J_2) \neq M(J_1 \times J_2)$.
Diese Methode ist dazu geeignet, massenhaft modular invariante Zustandssummen zu berechnen. In [37] wurde sie in extensiver Weise dazu genutzt, vierdimensionale, $N=1$ raumzeit–supersymmetrische Stringvakua mit einer internen SKFT der zentralen Ladung $(c,\overline{c}) = (9,9)$ zu konstruieren. Dort wurde schon bemerkt, daß i.a. die Weltflächen–Supersymmetrie nur $(0,2)$ ist. Im folgenden wird dargestellt, wie man mit dieser Methode die Modelle von Distler/Kachru [45] bekommen kann.

3.2. Exakt lösbare Stringmodelle mit (0,2)–Supersymmetrie

In diesem Abschnitt wird die Methode der einfachen Ströme dazu genutzt, modular invariante Zustandssummen zu konstruieren, die alle Eigenschaften des konformen Fixpunkts eines $(0,2)-$Stringvakuums aufweisen. Die Konstruktion kann für die Eichgruppen E_{9-r} durchgeführt werden, die einem Vektorbündel vom Rang r entsprechen. In [45] wurden folgende Eigenschafen der SKFT aus einer LG–Analyse vorhergesagt.

(a) Linke und rechte konforme Anomalie der internen SKFT betragen $(c,\overline{c}) = (6+r, 9)$.

(b) Neben dem rechtslaufenden $U(1)-$Strom, der zur rechten $N=2$ Virasoroalgebra gehört, gibt es ebenfalls einen linkslaufenden $U(1)_L-$Strom, der die folgende OPE aufweist:

$$J_L(z)\, J_L(w) = \frac{r}{(z-w)^2} + \text{reguläre Terme}. \tag{3.7}$$

(c) Nur die Untergruppe $SO(16-2r)\times U(1)_L \subset E_{9-r}$ der Eichgruppe ist linear realisiert, die noch fehlenden Wurzeln werden dadurch erzeugt, daß man Bahnen unter dem Operator des spektralen Flusses mit der konformen Dimension $(h,q) = (\frac{r}{8}, \frac{r}{2})$ bildet.

Bei den Modellen in [37] war zwar die Supersymmetrie $(0,2)$, dagegen aber immer noch $c=\overline{c}=9$ und außerdem ein größerer Teil der Eichgruppe linear realisiert.
Durch den $(2,2)-$Fall motiviert, startet man in Lichtkegeleichung mit der diagonalen Zustandssumme untenstehender $(c,\overline{c}) = (24,24)$ SKFT. Da es im folgenden primär um die Konstruktion einer modular invarianten Zustandssumme geht, wird das ganze zunächst links/rechts–symmetrisch formuliert und später mit der bosonischen Stringabbildung heterotisch gemacht. Dieses im Vergleich zur Präsentation der gepnerschen Konstruktion umgekehrte Vorgehen liefert dieselben Schlußfolgerungen und ist der Konstruktion mit einfachen Strömen angemessener, da diese eben auf einer Diagonalinvariante basiert.

Bestandteil	c	$\overline{c}$
$D=2$ transversale Raumzeit, x^μ	2	2
$N=2$ Virasoro	9	9
$U(1)_2^{r-3}$	$r-3$	$r-3$
Eichgruppe $SO(16-2r)\times E_8$	$16-r$	$16-r$

Tabelle 5: *Grundlegende SKFT, symmetrisch geschrieben.*

Die auffälligste Änderung im Vergleich zur gepnerschen Konstruktion ist die Hereinnahme freier Bosonen, die auf einem Kreis von Radius $R=2$ kompaktifiziert sind, was als $U(1)_2$ bezeichnet wird. Die diagonale Zustandssumme dieser Theorie kann einfach mit $\Theta-$Funktionen geschrieben werden:

$$Z_{U(1)_2}(\tau,\overline{\tau}) = \sum_{m=-1}^{2} \Theta_{m,2}(\tau)\,\Theta_{m,2}(\overline{\tau}). \tag{3.8}$$

Man bemerkt, daß dies genau die Zustandssumme eines diracschen Fermions ist. Die Fusionsregeln der primären Felder sind sehr einfach:

$$[\Phi_{m,2}]\times[\Phi_{n,2}] = [\Phi_{m+n,2}] \mod 4, \tag{3.9}$$

kurz gesagt:

$$[m]\times[n] = [m+n] \mod 4. \tag{3.10}$$

Der zugehörige Strom ist $j_{U(1)_2} = i\partial\phi$, wobei ϕ das Bosonfeld ist, und erfüllt die OPE

$$j_{U(1)_2}(z)\,j_{U(1)_2}(w) = \frac{1}{(z-w)^2} + \text{reguläre Terme}. \tag{3.11}$$

Die primären Felder $[m]=\Phi_{m,2}^{U(1)_2}$ haben die Dimension $h=\frac{m^2}{8}$ und bzgl. dieses Stroms die Ladung $q=\frac{m}{2}$. Man kann sich fragen, was das soll, denn $U(1)_2$ ist sicherlich nicht $N=2$ supersymmetrisch, sondern vielmehr grob gesprochen gerade der fermionische Teil einer $N=2$, $c=3$ Theorie. Nichtsdestotrotz gibt es einen Operator des spektralen Flusses zwischen Sektoren mit geradem und ungeradem m, m.a.W. zwischen dem $NS-$ und dem R–Sektor des Fermions. Dieser ist durch $\exp(\frac{i\phi}{2})$ definiert und hat konforme Dimension und Ladung $(h,q)=(\frac{1}{8},\frac{1}{2})$. Jetzt erkennt man, warum gerade diese spezielle Theorie mit $c=1$ gewählt wurde. Verknüpft man diese $U(1)_2-$Ströme mit dem der $N=2$ Virasoroalgebra ($j_{c=9}=i\sqrt{3}\partial_z\Phi$), so läßt sich ein Strom J_L definieren, der die Bedingungen (b) und (c) erfüllt. Dazu betrachtet man einfach die Summe der Ströme. Ferner kann noch der linke Operator des spektralen Flusses definiert werden:

$$\Sigma_{c=6+r}(z) = e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}\Phi(z)} \otimes \prod_{j=1}^{r-3} e^{i\frac{1}{2}\phi_j(z)}. \tag{3.12}$$

Es wird sich später herausstellen, daß durch Betrachtung von Bahnen dieses Operators tatsächlich die Eichgruppe von $SO(16-2r)\times U(1)_L$ auf E_{9-r} erweitert wird.

Nun soll der rechte Sektor betrachtet werden. Dazu werden zunächst einige Tatsachen aus der Darstellungstheorie von $SO(2n)$ Kac/Moody–Algebren der Stufe $k=1$ benötigt. Die Gruppe selbst hat die adjungierte

Darstellung der Dimension $n(2n-1)$. Die Algebra erlaubt vier Darstellungen, die in der folgenden Tabelle aufgelistet sind.

Charakter	h	q mod 2	Vielfachheit
$\chi_0 = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\vartheta_3}{\eta}\right)^n + \left(\frac{\vartheta_4}{\eta}\right)^n\right)$	0	0	1
$\chi_v = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\vartheta_3}{\eta}\right)^n - \left(\frac{\vartheta_4}{\eta}\right)^n\right)$	$\frac{1}{2}$	1	$2n$
$\chi_s = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\vartheta_2}{\eta}\right)^n + \left(\frac{\vartheta_1}{\eta}\right)^n\right)$	$\frac{n}{8}$	$\frac{n}{2}$	2^{n-1}
$\chi_c = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\vartheta_2}{\eta}\right)^n - \left(\frac{\vartheta_1}{\eta}\right)^n\right)$	$\frac{n}{8}$	$\frac{n}{2}-1$	2^{n-1}

Tabelle 6: *Darstellungen von* $SO(2n)_1$.

Die Ladung q wird bzgl. der Summe aller Cartanelemente der Liealgebra von $SO(2n)$ genommen und ϑ_i steht für die jacobischen $\Theta-$Funktionen. Die Fusionsregeln der Darstellungen sind für gerades und ungerades n leicht verschieden und in der untenstehenden Tabelle zusammengefaßt.

n ungerade	0	v	s	c
0	0	v	s	c
v	v	0	c	s
s	s	c	v	0
c	c	s	0	v

n gerade	0	v	s	c
0	0	v	s	c
v	v	0	c	s
s	s	c	0	v
c	c	s	v	0

Tabelle 7: *Fusionsregeln für* $SO(2n)_1$.

Um die (inverse) bosonische Stringabbildung für $SO(10)\times E_8 \rightarrow SO(2)$

$$\begin{aligned} \chi_0^{SO(10)\times E_8} &\rightarrow \chi_v^{SO(2)}, & \chi_v^{SO(10)\times E_8} &\rightarrow \chi_0^{SO(2)} \\ \chi_s^{SO(10)\times E_8} &\rightarrow -\chi_c^{SO(2)}, & \chi_c^{SO(10)\times E_8} &\rightarrow -\chi_s^{SO(2)} \end{aligned} \tag{3.13}$$

auf der rechten Seite anwenden zu können, muß $SO(16-2r)\times U(1)_2^{r-3}$ zu $SO(10)$ erweitert werden. Dies kann mit $(r-3)$ einfachen Strömen

$$J^j_{\text{erw}} = \Phi^{U(1)_2}_{2,2} \otimes \Phi^{SO(16-2r)}_v, \; j = 1,\ldots,r-3 \tag{3.14}$$

geschehen, wobei jede der $U(1)_2$en genau einmal vorkommen muß. Sie haben ganzzahlige Dimension und z.B. für $r=4$ wird die folgende Bahn erzeugt:

$$\begin{aligned} \chi_0^{SO(10)} &= \chi_0^{SO(8)}\Theta_{0,2} + \chi_v^{SO(8)}\Theta_{2,2}, & \chi_v^{SO(10)} &= \chi_0^{SO(8)}\Theta_{2,2} + \chi_v^{SO(8)}\Theta_{0,2}, \\ \chi_s^{SO(10)} &= \chi_s^{SO(8)}\Theta_{1,2} + \chi_c^{SO(8)}\Theta_{-1,2}, & \chi_c^{SO(10)} &= \chi_c^{SO(8)}\Theta_{1,2} + \chi_s^{SO(8)}\Theta_{-1,2}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Nun kann auf der rechten Seite wie in der gepnerschen Konstruktion fortgefahren werden. Für den Teil mit $c=9$ wählt man Tensorprodukte unitärer Darstellungen der $N=2$ Virasoroalgebra. Etwaige affine Invarianten können auch als einfache Ströme geschrieben werden, z.B. die $D-$Invariante als $(l,m,s) = (0,k+2,2)$, eine Ausnahme bildet die E_7-Invariante bei $k=16$, die bei dem Versuch der Konstruktion von Dreigenerationenmodellen kaum vermeidbar ist. Nun muß man wie im Gepnerfall dafür sorgen, daß man tatsächlich ein $N=2$ supersymmetrisches Modell erzeugt, d.h. das Tensorprodukt der minimalen Faktoren ist im supersymmetrischen Sinne zu bilden. Dies kann mit den Projektionen

$$J_i = G_i \otimes \Phi^{SO(16-2r)}_v \tag{3.16}$$

erreicht werden, wobei G_i den Superstrom des i-ten Faktors des Tensorprodukts bezeichnet, als einfacher Strom lautet er $(l, m, s) = (0, 0, 2)$. Schließlich ist noch die rechte $GSO-$Projektion auf Zustände mit ganzzahliger totaler Ladung auszuführen, die durch den folgenden einfachen Strom gegeben ist:

$$J_{GSO_R} = \overline{\Sigma}_{\overline{c}=9} \otimes \prod_{j=1}^{r-3} \Phi_{1,2}^{U(1)_2} \otimes \Phi_s^{SO(16-2r)}. \tag{3.17}$$

Dabei ist $\overline{\Sigma}_{\overline{c}=9}$ der rechtslaufende Operator des spektralen Flusses der internen SKFT mit $(\overline{h}, \overline{q}) = (\frac{3}{8}, \frac{3}{2})$. Bislang hat die Zustandssumme also folgende Form:

$$Z \sim \vec{\chi}(\tau)\, M(J_{GSO_R}) \prod_i M(J_i) \prod_{j=1}^{r-3} M(J_{\text{erw}}^j)\, \vec{\chi}(\overline{\tau}), \tag{3.18}$$

die genau der der gepnerschen Konstruktion entspricht, da alle Projektion gleichermaßen nach rechts und links wirken und damit das Modell entsprechend symmetrisch ist. Um jetzt wirklich ein neues heterotisches Modell zu erhalten, muß man weitere einfache Ströme einführen, deren Matrizen M nicht mit den bisherigen kommutieren, um eben dieses symmetrische Wirken zu unterbinden. Welche Ströme man dort wählen muß, hängt vom konkreten Modell ab und läßt sich nicht a priori vorhersagen. Wegen des neuen $U(1)_2-$Faktors hat man aber vielfältigere Möglichkeiten als bei den Gepnermodellen. Interessant sind die Ströme, die sowohl die linke $N = 2$ Supersymmetrie als auch die Eichgruppe E_6 brechen, die durch die rechte $GSO-$Projektion entsteht. Bezeichne im folgenden Υ_l solche Ströme. Zu allerletzt ist jetzt noch die linke $GSO-$Projektion anzubringen, die durch den einfachen Strom

$$J_{GSO_L} = \Sigma_{c=6+r} \otimes \Phi_s^{SO(16-2r)} \tag{3.19}$$

gegeben ist, im konkreten Modell aber von der rechten nicht zu unterscheiden ist, denn der Strom ist ein Produkt der Felder mit $(l, m, s) = (0, 1, 1)$ und $(r-3)$ $U(1)_2-$Feldern mit $m = 1$. Da nun die Ströme J_i und J_{erw}^j nicht nach rechts wirken, kommt es nicht zu einer Erweiterung der Eichgruppe auf E_6, sondern nur auf E_{9-r}. Diese Tatsache läßt sich wie folgt an den Charakteren ablesen: dazu wird ein allgemeiner Satz über Bahnen eines Operators des spektralen Flusses mit $(h, q) = (\frac{k}{2}, k)$ benötigt [91]. Da im $NS-$Sektor alle Bahnen ganzzahlige Ladung haben, kann man nach dem Lemma von Hermite† jede Bahn nach einer endlichen Zahl $z-$abhängiger Funktionen entwickeln:

$$f_{i,k}(q, z) = \frac{1}{\eta(q)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{k}{2}\left(n+\frac{i}{k}\right)^2} z^{k\left(n+\frac{i}{k}\right)}, \quad i \bmod k. \tag{3.20}$$

Dabei hängen die Koeffizienten nur von der Variablen q ab. Der hier zu betrachtende Operator ist das Quadrat von $\Sigma_{c=6+r}$ und hat daher $(h, q) = (\frac{r}{2}, r)$. Folglich gibt es r invariante Funktionen

$$f_{i,r}(q, z) = \frac{1}{\eta(q)} \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^{\frac{r}{2}\left(m+\frac{i}{r}\right)^2} z^{r\left(m+\frac{i}{r}\right)}, \quad -[\frac{r-1}{2}] \leq i \leq [\frac{r}{2}], \tag{3.21}$$

---

† Seien $a \in \mathbb{N}$, $0 \leq b \leq a$ und $\delta = \pm 1$ beliebig, aber fest, $f(z) = f(z, q)$ eine Laurentreihe in z und erfülle $f(zq, q) = \frac{\delta}{z^a q^{\frac{b}{2}}} f(z, q)$, dann ist $\{f(z)\}$ ein $a-$dimensionaler Vektorraum mit der kanonischen Basis $z^\rho \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta^n z^{an} q^{\frac{a}{2}n^2 + \left(\rho + \frac{(b-a)}{2}\right)n}$ mit $\rho = 0, 1, \ldots, a-1$.

wobei $[\cdot]$ die Gaußklammer bezeichnet. Diese kann man mittels $\Theta-$Funktionen als

$$f_{i,r}(q,z) = \frac{1}{\eta(q)}\left(\Theta_{2i,2r}(q,z) + \Theta_{2(i+r),2r}(q,z)\right) \mod 2r, \quad -[\frac{r-1}{2}] \leq i \leq [\frac{r}{2}] \tag{3.22}$$

schreiben. Für $r=5$ waren die Funktionen $f_{i,5}$ wie im Gepnerfall nicht von definiter Ladungsparität [92], so daß sie nach $\Theta-$Funktionen entwickelt wurden. Da $\Sigma_{c=6+r}$ gemäß

$$\Sigma_{c=6+r} : \Theta_{i,2r} \longrightarrow \Theta_{i+r,2r} \mod 4r \tag{3.23}$$

auf diesen wirkt, kann jede Bahn χ^j_{Bahn} mit ganzzahliger Ladung, die auf einem Charakter χ^j basiert und analog zu (2.10) durch den linksseitigen spektralen Fluß J_{GSO_L} erzeugt wird, wie folgt entwickelt werden, allerdings müssen jetzt die verschiedenen r einzeln behandelt werden. Dabei steht j für einen Satz (h,q) und die A^j_i sind einfach Zahlen.

Für $r=4$:

$$\begin{aligned}\chi^j_{\text{Bahn}} =& \chi_0^{SO(8)}\left[f_{0,4}A^j_0 + f_{2,4}A^j_2\right] + \chi_v^{SO(8)}\left[f_{1,4}A^j_1 + f_{-1,4}A^j_{-1}\right] \\ & \chi_s^{SO(8)}\left[f_{2,4}A^j_0 + f_{0,4}A^j_2\right] + \chi_c^{SO(8)}\left[f_{-1,4}A^j_1 + f_{1,4}A^j_{-1}\right],\end{aligned} \tag{3.24}$$

oder nach Umordnung

$$\begin{aligned}\chi^j_{\text{Bahn}} = & \left[\chi_0^{SO(8)}f_{0,4} + \chi_s^{SO(8)}f_{2,4}\right]A^j_0 + \left[\chi_0^{SO(8)}f_{2,4} + \chi_s^{SO(8)}f_{0,4}\right]A^j_2 + \\ & \left[\chi_v^{SO(8)}f_{1,4} + \chi_c^{SO(8)}f_{-1,4}\right]A^j_1 + \left[\chi_v^{SO(8)}f_{-1,4} + \chi_c^{SO(8)}f_{1,4}\right]A^j_{-1}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Treibt man nun noch etwas Algebra, so ergibt sich (die $z-$Abhängigkeit wird der Einfachheit halber weggelassen)

$$\chi^j_{\text{Bahn}} = \chi_0^{SO(10)}A^j_0 + \chi_v^{SO(10)}A^j_2 + \chi_s^{SO(10)}A^j_1 + \chi_c^{SO(10)}A^j_{-1}, \tag{3.26}$$

was explizit die Erweiterung der Eichgruppe zu $SO(10)$ zeigt.

Für $r=5$:

$$\begin{aligned}\chi^j_{\text{Bahn}} =& \chi_0^{SO(6)}\left[\Theta_{0,10}A^j_0 + \Theta_{-8,10}A^j_1 + \Theta_{8,10}A^j_{-1} + \Theta_{4,10}A^j_2 + \Theta_{-4,10}A^j_{-2}\right] + \\ & \chi_v^{SO(6)}\left[\Theta_{10,10}A^j_0 + \Theta_{2,10}A^j_1 + \Theta_{-2,10}A^j_{-1} + \Theta_{-6,10}A^j_2 + \Theta_{6,10}A^j_{-2}\right] + \\ & \chi_s^{SO(6)}\left[\Theta_{5,10}A^j_0 + \Theta_{-3,10}A^j_1 + \Theta_{-7,10}A^j_{-1} + \Theta_{9,10}A^j_2 + \Theta_{1,10}A^j_{-2}\right] + \\ & \chi_c^{SO(6)}\left[\Theta_{-5,10}A^j_0 + \Theta_{7,10}A^j_1 + \Theta_{3,10}A^j_{-1} + \Theta_{-1,10}A^j_2 + \Theta_{-9,10}A^j_{-2}\right].\end{aligned} \tag{3.27}$$

Sortiert man das um und benutzt, daß die Charaktere von $SU(5)$ als Summen von Produkten derer von $SU(4) \cong SO(6)$ und $\Theta-$Funktionen der Stufe zehn geschrieben werden können, so ergibt sich

$$\chi^j_{\text{Bahn}} = \chi_0^{SU(5)}A^j_0 + \chi_{10}^{SU(5)}A^j_{+1} + \chi_{\overline{5}}^{SU(5)}A^j_{+2} + \chi_{\overline{10}}^{SU(5)}A^j_{-1} + \chi_5^{SU(5)}A^j_{-2}. \tag{3.28}$$

Hier erkennt man die Erweiterung der Eichgruppe auf $SU(5)$. Anders als im Falle E_6 oder $SO(10)$ gibt es hier zwei verschiedene Darstellungen chiraler Raumzeit–Fermionen, und zwar $\mathbf{10}$ und $\overline{\mathbf{5}}$, welche zusammen eine Generation der Niederenergietheorie umfassen. Die beiden Paare von Anzahlen müssen nicht gleich sein, wohl aber die Nettozahl, was in diesem Fall durch die Anomaliekürzung sichergestellt ist.

Für $r = 6$:

$$\begin{aligned}\chi^j_{\text{Bahn}} =& \chi_0^{SO(4)}\left[f_{0,6}A_0^j + f_{2,6}A_2^j + f_{-2,6}A_{-2}^j\right] + \chi_v^{SO(4)}\left[f_{3,6}A_3^j + f_{1,6}A_1^j + f_{-1,6}A_{-1}^j\right] + \\ & \chi_s^{SO(4)}\left[f_{3,6}A_0^j + f_{-1,6}A_2^j + f_{1,6}A_{-2}^j\right] + \chi_c^{SO(4)}\left[f_{0,6}A_3^j + f_{-2,6}A_1^j + f_{2,6}A_{-1}^j\right],\end{aligned} \tag{3.29}$$

was in E_3–Charakteren geschrieben werden kann:

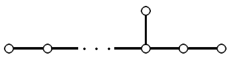
$$\chi^j_{\text{Bahn}} = \chi^{E_3}_{(0,0)}A_0^j + \chi^{E_3}_{(0,2)}A_3^j + \chi^{E_3}_{(3,0)}A_{-2}^j + \chi^{E_3}_{(\overline{3},0)}A_2^j + \chi^{E_3}_{(3,2)}A_{-1}^j + \chi^{E_3}_{(\overline{3},2)}A_1^j. \tag{3.30}$$

Da am exakt lösbaren Punkt die Eichgruppe ohnehin erweitert ist, kann man hoffen, noch einen $U(1)$–Faktor zu bekommen, der das supersymmetrische Standardmodell liefert. Allerdings sollten diese Erweiterungen bei Deformationen wegfallen, so daß eine gute Feinabstimmung des Modells nötig wäre.

Die Erweiterung der Eichgruppe $SO(2n) \times U(1)_L$ zu E_{n+1} kann schematisch als Erweiterung von Dynkindiagrammen angesehen werden:

D_n

$\xrightarrow{U(1)\,\&\,\text{spektr.Fl.}}$



E_{n+1} (3.31)

Faßt man alles zusammen, so hat das Modell die Form

$$Z \sim \vec{\chi}(\tau)\, M(J_{GSO_L}) \prod_l M(\Upsilon_l)\; M(J_{GSO_R}) \prod_i M(J_i) \prod_{j=1}^{r-3} M(J^j_{\text{erw}})\, \vec{\chi}(\overline{\tau}). \tag{3.32}$$

Es war bequem, die Konstruktion in links/rechts–symmetrischer Weise zu beschreiben, wobei die Asymmetrie schließlich und endlich durch die bosonische Stringabbildung (3.13) erreicht wird. Die komplette Anomaliestruktur ist in folgender Tabelle zusammengefaßt, diesmal nicht in Lichtkegeleichung.

Bestandteil	c	$\overline{c}$
Geister b, c	-26	-26
Supergeister β, γ	–	11
$D = 4$ Raumzeit, x^μ	4	4
Superpartner ψ^μ der x^μ	–	2
Interne SKFT	$6 + r$	9
Eichgruppe $SO(16 - 2r) \times E_8$	$16 - r$	–

Tabelle 8: *Anomaliestruktur der kompletten* $(0, 2)$–*Theorie.*

Durch die Konstruktion sind alle Eigenschaften, die am Anfang dieses Abschnitts gefordert wurden, erfüllt. Es bleibt die Frage, ob sich wirklich solche Υ_l, die die linke Supersymmetrie und die exzeptionelle Eichgruppe brechen, finden lassen. Dazu wurde ein C–Programm geschrieben und es zeigte sich, daß es genügend solche Ströme gibt. Es ist aber den Strömen a priori nicht anzusehen, was sie für eine Wirkung haben, es kann immer passieren, daß Supersymmetrie und Eichgruppe doch erweitert werden. So bleibt als einziges Kriterium die Berechnung des masselosen Spektrums, auf die gleich eingegangen werden wird. Natürlich sollten die Ströme, die auf den $U(1)_2$en trivial wirken, bereits bekannten Faktortheorie–Konstruktionen auf CYMen entsprechen,

dagegen die anderen der Wahl eines anderen Vektorbündels für die linkslaufenden Fermionen des $\sigma-$Modells, was den Rang der Eichgruppe entsprechend reduzieren sollte. Weiter unten werden viele Beispiele vorgestellt, die zeigen, welche Arten von Modellen aus (3.32) entstehen können.
Um mehr Information zu erhalten, müssen einige Größen wie das masselose Spektrum und dabei insbesondere die Nettogenerationenzahl berechnet werden. Letztere ist wichtig, da sich immer eine Generation und eine Antigeneration zu einem Massenterm abpaaren, der die Größenordnung der Planckmasse hat und daher dann die entsprechenden Felder aus dem masselosen (leichten) Spektrum herausfallen können. Diese Größen lassen sich auch bei CYMen oder LG–Modellen angeben.

3.3. Die Berechnung des masselosen Spektrums

Der heterotische String liefert universelle masselose $N = 1$ Teilchenduplets wie das Graviton/Gravitino und die Gluonen/Gluinos der Eichgruppe. Betrachtet man die Kopplungen des linkslaufenden Vakuumzustands an die rechtsseitige Superladung

$$(\overline{h} = \tfrac{3}{8}, \overline{q})_{\overline{c}=9} \otimes \left(\Phi_{1,2}^{U(1)_2}\right)^{5-n} \otimes \Phi_s^{SO(2n)}, \tag{3.33}$$

so erhält man den Grad (das "N") der Supersymmetrie: gibt es k solcher Zustände, so liegt $N = k$ Supersymmetrie vor. I.a. wird $k = 1$ sein, kompaktifiziert man den String jedoch auf $K_3 \times T^2$, so ist $k = 2$. Diese Modelle sind phänomenologisch weniger interessant, spielen aber eine große Rolle bei Dualitätsfragen heterotischer/Typ II Strings [30]. Im weiteren Verlauf wird auf diesen Sachverhalt noch eingegangen werden. Zusätzlich gibt es für Eichgruppe $SO(10)$ noch masselose Teilchen mit Spin 0 und 1 in der Singlet–, Vektor– und Spinordarstellung sowie deren Superpartner mit Spin $\frac{1}{2}$. Die Quantenzahlen $(h, q; \overline{h}, \overline{q})$ der Bosonen lauten

Darstellung	**1**	**10**	**16**	$\overline{\mathbf{16}}$
Spin 0	$(1, 0; \frac{1}{2}, \pm 1)$	$(\frac{1}{2}, 0; \frac{1}{2}, \pm 1)$	$(\frac{1}{2}, 1; \frac{1}{2}, \pm 1)$	$(\frac{1}{2}, -1; \frac{1}{2}, \pm 1)$
Spin 1	$(1, 0; 0, 0)$	$(\frac{1}{2}, 0; 0, 0)$	$(\frac{1}{2}, 1; 0, 0)$	$(\frac{1}{2}, -1; 0, 0)$

Tabelle 9: *Masseloses Spektrum für* $SO(10)$.

Da der rechte Sektor mit dem der normalen $(2,2)-$Modelle übereinstimmt, tragen dieselben Kombinationen primärer Felder der verschiedenen Faktoren bei, womit man einen programmierbaren Algorithmus zur Hand hat: man startet mit diesen Kombinationen auf der rechten Seite, verfolgt ihre Bahn durch die Kette der einfachen Ströme und bestimmt so, an welche Zustände sie auf der linken Seite koppeln. Gibt es Teilchen mit Spin 1 in der Spinordarstellung, so ist dies ein Zeichen für eine Erweiterung der Eichgruppe, normalerweise auf E_6. Das heißt aber noch lange nicht, daß das Modell dann auch ein $(2,2)-$Modell ist.
Für $SU(5)$ treten nur die Singlet– und die vier Spinordarstellungen auf. Ihre Quantenzahlen lauten wie folgt:

Darstellung	**1**	**10**	$\overline{\mathbf{10}}$	**5**	$\overline{\mathbf{5}}$
Spin 0	$(1, 0; \frac{1}{2}, \pm 1)$	$(\frac{5}{8}, -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}, \pm 1)$	$(\frac{5}{8}, \frac{3}{2}; \frac{1}{2}, \pm 1)$	$(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \pm 1)$	$(\frac{5}{8}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \pm 1)$
Spin 1	$(1, 0; 0, 0)$	$(\frac{5}{8}, -\frac{3}{2}; 0, 0)$	$(\frac{5}{8}, \frac{3}{2}; 0, 0)$	$(\frac{5}{8}, \frac{1}{2}; 0, 0)$	$(\frac{5}{8}, -\frac{1}{2}; 0, 0)$

Tabelle 10: *Masseloses Spektrum für* $SU(5)$.

Hier können weitere Gluonen die Eichgruppe zu $SO(10)$, E_6 oder auch $SU(6)$ erweitern. Diese muß dann mit einem Higgs–Mechanismus, wobei man einem Feld in der adjungierten Darstellung einen nichtverschwindenden VEW gibt, auf realistische Gruppen für vereinheitlichte Theorien heruntergebrochen werden. Ist beispielsweise die Fundamentalgruppe der CYM nichttrivial, so kann man Wilsonlinien benutzen.
Schließlich lauten die Quantenzahlen für die Eichgruppe E_3

Darstellung	$\mathbf{1} = (0,0)$	$\mathbf{2} = (2,0)$	$\mathbf{3} = (3,0)$	$\overline{\mathbf{3}} = (\overline{3},0)$	$\mathbf{6} = (3,2)$	$\overline{\mathbf{6}} = (\overline{3},2)$
Spin 0	$(1,0;\frac{1}{2},\pm1)$	$(\frac{3}{4},0;\frac{1}{2},\pm1)$	$(\frac{3}{4},1;\frac{1}{2},\pm1)$	$(\frac{3}{4},-1;\frac{1}{2},\pm1)$	$(\frac{3}{4},-2;\frac{1}{2},\pm1)$	$(\frac{3}{4},2;\frac{1}{2},\pm1)$
Spin 1	$(1,0;0,0)$	$(\frac{3}{4},0;0,0)$	$(\frac{3}{4},1;0,0)$	$(\frac{3}{4},-1;0,0)$	$(\frac{3}{4},-2;0,0)$	$(\frac{3}{4},2;0,0)$

Tabelle 11: *Masseloses Spektrum für* $SU(3) \times SU(2)$.

Nach diesem doch arg technischen Vorgehen sollen im folgenden Abschnitt typische Beispiele vorgestellt werden.

3.4. Beispiele für exakt lösbare Modelle

Das am häufigsten diskutierte Beispiel einer CYM ist die Quintik–Hyperfläche in $\mathbb{P}_4$, daher wird zunächst das Augenmerk auf der zu ihr korrespondierenden $N = 2$ SKFT liegen, die aus fünf Kopien des $k = 3$ unitären Modells besteht, was im folgenden mit $(3)^5$ abgekürzt wird. In diesem Abschnitt wird gezeigt, auf welche Weise die Wahl von einfachen Strömen die Eichgruppen E_6, $SO(10)$, $SU(5)$, $SU(3) \times SU(2)$ und sogar E_7, $SU(7)$, $SU(6)$, $SO(12)$, $SU(6) \times SU(2)$, $SU(4) \times SU(2)$ erzeugt. Wie im $(2,2)$–Fall sind diese Eichgruppen durch weitere einfache Faktoren G erweitert, normalerweise $U(1)$en. Da dieser Eichgruppenteil zusammenbricht, sobald man sich im Parameterraum vom exakt lösbaren Punkt entfernt, werden sie hier nicht aufgeführt. Sie sollten aber nicht vergessen werden, wenn man ein Modell genau analysieren will.

Eichgruppe $SO(10)$

Wie versprochen, basiert dieses Modell auf $(3)^5$. Es kommt hier nur ein einfacher Strom, nämlich

$$\Upsilon = (0\ 5\ 1)(0\ 0\ 0)^4(1)(0) \tag{3.34}$$

der Dimension $(h,q) = (1,0)$ hinzu. Der Einfachheit halber werden Φ und das "$\otimes$" ab jetzt nicht mehr mitgeschrieben, es steht einfach $(l\ m\ s)$ bei den minimalen, (m) bei den $U(1)_2$–Faktoren und (d) für eine der vier Darstellungen bei den Kac/Moody–Algebren da (in dieser Reihenfolge, man beachte allerdings, daß es auch mehr als eine $U(1)_2$ geben kann). Dieser Strom enthält Beiträge vom NS– und R–Sektor und wird daher sowohl die Eichgruppe als auch die Supersymmetrie nicht auf die $(2,2)$–Daten erweitern. Das masselose Spektrum dieses Modells lautet

Darstellung	$\mathbf{1}$	$\mathbf{10}$	$\mathbf{16}$	$\overline{\mathbf{16}}$
Spin 0	350	74	80	0
Spin 1	7	0	0	0

Tabelle 12: $SO(10)$–*Modell.*

Eine genauere Analyse wird ergeben, daß die Eichgruppe um einen Faktor $SU(2) \times U(1)^4$ erweitert ist, vgl. das Kapitel zum Parameterraum dieses Modells. Schaut man sich die 80 Generationen an, so sieht man, daß

60 der normalen $N = 2$ Zustände alle Projektionen überleben. Die anderen 20 jedoch enthalten nichttriviale Beiträge der $U(1)_2$ und mischen die verschiedenen Sektoren.
Die Anzahlen der Zustände in **10**, **16** und $\overline{\mathbf{16}}$ stimmen mit einem Modell überein, das in [45] diskutiert wird. Dort handelt es sich um eine Konstruktion mit stabilen Vektorbündeln über einem vollständigen Polynomschnitt im gewichteten projektiven Raum $\mathbb{P}_{(1,1,1,1,2,2)}$. So gesehen, würde das Modell nichts mehr mit der Quintik zu tun haben. Eine eingehende Analyse in den nächsten Kapiteln wird zeigen, daß dem tatsächlich so ist. Dieses exakt lösbare Modell ist relativ einfach, so daß es sich für genauere Untersuchungen geradezu aufdrängt.
Wie bei den Gepnermodellen gibt es eine isomorphe SKFT, in der Generationen und Antigenerationen vertauscht sind. Dieses Spiegelmodell kann durch die Hinzunahme der folgenden einfachen Ströme erhalten werden:

$$\begin{aligned}
J_1^S &= (0\ \ {-2}\ 0)(0\ 0\ 0)^4(0)(0) \\
J_2^S &= (0\ 0\ 0)(0\ \ {-2}\ 0)(0\ 0\ 0)^3(0)(0) \\
&\ \ \vdots \\
J_5^S &= (0\ 0\ 0)^4(0\ \ {-2}\ 0)(0)(0) \\
J_6^S &= (0\ 0\ 0)^5(2)(0) \\
J_7^S &= (0\ 0\ 0)^5(0)(v).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Die Verallgemeinerung zu anderen Modellen sollte auf der Hand liegen. Somit erfüllt die hier konstruierte Klasse von Modellen die Spiegelsymmetrie, was für allgemeine $\sigma-$Modelle nicht der Fall ist. Man darf diese Eigenschaft aber nicht überbewerten, das einfache Umdrehen eines Ladungsvorzeichens liefert zwar das gespiegelte Spektrum, aber noch lange nicht die Spiegelmannigfaltigkeit zur CYM.

Eichgruppe E_6

Obwohl die Konstruktion die Eichgruppe $SO(10)$ liefert, kann es zu zufälligen Erweiterungen kommen. Fügt man gar keinen Strom Υ hinzu, so erhält man ja das Gepnermodell. Wählt man jedoch

$$\Upsilon = (0\ 2\ 2)(0\ 1\ 1)(0\ 0\ 0)^3(1)(s), \tag{3.36}$$

so wird die linke $N = 2$ Supersymmetrie wegen des Sektormischens zerstört, die Eichgruppe E_6 aber nicht gebrochen. Das kann am masselosen $SO(10)-$Spektrum abgelesen werden:

Darstellung	**1**	**10**	**16**	$\overline{\mathbf{16}}$
Spin 0	432	102	101	1
Spin 1	5	0	1	1

Tabelle 13: *Gepnerähnliches Modell.*

Somit liegt dieses Modell in den $(0,2)-$Deformationen der Quintik und ist möglicherweise über marginale Deformationen mittels linkslaufender E_6-Singlets mit dem (kleineren) Raum der $(2,2)-$Deformationen verbunden. Daher sollte es sich lohnen, auch $(0,2)-$Deformationen der Quintik zu untersuchen.
Es ist aber nicht so, daß bei der Eichgruppe E_6 automatisch das Gepnerspektrum herauskommt. Wählt man nämlich den nur leicht anderen Strom

$$\Upsilon = (0\ 2\ 2)(0\ 1\ 1)(0\ 0\ 0)^3(1)(c), \tag{3.37}$$

so erhält man folgendes völlig andere Spektrum:

Darstellung	**1**	**10**	**16**	$\overline{\mathbf{16}}$
Spin 0	368	62	41	21
Spin 1	5	0	1	1

Tabelle 14: *E_6–Modell.*

$N_{\mathrm{gen}} = 20$ taucht auch in der Liste der Distler/Kachru–Spektren auf.

Eichgruppe $SO(12)$

Das Gepnermodell $(1)^3(2)(6)^2$ enthält einen $c = 3$ Unterfaktor und beschreibt deshalb eine Kompaktifizierung auf $K_3 \times T^2$, was zu einer Eichgruppe E_7 und erweiterter $N = 2$ Supersymmetrie führt. In [30] wurde auf die Dualität solcher Modelle mit mindestens $(0,4)$–Weltflächen–Supersymmetrie zu Kompaktifizierungen vom Typ II auf CYMen hingewiesen. Wählt man den einfachen Strom

$$\Upsilon = (0\ 3\ 1)(0\ 0\ 0)^2(2\ 0\ 0)(0\ 0\ 0)^2(1)(0) \tag{3.38}$$

für das Modell $(1)^3(2)(6)^2$, so ergibt sich das Spektrum

Darstellung	**1**	**10**	**16**	$\overline{\mathbf{16}}$
Spin 0	220	34	12	12
Spin 1	14	2	0	0

Tabelle 15: *$N = 2$ und $SO(12)$.*

Dieses Modell hat mithin $N = 2$ Raumzeit–Supersymmetrie, was zumindest $(0,4)$–Weltflächen–Supersymmetrie erfordert. Zusätzlich erweitern die beiden Vektorteilchen in **10** die Eichgruppe zu $SO(12)$. Somit gibt es drei Hypermultiplets in den beiden Spinordarstellungen **32** und $\overline{\mathbf{32}}$ von $SO(12)$. Die 14 übrigen Singlets werden die Eichgruppe weiter erweitern. Nun soll aber auf realistischere Eichgruppen mit kleinerem Rang eingegangen werden, d.h. man startet mit der generischen Eichgruppe $SU(5)$ oder E_3.

Eichgruppe $SU(6)$

Wie im Falle generischer Eichgruppe $SO(10)$ kann es auch beim Start mit $SU(5)$ zu Erweiterungen kommen, vor allem zu $SO(10)$ und E_6. Es ist aber auch $SU(6)$ möglich: mit

$$\Upsilon = (0\ 5\ 1)^2(0\ 0\ 0)^3(1)^2(0) \tag{3.39}$$

bei $(3)^5$ ergibt sich folgendes masselose $SU(5)$–Spektrum:

Darstellung	**1**	**10**	$\overline{\mathbf{10}}$	**5**	$\overline{\mathbf{5}}$
Spin 0	348	54	4	69	119
Spin 1	8	0	0	1	1

Tabelle 16: *$SU(6)$–Modell.*

Daran sieht man, daß es zusätzliche Gluonen in der Darstellung **5** und $\overline{\mathbf{5}}$ der $SU(5)$ gibt, die wegen

$$\mathbf{35} = \mathbf{24} + \mathbf{5} + \overline{\mathbf{5}} + \mathbf{1} \tag{3.40}$$

zu der Eichgruppe $SU(6)$ führen.

Eichgruppe $SU(5)$

Startet man mit zwei Strömen der Form

$$\begin{aligned}\Upsilon_1 &= (0\ 5\ 1)(0\ 0\ 0)^4(1)(0)(0) \\ \Upsilon_2 &= (0\ 5\ 1)^2(0\ 0\ 0)^3(1)^2(0),\end{aligned} \tag{3.41}$$

so ergibt sich das $SU(5)$–Spektrum

Darstellung	**1**	**10**	$\overline{\mathbf{10}}$	**5**	$\overline{\mathbf{5}}$
Spin 0	338	64	0	55	119
Spin 1	10	0	0	0	0

Tabelle 17: *$SU(5)$–Modell.*

Die Bedingung der Eichanomaliekürzung [93] für $SU(5)$ erzwingt, daß die Nettoanzahl der chiralen Fermionen in den Darstellungen $\mathbf{10}/\overline{\mathbf{10}}$ und $\mathbf{5}/\overline{\mathbf{5}}$ jeweils dieselbe ist, was hier erfüllt ist und eine Nettozahl von $N_{\text{gen}} = 64$ ergibt. Diese ist aber nicht durch fünf teilbar, wie die Modelle, die man sich nach Distler/Kachru erzeugen kann. Es gibt jedoch eins mit $N_{\text{gen}} = 320$, womit dieses Modell also eine Faktortheorie sein könnte. Es ist ein systembedingtes Problem der hier verwendeten Konstruktion, daß man keine Kontrolle über die geometrische Interpretation hat. Das Modell könnte aber auch zu einem neuen Vektorbündel gehören. Es wird sich zeigen, daß dieses Modell mit dem $(80, 0)$ verwandt ist, was sich schon an den einfachen Strömen ablesen läßt.
Es muß aber nicht die Anzahl der Teilchen in $\overline{\mathbf{10}}$ immer unbedingt Null sein. Dazu betrachtet man beispielsweise das Tensorprodukt $(1)(4)^4$, was sich in der Vergangenheit als ziemlich ergiebig in Sachen Spektrenvielfalt erwiesen hat [37]. Wählt man

$$\begin{aligned}\Upsilon_1 &= (0\ 3\ 1)(0\ 0\ 0)^4(-1)(0)(v) \\ \Upsilon_2 &= (0\ 0\ 0)(0\ \ -3\ 1)(0\ 0\ 0)^3(1)^2(0),\end{aligned} \tag{3.42}$$

so liefert dies das folgende Spektrum mit der Eichgruppe $SU(5)$:

Darstellung	**1**	**10**	$\overline{\mathbf{10}}$	**5**	$\overline{\mathbf{5}}$
Spin 0	386	51	3	66	114
Spin 1	10	0	0	0	0

Tabelle 18: *Nichtverschwindende Generationenzahl in* $\overline{\mathbf{10}}$.

Startet man schließlich mit noch kleineren Eichgruppen, so wird die Menge der möglichen Erweiterungen immer größer. Für Modell mit generischer Eichgruppe $SU(3) \times SU(2)$ findet man beispielsweise Erweiterungen zu $SU(6) \times SU(2)$ und $SU(4) \times SU(2)$.

Eichgruppe $SU(6) \times SU(2)$

$(3)^5$ und einfacher Strom

$$\Upsilon = (0\ 5\ 1)^3(0\ 0\ 0)^2(1)^3(0) \tag{3.43}$$

ergeben

Darstellung	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}$	$\overline{\mathbf{3}}$	$\mathbf{6}$	$\overline{\mathbf{6}}$
Spin 0	442	170	81	181	50	0
Spin 1	13	0	3	3	0	0

Tabelle 19: *$SU(6) \times SU(2)-$Modell.*

Wie man aus der Eichanomaliekürzung weiß, ist hier für den $SU(3)-$Faktor $\left(N_{\mathbf{3}} - N_{\overline{\mathbf{3}}}\right)$ das Doppelte von $\left(N_{\overline{\mathbf{6}}} - N_{\mathbf{6}}\right)$.

Eichgruppe $SU(4) \times SU(2)$

Die Eichgruppe wird umso kleiner, je mehr einfache Ströme man hinzunimmt, z.B. führt

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &= (0\ 5\ 1)^2(0\ 0\ 0)^3(1)^2(0)(0) \\ \Upsilon_2 &= (0\ 5\ 1)^3(0\ 0\ 0)^2(1)^3(0) \end{aligned} \tag{3.44}$$

zu dem Spektrum

Darstellung	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}$	$\overline{\mathbf{3}}$	$\mathbf{6}$	$\overline{\mathbf{6}}$
Spin 0	386	140	68	148	42	2
Spin 1	11	0	1	1	0	0

Tabelle 20: *$SU(4) \times SU(2)-$Modell.*

Um wirklich die Eichgruppe E_3 zu erhalten, werden drei einfache Ströme benötigt.

Eichgruppe $SU(3) \times SU(2) \times G$

Wählt man

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &= (0\ 5\ 1)(0\ 0\ 0)^4(1)(0)^2(0) \\ \Upsilon_2 &= (0\ 5\ 1)^2(0\ 0\ 0)^3(1)^2(0)(0) \\ \Upsilon_3 &= (0\ 5\ 1)^3(0\ 0\ 0)^2(1)^3(0), \end{aligned} \tag{3.45}$$

so ergibt sich wieder ein Modell ohne Antigenerationen:

Darstellung	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{3}$	$\overline{\mathbf{3}}$	$\mathbf{6}$	$\overline{\mathbf{6}}$
Spin 0	370	134	54	154	50	0
Spin 1	13	0	0	0	0	0

Tabelle 21: *$SU(3) \times SU(2)-$Modell.*

Bei diesem Modell lohnt es sich aus phänomenologischen Gründen, den zusätzlichen Faktor G zu ermitteln. Da 6 der 13 Singlets mit Spin 1 nicht vom $(2,2)-$Typ sind, kommutieren sie nicht mit den anderen sieben, die eine $U(1)^7$ bilden. Schaut man genauer hin, so bilden diese sechs mit zwei der $U(1)$en eine $SU(3)$. Somit lautet die komplette Eichgruppe $SU(3) \times SU(2) \times U(1)^5 \times SU(3)$. Ferner gibt es neben den leptonischen Partnern der 50 Quarks noch 84 Higgsteilchen in der $(0,2)-$Darstellung von E_3.

Nun seien noch Beispiele angeführt, in denen sich der Rang um Werte von zwei erhöht. Anders als bei den $(2,2)-$Modellen muß hier eine Erweiterung der Eichgruppe auf E_7 nicht mit einer Erhöhung der Supersymmetrie einhergehen.

Eichgruppe E_7

Startet man mit dem Tensorprodukt $(1)(4)^4$ und dem einen einfachen Strom

$$\Upsilon_1 = (0\ 3\ 1)(0\ 0\ 0)^4(1)(s), \tag{3.46}$$

so erhält man wegen der Zerlegung der adjungierten Darstellung von E_7 nach $SO(10)$

$$\mathbf{133} = \mathbf{45} + \mathbf{10} + \mathbf{10} + \mathbf{16} + \mathbf{16} + \overline{\mathbf{16}} + \overline{\mathbf{16}} + \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} \tag{3.47}$$

ein masseloses Spektrum mit 36 Generationen in der Darstellung **56** von E_7:

Darstellung	**1**	**10**	**16**	$\overline{\mathbf{16}}$
Spin 0	416	72	36	36
Spin 1	7	2	2	2

Tabelle 22: *E_7–Modell.*

Es sind auch noch höhere A_n möglich:

Eichgruppe $SU(7)$

Mit $(1)(4)^4$ und

$$\begin{aligned}\Upsilon_1 &= (0\ 3\ 1)(0\ 0\ 0)^4(1)(0)(s)\\ \Upsilon_2 &= (0\ 0\ 0)(0\ {-3}\ 1)(0\ 0\ 0)^3(1)^2(0)\end{aligned} \tag{3.48}$$

ergibt sich wegen

$$\mathbf{49} = \mathbf{24} + \mathbf{5} + \mathbf{5} + \overline{\mathbf{5}} + \overline{\mathbf{5}} + \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} \tag{3.49}$$

die Erweiterung der Eichgruppe von $SU(5)$ auf $SU(7)$ und das masselose Spektrum

Darstellung	**1**	**10**	$\overline{\mathbf{10}}$	**5**	$\overline{\mathbf{5}}$
Spin 0	463	49	7	90	132
Spin 1	15	0	0	2	2

Tabelle 23: *$SU(7)$–Modell.*

Auch diese Nettozahl läßt sich in den Distler/Kachru–Daten wiederfinden. Zum Schluß nun noch ein phänomenologisch brauchbares Modell mit vier Nettogenerationen und Eichgruppe $SO(10)$. Es stammt von $(3)^5$ mit den einfachen Strömen

$$\begin{aligned}\Upsilon_1 &= (0\ 3\ 1)(0\ 4\ 0)^2(0\ 2\ 2)(0\ 0\ 0)(1)(c)\\ \Upsilon_2 &= (0\ 0\ 0)(0\ 2\ 2)(0\ 0\ 0)^2(0\ 1\ 1)(1)(v)\end{aligned} \tag{3.50}$$

ab und hat das masselose Spektrum

Darstellung	**1**	**10**	**16**	$\overline{\mathbf{16}}$
Spin 0	254	32	18	14
Spin 1	7	0	0	0

Tabelle 24: *Vier Generationen.*

Es könnte sich hier um eine Faktortheorie eines Distler/Kachru–Modells handeln.

3.5. Bemerkungen zu speziellen Konstruktionen

An dieser Stelle sei noch kurz auf zwei Nebenpfade der oben eingeführten Konstruktion eingegangen.

Dreigenerationenmodelle

Bei jeder Konstruktion exakt lösbarer Stringmodelle stellt sich naturgemäß die Frage nach Dreigenerationenmodellen, insbesondere, da hier die Eichgruppe nicht E_6, hier siehe man etwa in [19], sondern kleiner ist. Im LG–Formalismus wurde dies im $(0,2)-$Kontext schon in [94] durchgeführt, im Kapitel über die $(0,2)-$Spiegelsymmetrie findet man auch eine Liste mit Dreigenerationenmodellen, die aus bestimmten LG–Theorien entstehen.

Wie schon im $(2,2)-$Fall zeigte sich, daß das Gepnermodell $(1)(16)^3$, wobei in allen drei Faktoren mit $k=16$ die E_7-Invariante gewählt ist, der einzig mögliche Ausgangspunkt zur Suche ist. Das liegt an einer geheimnisvollen Quantisierung der Nettogenerationenzahl, und dieses Gepnermodell hat als einziges eine ungerade, die dazu noch durch drei teilbar ist, nämlich das Spektrum $(N_{27}, N_{\overline{27}}) = (35,8)$. Die Rechner wurden massiv damit beschäftigt, mit verschiedenen Eichgruppen und Anzahlen einfacher Ströme. Leider gab es nur bei $SO(10)$ Erfolge. Es wurden die Spektren $(N_{16}, N_{\overline{16}}) = (16,13), (14,11), (13,10), (12,9), (10,7), (9,6)$ einschl. der gespiegelten sowie $(8,11)$ gefunden. Die weiteren Details incl. der Anzahl der erforderlichen einfachen Ströme kann man der ersten Tabelle des Anhangs entnehmen, dabei können die N_{10} und N_1 für festes $(N_{16}, N_{\overline{16}})$ durchaus variieren. Bemerkenswert ist, daß die Eichgruppe nirgends zusätzlich erweitert ist. Leider erwiesen sich diese Modelle als zu kompliziert (die meisten benötigten drei oder mehr einfache Ströme), daß auf eine weitere Untersuchung, insbesondere die Berechnung von Yukawa–Kopplungen verzichtet wurde. Bei dem Modell mit $(9,6)$ bestand die Hoffnung, daß es sich um ein $SO(10)-$Analogon zum Schimmrigk/Gepner–Modell [19] handelt, aber auch hier erwies sich die Berechnung aller Yukawakopplungen als zu komplex.

Die $(0,2)$ – Nebenklassenkonstruktion von Berglund u.a.

Dieses Papier [95] erschien nach [47] und vor [53] und präsentierte Modelle, die manifest heterotisch waren ("$(0,2)-$minimale Modelle"), so wurde links die nichtsupersymmetrische $SU(2)_k-$Theorie und rechts das k-te minimale $N=2$ Modell verwendet und in einem Gepnermodell die entsprechende $(2,2)-$ durch eine $(0,2)-$Theorie ersetzt. Damit gelang es den Autoren, für bestimmte k modular invariante Zustandssummen zu finden, allerdings nur für $k = 2(q^2-1)$ mit $q \in 2\mathbb{Z}$, was für $c_{\text{ges}} = 9$ nicht viele Möglichkeiten offenläßt, aber immerhin z.B. $(6)^4$. Die Konstruktion funktioniert, weil $SU(2)_k$ auch so etwas wie einen spektralen Fluß besitzt.

Die Spektren konnten bei $(6)^4$ mit dem einfachen Strom $J = (0\ 4\ 2)$, jeweils einer pro Faktor für eine Ersetzung $(2,2) \to (0,2)$, reproduziert werden, also als Faktortheorie eines Gepnermodells, was bedeutet, daß das Modell in Wirklichkeit die Symmetrie $(2,2)$ hat. Ferner läßt sich der Vakuumcharakter von $SU(2)_6$ als Bahn des supersymmetrischen Vakuums $(0\ 0\ 0)$ unter J schreiben. Man kann sogar zeigen, daß dieses minimale Modell (6) eine $SU(2)_6-$Unteralgebra (diese enthält natürlich J und sein ladungskonjugiertes) hat und umgekehrt $SU(2)_6$ eine $N=2$ Struktur, also symbolisch $(6) \cong SU(2)_6$.

Diese naheliegende Konstruktion, für die allerdings immer noch $c = \overline{c}$ war, beschrieb also in Wirklichkeit versteckte $(2,2)-$Modelle und funktionierte genau da, wo $(k) \cong SU(2)_k$.

3.6. Zusammenfassung

Es wurde die Gepnerkonstruktion auf den wirklich heterotischen $(0,2)-$Fall mittels der Methode der einfachen Ströme erweitert. Die obigen Beispiele zeigen, wie reichhaltig diese Klasse von Modellen ist. Es gilt nun, wenigstens einige Modelle mit anderen Konstruktionen in Verbindung zu bringen. Bei dem Modell mit $(80,0)$ gab es ja schon einen Kandidaten. Als besonders fruchtbar werden sich auch dessen Verwandte wie das $(64,0)$ und das $(50,0)$ erweisen.

4. Das (0,2)–Dreigespann

Anhand dreier Beispiele wird die Verbindung von SKFT, CYM und LG aufgezeigt. Am Anfang soll das $(80, 0)$, das erste Beispiel aus dem vorigen Kapitel stehen, das eine Art Prototyp werden wird.

4.1. Das (80,0)–SO(10)–(0,2)–Modell

Dieses Modell entstand aus dem Gepnermodell $(3)^5$ mit dem zusätzlichen einfachen Strom

$$\Upsilon = (0\ 5\ 1)(0\ 0\ 0)^4(1)(0). \tag{4.1}$$

und zeigt das masselose Spektrum

Darstellung	**1**	**10**	**16**	$\overline{\mathbf{16}}$
Spin 0	350	74	80	0
Spin 1	7	0	0	0

Tabelle 25: *Masseloses Spektrum des* $(80, 0)-$*Modells.*

Für die Analyse der masselosen Zustände muß man erst ein gemeinsames Bild für die Zustände finden, zunächst für die Generationen. Betrachtet man nur deren internen SKFT–Anteil, so führt die **16** der $SO(10)$ im (–1)–Geistbild als Raumzeit–Skalar zu einem Vertexoperator der Form (für Impuls Null)

$$V^a_{-1} = e^{-\rho(\overline{z})}\mathcal{O}_{16}(z,\overline{z})\lambda^a, \tag{4.2}$$

wobei der interne Operator $\mathcal{O}_{16}(z,\overline{z})$ die Ladung $(q,\overline{q}) = (-1,-1)$ trägt und $\rho(\overline{z})$ der bosonisierte Supersymmetriegeist ist (dann ist $\overline{h}\left(e^{-\rho(\overline{z})}\right) = \frac{1}{2}$), wohingegen die Fermionen λ^a die $SO(10)-$Stromalgebra erzeugen. Dieser Operator $\mathcal{O}_{16}$ hat $h = \overline{h} = \frac{1}{2}$ und definiert deshalb ein chirales primäres Feld. Analog zu den bei den minimalen Modellen schon eingeführten Abkürzungen sollen die entsprechenden Felder, die zu einer $U(1)_2$ oder der Gruppe $SO(16-2r)$ gehören, als $[\frac{m}{\overline{m}}]$ bzw. $[\frac{d}{\overline{d}}]$ geschrieben werden, wobei $d, \overline{d} \in \{0, v, s, c\}$. Mit den weiteren Konventionen

$$g_0 = \left[2\ \begin{matrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{matrix}\right], \quad g_1 = \left[2\ \begin{matrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{matrix}\right]; \quad u_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

für minimale Zustände bzw. den $U(1)-$Anteil nehmen die Generationen in diesem Bild folgende Form an:

Typ	Feld	Vielfachheit
I	$\left[0\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right]\left[0\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right]\left[0\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right]\left[2\ \begin{matrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{matrix}\right]\left[3\ \begin{matrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{matrix}\right]\ u_0 \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}$	12
II	$\left[0\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right]\left[0\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right]\left[1\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right]\left[1\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right]\left[3\ \begin{matrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{matrix}\right]\ u_0 \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}$	12
III	$\left[0\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right]\left[0\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right]\left[1\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right]\left[2\ \begin{matrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{matrix}\right]\left[2\ \begin{matrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{matrix}\right]\ u_0 \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}$	12
IV	$\left[0\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right]\left[1\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right]\left[1\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right]\left[1\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right]\left[2\ \begin{matrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{matrix}\right]\ u_0 \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}$	4
V$_i$	$g_i \left[0\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right]\left[0\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right]\left[0\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right]\left[3\ \begin{matrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{matrix}\right]\ u_i \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}$	8
VI$_i$	$g_i \left[0\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right]\left[0\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right]\left[1\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right]\left[2\ \begin{matrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{matrix}\right]\ u_i \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}$	24
VII$_i$	$g_i \left[0\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right]\left[1\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right]\left[1\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right]\left[1\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right]\ u_i \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}$	8

Tabelle 26: *Generationen des* $(80, 0) - SO(10)-$*Modells.*

Die Vektorteilchen **10** der $SO(10)$ kann man durch Abzählen des Singletteils gemäß der Zerlegung

$$\mathbf{10} = \mathbf{1}_{-2} \oplus \mathbf{8}^s_0 \oplus \mathbf{1}_2 \tag{4.4}$$

nach der maximalen Untergruppe $SO(8) \times U(1) \subset SO(10)$ erhalten. Mit den Abkürzungen

$$v_0 = \left[2 \begin{matrix} -2 & 0 \\ -4 & -2 \end{matrix}\right], \quad v_1 = \left[2 \begin{matrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{matrix}\right] \tag{4.5}$$

für die Felder im ersten minimalen Faktor (u_i^+ ist das ladungskonjugierte von u_i) kann man die Vektorteilchen wie folgt schreiben:

Typ	Feld	Vielfachheit
A	$\left[0 \begin{matrix} 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{matrix}\right] \left[1 \begin{matrix} -1 & 0 \\ -3 & -2 \end{matrix}\right] \left[3 \begin{matrix} -3 & 0 \\ -5 & -2 \end{matrix}\right] \left[3 \begin{matrix} -3 & 0 \\ -5 & -2 \end{matrix}\right] \left[3 \begin{matrix} -3 & 0 \\ -5 & -2 \end{matrix}\right] \; u_0 \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$	4
B	$\left[0 \begin{matrix} 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{matrix}\right] \left[2 \begin{matrix} -2 & 0 \\ -4 & -2 \end{matrix}\right] \left[2 \begin{matrix} -2 & 0 \\ -4 & -2 \end{matrix}\right] \left[3 \begin{matrix} -3 & 0 \\ -5 & -2 \end{matrix}\right] \left[3 \begin{matrix} -3 & 0 \\ -5 & -2 \end{matrix}\right] \; u_0 \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$	6
C_i	$v_i \left[0 \begin{matrix} 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{matrix}\right] \left[2 \begin{matrix} -2 & 0 \\ -4 & -2 \end{matrix}\right] \left[3 \begin{matrix} -3 & 0 \\ -5 & -2 \end{matrix}\right] \left[3 \begin{matrix} -3 & 0 \\ -5 & -2 \end{matrix}\right] \; u_i^+ \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$	24
D_i	$v_i \left[1 \begin{matrix} -1 & 0 \\ -3 & -2 \end{matrix}\right] \left[1 \begin{matrix} -1 & 0 \\ -3 & -2 \end{matrix}\right] \left[3 \begin{matrix} -3 & 0 \\ -5 & -2 \end{matrix}\right] \left[3 \begin{matrix} -3 & 0 \\ -5 & -2 \end{matrix}\right] \; u_i^+ \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$	12
E_i	$v_i \left[1 \begin{matrix} -1 & 0 \\ -3 & -2 \end{matrix}\right] \left[2 \begin{matrix} -2 & 0 \\ -4 & -2 \end{matrix}\right] \left[2 \begin{matrix} -2 & 0 \\ -4 & -2 \end{matrix}\right] \left[3 \begin{matrix} -3 & 0 \\ -5 & -2 \end{matrix}\right] \; u_i^+ \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$	24
F_i	$v_i \left[2 \begin{matrix} -2 & 0 \\ -4 & -2 \end{matrix}\right] \left[2 \begin{matrix} -2 & 0 \\ -4 & -2 \end{matrix}\right] \left[2 \begin{matrix} -2 & 0 \\ -4 & -2 \end{matrix}\right] \left[2 \begin{matrix} -2 & 0 \\ -4 & -2 \end{matrix}\right] \; u_i^+ \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$	2
G_1	$\left[2 \begin{matrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{matrix}\right] \left[2 \begin{matrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{matrix}\right] \left[2 \begin{matrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{matrix}\right] \left[2 \begin{matrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{matrix}\right] \left[2 \begin{matrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{matrix}\right] \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$	1
G_2	$\left[2 \begin{matrix} -1 & 1 \\ -4 & -2 \end{matrix}\right] \left[2 \begin{matrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{matrix}\right] \left[2 \begin{matrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{matrix}\right] \left[2 \begin{matrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{matrix}\right] \left[2 \begin{matrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{matrix}\right] \; u_1^+ \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$	1

Tabelle 27: *Vektorteilchen des* $(80, 0) - SO(10)-$*Modells.*

Hat man nun die explizite Form der Zustände, so kann dieses Modell weiter untersucht werden, indem die Dreipunkt–Yukawakopplungen berechnet werden.

Die exakten Yukawakopplungen

Es soll die Yukawakopplung

$$\langle \mathbf{10} \cdot \mathbf{16} \cdot \mathbf{16} \rangle \tag{4.6}$$

berechnet werden. Dazu müssen die Vertexoperatoren und ihr zugehöriges Bild angegeben werden. Yukawakopplungen werden auf der Sphäre, d.h. in niedrigster Ordnung der String–Schleifen–Kopplung, ausgerechnet und entsprechen in guter Näherung den Dreipunktkopplungen der effektiven Feldtheorie. Um die nötige Geistzahl (-2) der Korrelationsfunktionen auf der Baumgraphebene einer Stringtheorie [96] zu erhalten, betrachtet man beispielsweise den Ausdruck

$$\langle V^{\mathbf{10}}_{-1} \, V^{\mathbf{16}}_{-\frac{1}{2}} \, V^{\mathbf{16}}_{-\frac{1}{2}} \rangle. \tag{4.7}$$

Mit (4.4) und

$$\mathbf{16} = \mathbf{8}^v_{-1} \oplus \mathbf{8}^c_1 \tag{4.8}$$

zerlegen sich ebenfalls die Kopplungen $\langle \mathbf{10}\cdot\mathbf{16}\cdot\mathbf{16}\rangle$ gemäß

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{-2} \\ \mathbf{8}^s_0 \\ \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{8}^v_{-1} \\ \mathbf{8}^c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{8}^v_{-1} \\ \mathbf{8}^c_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \mathbf{1}_2 \cdot \mathbf{8}^v_{-1} \cdot \mathbf{8}^v_{-1}\rangle = \langle \mathbf{8}^s_0 \cdot \mathbf{8}^c_1 \cdot \mathbf{8}^v_{-1}\rangle. \tag{4.9}$$

Die Summe aller rechten Ladungen muß verschwinden, damit die Kopplung eine Chance hat, nicht zu verschwinden. Dies ist aber für die Felder **10** und **16** in den obigen Tabellen nicht der Fall, weshalb man den Operator $\overline{\Sigma}_{\overline{c}=9}$ des spektralen Flusses aus dem Gepnermodell vorschalten muß:

$$V^a_{\frac{1}{2}} = \overline{\Sigma}_{\overline{c}=9}\; V^a_{-1}, \tag{4.10}$$

womit sich die Kopplungen dann wie folgt schreiben lassen:

$$\langle V^{\mathbf{10}}_{-1}\; V^{\mathbf{16}}_{-\frac{1}{2}}\; V^{\mathbf{16}}_{-\frac{1}{2}}\rangle = \langle \overline{\Sigma}^2 (\mathbf{1}_2)_{-1}\; (\mathbf{8}^v_{-1})_{-1}\; (\mathbf{8}^v_{-1})_{-1}\rangle. \tag{4.11}$$

Die stärkste Auswahlregel, die eine Korrelationsfunktion erfüllen muß, ist Ladungserhaltung, wonach sich die $U(1)-$Ladungen in jedem Faktor wegheben müssen. Nach (4.10) enthält jede Kopplung des Typs (4.7) ferner automatisch den Operator $\overline{\Sigma}^2$. Nun werden die Vektoren durchgegangen: startet man mit dem Vektor A, so muß man das Paar von Generationen suchen, was paßt. Die Ladungsberechnung von $\left(\overline{\Sigma}^2\; A\right)$ ergibt

$$\begin{pmatrix} q \\ \overline{q} \end{pmatrix} (\overline{\Sigma}^2\; \mathrm{A}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

also werden Paare von Generationen benötigt, die zum negativen Ladungsvektor führen. Das kann nur von den Paaren (I,II), (II,III) und (III,IV) erfüllt werden, mithin haben nur die folgenden Kopplungen eine Chance, nicht zu verschwinden:

$$\langle \mathrm{A}\cdot\mathrm{I}\cdot\mathrm{II}\rangle, \quad \langle \mathrm{A}\cdot\mathrm{II}\cdot\mathrm{III}\rangle, \quad \langle \mathrm{A}\cdot\mathrm{III}\cdot\mathrm{IV}\rangle, \tag{4.13}$$

und zwar aus dem einfachen Grunde, daß I–IV die einzigen Zustände sind, die im ersten Faktor (das ist der, der durch den einfachen Strom modifiziert wird) Ladung Null tragen. Fährt man so fort, so erhält man die Kandidaten für nichtverschwindende Kopplungen.

Meist ist es so, daß die Ladungserhaltung das Nichtverschwinden schon garantiert, aber für den exakten Wert muß eine Rechnung her. Dazu ist es nützlich, sich daran zu erinnern, daß ein primäres Feld in einer $N=2$ minimalen superkonformen Theorie vom Grade k nichts anderes als ein Produkt eines parafermionischen Feldes mit einem Skalarfeld $\varphi(z)$ ist:

$$\Phi^{l,m,s}_{\overline{l},\overline{m},\overline{s}}(z,\overline{z}) = \phi^{l,m-s}_{\overline{l},\overline{m}-\overline{s}}(z,\overline{z})e^{i(\alpha_{m,s}\varphi(z)+\alpha_{\overline{m},\overline{s}}\varphi'(\overline{z}))}, \tag{4.14}$$

wobei

$$\alpha_{m,s} = \frac{-m+\frac{s}{2}(k+2)}{\sqrt{k(k+2)}}. \tag{4.15}$$

Die parafermionischen Felder $\phi^{l,m}$ wiederum lassen sich durch $SU(2)-$primäre Felder und ein weiteres Skalarfeld $\tilde{\varphi}$ ausdrücken:

$$\phi^{l,m} = G^{\frac{l}{2},\frac{m}{2}}\; e^{-\frac{m}{2\sqrt{2}}\tilde{\varphi}}. \tag{4.16}$$

Das einzige, was jetzt noch unbekannt ist, sind die Dreipunktfunktionen der $SU(2)$–Theorie. Diese haben Zamolodchikov und Fateev [97] ausgerechnet:

$$\langle G^{j_1,m_1}_{j_1,\overline{m}_1} G^{j_1,m_1}_{j_1,\overline{m}_1} G^{j_1,m_1}_{j_1,\overline{m}_1} \rangle_{SU(2)} = \frac{\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ \overline{m}_1 & \overline{m}_2 & \overline{m}_3 \end{pmatrix} \rho_k(j_1,j_2,j_3)}{f(z_{12}\overline{z}_{12}, z_{13}\overline{z}_{13}, z_{23}\overline{z}_{23})}, \tag{4.17}$$

wobei $\left(\begin{smallmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{smallmatrix}\right)$ die wignerschen $3j$–Symbole abkürzt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} &= \sqrt{\frac{(j_1+j_2-j_3)!(j_1-j_2+j_3)!(-j_1+j_2+j_3)!}{(j_1+j_2+j_3+1)!} \prod_{i=1}^{3} (j_i+m_i)\ (j_i-m_i)!} \\ &\sum_{z\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^{z+j_1-j_2-m_3}}{z!(j_1+j_2-j_3-z)!(j_1-m_1-z)!(j_2+m_2-z)!(j_3-j_2+m_1+z)!(j_3-j_1-m_2+z)!}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Ferner ist

$$\rho_k(j_1,j_2,j_3) = F_k(j_1,j_2,j_3) \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{k+3}{k+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{k+2}\right)} \prod_{r=1}^{3} (2j_r+1) \frac{\Gamma\left(1-\frac{2j_r+1}{k+2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{2j_r+1}{k+2}\right)}}, \tag{4.19}$$

wobei

$$F_k(j_1,j_2,j_3) = \frac{\pi_k(j_1+j_2+j_1+1)\ \pi_k(j_1+j_2-j_3)\ \pi_k(j_2+j_3-j_1)\pi_k(j_3+j_1-j_2)}{\pi_k(2j_1)\ \pi_k(2j_2)\ \pi_k(2j_3)} \tag{4.20}$$

mit

$$\pi_k(j) = \prod_{r=1}^{j} \frac{\Gamma\left(1+\frac{r}{k+2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{r}{k+2}\right)}. \tag{4.21}$$

Setzt man all diese Ausdrücke ein, so lassen sich die Kopplungen für die minimalen Theorien berechnen. Die relevanten Kopplungen für die Theorie mit $k=3$ lauten

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{bmatrix} 1 & {-1} & 0 \\ & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \qquad &&\left\langle \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \\ &\left\langle \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \qquad &&\left\langle \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \\ &\left\langle \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \kappa \qquad &&\left\langle \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 1, \end{aligned} \tag{4.22}$$

wobei

$$\kappa = \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{3}{5}\right)^3 \Gamma\left(\frac{1}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)^3 \Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}}. \tag{4.23}$$

Damit ergeben sich schließlich die Yukawakopplungen der vollen Theorie:

10	Generationen
A·	$\mathrm{I}\cdot\mathrm{II}=1,\ \mathrm{II}\cdot\mathrm{III}=1,\ \mathrm{III}\cdot\mathrm{IV}=1$
B·	$\mathrm{I}^2=1,\ \mathrm{I}\cdot\mathrm{III}=1,\ \mathrm{II}^2=\kappa^2, \mathrm{II}\cdot\mathrm{III}=\kappa,\ \mathrm{III}^2=1, \mathrm{III}\cdot\mathrm{IV}=\kappa,\ \mathrm{IV}^2=\kappa^2$
$\mathrm{C}_i\cdot$	$\mathrm{I}\cdot\mathrm{V}_i=1,\ \mathrm{I}\cdot\mathrm{VI}_i=1,\ \mathrm{II}\cdot\mathrm{VI}_i=\kappa,\ \mathrm{III}\cdot\mathrm{VI}_i=1,\ \mathrm{III}\cdot\mathrm{VII}_i=\kappa$
$\mathrm{D}_i\cdot$	$\mathrm{I}\cdot\mathrm{VII}_i=1,\ \mathrm{II}\cdot\mathrm{V}_i=1,\ \mathrm{II}\cdot\mathrm{VI}_i=1,\ \mathrm{III}\cdot\mathrm{VII}_i=1,\ \mathrm{IV}\cdot\mathrm{VI}_i=1$
$\mathrm{E}_i\cdot$	$\mathrm{I}\cdot\mathrm{VI}_i=1,\ \mathrm{II}\cdot\mathrm{VI}_i=\kappa,\ \mathrm{II}\cdot\mathrm{VII}_i=\kappa^2,\ \mathrm{III}\cdot\mathrm{V}_i=1,\ \mathrm{III}\cdot\mathrm{VI}_i=1,\ \mathrm{III}\cdot\mathrm{VII}_i=\kappa,\ \mathrm{IV}\cdot\mathrm{VI}_i=\kappa,\ \mathrm{IV}\cdot\mathrm{VII}_i=\kappa^2$
$\mathrm{F}_i\cdot$	$\mathrm{III}\cdot\mathrm{VI}_i=\kappa,\ \mathrm{IV}\cdot\mathrm{VII}_i=\kappa^3$

Tabelle 28: *Yukawakopplungen* $\langle \mathbf{10\ 16\ 16} \rangle$ *im* $(80,0)$–*Modell.*

4.2. Chiraler Ring und σ–Modell–Struktur des (80,0)–Modells

In diesem Abschnitt wird das lineare $\sigma-$Modell bestimmt, dessen Fixpunkt durch das exakt lösbare Modell gegeben ist, das oben ausführlich diskutiert wurde. Es ist dazu der chirale Ring der $(0,2)-$Theorie zu ermitteln, der eine Algebra von Monomen definiert, deren Struktur die Yukawakopplungen festlegt. Dies scheint auch allgemein der richtige Rahmen zu sein, das zugrundeliegende Stringmodell in der CY/LG–Sprache zu verstehen, denn CYMen sind algebraische projektive Varietäten und können als solche in einen projektiven Raum $\mathbb{P}_n$ eingebettet werden, wenn auch die Abbildung im Detail kompliziert sein mag.

Hat man die Ringstruktur abgeleitet, so erleichtert dies die weitere Arbeit erheblich, aber man kann nur eine kleine Klasse von Modellen betrachten, nämlich die CYMen, die sich als vollständige Polynomschnitte schreiben lassen. Im $(2,2)-$Fall gibt es allerdings weitere wohlbekannte Techniken, wie die torische Geometrie. Das ist aber auch noch sehr speziell und so bleibt es für die Zukunft zu hoffen, daß CYMen von der Geometrie losgelöst in algebraischer Sprache untersucht werden können.

Hier sollen aber andere Gesichtspunkte interessieren und das exakt lösbare Modell identifiziert werden. Da sein masseloses Spektrum keine Antigenerationen enthält, kann man annehmen, daß das zugehörige $\sigma-$Modell durch eine einfache geometrische Struktur beschrieben wird, wie man später sehen wird, nämlich durch ein Vektorbündel vom Rang vier über einem vollständigen Polynomschnitt der Kodimension zwei.

Der $(0,2)$ – chirale Ring des $(80,0)$ – Modells

Um den chiralen Ring abzuleiten, ist es zunächst nötig, die detaillierte Struktur der Generationen zu betrachten. Da der einfache Strom nur im ersten minimalen Faktor wirkt, ist zu erwarten, daß die chiralen primären Felder in den anderen vier Faktoren sich nicht ändern. Von der expliziten Struktur der Generationen des Typs I–IV kann man ablesen, daß das Basisfeld, was in den letzten vier Faktoren auftritt, das Feld $[1\,{}^{1}_{1}\,{}^{0}_{0}]$ ist, also dasselbe wie bei der Quintik. Somit sieht man, daß man die Identifikation

$$x_i \sim \begin{bmatrix}0 & {0 \atop 0} & {0 \atop 0}\end{bmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{bmatrix}1 & {1 \atop 1} & {0 \atop 0}\end{bmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{bmatrix}0 & {0 \atop 0} & {0 \atop 0}\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix}, \tag{4.24}$$

machen sollte, wenn man die Felder mit den Variablen eines Polynomrings in Verbindung bringen will, wobei der von Null verschiedene Zustand im $(i+1)$-ten Faktor der fünf minimalen liegt. Von den übrigen Generationenfamilien V–VII kann man weiterhin ablesen, daß die Variablen

$$\begin{aligned} y_1 &\sim \begin{bmatrix}2 & {2 \atop 2} & {0 \atop 0}\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0 & {0 \atop 0} & {0 \atop 0}\end{bmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{bmatrix}0 & {0 \atop 0} & {0 \atop 0}\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix} \\ y_2 &\sim \begin{bmatrix}2 & {-3 \atop 2} & {-1 \atop 0}\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0 & {0 \atop 0} & {0 \atop 0}\end{bmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{bmatrix}0 & {0 \atop 0} & {0 \atop 0}\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}-1 \\ 0\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.25}$$

den Grad $\mathrm{grad}(y_i) = 2$ haben müssen, in Übereinstimmung mit der anomalen Dimension der Zustände. Es ist anzumerken, daß der $U(1)_2-$Beitrag im "verdrehten" Zustand y_2 nötig ist, damit das Feld chiral wird. Somit gibt es also zwei Typen von Koordinaten, $x_i,\ i = 1,2,3,4$, die von den letzten vier Faktoren kommen, und $y_l,\ l = 1,2$, die durch den einfachen Strom modifiziert worden sind. Benutzt man obige Identifikationen, so lassen sich die Generationen wie folgt auf Monome abbilden:

Familie	Monom	Vielfachheit
I	$x_i^2 x_j^3$	12
II	$x_i x_j x_k^3$	12
III	$x_i x_j^2 x_k^2$	12
IV	$x_i x_j x_k x_l^2$	4
V_l	$x_i^3 y_l$	8
VI_l	$x_i x_j^2 y_l$	24
VII_l	$x_i x_j x_k y_l$	8

Tabelle 29: *Monomiale Darstellung der Generationen im* $(80,0)-$*Modell.*

Der durch diese Zustände bestimmte chirale Ring $\mathcal{R} = \mathbb{C}[x_i, y_j]/\mathcal{I}$ wird aus dem freien Ring

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2] \tag{4.26}$$

durch Herausdividieren des folgenden Ideals erzeugt:

$$\mathcal{I}[x_1^4, x_2^4, x_3^4, x_4^4, y_1^2, y_2^2, y_1 y_2]. \tag{4.27}$$

Nun stellt sich die Frage, wie man dieses Ideal aus einem stabilen Bündel über einer CYM gewinnen kann, was im nächsten Abschnitt vorgeführt werden wird. Zunächst soll aber die Diskussion des masselosen Spektrums fortgesetzt werden: die Vektoren in $H^1(M, \Lambda^2 V)$ können als Monome vom Grade zehn angesehen werden. Insgesamt gibt es 72 solche Elemente, die in der folgenden Tabelle aufgelistet sind.

Familie	Monom	Vielfachheit
A	$x_i x_j^3 x_k^3 x_l^3$	4
B	$x_i^2 x_j^2 x_k^3 x_l^3$	6
C_m	$y_m x_i^2 x_j^3 x_k^3$	24
D_m	$y_m x_i x_j x_k^3 x_l^3$	12
E_m	$y_m x_i x_j^2 x_k^2 x_l^3$	24
F_m	$y_m x_i^2 x_j^2 x_k^2 x_l^2$	2

Tabelle 30: *Monomiale Darstellung der Vektoren im* $(80,0)-$*Modell.*

Die exakte Relation dieser Monome zu den Feldern des exakt lösbaren Modells wird durch die Indizes A–F untermauert. Die beiden Vektoren G_1, G_2 des exakt lösbaren Modells haben keine Darstellung als Monom. Das ist aber nicht weiter tragisch, denn im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, daß alle Yukawakopplungen mit ihnen verschwinden. Diese beiden Felder treten somit nur an dem einen Punkt im Parameterraum auf und sind generisch nicht vorhanden. Schließlich ist die Produktstruktur des Rings $\mathcal{R}$ durch die folgenden nichtverschwindenden Relationen gegeben, es müssen immer zwei Polynome vom Grad fünf das entsprechende vom Grad zehn ergeben:

Vektor	Generationen
A:	$\mathrm{I}\cdot\mathrm{II},\ \ \mathrm{II}\cdot\mathrm{III},\ \ \mathrm{III}\cdot\mathrm{IV}$
B:	$\mathrm{I}^2,\ \ \mathrm{I}\cdot\mathrm{III},\ \ \mathrm{II}^2,\ \ \mathrm{II}\cdot\mathrm{III},\ \ \mathrm{III}^2,\ \ \mathrm{III}\cdot\mathrm{IV},\ \ \mathrm{IV}^2$
C_l:	$\mathrm{I}\cdot\mathrm{V}_l,\ \ \mathrm{I}\cdot\mathrm{VI}_l,\ \ \mathrm{II}\cdot\mathrm{VI}_l,\ \ \mathrm{III}\cdot\mathrm{VI}_l,\ \ \mathrm{III}\cdot\mathrm{VII}_l$
D_l:	$\mathrm{I}\cdot\mathrm{VII}_l,\ \ \mathrm{II}\cdot\mathrm{V}_l,\ \ \mathrm{II}\cdot\mathrm{VI}_l,\ \ \mathrm{III}\cdot\mathrm{VII}_l,\ \ \mathrm{IV}\cdot\mathrm{VI}_l$
E_l:	$\mathrm{I}\cdot\mathrm{VI}_l,\ \ \mathrm{II}\cdot\mathrm{VI}_l,\ \ \mathrm{II}\cdot\mathrm{VII}_l,\ \ \mathrm{III}\cdot\mathrm{V}_l,\ \ \mathrm{III}\cdot\mathrm{VI}_l,\ \ \mathrm{III}\cdot\mathrm{VII}_l,\ \ \mathrm{IV}\cdot\mathrm{VI}_l,\ \ \mathrm{IV}\cdot\mathrm{VII}_l$
F_l:	$\mathrm{III}\cdot\mathrm{VI}_l,\ \ \mathrm{IV}\cdot\mathrm{VII}_l$

Tabelle 31: *Produktstruktur des Rings im* $(80,0)-$*Modell.*

Vergleicht man dies mit den exakten Yukawakopplungen, so überführt die einfache Reskalierung

$$\mathrm{II}\longrightarrow\kappa\mathrm{II},\ \ \mathrm{IV}\longrightarrow\kappa\mathrm{IV},\ \ \mathrm{VII}_l\longrightarrow\kappa\mathrm{VII}_l,\ \ \mathrm{A}\longrightarrow\kappa^{-1}\,\mathrm{A},\ \ \mathrm{D}_l\longrightarrow\kappa^{-1}\,\mathrm{D}_l,\ \ \mathrm{F}_l\longrightarrow\kappa\mathrm{F}_l \tag{4.28}$$

die beiden Sätze von Kopplungen ineinander. Man sollte bemerken, daß im Gegensatz zum $(2,2)-$Fall [20,38,39] diese Transformation nicht eindeutig bestimmt ist, sondern bis auf zwei freie Parameter. Definiert man z.B. $\mathrm{A}\longrightarrow\kappa^a\,\mathrm{A}$ und $\mathrm{VII}\longrightarrow\kappa^x\,\mathrm{VII}$, so sind alle übrigen Redefinitionen durch die Exponenten a und x bestimmt. In (4.28) wurde $a=-1$ und $x=1$ gewählt, da es die Anzahl der Redefinitionen minimiert. Dieses Phänomen ist kein Zufall, wie im folgenden noch zu sehen sein wird, allerdings hängt die Zahl der freien Parameter vom speziellen Modell und dabei insbesondere von der Eichgruppe ab. Daher ist die exakt lösbare Theorie kein so mächtiges Handwerkszeug wie im $(2,2)-$Fall.

Das $(0,2)$ – lineare σ – Modell

An dieser Stelle ist die Existenz eines chiralen Ringes gezeigt, dessen Produktstruktur mit den exakten Yukawakopplungen übereinstimmt. Nun stellt sich die Frage, ob man das herausdividierte Ideal nicht auch aus dem Superpotential eines $(0,2)-\sigma-$Modells gewinnen kann. Dem ist tatsächlich so. Wie im zweiten Kapitel beschrieben, ist die wesentliche Struktur eines $(0,2)-$linearen $\sigma-$Modells in den Polynomen $W_r(\Phi_i)$ und $F_a^l(\Phi_i)$ enthalten, die es nun zu finden gilt.

Die Struktur des Rings $\mathcal{R}$, definiert durch (4.27), legt nahe, Polynome (W_r, F_a^l), die ein Bündel vom Rang vier definieren, mit Grad vier zu betrachten. Der Basisraum ist nach den vorigen Ergebnissen durch vier Koordinaten $x_i,\ i=1,\ldots,4$ vom Gewicht eins und zwei Koordinaten $y_l,\ l=1,2$ vom Gewicht zwei gegeben. Da eine komplex–dreidimensionale Mannigfaltigkeit betrachtet werden soll, müssen zwei Polynome W_1, W_2 vom Grade vier angesetzt werden, das Bündel V wird also über der Konfiguration $M=\mathbb{P}_{(1,1,1,1,2,2)}[4\ \ 4]$ definiert sein. Diese Mannigfaltigkeit ist tatsächlich eine CYM, d.h. $c_1(M)=0$, deren Chernklassen $c_2(M)=10h^2$ und $c_3(M)=-36h^3$ lauten, wobei h der zurückgezogene Generator von $H^2(M)$ ist.

Am einfachsten definiert man ein Bündel mit Rang vier mit Potentialen vom Grade vier über die kurze exakte Sequenz

$$0\longrightarrow V\longrightarrow\bigoplus_{a=1}^{5}\mathcal{O}(n_a=1)\xrightarrow{F}\mathcal{O}(5)\longrightarrow 0, \tag{4.29}$$

das entsprechende Bündel wird als $V_{(1,1,1,1,1;5)}$ geschrieben, in Anlehung an [94]. Die zweite Chernklasse dieses Bündels ist dieselbe wie die der Mannigfaltigkeit, womit sich die Anomalien kürzen. Weiterhin ist $c_1(V)=0$ und daher beschreibt das Bündel

$$V_{(1,1,1,1,1;5)}\longrightarrow\mathbb{P}_{(1,1,1,1,2,2)}[4\ \ 4] \tag{4.30}$$

die CY–Phase eines linearen $\sigma-$Modells, was durch einen Satz chirale primäre Felder mit den Ladungen $q(\Phi_i) = 1,\ i = 1, \ldots, 4,\ q(\Phi_i) = 2,\ i = 5, 6$ und $q(\Lambda^a) = 1,\ a = 1, \ldots, 5$ definiert ist. Mit $c_3(V) = -160h^3$ folgt für die Eulerzahl

$$\chi(V_{(1,1,1,1,1;5)}) = -160 \tag{4.31}$$

und da diese Mannigfaltigkeit glatt ist, was auch aus der Struktur des chiralen Rings folgt, ist zu erwarten, daß keine Antigenerationen existieren. Folglich stimmt das Spektrum dieses Modells mit den beiden anderen überein, womit das Dreigespann vollendet ist.

Schließlich bleibt noch die Frage nach den definierenden Polynomen des Basisraums und des Bündels, die das herausdivdierte Ideal (4.27) liefern. Zunächst muß man sich um die Daten des Basisraums kümmern, d.h. die Polynome W_r. Eine transversale Wahl ist durch

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_i x_i^4 + \sum_l y_l^2 \\ W_2 &= \sum_i i x_i^4 + \sum_l l y_l^2. \end{aligned} \tag{4.32}$$

gegeben. Dann müssen die Bündeldaten gefunden werden, also die F_a, die man als

$$(F_a) = (x_1^4, x_2^4, x_3^4, x_4^4, y_1 y_2) \tag{4.33}$$

wählen kann. Man rechnet nach, daß das durch (W_r, F_a) erzeugte Ideal durch

$$\mathcal{I}[x_1^4, x_2^4, x_3^4, x_4^4, y_1^2, y_2^2, y_1 y_2] \tag{4.34}$$

gegeben ist, was mit dem vorher ausgerechneten übereinstimmt.

Hat man die $(0,2)-$CYM identifiziert, deren konformer Fixpunkt durch das exakt lösbare $(80,0)-$Modell gegeben ist, so erkennt man, daß die Produktstruktur des chiralen Rings nichts anderes als die Produktstruktur im Kohomologiering $H^p(M, \Lambda^q V)$ ist. Insbesondere sind die Yukawakopplungen durch das Produkt

$$H^1(M,V) \otimes H^1(M,V) \longrightarrow H^1(M, \Lambda^2 V) \tag{4.35}$$

bestimmt, wobei der Isomorphismus $H^p(M, \Lambda^q V) = H^{D-p}(M, \Lambda^{r-q} V)$ für ein Bündel V vom Rang r in einer $D-$dimensionalen Varietät benutzt wurde.

Das lineare $\sigma-$Modell, das oben abgeleitet wurde, hat nach [45] sowohl eine CY– als auch eine LG–Phase. Somit wurden für dieses spezielle Modell alle Bestandteile gefunden, die aus dem Zusammenhang der $(2,2)-$exakt lösbaren Modelle bekannt sind. Im folgenden wird dieselbe Prozedur für die anderen Eichgruppen durchgeführt. Eine Verallgemeinerung des Dreigespanns auf andere Modelle mit Eichgruppe $SO(10)$ wird im Rahmen der LG–Theorie in einem späteren Kapitel erfolgen.

4.3. Ein (64,0)–SU(5)–(0,2)–Modell

Die oben vorgeführte Identifikation exakt lösbarer Stringvakua wird im folgenden an einem weiteren Beispiel mit Eichgruppe $SU(5)$ fortgeführt. Es wird sich herausstellen, daß das Dreigespann auch in diesem Fall konstruierbar ist.

Die exakt lösbare Theorie

Das exakte Modell ist wieder ein Abkömmling des $(3)^5$ mit den beiden einfachen Strömen

$$\begin{aligned}\Upsilon_1 &= (0\ 5\ 1)(0\ 0\ 0)^4(1)(0)(0)\\ \Upsilon_2 &= (0\ 5\ 1)^2(0\ 0\ 0)^3(1)^2(0).\end{aligned} \tag{4.36}$$

Dadurch wird die E_6 des Gepnermodells auf $SU(5)$ heruntergebrochen und die Struktur des masselosen Spektrums wird durch die Darstellungen **10** und $\overline{\mathbf{10}}$ von $SU(5)$ bestimmt. Das masselose Spektrum ist in der folgenden Tabelle aufgelistet.

Darstellung	**1**	**10**	$\overline{\mathbf{10}}$	**5**	$\bar{\mathbf{5}}$
Spin 0	338	64	0	55	119
Spin 1	10	0	0	0	0

Tabelle 32: *Masseloses Spektrum des* $(64,0)-$*Modells.*

Die Darstellung **10** läßt sich gemäß

$$\mathbf{10} = \mathbf{6}_{-1} \oplus \mathbf{4}_{\frac{3}{2}} \tag{4.37}$$

in Darstellungen der maximalen Untergruppe $SO(6) \times U(1) \subset SU(5)$ zerlegen. Die daraus resultierenden Generationen sind in der nächsten Tabelle gesammelt, wobei sowohl die Abkürzungen g_i für diejenigen Tensorfaktoren, auf die die einfachen Ströme wirken, als auch die für die $U(1)-$Faktoren aus (4.3) verwendet wurden.

Typ	Feld	Vielfachheit
I	$\begin{bmatrix}0&0&0\\&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&0\\&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&3&0\\&3&0\end{bmatrix}\ u_0\ u_0\ \begin{bmatrix}v\\v\end{bmatrix}$	6
II	$\begin{bmatrix}0&0&0\\&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&3&0\\&3&0\end{bmatrix}\ u_0\ u_0\ \begin{bmatrix}v\\v\end{bmatrix}$	3
III	$\begin{bmatrix}0&0&0\\&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&0\\&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&0\\&2&0\end{bmatrix}\ u_0\ u_0\ \begin{bmatrix}v\\v\end{bmatrix}$	3
IV$_i$	$g_i\begin{bmatrix}0&0&0\\&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&3&0\\&3&0\end{bmatrix}\ u_i\ u_0\ \begin{bmatrix}v\\v\end{bmatrix}$	6
V$_i$	$g_i\begin{bmatrix}0&0&0\\&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&0\\&2&0\end{bmatrix}\ u_i\ u_0\ \begin{bmatrix}v\\v\end{bmatrix}$	12
VI$_i$	$g_i\begin{bmatrix}0&0&0\\&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\end{bmatrix}\ u_i\ u_0\ \begin{bmatrix}v\\v\end{bmatrix}$	2
VII$_i$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\&0&0\end{bmatrix}g_i\begin{bmatrix}0&0&0\\&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&3&0\\&3&0\end{bmatrix}\ u_0\ u_i\ \begin{bmatrix}v\\v\end{bmatrix}$	6
VIII$_i$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\&0&0\end{bmatrix}g_i\begin{bmatrix}0&0&0\\&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&0\\&2&0\end{bmatrix}\ u_0\ u_i\ \begin{bmatrix}v\\v\end{bmatrix}$	12
IX$_i$	$\begin{bmatrix}0&0&0\\&0&0\end{bmatrix}g_i\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\end{bmatrix}\ u_0\ u_i\ \begin{bmatrix}v\\v\end{bmatrix}$	2
X$_{ij}$	$g_i\ g_j\begin{bmatrix}0&0&0\\&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\&1&0\end{bmatrix}\ u_i\ u_j\ \begin{bmatrix}v\\v\end{bmatrix}$	12

Tabelle 33: *Generationen des* $(64,0)-$*Modells.*

Die Darstellung **5** von $SU(5)$ zerlegt sich entsprechend nach denen derselben maximalen Untergruppe gemäß

$$\mathbf{5} = \mathbf{4}_{-\frac{1}{2}} \oplus \mathbf{1}_2. \tag{4.38}$$

Zählt man den Singletteil, so lauten die 55 Darstellungen der **5** mit den Abkürzungen (4.5)

Typ	Feld	Vielfachheit
A_i	$v_i \begin{bmatrix} 0 & \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{smallmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ -4 & -2 \end{smallmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & \begin{smallmatrix} -3 & 0 \\ -5 & -2 \end{smallmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & \begin{smallmatrix} -3 & 0 \\ -5 & -2 \end{smallmatrix} \end{bmatrix} u_i^+ \; u_0 \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$	6
B_i	$\begin{bmatrix} 0 & \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{smallmatrix} \end{bmatrix} v_i \begin{bmatrix} 2 & \begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ -4 & -2 \end{smallmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & \begin{smallmatrix} -3 & 0 \\ -5 & -2 \end{smallmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & \begin{smallmatrix} -3 & 0 \\ -5 & -2 \end{smallmatrix} \end{bmatrix} u_0 \; u_i^+ \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$	6
C_{ij}	$v_i \; v_j \begin{bmatrix} 0 & \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{smallmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & \begin{smallmatrix} -3 & 0 \\ -5 & -2 \end{smallmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & \begin{smallmatrix} -3 & 0 \\ -5 & -2 \end{smallmatrix} \end{bmatrix} u_i^+ \; u_j^+ \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$	12
D_{ij}	$v_i \; v_j \begin{bmatrix} 3 & \begin{smallmatrix} -3 & 0 \\ -5 & -2 \end{smallmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ -4 & -2 \end{smallmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -2 \end{smallmatrix} \end{bmatrix} u_i^+ \; u_j^+ \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$	24
E_{ij}	$v_i \; v_j \begin{bmatrix} 2 & \begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ -4 & -2 \end{smallmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ -4 & -2 \end{smallmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ -4 & -2 \end{smallmatrix} \end{bmatrix} u_i^+ \; u_j^+ \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$	4
F	$\begin{bmatrix} 3 & \begin{smallmatrix} -4 & -1 \\ -5 & -2 \end{smallmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & \begin{smallmatrix} -4 & -1 \\ -5 & -2 \end{smallmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{smallmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{smallmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -2 \end{smallmatrix} \end{bmatrix} u_1^+ \; u_1^+ \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix}$	3

Tabelle 34: **5***er des* $(64,0)-$*Modells.*

Nun geht es an die Dreipunktkopplungen.

Die exakten Yukawakopplungen

Erinnert man sich an die Zerlegung (4.37), so stellt man fest, daß die erlaubten nichtverschwindenden Kombinationen für die Yukawakopplungen von der Form

$$\langle \mathbf{5} \cdot \mathbf{10} \cdot \mathbf{10} \rangle \quad = \quad \langle \mathbf{1}_2 \cdot \mathbf{6}_{-1} \cdot \mathbf{6}_{-1} \rangle \tag{4.39}$$

sind. Um diese Bilder zu erhalten, ist wieder der Operator $\overline{\Sigma}_{\overline{c}=9}$ vonnöten. Folgt man dem Vorgehen im ersten Beispiel, so sind beispielsweise die einzigen nichtverschwindenden Yukawakopplungen des Feldes A durch

$$\langle \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{I} \cdot \mathrm{IV}_1 \rangle, \quad \langle \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{I} \cdot \mathrm{V}_1 \rangle, \quad \langle \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{II} \cdot \mathrm{V}_1 \rangle, \quad \langle \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{III} \cdot \mathrm{V}_1 \rangle, \quad \langle \mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{III} \cdot \mathrm{VI}_1 \rangle \tag{4.40}$$

gegeben. Zur expliziten Berechnung dieser Kopplungen ist es wiederum ausreichend, die Basiskopplungen der einzelnen minimalen Faktoren in (4.22) zu kennen. So erhält man alle nichtverschwindenden Yukawakopplungen, die in der folgenden Tabelle aufgelistet sind.

5	Generationen
$\mathrm{A}_i \cdot$	$\mathrm{I{\cdot}IV}_i = 1,\ \mathrm{I{\cdot}V}_i = 1,\quad \mathrm{II{\cdot}V}_i = \kappa,\ \mathrm{III{\cdot}V}_i = 1,\quad \mathrm{III{\cdot}VI}_i = \kappa$
$\mathrm{B}_i \cdot$	$\mathrm{I{\cdot}VII}_i = 1,\ \mathrm{I{\cdot}VIII}_i = 1,\quad \mathrm{II{\cdot}VIII}_i = \kappa,\ \mathrm{III{\cdot}VIII}_i = 1,\quad \mathrm{III{\cdot}IX}_i = \kappa$
$\mathrm{C}_{ij} \cdot$	$\mathrm{I{\cdot}X}_{ij} = 1,\quad \mathrm{IV}_i \cdot \mathrm{VII}_j = 1,\quad \mathrm{V}_i \cdot \mathrm{VIII}_j = 1$
$\mathrm{D}_{ij} \cdot$	$\mathrm{I{\cdot}X}_{ij} = 1,\ \mathrm{II{\cdot}X}_{ij} = \kappa,\quad \mathrm{III{\cdot}X}_{ij} = 1,\ \mathrm{IV}_i \cdot \mathrm{VIII}_j = 1,\quad \mathrm{V}_i \cdot \mathrm{VII}_j = 1,\ \mathrm{V}_i \cdot \mathrm{IX}_j = \kappa,\quad \mathrm{VI}_i \cdot \mathrm{VIII}_j = \kappa$
$\mathrm{E}_{ij} \cdot$	$\mathrm{III{\cdot}X}_{ij} = \kappa,\quad \mathrm{V}_i \cdot \mathrm{VIII}_j = \kappa,\quad \mathrm{VI}_i \cdot \mathrm{IX}_j = \kappa^3$

Tabelle 35: *Yukawakopplungen des* $(64,0)-$*Modells.*

Ähnlich dem Fall des $(80,0)$ treten hier keine Kopplungen auf, die die Felder F_i enthalten.

Der chirale Ring des $(64,0)$ – Modells : Zustände und Produktstruktur

Die Struktur des chiralen Rings des vorliegenden Modells kann auf völlig analoge Weise wie die beim $(80,0)$ gewonnen werden. Zunächst sieht man sich die Struktur derjenigen Generationen an, die keine Beiträge in den minimalen Faktoren haben, auf denen die einfachen Ströme wirken. Diese legen nahe, Koordinaten x_i einzuführen, die mit den Zuständen wie folgt in Relation stehen:

$$x_i \sim \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{bmatrix} 1 & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.41}$$

wobei der nichtverschwindende Zustand im $(i+2)$-ten der n einzelnen Faktoren liegt. Wiederum sieht man an der Struktur der Generationen, daß diese Koordinate vom Gewicht eins sein muß. Für die anderen Generationen kann man ablesen, daß die Variablen

$$\begin{aligned}
y_1 &\sim \begin{bmatrix} 2 & \begin{matrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
y_2 &\sim \begin{bmatrix} 2 & \begin{matrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
z_1 &\sim \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & \begin{matrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
z_2 &\sim \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & \begin{matrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

jeweils vom Grade zwei sein müssen. Mit diesen Koordinaten läßt sich folgende Abbildung der Generationen auf Monome angeben:

Familie	Monom	Vielfachheit
I	$x_i^2 x_j^3$	6
II	$x_i x_j x_k^3$	3
III	$x_i x_j^2 x_k^2$	3
IV_l	$y_l x_i^3$	6
V_l	$y_l x_i x_j^2$	12
VI_l	$y_l x_i x_j x_k$	2
VII_m	$z_m x_i^3$	6
VIII_m	$z_m x_i x_j^2$	12
IX_m	$z_m x_i x_j x_k$	2
$\mathrm{X}_{l,m}$	$y_l z_m x_i$	12

Tabelle 36: *Monomiale Darstellung der Generationen des* $(64,0)-$*Modells.*

Aus der Form der Generationen läßt sich das Ideal $\mathcal{I}$ ablesen, was den chiralen Ring $\mathcal{R} = \mathbb{C}[x_i, y_j, z_k]/\mathcal{I}$ aus dem freien Ring $\mathbb{C}[x_i, y_j, z_k]$ erzeugt:

$$\begin{aligned}
x_i^4 &= 0, \quad i = 1,2,3 \\
y_l y_{l'} &= 0, \quad l, l' = 1,2 \\
z_m z_{m'} &= 0, \quad m, m' = 1,2.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Nun zu der Darstellung **5**, d.h. den Monomen vom Grade zehn, die wie folgt zugeordnet werden:

Familie	Monom	Vielfachheit
A_l	$y_l x_i^2 x_j^3 x_k^3$	6
B_m	$z_m x_i^2 x_j^3 x_k^3$	6
$\mathrm{C}_{l,m}$	$y_l z_m x_i^3 x_j^3$	12
$\mathrm{D}_{l,m}$	$y_l z_m x_i x_j^2 x_k^3$	24
$\mathrm{E}_{l,m}$	$y_l z_m x_i^2 x_j^2 x_k^2$	4

Tabelle 37: *Monomiale Darstellung der* **5***er des* $(64,0)-$*Modells.*

Somit gibt es 52 **5**er, die durch Monome dargestellt werden können. Wiederum fallen drei aus dem exakten Modell heraus, und zwar wieder genau die, für die alle Yukawakopplungen verschwanden. Es ist offensichtlich, daß für alle Generationen–Monome γ_i gilt: $\gamma_i^2 \in \mathcal{I}$, wobei $\mathcal{I}$ das oben beschriebene Ideal ist. Somit sind alle Selbstkopplungen von Generationen Null. Die Kopplungen folgen aus

$$\gamma_i \cdot \gamma_j \sim v_{ij}, \tag{4.44}$$

wobei v_{ij} eine der **5**er ist. Damit findet man folgende nichtverschwindende Kopplungen:

5	Generationen
A_l:	$\mathrm{I}\cdot\mathrm{IV}_l,\ \ \mathrm{I}\cdot\mathrm{V}_l,\ \ \mathrm{II}\cdot\mathrm{V}_l,\ \ \mathrm{III}\cdot\mathrm{V}_l,\ \ \mathrm{III}\cdot\mathrm{VI}_l$
B_l:	$\mathrm{I}\cdot\mathrm{VII}_l,\ \ \mathrm{I}\cdot\mathrm{VIII}_l,\ \ \mathrm{II}\cdot\mathrm{VIII}_l,\ \ \mathrm{III}\cdot\mathrm{VIII}_l,\ \ \mathrm{III}\cdot\mathrm{IX}_l$
C_{lm}:	$\mathrm{I}\cdot\mathrm{X}_{l,m},\ \ \mathrm{IV}_l\cdot\mathrm{VII}_m,\ \ \mathrm{V}_l\cdot\mathrm{VIII}_m$
D_{lm}:	$\mathrm{I}\cdot\mathrm{X}_{lm},\ \ \mathrm{II}\cdot\mathrm{X}_{lm},\ \ \mathrm{III}\cdot\mathrm{X}_{lm},\ \ \mathrm{IV}_l\cdot\mathrm{VIII}_m,\ \ \mathrm{V}_l\cdot\mathrm{VII}_m,\ \ \mathrm{V}_l\cdot\mathrm{IX}_m,\ \ \mathrm{VI}_l\cdot\mathrm{VIII}_m$
E_{lm}:	$\mathrm{III}\cdot\mathrm{X}_{lm},\ \ \mathrm{V}_l\cdot\mathrm{VIII}_m,\ \ \mathrm{VI}_l\cdot\mathrm{IX}_m$

Tabelle 38: *Produktstruktur des chiralen Rings beim* $(64,0)-$*Modell.*

Redefiniert man die Felder gemäß

$$\mathrm{II} \longrightarrow \kappa\mathrm{II}, \quad \mathrm{VI}_l \longrightarrow \kappa\mathrm{VI}_l, \quad \mathrm{IX}_l \longrightarrow \kappa\mathrm{IX}_l, \quad \mathrm{E}_{lm} \longrightarrow \kappa\mathrm{E}_{lm}, \tag{4.45}$$

so gehen die Kopplungen des $\sigma-$Modells in die des exakt lösbaren über. Wie in dem $(80,0)-$Beispiel ist hier auch die Transformation nicht eindeutig, jetzt gibt es gar drei freie Parameter.

Anmerkungen zum linearen $\sigma-$ Modell

Wie oben sollen Superpotentiale $(W_r(\Phi_i), F_a^l(\Phi_i))$ identifiziert werden, die hier ein Vektorbündel vom Rang fünf über dem Basisraum mit den Koordinaten (x_i, y_l, z_m), $i = 1,2,3;\ l = 1,2;\ m = 1,2$ definieren. Die Struktur des chiralen Rings legt wieder nahe, Potentiale W_r vom Grade $d_r = 4$ zu betrachten. Das scheint erst einmal nicht zu gehen, denn die Summe der Gewichte aller Koordinaten ist elf. Daher sind, um eine CYM zu definieren, drei Polynome vom Grade d_r nötig, die $\sum d_r = 11$ erfüllen. Dies führt dazu, daß eine weitere Koordinate vom Gewicht fünf einzuführen ist, was dann schließlich auf die Konfiguration

$$\mathbb{P}_{(1,1,1,2,2,2,2,5)}[4\ \ 4\ \ 4\ \ 4] \tag{4.46}$$

führt. Dieser Raum ist hat einige wünschenswerte Eigenschaften. Zunächst gilt

$$\sum_i w_i = \sum_r d_r, \tag{4.47}$$

folglich handelt es sich um eine CYM, dargestellt als vollständiger Polynomschnitt mit der Kodimension vier. Weiterhin ist eine aus dem LG–Zusammenhang bekannte Bedingung [41] erfüllt, nämlich daß die gesamte Ladung der Theorie gerade die Kodimension ist. Ferner hat dieser Raum keinerlei Faktortheorie–Singularitäten. Dies war zu erwarten, denn der $(0,2)-$Kählersektor ist nicht vorhanden. Allerdings hat dieser Raum den Nachteil, daß er keine transversale Wahl der Polynome zuläßt, denn es gibt eine Hyperflächensingularität an einem Punkt. Weitere Einsicht in die Auflösungstheorie von Singularitäten [89] wird hier sicher weiterhelfen. Wie beim vorigen ausführlich diskutierten Beispiel wurde das Ideal durch Elemente vom Grade vier aufgespannt, es hat sich jetzt lediglich die Anzahl der Generatoren erhöht, was bereits durch die Erhöhung der Koordinatenanzahl im Basisraum berücksichtigt wurde. Es bietet sich daher an, dasselbe Bündel wie vorher zu betrachten:

$$V_{(1,1,1,1,1;5)} \longrightarrow \mathbb{P}_{(1,1,1,2,2,2,2,5)}[4 \;\; 4 \;\; 4 \;\; 4]. \tag{4.48}$$

Damit sind auch die Bedingungen an die zweite Chernklasse des Eich– und des Tangentialbündels erfüllt, womit ein lineares $\sigma-$Modell resultiert, wo sich die Anomalien kürzen. Wenn das Bündel aber über einer glatten Mannigfaltigkeit definiert wäre, so hätte es den Rang vier und nicht fünf. Es bleibt abzuwarten, ob ein besseres Verständnis von Auflösungen diese Schwierigkeiten behebt: entweder muß die Mannigfaltigkeit durch eine gute $(0,2)-$CYM ersetzt werden oder aber das Bündel verändert werden. Formal kann man jedenfalls das Bündel

$$V_{(0,1,1,1,1,1;5)} \tag{4.49}$$

hinschreiben, welches eine zusätzliche Nebenbedingung vom Gewicht fünf hat (die auch in der CYM auftritt), was aber einer Null entspricht.

4.4. Ein (50,0)–E$_3$–Modell

Als letztes Beispiel, was genauer identifiziert werden soll, eins mit der Eichgruppe E_3. Dazu geht man wieder vom Tensorprodukt $(3)^5$ aus und wendet die drei einfachen Ströme

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &= (0\ 5\ 1)(0\ 0\ 0)^4(1)(0)^2(0) \\ \Upsilon_2 &= (0\ 5\ 1)^2(0\ 0\ 0)^3(1)^2(0)(0) \\ \Upsilon_3 &= (0\ 5\ 1)^3(0\ 0\ 0)^2(1)^3(0) \end{aligned} \tag{4.50}$$

an. Dies bricht die E_6 auf $SU(3)\times SU(2)$, folglich ordnet sich das masselose Spektrum entsprechend:

Darstellung	**1**	**2**	**3**	$\bar{\mathbf{3}}$	**6**	$\bar{\mathbf{6}}$
Spin 0	370	134	54	154	50	0
Spin 1	13	0	0	0	0	0

Tabelle 39: *Masseloses Spektrum des* $(50,0)$.

Die Form der Generationen bzw. der **3**er lautet hier:

Typ	Feld	Vielfachheit
I	$\left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\left[2\,\begin{matrix}2&0\\2&0\end{matrix}\right]\left[3\,\begin{matrix}3&0\\3&0\end{matrix}\right]\ u_0^3\ \begin{bmatrix}v\\v\end{bmatrix}$	2
II_i	$g_i\ \left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\left[3\,\begin{matrix}3&0\\3&0\end{matrix}\right]\ u_i\ u_0^2\ \begin{bmatrix}v\\v\end{bmatrix}$	4
III_i	$g_i\ \left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\left[1\,\begin{matrix}1&0\\1&0\end{matrix}\right]\left[2\,\begin{matrix}2&0\\2&0\end{matrix}\right]\ u_i\ u_0^2\ \begin{bmatrix}v\\v\end{bmatrix}$	4
IV_i	$\left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\ g_i\ \left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\left[3\,\begin{matrix}3&0\\3&0\end{matrix}\right]\ u_0\ u_i\ u_0\ \begin{bmatrix}v\\v\end{bmatrix}$	4
V_i	$\left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\ g_i\ \left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\left[1\,\begin{matrix}1&0\\1&0\end{matrix}\right]\left[2\,\begin{matrix}2&0\\2&0\end{matrix}\right]\ u_0\ u_i\ u_0\ \begin{bmatrix}v\\v\end{bmatrix}$	4
VI_i	$\left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\ g_i\ \left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\left[3\,\begin{matrix}3&0\\3&0\end{matrix}\right]\ u_0^2\ u_i\ \begin{bmatrix}v\\v\end{bmatrix}$	4
VII_i	$\left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\ g_i\ \left[1\,\begin{matrix}1&0\\1&0\end{matrix}\right]\left[2\,\begin{matrix}2&0\\2&0\end{matrix}\right]\ u_0^2\ u_i\ \begin{bmatrix}v\\v\end{bmatrix}$	4
VIII_{ij}	$g_i\ g_j\ \left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\left[1\,\begin{matrix}1&0\\1&0\end{matrix}\right]\ u_i\ u_j\ u_0\ \begin{bmatrix}v\\v\end{bmatrix}$	8
IX_{ij}	$g_i\ \left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\ g_j\ \left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\left[1\,\begin{matrix}1&0\\1&0\end{matrix}\right]\ u_i\ u_0\ u_j\ \begin{bmatrix}v\\v\end{bmatrix}$	8
X_{ij}	$\left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\ g_i\ g_j\ \left[0\,\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\right]\left[1\,\begin{matrix}1&0\\1&0\end{matrix}\right]\ u_0\ u_i\ u_j\ \begin{bmatrix}v\\v\end{bmatrix}$	8
A_{ij}	$v_i\ v_j\ \left[0\,\begin{matrix}0&0\\-2&-2\end{matrix}\right]\left[3\,\begin{matrix}-3&0\\-5&-2\end{matrix}\right]\left[3\,\begin{matrix}-3&0\\-5&-2\end{matrix}\right]\ u_i^+\ u_j^+\ u_0\ \begin{bmatrix}0\\v\end{bmatrix}$	4
B_{ij}	$v_i\ \left[0\,\begin{matrix}0&0\\-2&-2\end{matrix}\right]\ v_j\ \left[3\,\begin{matrix}-3&0\\-5&-2\end{matrix}\right]\left[3\,\begin{matrix}-3&0\\-5&-2\end{matrix}\right]\ u_i^+\ u_0\ u_j^+\ \begin{bmatrix}0\\v\end{bmatrix}$	4
C_{ij}	$\left[0\,\begin{matrix}0&0\\-2&-2\end{matrix}\right]\ v_i\ v_j\ \left[3\,\begin{matrix}-3&0\\-5&-2\end{matrix}\right]\left[3\,\begin{matrix}-3&0\\-5&-2\end{matrix}\right]\ u_0\ u_i^+\ u_j^+\ \begin{bmatrix}0\\v\end{bmatrix}$	4
D_{ijk}	$v_i\ v_j\ v_k\ \left[1\,\begin{matrix}-1&0\\-3&-2\end{matrix}\right]\left[3\,\begin{matrix}-3&0\\-5&-2\end{matrix}\right]\ u_i^+\ u_j^+\ u_k^+\ \begin{bmatrix}0\\v\end{bmatrix}$	16
E_{ijk}	$v_i\ v_j\ v_k\ \left[2\,\begin{matrix}-2&0\\-4&-2\end{matrix}\right]\left[2\,\begin{matrix}-2&0\\-4&-2\end{matrix}\right]\ u_i^+\ u_j^+\ u_k^+\ \begin{bmatrix}0\\v\end{bmatrix}$	8
F_i	$t_i\ \left[3\,\begin{matrix}-4&-1\\-5&-2\end{matrix}\right]\left[3\,\begin{matrix}-4&-1\\-5&-2\end{matrix}\right]\left[1\,\begin{matrix}-3&-2\\1&0\end{matrix}\right]\left[2\,\begin{matrix}-2&0\\2&0\end{matrix}\right]\ u_i^+\ u_1^{+2}\ \begin{bmatrix}0\\v\end{bmatrix}$	4
G_i	$\left[3\,\begin{matrix}-4&-1\\-5&-2\end{matrix}\right]\ t_i\ \left[3\,\begin{matrix}-4&-1\\-5&-2\end{matrix}\right]\left[1\,\begin{matrix}-3&-2\\1&0\end{matrix}\right]\left[2\,\begin{matrix}-2&0\\2&0\end{matrix}\right]\ u_1^+\ u_i^+\ u_1^+\ \begin{bmatrix}0\\v\end{bmatrix}$	4
H_i	$\left[3\,\begin{matrix}-4&-1\\-5&-2\end{matrix}\right]\left[3\,\begin{matrix}-4&-1\\-5&-2\end{matrix}\right]\ t_i\ \left[1\,\begin{matrix}-3&-2\\1&0\end{matrix}\right]\left[2\,\begin{matrix}-2&0\\2&0\end{matrix}\right]\ u_1^{+2}\ u_i^+\ \begin{bmatrix}0\\v\end{bmatrix}$	4
I_i	$s_i\ \left[3\,\begin{matrix}-4&-1\\-5&-2\end{matrix}\right]\left[3\,\begin{matrix}-4&-1\\-5&-2\end{matrix}\right]\left[2\,\begin{matrix}-2&0\\2&0\end{matrix}\right]\left[2\,\begin{matrix}-2&0\\2&0\end{matrix}\right]\ u_i^+\ u_1^{+2}\ \begin{bmatrix}0\\v\end{bmatrix}$	2
J_i	$\left[3\,\begin{matrix}-4&-1\\-5&-2\end{matrix}\right]\ s_i\ \left[3\,\begin{matrix}-4&-1\\-5&-2\end{matrix}\right]\left[2\,\begin{matrix}-2&0\\2&0\end{matrix}\right]\left[2\,\begin{matrix}-2&0\\2&0\end{matrix}\right]\ u_1^+\ u_i^+\ u_1^+\ \begin{bmatrix}0\\v\end{bmatrix}$	2
K_i	$\left[3\,\begin{matrix}-4&-1\\-5&-2\end{matrix}\right]\left[3\,\begin{matrix}-4&-1\\-5&-2\end{matrix}\right]\ s_i\ \left[2\,\begin{matrix}-2&0\\2&0\end{matrix}\right]\left[2\,\begin{matrix}-2&0\\2&0\end{matrix}\right]\ u_1^{+2}\ u_i^+\ \begin{bmatrix}0\\v\end{bmatrix}$	2

Tabelle 40: *Generationen und* **3***er des* $(50,0)$.

Zur Darstellung der **3**er wurden folgende Abkürzungen verwendet:

$$s_0 = \begin{bmatrix} 2 & \begin{matrix} 2 & 0 \\ -4 & -2 \end{matrix} \end{bmatrix}, \quad s_1 = \begin{bmatrix} 2 & \begin{matrix} -3 & -1 \\ -4 & -2 \end{matrix} \end{bmatrix}, \quad t_0 = \begin{bmatrix} 1 & \begin{matrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{matrix} \end{bmatrix}, \quad t_1 = \begin{bmatrix} 1 & \begin{matrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{matrix} \end{bmatrix}. \tag{4.51}$$

Dabei sind die s_i nichts anderes als die v_i mit entgegengesetzter Ladung auf der linken Seite.

Exakte Yukawakopplungen

Gemäß der Zerlegungen der Darstellungen von E_3 in die von $SO(4) \times U(1)$

$$\mathbf{6} = (\mathbf{3}, \mathbf{2}) = \mathbf{4}^v_{-1} \oplus \mathbf{2}^c_2, \quad \mathbf{3} = (\mathbf{3}, \mathbf{1}) = \mathbf{1}_2 \oplus \mathbf{2}^s_{-1} \tag{4.52}$$

lassen sich die Yukawakopplungen wie folgt berechnen:

$$\langle \mathbf{3}\ \mathbf{6}\ \mathbf{6} \rangle = \langle \mathbf{1}_2\ \mathbf{4}^v_{-1}\ \mathbf{4}^v_{-1} \rangle. \tag{4.53}$$

Dasselbe Vorgehen wie in den beiden anderen Beispielen liefert schließlich die folgenden nichtverschwindenden Yukawakopplungen:

3	Generationen
$\mathrm{A}_{ij}\cdot$	$\mathrm{I}\cdot\mathrm{VIII}_{ij} = 1$, $\mathrm{II}_i\cdot\mathrm{IV}_j = 1$, $\mathrm{III}_i\cdot\mathrm{V}_j = 1$
$\mathrm{B}_{ij}\cdot$	$\mathrm{I}\cdot\mathrm{IX}_{ij} = 1$, $\mathrm{II}_i\cdot\mathrm{VI}_j = 1$, $\mathrm{III}_i\cdot\mathrm{VII}_j = 1$
$\mathrm{C}_{ij}\cdot$	$\mathrm{I}\cdot\mathrm{X}_{ij} = 1$, $\mathrm{IV}_i\cdot\mathrm{VI}_j = 1$, $\mathrm{V}_i\cdot\mathrm{VII}_j = 1$
$\mathrm{D}_{ijk}\cdot$	$\mathrm{II}_i\cdot\mathrm{X}_{jk} = 1$, $\mathrm{III}_i\cdot\mathrm{X}_{jk} = 1$, $\mathrm{IV}_j\cdot\mathrm{IX}_{ik} = 1$, $\mathrm{V}_j\cdot\mathrm{IX}_{ik} = 1$, $\mathrm{VI}_k\cdot\mathrm{VIII}_{ij} = 1$, $\mathrm{VII}_k\cdot\mathrm{VIII}_{ij} = 1$
$\mathrm{E}_{ijk}\cdot$	$\mathrm{III}_i\cdot\mathrm{X}_{jk} = \kappa$, $\mathrm{V}_j\cdot\mathrm{IX}_{ik} = \kappa$, $\mathrm{VII}_k\cdot\mathrm{VIII}_{ij} = \kappa$

Tabelle 41: *Yukawakopplungen des* $(50, 0)$.

Identifizierung des chiralen Rings

Wie oben kann die Struktur des chiralen Rings schon an den Generationen abgelesen werden. Da die einfachen Ströme nicht in den beiden letzten Tensorfaktoren wirken, werden sich die Gewichte der chiralen Felder in den letzten beiden Faktoren nicht ändern. Daher werden folgende Koordinaten eingeführt:

Koordinate	Gewicht
$x_1 = \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	1
$x_2 = \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	1
$y_1 = \begin{bmatrix} 2 & \begin{matrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	2
$y_2 = \begin{bmatrix} 2 & \begin{matrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	2
$z_1 = \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & \begin{matrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	2
$z_2 = \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & \begin{matrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	2
$w_1 = \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & \begin{matrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	2
$w_2 = \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & \begin{matrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$	2

Tabelle 42: *Koordinaten des monomialen Rings des* $(50, 0)$.

Die Generationen sehen dann in monomialer Darstellung wie folgt aus:

Familie	Monom	Vielfachheit
I	$x_i^2 x_j^3$	2
II_l	$u_l x_i^3$	4
III_l	$u_l x_i x_j^2$	4
IV_m	$v_m x_i^3$	4
V_m	$v_m x_i x_j^2$	4
VI_n	$w_n x_i^3$	4
VII_n	$w_n x_i x_j^2$	4
VIII_{lm}	$u_l v_m x_i$	8
IX_{ln}	$u_l w_n x_i$	8
X_{mn}	$v_m w_n x_i$	8

Tabelle 43: *Monomiale Darstellung der Generationen des* $(50,0)$.

Von den Generationen kann man das Ideal

$$\mathcal{I}[x_i^4, u_a u_b, v_a v_b, w_a w_b] \tag{4.54}$$

ableiten, aus dem man die Darstellung der **3**er durch Monome gewinnt:

Familie	Monom	Vielfachheit
A_{lm}	$u_l v_m x_1^3 x_2^3$	4
B_{ln}	$u_l w_n x_1^3 x_2^3$	4
C_{mn}	$v_m w_n x_1^3 x_2^3$	4
D_{lmn}	$u_l v_m w_n x_i x_j^3$	16
E_{lmn}	$u_l v_m w_n x_i^2 x_j^2$	8

Tabelle 44: *Monomiale Darstellung der* **3***er des* $(50,0)$.

Somit haben nur 36 der 54 eine monomiale Darstellung, wiederum fallen aber die heraus, für die alle Kopplungen verschwinden. Vergleicht man die Produktstruktur der Monome mit den exakten Yukawakopplungen, so gibt es eine totale Übereinstimmung, wenn man die Reskalierung

$$\mathrm{E} \longrightarrow \kappa \mathrm{E} \tag{4.55}$$

wählt. Für dieses Modell ist die Vorhersagekraft am kleinsten. Wie oben ist die Anzahl der unbestimmten Skalierungen $(\mathrm{rang}(V) - 2)$ und deshalb gibt es vier freie Parameter.

Bemerkungen zu einem möglichen $\sigma-$ Modell

Die Angabe des $\sigma-$Modells folgt in gewisser Hinsicht denen der beiden anderen. Der dritte einfache Strom sorgt für ein weiteres Paar von Koordinaten mit Gewicht zwei. Wieder ist das Ideal durch Relationen vom Grade vier bestimmt, und der Basisraum lautet

$$\mathbb{P}_{(1,1,2,2,2,2,2,2,5,5)}[4\ \ 4\ \ 4\ \ 4\ \ 4\ \ 4], \tag{4.56}$$

wobei zwei Koordinaten mit Gewicht fünf eingeführt wurden, die Gründe sind dieselben wie bei dem $(50,0)$. Auch dieser Raum erlaubt keine transversale Wahl der Polynome und hat als Hyperflächensingularität eine Kurve, die projektive Linie. Berechnet man die zweiten Chernklassen, so wird man wieder auf dasselbe Bündel wie vorher geführt:

$$V_{(1,1,1,1,1;5)} \longrightarrow \mathbb{P}_{(1,1,2,2,2,2,2,2,5,5)}[4 \;\; 4 \;\; 4 \;\; 4 \;\; 4 \;\; 4], \tag{4.57}$$

welches möglicherweise durch die Auflösung der reell–zweidimensionalen singulären Menge zu einem Bündel mit Rang sechs wird. Hier würde man dann analog zu (4.49) $V_{(0,0,1,1,1,1,1;5)}$ hinschreiben, die beiden Nullen tauchen in der CYM als Fünfen auf.

4.5. Vergleich der Modelle und Zusammenfassung

Vergleicht man abschließend die drei hier betrachteten Modelle, so zeigt diese Serie, daß ein System von Hyperflächensingularitäten der reellen Dimension d den Rang des Vektorbündels auf $(4+d)$ erhöhen sollte. Im nächsten Kapitel werden Modelle betrachtet werden, die über CYMen definiert sind, die K_3-Faserungen sind. Hier ist die Identifikation der exakt lösbaren Modelle (diese zeichnen sich dadurch aus, daß sich die zentrale Ladung der Tensorfaktoren zu $9 = 6 + 3$ zerlegt) wesentlich einfacher. Das $(80,0)-$Modell wird im übernächsten Kapitel ausführlich auf seinen Parameterraum hin untersucht. Im darauffolgenden Kapitel werden diese drei Modelle in einer viel größeren Klasse aufgehen.

5. Modelle mit N=2 Raumzeit–Supersymmetrie

Es ist wohlbekannt, daß für ein Modell mit $N = 2$ Raumzeit–Supersymmetrie ein toroidaler Bestandteil mit $c = 3$ und ein Rest mit mindestens $(0,4)$–Weltflächen–Supersymmetrie mit $c_r = 6$ vorhanden sein muß, wobei letzterer mit der K_3-Mannigfaltigkeit in Verbindung steht. Die linke zentrale Ladung c_l kann allerdings verschiedene Werte annehmen, je nach der Wahl des Bündels für die linkslaufenden Fermionen im $\sigma-$Modell. Im folgenden werden einige Beispiele exakt lösbarer $(0,4)-$Theorien präsentiert und dann mit geeigneten Bündeln über K_3 verglichen und identifiziert. Dazu muß zunächst rekapituliert werden, wie sich denn das masselose Spektrum für allgemeine Bündel berechnet.

5.1. (0,4)–Modelle über K$_3$

Die volle Eichgruppe in zehn Dimensionen ist $\mathcal{G} = E_8 \times E_8$. Nun bettet man ein (komplexifiziertes) stabiles holomorphes Vektorbündel V in $\mathcal{G}$ ein, welches diese auf G herunterbricht, so daß $G \times H \subset \mathcal{G}$ die maximale Unteralgebra ist. Dann läßt sich das masselose Spektrum wie folgt berechnen: man zerlegt die adjungierte Darstellung als

$$\mathrm{adj}(\mathcal{G}) = \sum_i (M_i, R_i), \tag{5.1}$$

wobei M_i bzw. R_i Darstellungen von G bzw. H sind. Die Anzahl der linkshändigen Spinormultiplets, die sich in der Darstellung M_i von G transformieren, ist durch das Indextheorem von Atiyah und Singer gegeben:

$$N_{M_i} = \dim(R_i) - \frac{1}{2}\int_{K_3} c_2(V)\ \mathrm{index}(R_i). \tag{5.2}$$

Dabei ist der Index einer Darstellung D wie folgt definiert:

$$\mathrm{index}(D) = \frac{\mathrm{rang}(G)}{\dim(G)}\dim(D) j^2, \tag{5.3}$$

wobei j^2 der Eigenwert des quadratischen Casimiroperators ist. Für die Gruppen D_n gilt

$$\mathrm{index}(0) = 1,\ \mathrm{index}(v) = 2,\ \mathrm{index}(s) = \mathrm{index}(c) = 2^{n-3},\ \mathrm{index}(\mathrm{adj}) = 4(n-1), \tag{5.4}$$

sowie für A_n

$$\mathrm{index}(\mathrm{fundamental}) = 1,\ \mathrm{index}(\mathrm{adj}) = 2(n+1). \tag{5.5}$$

Ferner gibt es 20 weitere Eichsinglets, die von höherdimensionalen Gravitationsfeldern kommen. Für das $SU(2)-$Tangentialbündel auf K_3 ist $\int_{K_3} c_2(V) = 24$. Kompaktifiziert man die anfänglich zehndimensionale Theorie zunächst auf einem Torus, so hat man die Freiheit, Bündel V_a in die möglichen erweiterten Gruppenfaktoren des Torus einzubetten, und zwar: $SU(3)_T$, $SU(2)_T^2$ und $SU(2)_T$. Dazu müssen die Bedingungen

$$c_1(V_a) = 0, \quad \sum_a c_2(V_a) = c_2(TK_3) = 24 \tag{5.6}$$

gestellt werden, damit die Bündel kovariant konstante Spinoren erlauben sowie die Donaldson/Uhlenbeck/Yau–Gleichung (diese verlangt die Stabilität des Bündels) und die Anomaliekürzungsbedingungen erfüllen. Mit dem C–Programm zur Berechnung exakt lösbarer Modelle lassen sich zahlreiche Modelle mit allen Arten von Eichgruppen finden. Beispielsweise gibt es ein Modell mit Eichgruppe $SO(10) \times E_8$, in dessen Vakuumsektor weitere $N_e = 15$ masselose Vektorteilchen enthalten sind, die eine noch zu bestimmende Eichgruppe $G(13) \times U(1)_T^2$ der Dimension 15 bilden (In Wirklichkeit sind es nur 14 Vektormultiplets, die das Dilatonmultiplet und das Graviphoton des Gravitonmultiplets enthalten. Das Graviphoton und der Vektor des Dilatonmultiplets bilden den Anteil $U(1)_T^2$ der Eichgruppe.). Ferner gibt es $N_{16} = 10$ Hypermultiplets in der Spinor–, $N_{10} = 12$ in der Vektor– und $N_1 = 100$ in der Singletdarstellung von $SO(10)$. Bettet man einerseits ein $SU(4)$–Bündel mit $A_4^{E_8} = \int_{K_3} c_2(V) = 18$ in E_8 und ein $SU(3)$–Bündel mit $A_3^{SU(3)} = 6$ in die erweiterte torische Eichgruppe $SU(3)_T$ ein, so erhält man die Eichgruppe $G' = SO(10) \times E_8 \times U(1)_T^2$ mit dem masselosen Spektrum $N_{16} = 10$, $N_{10} = 12$, $N_1 = 87$. Gibt man $r = 13$ der Singlets einen VEW, so wird die erweiterte Eichgruppe der Dimension 15 zu einer $U(1)_T^2$ heruntergebrochen und die Spektren stimmen überein. Andererseits kann man dieses Modell als Mitglied einer ganzen Kaskade sukzessiver Symmetriebrechungen ansehen:

$$\begin{array}{ccccccccc} E_7 \longrightarrow E_6 & \searrow & & \nearrow & SU(5) \searrow & SU(4) & \nearrow SU(3) \longrightarrow SU(2) & \searrow & \\ & & SO(10) & & & \cong & & & 0. \\ SO(14) \longrightarrow SO(12) & \nearrow & & \searrow & SO(8) \nearrow & SO(6) & \searrow SO(4) \longrightarrow SO(2) & \nearrow & \end{array} \tag{5.7}$$

Das zugehörige E_7–Modell hat $N_{56} = 7$ und $N_1 = 76$ sowie eine Eichgruppenerweiterung der Dimension $N_e = 15$.

Ein weiteres Beispiel hat die Eichgruppe $E_8 \times E_8 \times U(1)_T^2 \times G(10)$ und $N_1 = 84$. Diese Modelle kann man verstehen, wenn man ein $SU(3)$–Bündel mit $A_3^{SU(3)} = 24$ in die torische $SU(3)_T$ einbettet.

In der folgenden Tabelle sind die Interpretationen als Bündel über K_3 für einige der exakt lösbaren Modelle aufgelistet. Es wird immer das Muttermodell mit Eichgruppe E_7 angegeben und in die Stelle in der Kaskade, wo das exakt lösbare Modell auftritt.

N_{56}	N_1	N_e	Bündel	erweiterte Eichgruppe	G'	r
10	$65 + r$	$10 + r$	$A_2^{E_8} = 24$	$G' \times SU(3)_T \times U(1)_T^2 \times G(r)$	$E_7, E_6, SO(12)$	$9, 6, 4, 2$
8	$62 + r$	$3 + r$	$A_2^{E_8} = 20$ $A_2^{SU(2)} = 4$	$G' \times U(1)_T^3 \times G(r)$	$SO(12), SO(10)$	$19, 14, 10$ $7, 5$
7	$63 + r$	$2 + r$	$A_2^{E_8} = 18$ $A_3^{SU(3)} = 6$	$G' \times U(1)_T^2 \times G(r)$	$E_6, SO(10)$	$13, 8, 5$
6	$65 + r$	$2 + r$	$A_2^{E_8} = 16$ $A_3^{SU(3)} = 8$	$G' \times U(1)_T^2 \times G(r)$	$SO(12)$	14
4	$69 + r$	$2 + r$	$A_2^{E_8} = 12$ $A_3^{SU(3)} = 12$	$G' \times U(1)_T^2 \times G(r)$	E_7, E_6	$17, 13, 6$ $14, 12$
2	$59 + r$	$2 + r$	$A_2^{E_8} = 8$ $A_{2,2}^{SU(2)^2} = 16$	$G' \times U(1)_T^2 \times G(r)$	$SO(14)$	21
1	$75 + r$	$2 + r$	$A_2^{E_8} = 6$ $A_3^{SU(3)} = 18$	$G' \times U(1)_T^2 \times G(r)$	E_7	7

Tabelle 45: *Exakt lösbare $N = 2$ Spektren.*

Man sollte bemerken, daß das Erscheinen der exzeptionellen Eichgruppe $SU(2)_T \times U(1)_T$ für den Torus in dem Beispiel mit $N_{56} = 8$ in keiner Weise aus dem Spektrum offensichtlich ist, denn die Daten würden auch zu einer $SU(3)_T$ passen. Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, enthält das masselose Spektrum tatsächlich einen weiteren $U(1)-$Strom, relativ zu dem alle anderen Felder keine Ladung tragen. Sicher ist diese Tabelle der $(0,4)-$Modelle, die von den zu $(0,2)$ verallgemeinerten Gepnermodellen abstammen, nicht komplett, doch sieht man, daß alle Modelle sich als K_3-Kompaktifizierungen einordnen lassen. Somit kann man darauf hoffen, daß sich auch alle $(0,2)-$supersymmetrischen Stringvakua klassifizieren lassen, obwohl es im Detail schwierig ist, wie im letzten Kapitel zu sehen war.

5.2. Spezielle Punkte erweiterter Symmetrie

Nachdem eben exakt lösbare $(0,4)-$Stringmodelle mit gewissen Bündeln über $K_3 \times T^2$ identifiziert wurden, soll es nun um die Bestimmung der kompletten Eichsymmetrie des Modells gehen. Bei den Gepnermodellen ist dies in den meisten Fällen nur ein abelscher Faktor $U(1)^{r-1}$. Dies muß aber nicht notwendigerweise der Fall sein, wenn die Zustandssumme mit weiteren einfachen Strömen konstruiert wird. Diese exakt lösbaren Punkte sind deshalb interessant, weil man an ihnen ablesen kann, wie der Parameterraum der heterotischen $N = 2$ Strings verbunden ist. Gibt man diversen Arten von Hyper– und Vektormultiplets VEWe, so kann man von einem Ast des Raums auf einen anderen kommen, wobei man das Spektrum (N_H, N_V) ändert. Für solche Punkte stehen SKFTen in natürlicher Weise zur Verfügung.
In [30] wurde dargelegt, daß einige heterotische $N = 2$ Modelle eine duale Beschreibung als Modelle vom Typ IIA auf einer CYM besitzen. Da im String vom Typ IIA das Dilaton zu einem Hypermultiplet gehört, lautet das Spektrum $(N_H, N_V) = (h^{2,1} + 1, h^{1,1} + 1)$. Wenn so eine Dualität gilt, so kann man den ganzen Quantenparameterraum der Vektormultiplets auf der Seite des Typs IIA und den der Hypermultiplets auf der heterotischen Seite berechnen. Analog zur Spiegelsymmetrie bei CYMen kann man auf diese Weise die vollen Quantenkorrekturen erhalten.

Erstes Beispiel, basierend auf $\mathbf{(1)^3\,(4)^3}$

Im folgenden wird eines der Modelle aus der obigen Tabelle genauer diskutiert. Ausgangspunkt ist die Eichsymmetrie $SO(10) \times E_8 \times U(1)_T^2 \times G(13)$ und das masselose Spektrum $N_{16} = 10$, $N_{10} = 12$, $N_1 = 100$ der exakt lösbaren Theorie. Schaut man sich die Kopplungen des rechtslaufenden Vakuums in der Zustandssumme an, so gibt es neben den sechs abelschen Strömen der einzelnen minimalen Faktoren sieben weitere. Diese bilden die Liealgebra einer $SU(3)_E \times U(1)_E^5$, so daß die komplette Eichgruppe

$$SO(10) \times E_8 \times SU(3)_E \times U(1)_E^5 \times U(1)_T^2 \tag{5.8}$$

lautet. Nach der Bestimmung der Eichgruppe ist zu zeigen, wie sich das masselose Spektrum nach den Darstellungen von $SO(10) \times SU(3)_E$ zerlegt. Das sieht wie folgt aus:

$$(16,3) + 7 \times (16,1) + (10,3) + 9 \times (10,1) + 28 \times (1,3) + 16 \times (1,1). \tag{5.9}$$

Dabei wurden die Ladungen bzgl. der $U(1)_E^5$ weggelassen, wo es für jeden $U(1)_E-$Faktor mindestens einen Zustand mit Ladung gibt. Diese können daher weggehiggst werden.
Die Zerlegung (5.9) erlaubt die Untersuchung des Higgssektors des Modells, indem nach und nach einigen Feldern in der fundamentalen Darstellung der Eichgruppe VEWe gegeben werden, womit diese zu einer Untergruppe heruntergebrochen wird. Anschließend gibt man der adjungierten Darstellung der restlichen

Gruppe einen VEW und kommt damit zu einem generischen Punkt im Vektorparameterraum. Das masselose Spktrum ist durch zwei Zahlen bestimmt, nämlich die Anzahl der Hyper– und Vektormultiplets. In der folgenden Tabelle sind alle Modelle, die in der Higgsphase vorkommen und ein geeignetes Dual in den Listen von [31,58] haben, gesammelt. Das sind ca. 6% aller Spektren, die in der kompletten Kette vorkommen. Die zweite Spalte enthält die erweiterte Eichgruppe, bevor die Bewegung im Parameterraum erfolgte.

(N_H, N_V)	$G' \subset SO(10) \times E_8 \times SU(3)_E \times U(1)^5_E \times U(1)^2_T$	K_3–Faserung
$(322, 10)$	$E_8 \times U(1)^2_T$	$\mathbb{P}_{(1,1,6,16,24)}[48]$
$(221, 11)$	$SU(2) \times E_8 \times U(1)^2_T$	$\mathbb{P}_{(1,1,6,10,18)}[36]$
$(168, 12)$	$SU(3) \times E_8 \times U(1)^2_T$	$\mathbb{P}_{(1,1,6,10,12)}[30]$
$(129, 13)$	$SU(4) \times E_8 \times U(1)^2_T$	$\mathbb{P}_{(1,1,6,10,12,14)}[20\ 24]$
$(144, 12)$	$SU(2) \times E_8 \times SU(2)_E \times U(1)^2_T$	$\mathbb{P}_{(1,1,6,8,10)}[26]$
$(55, 13)$	$SO(2) \times E_8 \times SU(3)_E \times U(1)^2_T$	$\mathbb{P}_{(2,2,5,5,6)}[20]$
$(50, 14)$	$SO(4) \times E_8 \times SU(3)_E \times U(1)^2_T$	$\mathbb{P}_{(5,5,8,12,30)}[60]$
$(33, 21)$	$SO(8) \times E_8 \times SU(3)_E \times U(1)^5_E \times U(1)^2_T$	$\mathbb{P}_{(3,3,4,4,10)}[24]$

Tabelle 46: *Heterotische/Typ IIA duale Paare bei* $(1)^3(4)^3$.

Die Kaskade mit den ersten vier Modellen findet man auch in [59]. Dagegen machen die zweiten vier Modelle von der erweiterten Eichgruppe $SU(3)_E \times U(1)^5_E$ Gebrauch und führen daher in neue Regionen des Parameterraums.

Zweites Beispiel, basierend auf $(1)(4)^4$

Als zweites Beispiel soll ein Modell mit Eichgruppe $SO(10) \times E_8 \times U(1)^2_T \times G(8)$ und dem masselosen Spektrum $N_{16} = 12$, $N_{10} = 14$ und $N_1 = 97$ betrachtet werden. Schaut man wiederum die Kopplungen des rechtslaufenden Vakuums an, so erkennt man eine Erweiterung um $SU(2)_E \times U(1)$, wobei kein Zustand des masselosen Spektrums eine Ladung bzgl. der $U(1)$ trägt. Das ist ein Zeichen dafür, daß die Eichgruppe des Torus $SU(2)_T \times U(1)^3_T$ lautet, wobei ein Bündel mit $A_2^{SU(2)} = 4$ in die $SU(2)_T$ eingebettet ist. Das masselose Spektrum gruppiert sich wie folgt in die Darstellung von $SO(10) \times SU(2)_E$:

$$\begin{aligned} &4 \times (16, 2) + 4 \times (16, 1) + (10, 3) + 4 \times (10, 2) + 3 \times (10, 1) + \\ &4 \times (1, 4) + 11 \times (1, 3) + 16 \times (1, 2) + 16 \times (1, 1), \end{aligned} \tag{5.10}$$

was in gewisser Weise verwunderlich ist, treten doch höhere Spindarstellungen von $SU(2)$ auf. Somit können also einfache Ströme für das Auftreten von Kac/Moody–Algebren höherer Stufe sorgen, in diesem Fall $SU(2)_3$.

Wie im Beispiel vorhin sind auch die Higgsphasen interessant, die wie folgt lauten:

(N_H, N_V)	$G' \subset SO(10) \times E_8 \times SU(2)_E \times U(1)^4_E \times U(1)^3_T$	K_3–Faserung
$(377, 11)$	$E_8 \times U(1)^3_T$	$\mathbb{P}_{(1,1,8,20,30)}[60]$
$(252, 12)$	$SU(2) \times E_8 \times U(1)^3_T$	$\mathbb{P}_{(1,1,8,12,22)}[44]$
$(187, 13)$	$SU(3) \times E_8 \times U(1)^3_T$	$\mathbb{P}_{(1,1,8,12,14)}[36]$
$(140, 14)$	$SU(4) \times E_8 \times U(1)^3_T$	$\mathbb{P}_{(1,1,8,12,14,16)}[24\ 28]$
$(117, 15)$	$SO(8) \times E_8 \times U(1)^3_T$	$\mathbb{P}_{(3,3,8,28,42)}[84]$

Tabelle 47: *Heterotische/Typ IIA duale Paare bei* $(1)(4)^4$.

Die ersten vier Modelle findet man auch in [59].

Drittes Beispiel, basierend auf $(1)^3\,(4)^3$

Es soll noch kurz ein drittes Beispiel mit der Eichgruppe $SO(12)\times E_8\times SU(3)_E\times SU(2)_E\times U(1)_E^3\times U(1)_T^2$ am exakt lösbaren Punkt betrachtet werden. Das masselose Spektrum arrangiert sich gemäß

$$\begin{aligned}&(32,1,2)+2\times(32,1,1)+2\times(12,3,1)+2\times(12,1,2)+2\times(12,1,1)+\\&4\times(1,3,2)+10\times(1,3,1)+4\times(1,1,2)+14\times(1,1,1)\end{aligned}\tag{5.11}$$

in den Darstellungen von $SO(12)\times SU(3)_E\times SU(2)_E$. Der einzig mögliche Kandidat für ein duales Modell vom Typ IIA kann nur dadurch erreicht werden, daß zunächst die $SU(2)_E\times U(1)_E^3$ weggehiggst, zu einem generischen Punkt der $SU(3)_E-$Vektorparameter gegangen und dann die $SO(12)$ auf $SU(2)$ gebrochen wird. Dies führt für generische Werte der $SU(2)-$Deformationen auf das Spektrum $(N_H,N_V)=(97,13)$, welches zur Kompaktifizierung vom Typ IIA auf der K_3-Faserung $\mathbb{P}_{(1,1,6,8,8,10)}$[16 18] dual sein könnte.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß bereits anhand dieser wenigen Beispiele zahlreiche mögliche Kandidaten für heterotische Duale von Strings vom Typ IIA gefunden werden konnten. Bislang blieb allerdings die versteckte E_8 der Eichgruppe unangetastet, was zu $N_V>9$ führt. Um das zu vermeiden, muß die explizite Konstruktion exakt lösbarer $(0,2)-$Modelle entsprechend umformuliert werden.

5.3. Das Brechen der versteckten E$_8$

Geometrisch ist es klar, daß man wesentlich allgemeinere Eichgruppen G' erhalten kann, indem man auch ein Vektorbündel in den bislang versteckten E_8-Faktor einbettet. Da aber dann auch andere Darstellungen als die Singletdarstellung von G' im masselosen Spektrum auftreten können, kann die Anzahl der Vektormultiplets weiter vermindert werden, indem man Teile dieser gebrochenen Eichgruppe weghiggst. Dazu ist die SKFT–Konstruktion zu erweitern.

Im Sinne der expliziten Konstruktion wird die Einbettung eines $SU(2)-$Bündels in die E_8 (das ist der einfachste Fall, ein Brechen der E_8 auf E_6 schaffte das Programm nicht mehr) am besten durch eine Erweiterung von $SO(12)$ nach E_7 durch einen spektralen Fluß beschrieben. Dieser muß die richtigen Werte $(h,q)=(\frac{1}{4},1)$ für konforme Dimension und Ladung tragen. Das kann auf bewährte Weise durch Einführung zweier weiterer $U(1)_2-$Faktoren geschehen, die sich mit der $SO(12)$ zur korrekten zentralen Ladung $c=8$ der E_8-Stromalgebra addieren. Ausgangspunkt ist also das folgende links/rechts–symmetrische Modell, wieder in Lichtkegeleichung:

Bestandteil	c	$\bar{c}$
$D=2$ transversale Raumzeit, x^μ	2	2
$N=2$ Virasoro	9	9
$U(1)_2$	1	1
Eichgruppe $SO(8)$	4	4
$U(1)_2\times U(1)_2$	2	2
Eichgruppe $SO(12)$	6	6

Tabelle 48: *SKFT für* $SO(10)\times E_7$.

Die Zustandssumme wird dann wie folgt aus modularen Invarianten von einfachen Strömen zusammengesetzt:

$$
\begin{aligned}
Z \sim \vec{\chi}(\tau)\, \mathcal{M}(\mathcal{J}_{SO(12)\to E_7})\, M(J_{GSO_L}) \prod_l M(\Upsilon_l)\; M(J_{GSO_R}) \\
\prod_i M(J_i)\, M(J_{\mathrm{erw}}) \prod_{k=1}^{2} \mathcal{M}(\mathcal{J}^k_{SO(12)\to E_8})\; \vec{\chi}(\overline{\tau}),
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

wobei die neu eingeführten einfachen Ströme $\mathcal{J}$ nur auf dem Teil $U(1)_2^2 \times SO(12)$ wirken:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_{SO(12)\to E_7} &= (1)(1)(s) \\
\mathcal{J}^1_{SO(12)\to E_8} &= (2)(2)(0) \\
\mathcal{J}^2_{SO(12)\to E_8} &= (1)(1)(s).
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

Die letzten beiden Ströme sorgen dafür, daß rechts die Eichgruppe auf E_8 erweitert wird, so daß immer noch die bosonische Stringabbildung angewendet werden kann, um schließlich und endlich ein heterotisches Modell zu erhalten. Anders als die Modelle mit der versteckten E_8–Eichsymmetrie dürfen die die Links/rechts–Symmetrie brechenden einfache Ströme Υ_l auch Beiträge aus dem Sektor $U(1)_2^2 \times SO(12)$ haben.

5.4. Beispiele für diese Brechung

Nun geht es darum, ein Tensorprodukt $N = 2$ minimaler Modelle und zugehörige einfache Ströme Υ_l zu finden, so daß die versteckte E_8 auf E_7 gebrochen wird und das Spektrum $N = 2$ Raumzeit–Supersymmetrie aufweist:

a.) Ausgangspunkt ist das Modell $(1)(4)^4$ mit drei weiteren einfachen Strömen Υ_l, die das folgende masselose Spektrum mit der Eichgruppe $E_7 \times E_7 \times SU(3)_T \times U(1)_T^2 \times G(10)$ produzieren, wobei aber nur Singlets unter $SU(3)_T$ auftreten:

$$N_{56,1} = 4, \quad N_{1,56} = 4, \quad N_{1,1} = 72. \tag{5.14}$$

Die geometrische Interpretation lautet wie folgt: zunächst wird die zehndimensionale Theorie auf einem Torus auf acht Dimensionen kompaktifiziert, was zu einer Eichgruppe $E_8 \times E_8 \times SU(3)_T \times U(1)_T^2$ führt. Sodann wird ein $SU(2)$–Bündel mit $A_2^{E_8} = 12$ in jeden der beiden E_8–Faktoren eingebettet, die $SU(3)_T$ bleibt ungebrochen. Das masselose Spektrum lautet schließlich nach dem Indextheorem (2.32)

$$N_{56,1} = 4, \quad N_{1,56} = 4, \quad N_{1,1} = 62. \tag{5.15}$$

Nach Weghiggsen der $G(10)$ stimmen die Spektren überein.

b.) Ein weiteres Beispiel mit denselben Ausgangsdaten hat die Eichgruppe $E_7 \times E_7 \times U(1)_T^2 \times G(14)$:

$$N_{56,1} = 2, \quad N_{1,56} = 2, \quad N_{1,1} = 76. \tag{5.16}$$

Hier wird ein $SU(2)$–Bündel mit $A_2^{E_8} = 8$ in jeden der beiden E_8–Faktoren und ein $SU(3)$–Bündel mit $A_3^{SU(3)} = 8$ in die torische $SU(3)_T$ eingebettet. Das masselose Spektrum davon ist

$$N_{56,1} = 2, \quad N_{1,56} = 2, \quad N_{1,1} = 62. \tag{5.17}$$

Wiederum ergibt sich nach Weghiggsen der $G(14)$ eine Übereinstimmung der Spektren.

c.) Das nächste Beispiel hat die Eichgruppe $SO(10) \times E_7 \times U(1)_T^2 \times G(10)$ und

$$N_{16,1} = 8, \quad N_{10,1} = 10, \quad N_{1,1} = 88. \tag{5.18}$$

Nach Weghiggsen von $G(10)$ stimmt das Spektrum mit dem folgenden geometrisch erhaltenen überein: ein $SU(4)$–Bündel mit $A_4^{E_8} = 16$ wird in die eine und ein $SU(2)$–Bündel mit $A_2^{E_8} = 4$ in die andere E_8 eingebettet, sowie ein $SU(3)$–Bündel mit $A_3^{SU(3)} = 4$ in die torische $SU(3)_T$.

d.) Ein nur leicht anderes Modell hat die Eichgruppe $SO(10) \times E_7 \times U(1)_T^2 \times G(8)$ und

$$N_{16,1} = 4, \quad N_{10,1} = 6, \quad N_{1,1} = 80, \quad N_{1,56} = 1. \tag{5.19}$$

Higgst man hier die $G(8)$ weg, so erhält man dasselbe Spektrum wie beim Einbetten eines $SU(4)$–Bündels mit $A_4^{E_8} = 12$ in die erste, eines $SU(2)$–Bündels mit $A_2^{E_8} = 6$ in die zweite E_8 und eines $SU(3)$–Bündels mit $A_3^{SU(3)} = 6$ in die torische $SU(3)_T$.

Es gibt viele andere Beispiele, die sich alle durch Einbettungen geeigneter Bündel in beide E_8–Faktoren beschreiben lassen. Somit ist ein Schritt dahin getan, die entsprechende SKFT zu beliebigen Bündeln über K_3 zu finden. Man kann annehmen, daß diese Konstruktion nicht auf Modelle mit $N = 2$ Raumzeit–Supersymmetrie beschränkt ist, d.h. man bettet dann stabile Bündel über CYMen in beide E_8–Faktoren ein. Dies ist die allgemeine Konstruktion $(0,2)$–supersymmetrischer (nicht)linearer σ–Modelle, die intensiv von Distler und Kachru untersucht wurden [45]. Weiterhin ist die Verallgemeinerung auf Einbettungen von Bündeln mit höherem Rang in die zweite E_8 offensichtlich, man startet mit $U(1)_2^r \times SO(16-2r)$ in dem Sektor, wo vorher diese E_8 war, und wählt geeignete einfache Ströme, die sowohl den rechten Sektor auf E_8 als auch den linken auf E_{9-r} erweitern.

Im folgenden wird jetzt noch das erste Beispiel eingehender untersucht, es wird sich zeigen, daß es Anlaß zu vielen möglichen dualen Paaren heterotischer und Strings vom Typ IIA gibt. Schaut man sich das masselose Spektrum genauer an, so sieht man, daß die Eichgruppe durch

$$G = E_7 \times E_7 \times SU(3)_E \times U(1)_E^2 \times SU(3)_T \times U(1)_T^2 \tag{5.20}$$

gegeben ist, wobei der Index T den Torus und E die spezielle Erweiterung symbolisiert. Das masselose Spektrum ordnet sich wie folgt an:

$$4 \times (56,1,1) + 4 \times (1,56,1) + 18 \times (1,1,3) + 18 \times (1,1,1). \tag{5.21}$$

Ferner gibt es Singlets, die eine nichtverschwindende Ladung bzgl. der beiden $U(1)_2$–Ströme tragen. Wie zu erwarten war, sind alle Zustände Singlets unter der Eichgruppe, die vom Torus kommt. Bis auf die erweiterte Eichsymmetrie wurde dieses Modell auch von Kachru und Vafa untersucht [30], dort wurde gezeigt, daß durch vollständiges Weghiggsen der beiden E_7–Faktoren und der $SU(3)_E \times U(1)_E^2$ ein Spektrum $(N_H, N_V) = (244, 4)$ folgt. Die Hyperfläche $\mathbb{P}_{(1,1,2,8,12)}$[24] hat die Hodgezahlen $(h^{2,1}, h^{1,1}) = (243, 3)$, ist also ein guter Kandidat für ein duales Modell vom Typ IIA. Man findet weitere Kandidaten für solche Dualitäten im

Parameterraum des Modells. In der folgenden Tabelle sind alle möglichen dualen Paare aufgelistet, die man durch allmähliches Brechen von Teilen der Eichgruppe G bekommen kann. Die zweite Spalte zeigt, wieweit die Eichgruppe heruntergebrochen wurde, bevor den Singlets VEWe zugeteilt wurden.

(N_H, N_V)	$G' \subset E_7 \times E_7 \times SU(3)_E \times U(1)_E^2 \times SU(3)_T \times U(1)_T^2$	K_3-Faserung
$(244, 4)$	$U(1)_T^4$	$\mathbb{P}_{(1,1,2,8,12)}[24]$
$(165, 9)$	$SO(10) \times U(1)_T^4$	$\mathbb{P}_{(1,1,4,6,12)}[24]$
$(128, 8)$	$SO(4) \times SO(4) \times U(1)_T^4$	$\mathbb{P}_{(2,3,3,16,24)}[48]$
$(97, 13)$	$SO(10) \times SO(8) \times U(1)_T^4$	$\mathbb{P}_{(1,1,6,8,8,10)}[16\ 18]$
$(123, 11)$	$SU(4) \times SU(4) \times U(1)_E \times U(1)_T^4$	$\mathbb{P}_{(1,1,4,8,10,12)}[16\ 20]$
$(108, 12)$	$SU(5) \times SU(4) \times U(1)_E \times U(1)_T^4$	$\mathbb{P}_{(3,3,4,20,30)}[60]$
$(105, 13)$	$SO(10) \times SU(4) \times U(1)_E \times U(1)_T^4$	$\mathbb{P}_{(1,1,6,8,10,10)}[16\ 20]$
$(132, 12)$	$E_6 \times SU(2)_E \times U(1)_E \times U(1)_T^4$	$\mathbb{P}_{(1,1,6,8,8)}[24]$
$(126, 10)$	$SU(4) \times SU(2) \times SU(2)_E \times U(1)_E \times U(1)_T^4$	$\mathbb{P}_{(1,1,4,6,8)}[20]$
$(109, 13)$	$SO(10) \times SU(2) \times SU(2)_E \times U(1)_E^2 \times U(1)_T^4$	$\mathbb{P}_{(1,1,6,8,10,12)}[18\ 20]$
$(154, 10)$	$SU(3) \times SU(3)_E \times U(1)_E^2 \times U(1)_T^4$	$\mathbb{P}_{(1,1,4,8,10)}[24]$
$(112, 10)$	$SO(4) \times SU(2) \times SU(3)_E \times U(1)_E \times U(1)_T^4$	$\mathbb{P}_{(1,1,4,6,6)}[18]$
$(82, 10)$	$SO(4) \times SO(4) \times SU(3)_E \times U(1)_T^4$	$\mathbb{P}_{(1,1,4,4,6,8)}[12\ 12]$
$(63, 15)$	$SU(5) \times SU(4) \times SU(3)_E \times U(1)_E^2 \times U(1)_T^4$	$\mathbb{P}_{(3,3,8,10,24)}[48]$
$(40, 16)$	$SO(10) \times SO(10) \times SU(3)_E \times U(1)_T^4$	$\mathbb{P}_{(2,4,4,5,5)}[20]$

Tabelle 49: *Heterotische/Typ IIA duale Paare für* $SU(3)_T$.

Man sollte bemerken, daß nur die ersten vier Paare allein aus der Kenntnis der generischen Eichgruppe gewonnen werden können. Der ganze Rest hat einen nichtverschwindenden Beitrag von der Erweiterung $SU(3)_E \times U(1)_E^2$. Bislang ging es immer nur um Dualitäten mit Typ IIA. Schaut man jedoch in die Listen von [58], so kann man auch einige duale Paare heterotisch/Typ IIB ablesen, die in der folgenden Tabelle aufgelistet sind. Für die Kompaktifizierung eines Strings vom Typ IIB auf einer CYM lautet das masselose Spektrum $(N_H, N_V) = (h^{1,1}+1, h^{2,1}+1)$, die beiden Hodgezahlen sind also gerade vertauscht.

(N_H, N_V)	$G' \subset E_7 \times E_7 \times SU(3)_E \times U(1)_E^2 \times SU(3)_T \times U(1)_T^2$	K_3-Faserung
$(42, 18)$	$SO(10) \times SO(10) \times SU(3)_E \times U(1)_E^2 \times U(1)_T^4$	$\mathbb{P}_{(4,9,9,10,22)}[54]$
$(35, 17)$	$E_6 \times SO(10) \times SU(3)_E \times U(1)_T^4$	$\mathbb{P}_{(4,8,10,11,11)}[44]$
$(30, 18)$	$E_6 \times E_6 \times SU(3)_E \times U(1)_T^4$	$\mathbb{P}_{(8,10,12,15,15)}[60]$

Tabelle 50: *Heterotische/Typ IIB duale Paare für* $SU(3)_T$.

Schaut man sich Beispiel b.) genauer an, so findet man für die volle Eichgruppe

$$G = E_7 \times E_7 \times SU(3)_E \times SU(2)_E \times U(1)_E^3 \times U(1)_T^2. \tag{5.22}$$

Das masselose Spektrum kann wie folgt nach dieser Eichgruppe ausreduziert werden:

$$\begin{aligned} &2 \times (56,1,1,1) + 2 \times (1,56,1,1) + 4 \times (1,1,3,2) + \\ &10 \times (1,1,3,1) + 4 \times (1,1,1,2) + 14 \times (1,1,1,1). \end{aligned} \tag{5.23}$$

Obwohl die beiden E_7-Faktoren aus Mangel an Singlets höchstens auf $SO(8)$ heruntergebrochen werden können, findet man hier auch weitere duale Paare in den verschiedenen Higgsphasen, die in der folgenden Tabelle gesammelt sind.

(N_H, N_V)	$G' \subset E_7 \times E_7 \times SU(3)_E \times SU(2)_E \times U(1)_E^3 \times U(1)_T^2$	K_3-Faserung
$(76,10)$	$SO(8) \times SO(8) \times U(1)_T^2$	$\mathbb{P}_{(1,1,4,4,6,6)}[10\ 12]$
$(77,11)$	$SO(8) \times SO(8) \times U(1)_E \times U(1)_T^2$	$\mathbb{P}_{(1,1,4,6,6,6)}[12\ 12]$
$(47,11)$	$SO(8) \times SO(8) \times SU(2)_E \times U(1)_T^2$	$\mathbb{P}_{(4,5,5,6,20)}[40]$
$(44,12)$	$SO(10) \times SO(8) \times SU(2)_E \times U(1)_T^2$	$\mathbb{P}_{(6,7,7,8,28)}[56]$
$(40,16)$	$E_6 \times E_6 \times SU(2)_E \times U(1)_E \times U(1)_T^2$	$\mathbb{P}_{(2,4,4,5,5)}[20]$

Tabelle 51: *Heterotische/Typ IIA duale Paare für* $SU(2)_E$.

Lediglich das letzte Modell trat schon im Beispiel a.) auf. Ferner gibt es noch zwei duale Paare mit Modellen vom Typ IIB:

(N_H, N_V)	$G' \subset E_7 \times E_7 \times SU(3)_E \times SU(2)_E \times U(1)_E^3 \times U(1)_T^2$	K_3-Faserung
$(45,15)$	$E_6 \times SO(8) \times SU(2)_E \times U(1)_E^2 \times U(1)_T^2$	$\mathbb{P}_{(5,5,12,16,22)}[60]$
$(34,18)$	$E_7 \times E_7 \times SU(2)_E \times U(1)_E \times U(1)_T^2$	$\mathbb{P}_{(5,5,6,8,16)}[40]$

Tabelle 52: *Heterotische/Typ IIB duale Paare für* $SU(2)_E$.

Somit ließen sich durch das Studieren der erweiterten Eichsymmetrie von nur vier exakt lösbaren Modellen bereits 32 bzw. fünf duale Paare finden. Da die Liste der K_3-Faserungen noch lange nicht komplett erstellt ist, sollten sogar noch mehr heterotische Strings in der Higgsphase der hier untersuchten Modelle auftreten, die eine duale Beschreibung durch Typ II besitzen.

5.5. Zusammenfassung

Die nähere Untersuchung von gepnerähnlichen Modellen mit $(0,4)$–Weltflächen–Supersymmetrie ist wesentlich einfacher als die von denen mit $(0,2)$, hier kann man für alle Modelle ein nichtlineares $\sigma-$Modell auf $K_3 \times T^2$ mit Einbettungen von Vektorbündeln in die Eichfreiheitsgrade angeben. Es gibt in zwei komplexen Dimensionen halt nur eine CYM. Ferner wurde die Konstruktion der $(0,2)-$SKFTen auf den Fall erweitert, wo auch die versteckte Eichgruppe E_8 zu einer Untergruppe heruntergebrochen wird. Durch die Berechnung der kompletten erweiterten Eichsymmetrie einiger Modelle ließen sich Einblicke in den Parameterraum heterotischer $N=2$ Modelle gewinnen, die auf Kandidaten für duale Paare mit Strings vom Typ II führen. Im nächsten Kapitel wird nun der Parameterraum eines echten $(0,2)-$Modells untersucht, nämlich des schon identifizierten $(80,0)$.

6. Der Parameterraum eines (0,2)–Modells

Diese Untersuchung soll an dem $(80,0)-$Modell mit Eichgruppe $SO(10)$ erfolgen. Für eine eingehende Betrachtung reichen die oben erwähnten Daten für die Generationen und Vektoren nicht aus, man braucht noch die explizite Form der Singlets und die Struktur der Eichgruppe.

6.1. Singlets und Eichgruppenerweiterung

Das Spektrum ordnet sich nach den Darstellungen der generischen Eichgruppe $SO(10)$: $N_{16} = 80$ chirale Felder in der Spinor–, $N_{10} = 74$ in der Vektor– und $N_1 = 350$ in der Singletdarstellung. Ferner gibt es neben den Eichbosonen der $SO(10) \times E_8$ im Spektrum weitere $N_e = 7$ Vektormultiplets. Da der einfache Strom Υ und sein ladungskonjugiertes selbst dazugehören, kann diese Erweiterung nicht einfach $U(1)^7$ sein. Man rechnet nach, daß die drei Felder der konformen Dimension eins

$$\begin{aligned} J^{\pm}(z) &= \Phi^3_{\mp 1}(z) \otimes e^{\mp i\sqrt{\frac{5}{3}}\phi_1(z)} \otimes e^{\pm i\frac{1}{2}\phi_{U(1)_2}(z)}, \\ J^3(z) &= \frac{1}{2}\left(-5\; j_1(z) + 3\; j_{U(1)_2}(z)\right) \end{aligned} \tag{6.1}$$

eine $SU(2)$–Kac/Moody–Algebra der Stufe $k = 3$ bilden. Dabei sind $\Phi^3_{\mp 1}(z)$ primäre Felder des $k = 3$ parafermionischen Modells, und die $U(1)-$Ströme des ersten $N = 2$ minimalen Modells und der $U(1)_2$ sind $j_1 = i\sqrt{\frac{3}{5}}\partial\phi_1$ bzw. $j_{U(1)_2} = i\partial\phi_{U(1)_2}$. Somit besteht die komplette Eichgruppe dieses Modells in $G = SO(10) \times E_8 \times SU(2)_3 \times U(1)^4$ und das masselose Spektrum sollte sich danach zerlegen lassen. $J^{\pm}$ entspricht genau dem einfachen Strom Υ und seinem ladungskonjugierten.

In dem Kapitel über die Identifikation des Modells wurde die explizite Form der Zustände in der Spinor– und Vektordarstellung von $SO(10)$ sowie ihre monomiale Darstellung angegeben. Zudem wurden die Yukawakopplungen $\langle \mathbf{10}\;\mathbf{16}\;\mathbf{16}\rangle$ mit dem monomialen Ring $\mathbb{C}[x_i, y_j]/\mathcal{I}$ identifiziert. Die x_i sind vier Koordinaten vom Gewicht eins und die y_j zwei vom Gewicht zwei. Das Ideal $\mathcal{I}$ wird von den Relationen $x_i^4 = 0$ und $y_j\, y_k = 0$ erzeugt. Derselbe monomiale Ring tritt als der Kohomologiering der CYM $\mathbb{P}_{(1,1,1,1,2,2)}[4\;4]$ mit dem Bündel $V(1,1,1,1,1;5)$ auf. Damit ließ sich schließen, daß die exakt lösbare SKFT einen bestimmten Punkt im Parameterraum dieses $(0,2)-$Modells beschreibt. Es wurde aber nicht herausgearbeitet, zu welchen Punkt die SKFT denn nun gehört, insbesondere war die Form der quasihomogenen Polynome $W_{1,2}(x_i, y_j)$ und $F_{1,\ldots,5}(x_i, y_j)$, die den vollständigen Polynomschnitt für die CYM bzw. das Bündel bestimmen, nicht geklärt. Ferner würde man gerne wissen, wie groß der Radius der Kählerklasse an diesem Punkt ist. Um all diese Fragen zu beantworten, sind die Singletfelder zu untersuchen.

Ein Singlet (daher tritt im Gegensatz zu (4.2) kein λ^a auf) im (–1)–Geistbild ist von der Form

$$V_{-1}(z,\overline{z}) = e^{-\rho(\overline{z})}\mathcal{O}_1(z,\overline{z})\;\mathcal{F}(z)\; e^{ikX(z,\overline{z})}, \tag{6.2}$$

wobei $\mathcal{O}_1$ ein Operator der $N = 2$ Theorie mit $(c,\overline{c}) = (9,9)$ ist und $\mathcal{F}$ für den linkslaufenden $U(1)_2-$Teil steht. Das Produkt $\mathcal{O}_1\,\mathcal{F}$ hat als ganzes die konforme Dimension $(h,\overline{h}) = (1,\frac{1}{2})$ und die Ladung $(q,\overline{q}) = (0,-1)$. In den folgenden beiden Tabellen wird die explizite Form dieses internen Operators für alle 350 Singlets des Modells angegeben. Die dabei auftretenden Entartungen haben mehrere Gründe. Erstens gibt es eine Permutationssymmetrie S_4 in den letzten vier minimalen Faktoren. Zweitens gibt es vier erlaubte Darstellungen von $SU(2)_3$ mit der Vielfachheit des Grundzustandes von eins bis vier. Von letzteren sind in den Tabellen nur die mit der höchsten $U(1)_2-$Quantenzahl angegeben, die anderen Zustände des Multiplets erhält man durch Anwendung des Absteigeoperators J^-. Drittens, falls ein Zustand wie z.B.

$$\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right]\left[3\begin{matrix}3 & 2\\ 3 & 0\end{matrix}\right]\left[2\begin{matrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right][0] \tag{6.3}$$

auftritt, so auch ein Zustand

$$\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right]\left[3\begin{matrix}3 & 0\\ 3 & 0\end{matrix}\right]\left[2\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right][0]. \tag{6.4}$$

Das linkslaufende $G^i = [0\,{}^{0\ 2}_{0\ 0}]$ kann unter allen nichtverschwindenden Feldern in den letzten vier minimalen Faktoren permutiert werden. Gemäß der Terminologie von [16] werden die unverdrehten Felder mit S und die verdrehten mit S' bezeichnet.

Typ	Exakte Form $\mathcal{O}_1\mathcal{F}$	$SU(2)-$Darstellung	Vielfachheit
S_a	$\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right]\left[3\begin{matrix}3 & 2\\ 3 & 0\end{matrix}\right]\left[2\begin{matrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right][0]$	1	24
S_b	$\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right]\left[3\begin{matrix}3 & 2\\ 3 & 0\end{matrix}\right]\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right][0]$	1	36
S_c	$\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right]\left[2\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & 0\end{matrix}\right]\left[2\begin{matrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{matrix}\right]\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right][0]$	1	36
S_d	$\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right]\left[2\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & 0\end{matrix}\right]\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right][0]$	1	16
S_e	$\left[3\begin{matrix}3 & 0\\ 3 & 0\end{matrix}\right]\left[2\begin{matrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right][2]$	4	16
S_f	$\left[3\begin{matrix}3 & 0\\ 3 & 0\end{matrix}\right]\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right][2]$	4	24
S_g	$\left[2\begin{matrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{matrix}\right]\left[3\begin{matrix}3 & 2\\ 3 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right][0]$	2	8
S_h	$\left[2\begin{matrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{matrix}\right]\left[2\begin{matrix}2 & 2\\ 2 & 0\end{matrix}\right]\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right][0]$	2	48
S_i	$\left[2\begin{matrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{matrix}\right]\left[1\begin{matrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{matrix}\right]\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right][0]$	2	24
S_j	$\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]\left[3\begin{matrix}3 & 0\\ 3 & 0\end{matrix}\right]\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right][2]$	3	36
S_k	$\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]\left[2\begin{matrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{matrix}\right]\left[2\begin{matrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right][2]$	3	18
S_l	$\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]\left[2\begin{matrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{matrix}\right]\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]\left[0\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right][2]$	3	36
S_m	$\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right]\left[1\begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right][2]$	3	3

Tabelle 53: *Unverdrehte Singlets.*

Dies sind genau 325 der 350 Singlets. Die restlichen 25 Zustände kommen in verdrehten Sektoren der GSO_R-Projektion vor:

Typ	Exakte Form $\mathcal{O}_1\mathcal{F}$	Darstellung	Vielfachheit
T'	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} [1]$	1	4
S'_a	$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix} [1]$	1	6
S'_b	$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix} [1]$	3	12
S'_c	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} [0]$	3	3

Tabelle 54: *Verdrehte Singlets.*

Diese Anzahlen verdrehter und unverdrehter Singlets müssen mit der Singletzahl in der LG–Phase des zugehörigen linearen $\sigma-$Modells verglichen werden. In [45] wurde gezeigt, daß für eine allgemeine Wahl der $W_i(x,y)$ und $F_a(x,y)$ das Modell 339 Singlets enthält, von denen 318 unverdreht sind. Dagegen ist die Zahl der Singlets in der CY–Phase nur

$$H^1(M,TM) + H^1(M,TM^*) + H^1(M,\mathrm{End}(V)) = 73 + 1 + 255 = 329, \tag{6.5}$$

womit nicht alle 339 Singlets der LG–Phase flachen Richtungen entsprechen können, was sich in nichtverschwindenden Drei– und Vierpunktfunktionen äußern wird.

6.2. Die LG–Phase

Um die SKFT mit der LG–Phase des linearen $\sigma-$Modells zu identifizieren, ist zumindest die Übereinstimmung der Spektren zu beweisen. In diesem Falle lautet die zum Superpotential gehörende Wirkung

$$S_{\mathcal{W}} = \int d^2z d\theta \ \left(\Sigma_j W_j(X,Y) + \Lambda_a F_a(X,Y) \right), \tag{6.6}$$

wobei $\Sigma_{1,2}$ und $\Lambda_{1,\ldots,5}$ fermionische sowie $X_{1,\ldots,4}$ und $Y_{1,2}$ chirale Superfelder sind. $W_{1,2}(X,Y)$ und $F_{1,\ldots,5}(X,Y)$ sind quasihomogene Polynome vom Grade vier. In der LG–Phase gibt es eine rechte $U(1)$–R–Symmetrie mit Ladungen $\overline{q}$ und eine linke $U(1)-$Symmetrie mit Ladungen q. In der folgenden Tabelle sind die Ladungen der beteiligten Felder, die zur Berechnung des masselosen Spektrums benötigt werden, dargelegt.

Feld	q	$\overline{q}$	Feld	q	$\overline{q}$
$x_{1,\ldots,4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\overline{x}_{1,\ldots,4}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$
$y_{1,2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\overline{y}_{1,2}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$
$\sigma_{1,2}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\overline{\sigma}_{1,2}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$
$\lambda_{1,\ldots,5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\overline{\lambda}_{1,\ldots,5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$

Tabelle 55: *Linke und rechte Ladungen.*

Für eine allgemeine Wahl der Polynome wurde das masselose Spektrum für die LG–Faktortheorie in [45] berechnet. Es gibt 80 chirale Superfelder in der Spinor–, 74 in der Vektor– und 339 in der Singletdarstellung von $SO(10)$. Es stellt sich die Frage, ob man die W_j und F_a so wählen kann, daß 350 Singlets, von denen 325 unverdreht und 25 verdreht sind, und die siebendimensionale Erweiterung der Eichgruppe herauskommen. Oben wurde bereits für die Form der Polynome folgende Form vermutet:

$$\begin{aligned} W_1(X,Y) &= \sum_{i=1}^{4} X_i^4 \ + \sum_{j=1}^{2} Y_j^2, \qquad W_2(X,Y) = \sum_{i=1}^{4} i\, X_i^4 \ + \sum_{j=1}^{2} j\ Y_j^2 \\ F_i(X,Y) &= X_i^4 \quad \text{für } i \in \{1,\ldots,4\}, \quad F_5(X,Y) = Y_1\, Y_2, \end{aligned} \tag{6.7}$$

die dadurch motiviert war, daß das exakt lösbare Modell eine Permutationssymmetrie S_4 in den letzten vier minimalen Faktoren aufweist. Im LG–Modell ist die $U(1)-$Eichsymmetrie des linearen $\sigma-$Modells zu einer endlichen Gruppe $\mathbb{Z}_5$ gebrochen, so daß in Wirklichkeit eine Faktortheorie vorliegt. Um eine heterotische Stringtheorie zu bekommen, muß der interne LG–Sektor mit dem linearen Teil der Eichgruppe, das ist hier $SO(8)$, zusammengebracht werden. Die $GSO-$Projektion pickt dann die Zustände mit $g = 1$ für

$$g = \exp(-i\pi J_0) \times (-1)^{\lambda} \tag{6.8}$$

heraus. Dabei ist J_0 die linke $U(1)-$Ladung und $(-1)^{\lambda}$ die Ladung der veschiedenen Darstellungen von $SO(8)$. Die entstehende Faktortheorie hat dann Sektoren, die mit g^k für $k = 0,\ldots,9$ verdreht sind. Wenn k gerade ist, handelt es sich um $(R,R)-$ und sonst um $(NS,R)-$Sektoren. Da man aber nur am masselosen Spektrum interessiert ist, kann man eine Born/Oppenheimer–Näherung durchführen und die Felder bei ihren niedrigsten angeregten Moden abschneiden. Die linkslaufende $N = 2$ Algebra

$$\{\overline{Q}_-, \overline{Q}_+\} = \overline{L}_0, \quad \overline{Q}_-^2 = \overline{Q}_+^2 = 0 \tag{6.9}$$

besagt, daß die masselosen Zustände gerade durch die Kohomologie von $\overline{Q}_+$ gegeben sind. Dieser Operator kann durch die in der Lagrangedichte auftretenden Felder ausgedrückt werden:

$$\overline{Q}_+ = i \int (i\overline{\psi}^i \partial\phi_i + \mathcal{W}|_{\theta=0}). \tag{6.10}$$

Zerlegt man dies gemäß $\overline{Q}_+ = \overline{Q}_{+,r} + \overline{Q}_{+,l}$, so wurde in [98] gezeigt, daß man die Kohomologie von $\overline{Q}_{+,l}$ in der von $\overline{Q}_{+,r}$ berechnen kann. Für nähere Informationen sind die Referenzen [45,98] gut geeignet. Verfolgt man die Rechnung in [45], so erkennt man, daß es für die Wahl der Polynome (6.7) wirklich mehr Zustände gibt. Tabelle 8 der Referenz [45] zeigt, daß die masselosen Singlets so wie in der nächsten Tabelle vorgestellt verändert werden.

$SO(8) \times U(1)-$Darstellung	k	Zustand
1_0	1	$P_4(\Phi^i_{-\frac{q_i}{2}})\lambda^a_{-\frac{3}{5}}\|0\rangle,\ P_4(\Phi^i_{-\frac{q_i}{2}})\sigma^j_{-\frac{3}{5}}\|0\rangle$
1_0	3	$\lambda^a_{-\frac{1}{5}}\lambda^b_{-\frac{1}{5}}\|0\rangle,\ \lambda^a_{-\frac{1}{5}}\sigma^j_{-\frac{1}{5}}\|0\rangle,\ \sigma^1_{-\frac{1}{5}}\sigma^2_{-\frac{1}{5}}\|0\rangle$
1_0	5	$\overline{\lambda}^a_0\,\overline{\lambda}^b_0\,\overline{\lambda}^c_0\|0\rangle$ für $a,b,c \in \{1,\ldots,4\}$

Tabelle 56: *Masselose LG–Singlets.*

Dabei bezeichnet $P_4(\Phi^i_{-\frac{q_i}{2}})$ ein Polynom vom Gewicht vier in den sechs Koordinaten x_i, y_j. Die unverdrehten Zustände für $k=1$ müssen modulo der Äquivalenzrelationen

$$\begin{aligned}
&F_a(\Phi^i_{-\frac{q_i}{2}})\lambda^a_{-\frac{3}{5}}|0\rangle \sim F_a(\Phi^i_{-\frac{q_i}{2}})\sigma^j_{-\frac{3}{5}}|0\rangle \sim 0\\
&W_j(\Phi^i_{-\frac{q_i}{2}})\lambda^a_{-\frac{3}{5}}|0\rangle \sim W_j(\Phi^i_{-\frac{q_i}{2}})\sigma^j_{-\frac{3}{5}}|0\rangle \sim 0\\
&P_2(\Phi^i_{-\frac{q_i}{2}})\left[\frac{\partial F_a}{\partial y^{1,2}_{-\frac{1}{5}}}\lambda^a_{-\frac{3}{5}} + \frac{\partial W_j}{\partial y^{1,2}_{-\frac{1}{5}}}\sigma^j_{-\frac{3}{5}}\right]|0\rangle \sim 0\\
&P_1(\Phi^i_{-\frac{q_i}{2}})\left[\frac{\partial F_a}{\partial x^{1,\ldots,4}_{-\frac{1}{10}}}\lambda^a_{-\frac{3}{5}} + \frac{\partial W_j}{\partial x^{1,\ldots,4}_{-\frac{1}{10}}}\sigma^j_{-\frac{3}{5}}\right]|0\rangle \sim 0
\end{aligned} \tag{6.11}$$

betrachtet werden. Für eine allgemeine Wahl der W_j und F_a gibt es 318 solche Zustände, für die symmetrische Wahl (6.7) allerdings 325, unter denen sich unvermeidlicherweise sieben weiteren Eichfelder befinden. Ferner gibt es vier Singletfelder in Sektor mit $k=5$, die an einem allgemeinen Punkt im Parameterraum nicht vorhanden sind (das sind eben die T_i'). Somit kommt man mit den 21 Zuständen des Sektors $k=3$ (den S') auf eine Gesamtzahl von 350. Dieser kurze Ausflug in die Welt der $(0,2)$–LG–Modelle ergibt eine weitere Unterstützung der Identifikation des exakt lösbaren Modells mit einem $(0,2)$–LG–Modell, das auf natürliche Weise im Limes $R\to-\infty$ des linearen $\sigma-$Modells auftritt.
Doch nun zurück zum exakten Modell.

6.3. Singletkopplungen im Superpotential

Anders als z.B. bei der Quintik und dem zugehörigen LG–Modell ist hier die Anzahl der $SO(10)-$Singlets im Limes großer Radien eine andere als in der LG–Phase. Da eine explizite Beschreibung vorhanden ist, kann man in der Nähe des exakt lösbaren Punktes den Parameterraum untersuchen. Es ist also nach marginalen Deformationen der SKFT zu suchen, die die rechte $N=2$ Weltflächen–Supersymmetrie erhalten. Vom Standpunkt der Raumzeit aus ist dies dasselbe wie das Auffinden flacher Richtungen in der vierdimensionalen effektiven $N=1$ raumzeit–supersymmetrischen Niederenergietheorie. Das skalare Potential solcher Supergravitationstheorien hat die allgemeine Form [99]

$$U = e^{\mathcal{K}}\left(D^iW\,G^{-1}_{ij^*}\,D^{j^*}W^* - 3\,W\right) + \frac{1}{2}\sum_a (D^a)^2, \tag{6.12}$$

wobei $\mathcal{K}(\phi_i,\phi_i^*)$ das Kählerpotential ist, $W(\phi_i)$ das holomorphe Superpotential und T^a die Generatoren der Eichgruppe. Die kovariante Ableitung lautet

$$D^iW = \frac{\partial W}{\partial\phi_i} + \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\phi_i}W \tag{6.13}$$

und D^a sind Hilfsfelder im Vektormultiplet der Eichbosonen:

$$D^a = -\frac{g_a}{2}\left(\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\phi_i}T^a\phi_i + \phi_i^*T^a\frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\phi_i^*}\right). \tag{6.14}$$

In der niedrigsten Ordnung, einer renormierbaren Feldtheorie, ist $\mathcal{K}$ flach und das skalare Potential hat die Form

$$U = \sum_a \frac{g_a^2}{2}|D^a|^2 + \sum_i |F_i|^2 = \sum_a \frac{g_a^2}{2}(\phi_i^*T^a\phi_i)^2 + \sum_i\left|\frac{\partial W}{\partial\phi_i}\right|^2, \tag{6.15}$$

wobei W nur kubische Kopplungen enthält. Damit das skalare Potential verschwindet, müssen sowohl die D– als auch die F–Terme verschwinden.
Für Eichsinglets ist die Bedingung der D–Flachheit automatisch erfüllt und man muß nur die F–Terme im Superpotential untersuchen. Es treten jedoch D–Terme auf, die von der Erweiterung der Eichgruppe um $SU(2) \times U(1)^4$ kommen, obwohl es im folgenden um $SO(10)-$Singlets gehen wird. Das Superpotential der effektiven Niederenergiefeldtheorie kann mittels der SKFT bestimmt werden, indem man Korrelationsfunktionen der entsprechenden Vertexoperatoren auf der Weltfläche S^2 berechnet, also auf einer Fläche mit Geschlecht Null und damit in niedrigster Ordnung der String–Schleifen–Kopplung. Für die folgende Diskussion sollte man sich veranschaulichen, daß die Vertexoperatoren der SKFT geometrisch Tangentenvektoren entlang des Parameterraums sind. Angenommen, man findet ein System von Skalarfeldern $\{S_i\}$, für die alle D–Terme verschwinden und alle Kopplungen im Superpotential der Form $F(S)$ oder $F(S)S'$ für alle Skalare S' des Modells verschwinden. Dann bildet die Menge $\{S_i\}$ ein System flacher Richtungen, und diese sind gute Deformationen der Theorie. Hat man dagegen ein System von Skalaren, für die nicht alle Terme im Superpotential verschwinden, so darf man keine voreiligen Schlüsse ziehen. Das heißt nämlich noch nicht, daß es gar keine flachen Richtungen unter ihnen gibt. Das läßt sich an einem einfachen Beispiel, dem Sombrero, veranschaulichen: gegeben ist ein komplexes Boson mit einer globalen $U(1)-$Symmetrie und dem Higgspotential

$$V(\phi) = \lambda \left(|\phi|^2 - \frac{m^2}{2\lambda} \right)^2 . \tag{6.16}$$

Entwickelt man das Potential um ein Minimum $\langle \phi \rangle = v = \sqrt{\frac{m^2}{2\lambda}}$, indem man

$$\phi = \eta + v + i\chi \tag{6.17}$$

setzt, so findet man

$$V(\phi) = \lambda \left(4v^2\eta^2 + 4v\eta(\eta^2 + \chi^2) + (\eta^2 + \chi^2)^2 \right) \tag{6.18}$$

und damit sowohl Kopplungen η^2 als auch χ^4. Damit erfüllt keins der beiden Felder $F(S) = 0$. Nichtsdestotrotz gibt es eine flache Richtung, und zwar den Kreis vom Radius v. Schaut man sich das genäherte Potential genauer an, so kann man ablesen, daß die flache Richtung lokal durch $(\eta, \chi) = \varepsilon(0, 1)$ gegeben ist. Wählt man dagegen Polarkoordinaten, so wird der Winkel gar nicht auftreten und damit einen flachen Kreis definieren. Im hier vorliegenden Fall der SKFT sind die Koordinaten durch die primären Felder bestimmt und man weiß nicht ohne weiteres, ob das denn die richtigen Koordinaten sind, um flache Richtungen direkt ablesen zu können. Weiterhin wird man i.a. das Superpotential nicht in allen Ordnungen kennen, so daß es schwierig wird, wirklich etwas auszusagen. Im nächsten Abschnitt wird ein solches Problem noch auftauchen, wenn die explizite Form der Kählerklasse gefunden werden soll.
Zunächst soll die oben erwähnte Flachheitsbedingung auf die SKFT übertragen werden. I.a. ist es unmöglich zu beweisen, daß eine SKFT eine unendliche Menge verschwindender $n-$Punktfunktionen besitzt, außer man hat starke Auswahlregeln zur Hand, die a priori Kopplungen verschwinden lassen. In der SKFT gibt es aber so etwas, nämlich Auswahlregeln, die von erweiterten Eichsymmetrien kommen. Zum einen müssen die linken und rechten $U(1)-$Symmetrien für jeden der minimalen Faktoren und für die $U(1)_2$ erhalten sein, d.h. die jeweilige Ladungssumme muß verschwinden. Zum anderen gibt es die spezielle $SU(2)-$Eichsymmetrie, die ebenfalls die möglichen Kopplungen einschränkt. Insbesondere müssen sich die Spins zu Null koppeln

und die relativen Kopplungen der Felder in den $SU(2)-$Multiplets sind über Clebsch/Gordan–Koeffizienten bestimmt.
Um die folgende Diskussion etwas durchsichtiger zu gestalten, wird eine Durchschnitts– bzw. Relativladung zwischen der linken und rechten Seite der Singlets eingeführt. Alle 350 Singlets haben gemeinsam, daß in den letzten vier minimalen Faktoren jeweils das fünffache der Differenz $q_{\rm rel}$ der linken und rechten Ladung konstant ist. Beispielsweise hat man für das Feld T'

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} [1] \tag{6.19}$$

die Ladung

$$q_{\rm rel}(T') = 5\left(\left(\frac{3}{5}-1\right)-\left(-\frac{1}{5}\right)\right) = 5\left(\left(\frac{2}{5}\right)-\left(-\frac{2}{5}\right)\right) = 4 \bmod 5. \tag{6.20}$$

Diese Definition kann man auch auf die anderen masselosen Zustände in den Darstellungen **16** und **10** übertragen. Um es wohldefiniert zu machen, muß man allerdings hier die Ladung der entsprechenden Darstellung von $SO(8)$ miteinbeziehen, für die Singlets war diese Null. In Anbetracht der schon öfters verwendeten Zerlegungen der Darstellungen von $SO(10)$ nach denen von $SO(8)\times U(1)$

$$\mathbf{16} = \mathbf{8}_v^1 \oplus \mathbf{8}_c^{-1}, \qquad \mathbf{10} = \mathbf{1}^{-2} \oplus \mathbf{8}_s^0 \oplus \mathbf{1}^2 \tag{6.21}$$

ist die richtige Definition

$$q = 5\, q_{\rm rel} - \frac{1}{2}(-1)^{\lambda} \quad \bmod 5. \tag{6.22}$$

Diese Definition ähnelt stark der Raumzeit–R–Ladung S_q, die in [16] für masselose Zustände im LG–Modell verwendet wurde, enthält doch diese Ladung die Information über den verdrehten Sektor der $GSO-$Projektion, in dem die masselosen Zustände auftreten. Für die masselosen Zustände erhält man die folgenden R–Ladungen:

S	T'	S'	**16**	**10**	**10′**
0	4	2	$-\frac{1}{2}$	-1	3

Tabelle 57: *R–Ladungen.*

Man sollte bemerken, daß diese Ladungen genau dieselben sind wie die R–Ladungen der verschiedenen masselosen Felder im LG–Modell, was die Identifikation der beiden Modelle weiter unterstützt. Die allgemeine Form einer Superpotentialkopplung der Ordnung n kann wie folgt durch Weltflächen–Operatoren ausgedrückt werden:

$$C^{1,\ldots,n} = \int d^2 z_n \ldots \int d^2 z_1 \langle V_0^n(z_n,\overline{z}_n)\ldots V_0^4(z_4,\overline{z}_4)\, V_{-1}^3(z_3,\overline{z}_3)\, V_{-\frac{1}{2}}^2(z_2,\overline{z}_2)\, V_{-\frac{1}{2}}^1(z_1,\overline{z}_1)\,\rangle. \tag{6.23}$$

Der untere Index bezeichnet das Geistbild, in dem der Vertexoperator genommen werden muß. Unter Nutzung der $SL(2,\mathbb{C})$ kann man wie üblich drei Koordinaten auf $\{0,1,\infty\}$ abbilden und so drei Integrationen sparen, wenn man das korrekte Maß benutzt:

$$\int d^2 z_n \ldots \int d^2 z_4 |z_1-z_2|^2\, |z_1-z_3|^2\, |z_2-z_3|^2 \ldots . \tag{6.24}$$

Wenn der Vertexoperator eines masselosen Zustands in irgendeiner Darstellung der Eichgruppe die Form

$$V_{-1}(z,\overline{z}) = e^{-\rho(\overline{z})}\ \mathcal{O}_1(z,\overline{z})\ \mathcal{F}(z)\ \lambda^a(z)\ e^{ikX(z,\overline{z})} \tag{6.25}$$

im (–1)–Geistbild hat, so lautet er im $\left(-\frac{1}{2}\right)$–Geistbild

$$V_{-\frac{1}{2}}(z,\overline{z}) = e^{-\frac{\rho(\overline{z})}{2}}\ S^\alpha(\overline{z})\ \Sigma_r \mathcal{O}_1(z,\overline{z})\ \mathcal{F}(z)\ \lambda^a(z)\ e^{ikX(z,\overline{z})} \tag{6.26}$$

mit einem vierdimensionalen Spinor $S^\alpha(\overline{z})$ und dem internen rechten Teil Σ_r der Raumzeit–Superladung. Im hier vorliegenden Fall ist das einfach das primäre Feld

$$\Sigma_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix} [0]. \tag{6.27}$$

Im (0)–Geistbild erhält man

$$V_0(z,\overline{z}) = (G_{r,\mathrm{tot}} + k\psi)\ \mathcal{O}_1(z,\overline{z})\ \mathcal{F}(z)\ \lambda^a(z)\ e^{ikX(z,\overline{z})}, \tag{6.28}$$

wobei $G_{r,\mathrm{tot}}$ der gesamte Weltflächen–Superstrom des rechten $c=9$, $N=2$ Teils ist:

$$G_{r,\mathrm{tot}} = \sum_{i=1}^{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdots \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{i-\text{ter Faktor}} \cdots \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix} [0]. \tag{6.29}$$

Ferner kann man den beiden Operatoren Σ_r und $G_{r,\mathrm{tot}}$ im $\left(-\frac{1}{2}\right)$– bzw. (0)–Geistbild eine R–Ladung zuordnen. Da $q(\Sigma_r) = -\frac{3}{2}$ und $q(G_{r,\mathrm{tot}}) = 0$, muß die Summe aller Ladungen q aller internen Felder $\mathcal{O}_1\,\mathcal{F}$ den Wert $q=3$ haben, damit die R–Ladung für die gesamte Kopplungskonstante verschwindet. Damit kann man schließen, daß ein Term im Superpotential die Ladung $q=3$ tragen muß, was bereits starke Einschränkungen an mögliche Terme stellt.

Yukawakopplungen wie $\langle \mathbf{10\ 16\ 16}\rangle$ oder $\langle S\ \mathbf{10\ 10}\rangle$ können sicher nichtverschwindende Werte annehmen, aber Kopplungen wie $\langle \mathbf{10}'\ \mathbf{16\ 16}\rangle$ oder $\langle S'\ \mathbf{10\ 10}\rangle$ müssen wegen der Bedingung an q verschwinden. Nur $\langle S'\ \mathbf{10}'\ \mathbf{10}'\rangle$ kann als einzige Kopplung, die verdrehte Felder enthält, von Null verschieden sein. Das wird später noch untersucht. Da alle unverdrehten Singlets eine verschwindende R–Ladung haben, folgt sofort, daß

$$F(S) = 0, \qquad F(S)\,S' = 0. \tag{6.30}$$

Man darf allerdings nicht die sieben D–Flachheitsbedingungen für $SU(2)\times U(1)^4$ vergessen, so daß nur 318 der 325 Singlets als Deformationen der SKFT übrigbleiben. Die anderen sieben werden durch den Higgsmechanismus vertilgt. Es ist kein Wunder, daß hier dasselbe herauskommt wie in [16] bei dem LG–Modell.

An einem allgemeinen Punkt in der LG–Phase werden alle Dreipunktkopplungen verschwinden, da die vier zusätzlichen Felder im $k=5$ verdrehten Sektor nicht vorhanden sind. Allerdings existiert in der SKFT eine Kopplung, die von Null verschieden sein könnte, die R–Ladung kann das jedenfalls nicht ausschließen:

$$\langle T'\ S'\ S'\rangle. \tag{6.31}$$

Beachtet man, daß jede einzelne linke und rechte $U(1)-$Ladung getrennt erhalten sein muß, so kann nur die folgende Dreipunktkopplung von Null verschieden sein:

$$\langle T' \; S_b'^{(i)} \; S_c'^{(j)} \rangle, \tag{6.32}$$

wobei $i, j = 1, 0, -1$ die Indizes der adjungierten Darstellung von $SU(2)$ sind. Verwendet man die explizite Form der Dreipunktfunktion für die $N = 2$ minimalen und $U(1)_2-$Modelle wie im vierten Kapitel, so ergibt diese Kopplung den nichtverschwindenden Wert

$$C_{T' \, S_b'^{(i)} \, S_c'^{(j)}} = \sqrt{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & i & j \end{pmatrix} \kappa^3, \qquad \kappa = \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{3}{5}\right)^3 \Gamma\left(\frac{1}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)^3 \Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}}. \tag{6.33}$$

Vor der Diskussion dieses Ergebnisses sollen zunächst noch alle Vierpunktkopplungen der Eichsinglets berechnet werden. Die Erhaltung der R–Ladung erlaubt nur drei mögliche nichtverschwindende Kopplungen:

$$\langle T' \; T' \; S \; S \rangle, \qquad \langle T' \; S' \; S' \; S \rangle, \qquad \langle S' \; S' \; S' \; S' \rangle. \tag{6.34}$$

Eine genauere Analyse aller $U(1)-$Ladungen zeigt, daß davon nur folgende Kopplungen übrigbleiben:

$$\langle S_a' \; S_a' \; S_c'^{\,i} \; S_c'^{\,j} \rangle, \quad \langle S_a' \; S_b'^{\,i} \; S_b'^{\,j} \; S_c'^{\,k} \rangle, \quad \langle S_b'^{\,i} \; S_b'^{\,j} \; S_b'^{\,k} \; S_b'^{\,l} \rangle. \tag{6.35}$$

Wie von Silverstein in [62] explizit berechnet wurde, sagt das Erfülltsein aller Auswahlregeln für eine Vierpunktfunktion noch nicht das Nichtverschwinden der Superpotentialkopplung voraus. Dort wurde gezeigt, daß eine gewisse Vierpunktkopplung verdrehter Singlets für die Quintik in $\mathbb{P}_4$ wundersamerweise verschwand, obwohl die Vierpunktfunktion aus der SKFT nicht Null war. Diese Rechnung läßt sich auf den hier vorliegenden Fall übertragen, die erste Kopplung wird ausführlich besprochen: zunächst ist die Vierpunktfunktion

$$\langle V_{-1}^c(z_4, \overline{z}_4) \, V_0^c(z_3, \overline{z}_3) \, V_{-\frac{1}{2}}^a(z_2, \overline{z}_2) \, V_{-\frac{1}{2}}^a(z_1, \overline{z}_1) \rangle \tag{6.36}$$

zu berechnen. Da in diesem Fall keine Kontaktterme auftreten, kann der Grenzfall verschwindenden Impulses von Anfang an genommen werden. Die vier Vertexoperatoren bei Impuls Null lauten

$$\begin{aligned}
V_{-\frac{1}{2}}^a(z_1, \overline{z}_1) &= e^{-\frac{\rho(\overline{z}_1)}{2}} \, S^\alpha(\overline{z}_1) \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 2 & 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix}^2 [1] \; (z_1, \overline{z}_1), \\
V_{-\frac{1}{2}}^a(z_2, \overline{z}_2) &= e^{-\frac{\rho(\overline{z}_2)}{2}} \, S^\beta(\overline{z}_2) \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ & 1 & 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 2 & 1 \end{bmatrix}^2 [1] \; (z_2, \overline{z}_2), \\
V_0^c(z_3, \overline{z}_3) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix}^4 [-2] \; (z_3, \overline{z}_3), \\
V_{-1}^c(z_4, \overline{z}_4) &= e^{-\rho(\overline{z}_4)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 1 & 0 \end{bmatrix}^4 [0] \; (z_4, \overline{z}_4).
\end{aligned} \tag{6.37}$$

Nutzt man für die minimalen Modelle die Gleichheit mit $\frac{SU(2)_k}{U(1)} \times U(1)$ aus, so lassen sich die primären Felder wie schon bei der Berechnung der Kopplungen $\langle \mathbf{10} \; \mathbf{16} \; \mathbf{16} \rangle$ in einen parafermionischen Teil und den Vertexoperator eines freien Bosons φ zerlegen:

$$\begin{bmatrix} l & m & s \\ & \overline{m} & \overline{s} \end{bmatrix} (z, \overline{z}) = \phi^l_{m-s, \overline{m}-\overline{s}}(z, \overline{z}) \; e^{i\alpha_{m,s}\varphi(z)} \, e^{i\alpha_{\overline{m},\overline{s}}\varphi'(\overline{z})}. \tag{6.38}$$

Die Korrelationsfunktion der vierdimensionalen Raumzeit–Felder und des Geistsystems sind sehr einfach:

$$\begin{aligned}\langle S^{\beta}(\overline{z}_2)\ S^{\alpha}(\overline{z}_1)\rangle &= \frac{\delta_{\alpha\beta}}{(\overline{z}_2-\overline{z}_1)^{\frac{1}{2}}}\\ \langle e^{-\rho(\overline{z}_4)}\ e^{-\frac{\rho(\overline{z}_2)}{2}}\ e^{-\frac{\rho(\overline{z}_1)}{2}}\rangle &= \frac{1}{(\overline{z}_2-\overline{z}_1)^{\frac{1}{4}}\,(\overline{z}_4-\overline{z}_1)^{\frac{1}{2}}\,(\overline{z}_4-\overline{z}_2)^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}\tag{6.39}$$

Mittels einer Transformation aus $SL(2,\mathbb{C})$ setzt man $z_4=0$, $z_2=1$ und $z_1=\infty$ und erkennt, daß sowohl die Korrelationsfunktion (6.39) als auch das Maß in (6.24) unabhängig von der Variablen $z_3 =: x$ sind. Die Korrelationsfunktionen für die Vertexoperatoren in (6.38) und den $U(1)_2-$Teil können als Funktion von x als

$$\langle\ldots\rangle_{U(1)} = |x|^{-\frac{4}{3}}\,|1-x|^{-\frac{4}{3}}\tag{6.40}$$

geschrieben werden. Somit sind nur noch die fünf Vierpunktfunktionen der parafermionischen Faktoren zu berechnen:

$$\begin{aligned}P_1 &= \langle\phi^0_{0,0}(z_4,\overline{z}_4)\ \phi^0_{0,0}(z_3,\overline{z}_3)\ \phi^1_{-1,-1}(z_2,\overline{z}_2)\ \phi^1_{1,1}(z_1,\overline{z}_1)\rangle\\ P_2 = P_3 &= \langle\phi^1_{-1,1}(z_4,\overline{z}_4)\ \phi^0_{0,0}(z_3,\overline{z}_3)\ \phi^1_{-1,1}(z_2,\overline{z}_2)\ \phi^1_{-1,1}(z_1,\overline{z}_1)\rangle\\ P_4 = P_5 &= \langle\phi^0_{0,0}(z_4,\overline{z}_4)\ \phi^1_{-1,1}(z_3,\overline{z}_3)\ \phi^1_{-1,1}(z_2,\overline{z}_2)\ \phi^1_{-1,1}(z_1,\overline{z}_1)\rangle.\end{aligned}\tag{6.41}$$

Im Gegensatz zu der Vierpunktfunktion in [62] können hier alle Amplituden durch die Zwei– und Dreipunktfunktionen ausgedrückt werden. Diese wurden im vierten Kapitel schon angegeben, so daß die parafermionische Korrelationsfunktion lautet:

$$\prod_{i=1}^{5} P_i = \kappa^4\ |x|^{-\frac{4}{15}}\,|1-x|^{-\frac{4}{15}}.\tag{6.42}$$

Setzt man (6.40),(6.42) in die Superpotentialkopplung (6.36) ein, so erhält man schließlich

$$\begin{aligned}\langle S'^{(i)}_c\ S'^{(j)}_c\ S'_a\ S'_a\rangle &= \sqrt{3}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&i&j\end{pmatrix}\int d^2x\ \kappa^4\ |x|^{-\frac{8}{5}}\,|1-x|^{-\frac{8}{5}}\\ &= \sqrt{3}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&i&j\end{pmatrix}\ \kappa^4\ B\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)\end{aligned}\tag{6.43}$$

mit

$$B(a,b,c) = \pi\,\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b)\Gamma(b+c)\Gamma(c+a)}.\tag{6.44}$$

Diese Kopplung ist endlich und verschwindet nicht. Auf völlig analoge Weise erhält man so für die zweite Kopplung in (6.35)

$$\begin{aligned}\langle S'_a\ S'^{(i)}_b\ S'^{(j)}_b\ S'^{(k)}_c\rangle &= -\frac{3\kappa^4}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1&1\\-(i+j)&i&j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&i+j&k\end{pmatrix}\int d^2x\ |x|^{-\frac{6}{5}}\,|1-x|^{-\frac{8}{5}}\\ &= -\frac{3}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1&1\\-(i+j)&i&j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\0&i+j&k\end{pmatrix}\ \kappa^4\ B\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right).\end{aligned}\tag{6.45}$$

Die Berechnung der kompliziertesten dritten Kopplung ist glücklicherweise dieselbe wir für die anderen Kopplungen (6.35), was dazu führt, daß die Kopplung verschwindet, nachdem man die Integration in der komplexen Ebene ausgeführt hat:

$$\langle S'_b\ S'_b\ S'_b\ S'_b\rangle = 0.\tag{6.46}$$

Vom Standpunkt der konformen Feldtheorie gibt es kein tiefes Verständnis, warum das passiert. Im Falle der Quintik, also einem $(2,2)-$Modell, entsprechen dagegen alle Singletfelder $(0,2)-$Deformationen, so daß die Kopplungen verschwinden sollten, wie in [17] erläutert wurde.

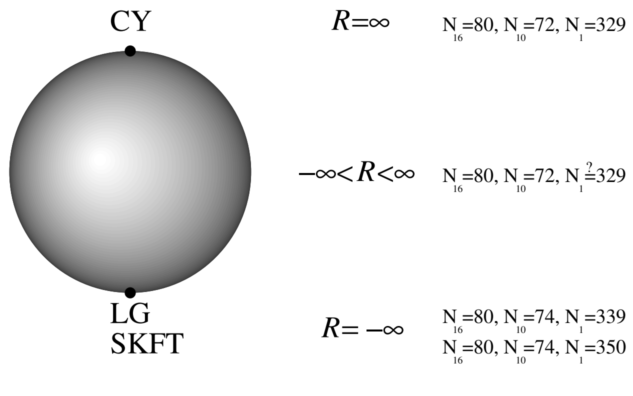
6.4. Konsequenzen für den Parameterraum von (0,2)–Strings

Die bislang berechneten nichtverschwindenden Superpotentialkopplungen haben bereits einige Konsequenzen für den Parameterraum, denn nur, falls alle Dreipunktkopplungen eines Systems von Singlets verschwinden, sind die zugehörigen Deformation gegenseitig integrabel. Zunächst sollen die vier Singlets T' diskutiert werden. Da solche Singlets an einem allgemeinen Punkt des LG–Modells nicht auftreten, liegt es nahe, diese mit denen zu identifizieren, die im $k = 5$ verdrehten Sektor für die spezielle Wahl der Polynome (6.7) auftraten. Daher sollten diese Felder eine Masse bekommen, wenn man die komplexe und die Bündelstruktur allgemein deformiert. Obwohl es leider nicht möglich ist, diese Kopplungen exakt zu berechnen, so sollten beispielsweise Kopplungen sechster Ordnung

$$\langle T'\ T'\ S_h\ S_h\ S_h\ S_h \rangle, \tag{6.47}$$

die den Singlets T' eine Masse geben können, existieren. Da bereits die Dreipunktkopplung (6.33) mit dem Feld T' endlich war, sind wundersame Kürzungen nicht zu erwarten.

Neben den 318 unverdrehten Deformationen erwartet man mindestens elf weitere flache Richtungen aus dem verdrehten Sektor. Aber lassen die beiden ersten Ordnungen des Superpotentials überhaupt so viele Deformationen zu? Wie man bei dem einfachen Sombrerobeispiel gesehen hat, ist dies schwer zu beantworten, zudem das Superpotential nicht komplett bekannt ist. Folgende Beobachtung sollte jedoch erwähnt werden: angenommen, man findet einige unverdrehte Singlets, so daß die D–Flachheit erfüllt ist, nachdem man dem Feld $S_c'^{(0)}$ und diesen Singlets einen VEW gegeben hat. Dann erzeugt die Dreipunktkopplung eine Masse für die vier Felder T' und vier der verdrehten Felder S_b'. Ferner sorgt die Vierpunktkopplung (6.43) für Massenterme der sechs Felder S_a'. Somit verbleiben genau die 329 Felder, die man im linearen $\sigma-$Modell erwartet. Wie unten gezeigt werden wird, ist $S_c'^{(0)}$ nicht allein die Kählerklasse R (daß dieses Feld denselben Namen wie der LG/CY–Ordnungsparameter R ("Radius") hat, ist kein Zufall, er ist ja gerade eine Deformation der Metrik), sondern vielmehr eine Linearkombination der Felder S'. Man kann jedoch zuversichtlich sein, daß die 329 masselosen Zustände stabil unter einer "Rotation" der Feldes $S_c'^{(0)}$ in R sind. Der komplexifizierte Kähler–Parameterraum kann durch die folgende Figur symbolisiert werden:



Figur 1: Kähler–Parameterraum des linearen $\sigma-$Modells

Bei den $(2,2)-$Kompaktifizierungen sind komplexe und Kählerdeformationen durch die Wirkung des linkslaufenden Superstroms mit den Materiefeldern **27** und $\overline{\mathbf{27}}$ verknüpft, womit es eine algebraische Unterscheidung zwischen den beiden Typen gibt, auch für einen kleinen Radius. Bei den $(0,2)-$Modellen gibt es so einen Strom gerade nicht, so daß es a priori nicht entscheidbar ist, zu welcher Klasse von Deformationen ein gegebenes Singlet gehört. Im folgenden wird gezeigt, wie man die oben berechneten Kopplungen dazu nutzen kann, die Form der Kählerklasse wenigstens in der niedrigsten Ordnung zu bestimmen.
Man erwartet die folgenden Eigenschaften für eine Deformation, die vom LG–Radius $R=-\infty$ wegführt:

a.) Das Skalarpotential im renormierbaren Grenzfall ist vollständig bekannt. Um lokale flache Richtungen zu bestimmen, verlangt man daher D– und F–Flachheit des Potentials (6.15) bis zur dritten Ordnung.

b.) Deformiert man den Radius, so erwartet man das masselose Spektrum des CY–Limes für große Radien. Insbesondere sollten die beiden verdrehten chiralen Multiplets in der Vektordarstellung von $SO(10)$ eine Masse bekommen.

c.) Die Eichgruppenerweiterung $SU(2)\times U(1)^4$ tritt nur am exakt lösbaren Punkt auf und ist in der CY–Phase nicht vorhanden.

d.) Das masselose Spektrum zeigt eine Permutationssymmetrie S_4, die Kählerklasse sollte diese also auch besitzen.

e.) Die unverdrehten $SO(10)-$Singlets sind durch Polynome vom Grade vier mit einigen Relationen gegeben, welche den komplexen und Bündeldeformationen der CYM entsprechen. Folglich sollte R nur Beiträge von den verdrehten Singlets S' haben.

Am besten startet man mit b.) und berechnet die Yukawakopplung $\langle \mathbf{1}\ \mathbf{10}\ \mathbf{10}\rangle$ für die zwei zusätzlichen $\mathbf{10}'$er aus dem verdrehten Sektor, die wie folgt aussehen:

Typ	Exakte Form $\mathcal{O}_1\mathcal{F}$	Darstellung	Vielfachheit
G	$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ & 1 & 0\end{bmatrix}[2]$	2	2

Tabelle 58: *Verdrehte* $\mathbf{10}'$*er.*

Danach schaut man die Yukawakopplungen an, die zwei verdrehte $\mathbf{10}'$er und ein verdrehtes Singlet S' enthalten. Die Auswahlregeln erlauben nur eine solche Kopplung, die wie üblich berechnet werden kann:

$$\langle S_c'^{(i)}\ G^{(j)}\ G^{(k)}\rangle = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -(j+k) & j & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & i & j+k \end{pmatrix}\kappa^3. \tag{6.48}$$

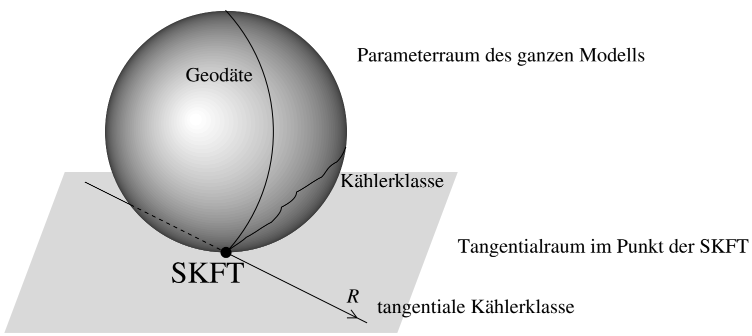
Daher liefert eine Deformation in Richtung des Singlets S_c' eine Masse für G, was zum Großradienlimes für die Anzahl der **10**er führt. Da jedoch ein $SU(2)-$Triplet S_c' alleine die Eichgruppe $SU(2)$ nicht völlig brechen kann (nur zu $U(1)$), muß R Beiträge weiterer verdrehter Zustände enthalten. Der allgemeinste Ansatz, der mit b.) $-$ e.) verträglich ist, lautet

$$R = \sum_{j=-1}^{1}\gamma_j\ S_c'^{(j)} + \sum_{j=-1}^{1}\sum_{m=1}^{4}\beta_j\ S_{b,m}'^{(j)} + \sum_{n=1}^{6}\alpha\ S_{a,n}'. \tag{6.49}$$

Setzt man diesen Ansatz in die Flachheitsbedingung (6.15) ein, so gibt es bis auf Eichtransformationen nur die folgende zweiparametrige Lösung:

$$R = \gamma\, S_c'^{(0)} + \sum_{m=1}^{4}\beta\ \left(\ S_{b,m}'^{(-1)} +\ S_{b,m}'^{(+1)}\right) + \sum_{n=1}^{6}\frac{\gamma}{\sqrt{6}}\ S_{a,n}'. \tag{6.50}$$

Mit den Vierpunktfunktionen (6.43),(6.45),(6.46) läßt sich zeigen, daß $\langle R^4 \rangle \neq 0$ für alle $\gamma, \beta \in \mathbb{C}, \gamma \neq 0$. Da es mindestens eine flache Lösung geben muß und die Rechnung in niedrigster Ordnung die Möglichkeiten schon derart einschränkt, läßt sich aus dem Nichtverschwinden der Vierpunktkopplung schließen, daß die konformen Felder eine schlechte Basis sind, in der R gekrümmt ist. Die Lösung (6.50) ergibt lediglich die Tangente an die Kurve im Punkte der SKFT. Um die nächste Ordnung zu bestimmen, müßte man auch das nicht–flache Kählerpotential $\mathcal{K}(\phi, \phi^*)$ beachten. Die Verhältnisse, die sich aus dieser Betrachtung ergeben, sehen wie folgt aus:



Figur 2: Die Kählerdeformation

Die Kugel stellt den Parameterraum des ganzen Modells dar. Das Superpotential ist eine Funktion (ein Schnitt) über diesem Raum. Im Parameterraum gibt es eine flache Richtung R, von der die Rechnung in niedrigster Ordnung nur den Tangentenvektor im Punkt der SKFT bestimmt. Hätte man in der SKFT geeignete Koordinaten (ähnlich den Polarkoordinaten im Beispiel des Sombreros), so wäre die flache Richtung einfach eine Geodäte.
Kennt man das Singlet, was der Kählerklasse entspricht, so könnte man im Prinzip Kopplungen der Form

$$\langle R^n \ \mathbf{10} \ \mathbf{16} \ \mathbf{16} \rangle, \qquad \langle R^n \ \mathbf{1} \ \mathbf{10} \ \mathbf{10} \rangle \tag{6.51}$$

berechnen. Eine nichtverschwindende Kopplung dieser Art würde eine Radiusabhängigkeit der Yukawakopplungen implizieren, die perturbativ ausgeschlossen ist [63,83]. Leider verbieten die Auswahlregeln solche Kopplungen (6.51) nicht und deren explizite Berechnung ist doch arg schwer.
Einen Ausweg könnte hier die Spiegelsymmetrie auf $(0,2)-$Ebene aufzeigen. So gilt für ein Spiegelpaar (M, M')

$$\langle \mathbf{10} \ \overline{\mathbf{16}} \ \overline{\mathbf{16}} \rangle^{M}_{\text{verdreht}} = \langle \mathbf{10} \ \mathbf{16} \ \mathbf{16} \rangle^{M'}_{\text{unverdreht}}, \tag{6.52}$$

die erste Sorte von Kopplungen läßt sich nicht exakt berechnen, sondern nur störungstheoretisch, wohl aber die zweite mit dem chiralen Ring. Man könnte daher die Rechnung auf M' exakt durchführen. Das Problem hierbei ist die genaue Abbildung der Felder ineinander und noch schlimmer ist, daß die Methode für Singlets nichts bringt.

Da am LG–Punkt generisch zehn neue $SO(10)-$Singlets gegenüber der CY–Phase auftreten, liegt es nahe, über neue flache Richtungen des Superpotentials zu spekulieren, die möglicherweise zu völlig anderen Phasen von $(0,2)-$Modellen oder gar zu einem anderen linearen $\sigma-$Modell führen [100]. Die bislang erhobenen Daten verbieten weder eine solche Möglichkeit noch beweisen sie ihre Existenz. Man kann beispielsweise nach flachen Richtungen suchen, die das Feld T' und andere verdrehte Singlets enthalten. Da T' nur am Punkt der SKFT existiert, kann eine solche flache Richtung nicht zum Parameterraum des linearen $\sigma-$Modells gehören. Für solch einen Ansatz gibt es auch keine Lösung in erster Ordnung. Erlaubt man jedoch auch Beiträge unverdrehter Singlets, so gibt es viele Lösungen, z.B.

$$N = \alpha \left(\sum_{m=1}^{4} \left(S_{e,m}^{(\frac{1}{2})} - S_{e,m}^{(-\frac{1}{2})} \right) + \sum_{n=1}^{4} \sqrt{2} \left(S_{g,n}^{(\frac{1}{2})} + S_{g,n}^{(-\frac{1}{2})} \right) + \sum_{p=1}^{4} T_p' \right). \tag{6.53}$$

Schließlich sollten noch Koinzidenzen Erwähnung finden, die vielleicht zu einem besseren Verständnis des Parameterraums führen könnten: die Anzahl der Teilchen in der Vektordarstellung von $SO(10)$ ist $N_{10} = 74$, was mit der Summe der komplexen ($h^{2,1} = 73$) und Kählerdeformationen ($h^{1,1} = 1$) der zugrundeliegenden CYM übereinstimmt. Zudem ist die Anzahl der unverdrehten **10**er gerade die Nettogenerationenzahl der CYM. Es kann aber natürlich auch nur Zufall sein.

6.5. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die Identifikation exakt lösbarer $(0,2)-$Stringmodelle mit speziellen Punkten in der LG–Phase von $(0,2)-$linearen $\sigma-$Modellen weiter vorangetrieben. Dazu wurden alle Drei– und Vierpunktfunktionen des Raumzeit–Superpotentials berechnet, die Einschränkungen an die möglichen 350 Deformationsrichtungen ergeben. Ähnlich der LG–Analyse können die unverdrehten Deformationen aus einfachen Auswahlregeln abgeleitet werden. Ferner wurde die Kählerklasse in niedrigster Ordnung ermittelt, was leider auf eine zweiparametrige Lösung führte, welches wieder einmal die Schwierigkeit der technischen Behandlung von $(0,2)-$ im Vergleich zu den $(2,2)-$Modellen zeigt. Da das komplette Superpotential nicht bekannt ist, konnte über weitere flache Richtungen, die vielleicht zu einem neuen $\sigma-$Modell führen, nur spekuliert werden.

7. Die (0,2)–Spiegelsymmetrie

In diesem Kapitel soll geklärt werden, ob die Spiegelsymmetrie nur ein Artefakt der $(2,2)-$Modelle ist oder sich auch auf den $(0,2)-$Fall übertragen läßt. Die Strategie zum Auffinden von $(0,2)-$Spiegelpaaren kann man wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{array}{ccc} (0,2) & \longrightarrow & (2,2) \\ \Downarrow & & \downarrow \\ \text{Spiegel } (0,2) & \longleftarrow & \text{Spiegel } (2,2). \end{array} \tag{7.1}$$

Dazu wird eine Abbildung von $(2,2)$ auf $(0,2)$ angegeben (waagerechte Pfeile), womit sich die bekannten Techniken der $(2,2)-$Theorien (rechter Pfeil) auf den $(0,2)-$Fall (linker Pfeil) übertragen. So wird es sich ergeben, daß $(2,2)-$Spiegelpaare solche auf $(0,2)-$Ebene erzeugen. Zunächst müssen aber die früheren Ergebnisse zum Dreigespann verallgemeinert werden, einfach um eine größere Klasse von Modellen zur Verfügung zu haben.

7.1. Das verallgemeinerte (0,2)–Dreigespann

Im ersten Kapitel über das Dreigespann wurde das Modell $(80,0)$ genau untersucht und identifiziert. Kann man das vielleicht verallgemeinern?

Ausgangspunkt war das Gepnermodell $\left(3^5\right)_{A^5}$ (da es nun auch auf die affinen Invarianten in den minimalen Faktoren ankommt, wird die Notation leicht abgeändert) mit dem einfachen Strom

$$\Upsilon = (0\ 5\ 1)(0\ 0\ 0)^4(1)(0). \tag{7.2}$$

Die $(0,2)$–LG/CY–Theorie wurde durch die Konfiguration

$$V_{(1,1,1,1,1;5)} \rightarrow \mathbb{P}_{(1,1,1,1,2,2)}[4\ \ 4]\Big|_{(80,0)} \tag{7.3}$$

bestimmt. Hier wie im folgenden sind die Anzahlen der Generationen und Antigenerationen stets mitnotiert. Es stimmten Spektrum, Yukawakopplungen und R–Ladungen überein. Im vorigen Kapitel wurde dann noch der Parameterraum dieses Modells betrachtet.

Bislang wurde aber die Analyse stabiler Bündel nur über glatten CYMen durchgeführt. Das geht aber auch über quasiglatten, wie oben jeweils mit den Eichgruppen $SO(10)$, $SU(5)$ und E_3. Im folgenden wird ein einfaches Beispiel angeführt.

Ein Modell über einer quasiglatten CYM

Man betrachtet das $(0,2)-$Tochtermodell, das vom diagonalen Gepnermodell $\left(3 \cdot 8^3\right)_{A^4}$ abstammt, mit dem einfachen Strom

$$\Upsilon = (0\ 5\ 1)(0\ 0\ 0)^3(1)(0), \tag{7.4}$$

dessen Form der des $(80,0)-$Modells angelehnt ist. Die Eichgruppe ist in diesem Fall $SO(10)\times SU(2)\times U(1)^3$ mit $N_{16} = 113$ Generationen und $N_{\overline{16}} = 5$ Antigenerationen. Das komplette masselose Spektrum lautet

$SO(10)$–Darstellung	**1**	**10**	**16**	$\overline{\mathbf{16}}$
Spin 0	561	108	113	5
Spin 1	6	0	0	0

Tabelle 59: *Spektrum des Tochtermodells von* $\left(3 \cdot 8^3\right)_{A^4}$.

Führt man dieselbe Analyse der 113 unverdrehten Zustände wie im Falle des $(80,0)$ durch, so sieht man, daß der chirale Ring durch folgende Felder und Bedingungen gegeben ist:

$$V_{(1,1,1,2,5;10)} \to \mathbb{P}_{(1,1,1,4,4,5)}[8 \;\; 8]\Big|_{(113,5)}. \tag{7.5}$$

Diese Daten sorgen sowohl für die Ricciflachheit $c_1(V_{(1,1,1,2,5;10)}) = 0$ als auch die Anomaliekürzungsbedingung $c_2(V_{(1,1,1,2,5;10)}) = c_2(T)$. Nach [44] findet man, daß das lineare σ–Modell zu einer vernünftigen LG–Phase für $R \ll 0$ führt. Für $R \gg 0$ hat man immer noch einen kompakten Parameterraum, nur hat die Mannigfaltigkeit sowohl eine Faktortheorie– als auch eine Hyperflächensingularität bei $(0,0,0,0,0,1)$. Es ist eine interessante Frage, ob man den in [89] dargestellten Algorithmus zur Auflösung so verallgemeinern kann, daß das Spektrum mit dem in der LG–Phase, welches mit den Methoden in [45,98] ermittelt werden kann, übereinstimmt. In der folgenden Tabelle sind die linken und rechten Ladungen der chiralen und fermionischen Felder des linearen σ–Modells aufgelistet.

Feld	$\Phi^{1,2,3}$	$\Phi^{4,5}$	Φ^6	$\lambda^{1,2,3}$	λ^4	λ^5	$\sigma^{1,2}$
q_l	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{5}$
q_r	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

Tabelle 60: *Linke und rechte Ladungen der Felder des linearen* σ*–Modells.*

Ferner werden die Grundzustandsenergien und die Ladungen der verdrehten Sektoren der LG–Faktortheorie gebraucht, diese lauten

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
q_l	-2	0	2	$-\frac{11}{10}$	$\frac{9}{10}$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{4}{5}$
q_r	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$
E	0	-1	0	$-\frac{13}{20}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{20}$	0	$-\frac{2}{5}$	0

Tabelle 61: *Grundzustandsenergien und Ladungen in den verdrehten Sektoren. Die Sektoren* $l = 11, \ldots, 19$ *sind durch CPT–Invarianz bestimmt.*

Nun werden die Hyperflächen– und Bündelbedingungen W_j bzw. F_a gemäß

$$F_1 = \Phi_1^9, \quad F_2 = \Phi_2^9, \quad F_3 = \Phi_3^9, \quad F_4 = \Phi_4^2, \quad F_5 = \Phi_6 \quad \text{und} \quad W_1 = \Phi_5^2, \quad W_2 = \Phi_4\Phi_5 \tag{7.6}$$

gewählt. Die linkshändigen **16**er des unverdrehten Sektors entsprechen gerade Monomen vom Grade zehn modulo der Relationen

$$P_{10}(\Phi_0^i) \sim P_{10}(\Phi_0^i) + c^a\, F_a(\Phi_0^i) + s^j\, W_j(\Phi_0^i), \tag{7.7}$$

was auf genau 113 Generationen führt. Die rechtshändigen **10**er werden durch Monome vom Grade zwanzig dargestellt

$$P_{20}(\Phi_0^i) \sim P_{20}(\Phi_0^i) + c^a\, F_a(\Phi_0^i) + s^j\, W_j(\Phi_0^i), \tag{7.8}$$

was zu $N_{10} = 105$ Vektoren im unverdrehten Sektor führt. Der Sektor mit $l = 4$ enthält die drei linkshändigen **10**er $\lambda^{1,2,3}_{-\frac{1}{5}}|0\rangle$ und drei linkshändige $\overline{\mathbf{16}}$er $\Phi^{1,2,3}_{-\frac{1}{5}}|0\rangle$. Die beiden restlichen Antigenerationen tauchen im Sektor $l = 6$ auf: $\Phi^{4,5}_{-\frac{1}{5}}|0\rangle$. Damit stimmen die $(R, R)-$Sektoren der SKFT und des LG–Modells völlig überein. Strengt man sich etwas mehr an, so kann man auch zeigen, daß die $(NS, R)-$Sektoren, insbesondere die Anzahlen der linkslaufenden Singlets ($(q_l, q_r) = (0, -\frac{1}{2})$) übereinstimmen, diese sehen wie folgt aus:

l	1	3	5	7
Anzahl	$465 + N_e$	48	30	12

Tabelle 62: *Linkslaufende Singlets in den verschiedenen Sektoren.*
N_e steht für die Dimension der Eichgruppenerweiterung.

Für die obige Wahl der W_j und F_a ergibt sich $N_e = 6$ und damit die erwünschte Zahl von $N_1 = 561$ masselosen Singlets.

Damit läßt sich schließen, daß die obige SKFT, basierend auf dem Gepnermodell $\left(3 \cdot 8^3\right)_{A^4}$, einen speziellen Punkt in der LG–Phase des linearen $\sigma-$Modells mit den Daten (7.5) beschreibt. Die Betrachtung der unverdrehten $\overline{\mathbf{16}}$er ergibt, daß der einfache Strom in der Zustandssumme die geometrischen Daten wie folgt verändert: zunächst wählt man als Bündeldaten des mutmaßlichen $(0, 2)-$Modells die CY–Daten des $(2, 2)-$Modells, was zu dem Gepnermodell gehört. Im hier vorliegenden Fall des Gepnermodells $\left(3 \cdot 8^3\right)_{A^4}$ hat man die CYM $\mathbb{P}_{(1,1,1,2,5)}[10]$, wobei der $K = 3$ Tensorfaktor (um Verwechslungen mit Gewichten k von Koordinaten zu vermeiden, werden die minimalen Faktoren ab nun mit K notiert) zu der Koordinate vom Gewicht $k = 2$ gehört und ein trivialer Faktor eingeführt wurde, da das Gepnermodell nur vier Faktoren hat. Die CYM für das $(0, 2)-$Modell bekommt man dann, indem man die zu dem $K = 3$ Tensorfaktor gehörende Koordinate durch zwei Felder ersetzt, deren Gewicht jeweils doppelt so groß wie vorher ist. Schließlich haben die beiden Hyperflächen dasselbe Gewicht. Diese Operation, die aus einer $(2, 2)-$ eine $(0, 2)-$Theorie macht, kann auf alle Gepnermodelle und sogar allgemeiner auf alle LG–Modelle übertragen werden, sofern diese ein geeignetes Feld haben, wie sich im folgenden zeigen wird.

Ungerade Theorien

Die Anwendung des supersymmetriebrechenden einfachen Stroms auf eine exakt lösbare Theorie kann direkt in die LG–Theorie übertragen werden, indem die obige Operation verallgemeinert wird. Diese Konstruktion wird im folgenden "Weitergabe" genannt.

Für die Gepnermodelle sieht das wie folgt aus: man betrachte ein Gepnermodell, das mindestens einen Faktor mit ungeradem $K = (2\ell - 1)$ besitzt, der der Einfachheit halber der erste sei. Es sei d das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $\{K_1{+}2, K_2{+}2, K_3{+}2, K_4{+}2, K_5{+}2\}$. Für Modelle mit nur vier Faktoren wird $K_5 = 0$ gesetzt. Dann offenbart die Analyse des chiralen Rings, daß das Modell mit dem einen einfachen Strom

$$\Upsilon = (0\ \ K{+}2\ \ 1)(0\ 0\ 0)^4(1)(0) \tag{7.9}$$

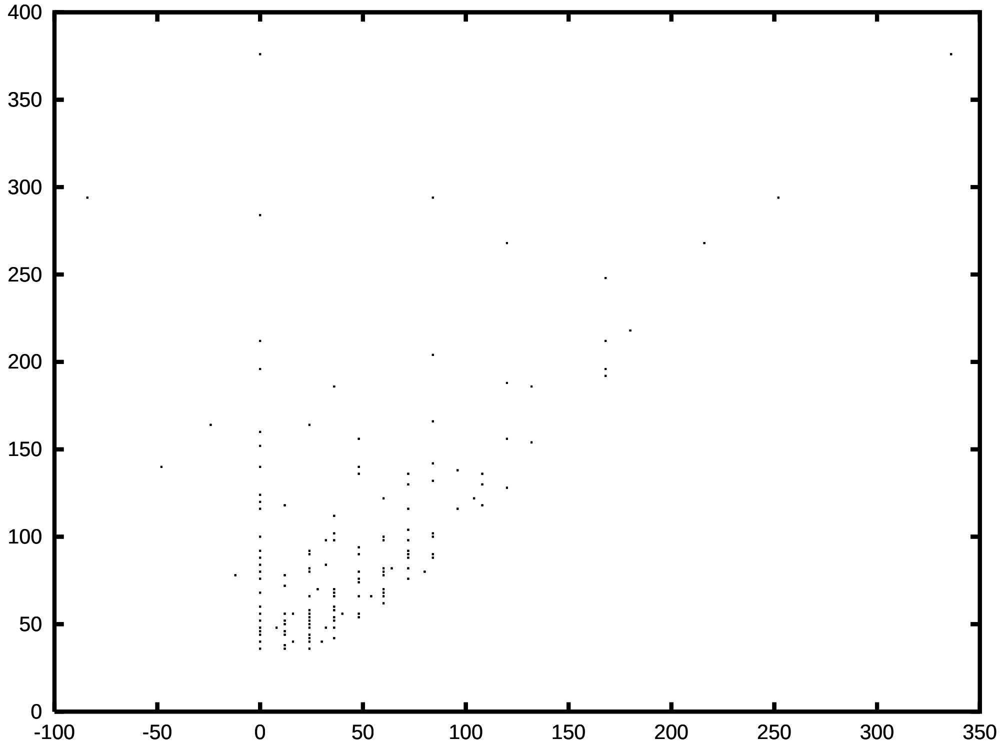
zu einem linearen $\sigma-$Modell mit den folgenden Daten gehört:

$$V_{\left(\frac{d}{2\ell+1},\frac{d}{K_2+2},\frac{d}{K_3+2},\frac{d}{K_4+2},\frac{d}{K_5+2};d\right)} \longrightarrow \mathbb{P}_{\left(\frac{2d}{2\ell+1},\frac{\ell d}{2\ell+1},\frac{d}{K_2+2},\frac{d}{K_3+2},\frac{d}{K_4+2},\frac{d}{K_5+2}\right)}\left[\frac{(\ell+2)d}{2\ell+1},\frac{2\ell d}{2\ell+1}\right]. \tag{7.10}$$

Diese Menge exakt lösbarer $(0,2)-$Theorien kann als das $SO(10)-$Analogon zur Gepnerklasse im E_6-Fall angesehen werden. Die Verallgemeinerung auf Gepnermodelle mit mehr als fünf Faktoren oder $D-$ und $E-$Invarianten ist offensichtlich. So führt das Gepnermodell $\left(1^3\cdot 3^2\cdot 8\right)_{A^6}$ mit einem einfachen Strom, der auf einen der beiden $K=3$ Tensorfaktoren wirkt, zu dem $(0,2)-$Modell mit den Daten

$$V_{(3,6,6,10,10,10,15;30)} \longrightarrow \mathbb{C}_{(3,6,10,10,10,12,12,15)}[24\ \ 24], \tag{7.11}$$

hier wurde $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{P}$ geschrieben, um zu verdeutlichen, daß es sich hier um eine Varietät und nicht direkt um eine Mannigfaltigkeit handelt. Es wurden die masselosen Spektren aller SKFTen in dieser Klasse berechnet. In der folgende Figur ist $(N_{16}-N_{\overline{16}})$ gegen $(N_{16}+N_{\overline{16}})$ aufgetragen. Es gibt 455 Modelle mit 140 verschiedenen Spektren.



Figur 3: $N_{16}+N_{\overline{16}}$ gegen $N_{16}-N_{\overline{16}}$ für die 140 SKFT–Spektren

Wie im $(2,2)-$Fall ist die Klasse aller dieser verallgemeinerten Gepnermodelle nicht spiegelsymmetrisch [40,41]. Dafür müßte man alle Phasenfaktortheorien einschl. derer mit diskreter Torsion [101] betrachten. Übertragen auf die CYMen, führt die SKFT dazu, CY–Hyperflächenkonfigurationen $\mathbb{P}_{(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5)}[d]$ in einem gewichteten vierdimensionalen projektiven Raum mit Grad $d=\sum_i k_i$ zu betrachten, so daß zumindest eins der Gewichte k_i den Grad gemäß $\frac{d}{k_i}=(2\ell+1)$ teilt. Solche Koordinaten bzw. Konfigurationen werden im folgenden als "ungerade" bezeichnet. Für eine ungerade Konfiguration $\mathbb{P}_{(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5)}[d]$, in der die ungerade Koordinate z_1 sei, wird nun eine davon abstammende $(0,2)-$Theorie mit der Konfiguration

$$V_{(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5;d)} \longrightarrow \mathbb{P}_{(2k_1,\ell k_1,k_2,k_3,k_4,k_5)}[(\ell+2)k_1\ \ 2\ell k_1] \tag{7.12}$$

definiert, wobei $V_{(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5;d)}$ ein stabiles Bündel über der CYM mit Gewichten k_i ist, welche die Ladungen der Eichfermionen, die Schnitte im Bündel V sind, beschreiben. Man rechnet nach, daß sich die Anomalien tatsächlich kürzen.

Die Abpaarung von Generationen und Antigenerationen

Die Identifikation des Modells (7.5) war relativ einfach. Das folgenden Beispiel zeigt, daß subtilere Dinge geschehen können. Es wird vom Gepnermodell $(1 \cdot 7 \cdot 25 \cdot 52)_{\mathrm{A^3D}}$ ausgegangen, wobei der Index D dafür steht, daß in dem $K = 52$ minimalen Faktor eine nichtdiagonale affine D–Invariante gewählt wurde. Die Anwendung der Weitergabe auf den $K = 25$ Faktor sollte dem folgenden Modell entsprechen:

$$V_{(1,1,3,9,13;27)} \longrightarrow \mathbb{P}_{(1,2,3,9,13,13)}[15 \;\; 26]. \tag{7.13}$$

Das Spektrum der SKFT lautet $(N_{16}, N_{\overline{16}}) = (119, 11)$. Die Berechnung im Rahmen der LG–Theorie zeigt jedoch, daß im $l = 18$ verdrehten Sektor etwas neues passiert. Die Grundzustandsenergie ist $E = 0$ mit den Ladungen $(q_l, q_r) = (-\frac{1}{9}, -\frac{11}{18})$. Die Nullmoden lauten

$$\Phi_0^3,\ \Phi_0^4,\ \overline{\lambda}_0^3,\ \overline{\lambda}_0^4,\ \overline{\sigma}_0^2. \tag{7.14}$$

Im Sektor mit $q_l = 1$ erhält man die Sequenz

$$0 \longrightarrow \begin{matrix} \left(\Phi_0^3\right)^2 \left(\overline{\lambda}_0^3\right) \\ \left(\Phi_0^3\right)^4 \left(\overline{\lambda}_0^4\right) \\ \left(\Phi_0^3\right) \left(\Phi_0^4\right) \left(\overline{\lambda}_0^4\right) \\ \left(\Phi_0^3\right)^5 \left(\overline{\sigma}_0^2\right) \\ \left(\Phi_0^3\right)^2 \left(\Phi_0^4\right) \left(\overline{\sigma}_0^2\right) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \left(\Phi_0^3\right)^1 0 \\ \left(\Phi_0^3\right)^7 \left(\Phi_0^4\right) \\ \left(\Phi_0^3\right)^4 \left(\Phi_0^4\right)^2 \\ \left(\Phi_0^3\right) \left(\Phi_0^4\right)^3 \end{matrix} \longrightarrow 0 \tag{7.15}$$

mit rechtslaufenden Ladungen

$$0 \longrightarrow \left(1, -\frac{1}{2}\right) \longrightarrow \left(1, \frac{1}{2}\right) \longrightarrow 0. \tag{7.16}$$

Wählt man nun den für diesen Sektor relevanten BRST–Operator als

$$\overline{Q}_+ = \lambda_0^3 \left(\Phi_0^3\right)^8 + \lambda_0^4 \left(\Phi_0^4\right)^2 + \sigma_0^2 \left(\Phi_0^3\right)^2 \left(\Phi_0^4\right), \tag{7.17}$$

so erhält man in diesem Sektor genau ein masseloses Feld mit $(q_l, q_r) = (1, -\frac{1}{2})$. Unter Berücksichtigung aller anderen Sektoren kommt man auf $(N_{16}, N_{\overline{16}}) = (118, 10)$, was nicht mit der SKFT übereinstimmt. Wählt man dagegen analog zu dem ersten Modell dieses Kapitels den BRST–Operator gemäß

$$\overline{Q}_+ = \lambda_0^3 \left(\Phi_0^3\right)^8 + \lambda_0^4 \left(\Phi_0^4\right)^2 + \sigma_0^2 \left(\left(\Phi^2_{-\frac{2}{3}}\right) \left(\Phi^6_{\frac{2}{3}}\right) + \left(\Phi^2_{\frac{2}{3}}\right) \left(\Phi^6_{-\frac{2}{3}}\right)\right), \tag{7.18}$$

so liegt das Feld $\left(\Phi_0^3\right)^7 \left(\Phi_0^4\right)$ nicht mehr im Bild von $\overline{Q}_+$ und das masselose Spektrum wird $(N_{16}, N_{\overline{16}}) = (119, 11)$.

Damit zeigt dieses Beispiel erstmals einen Effekt für $(0,2)$–Modelle, an den man schon lange glaubte. Die Anzahl der Generationen und Antigenerationen ist nicht notwendigerweise über den Parameterraum konstant. Dies ist bei weitem keine Ausnahme, denn ca. 13% der SKFTen haben bis zu drei Generationen mehr als die LG–Modelle mit den minimalen Bedingungen. Natürlich ist die Anzahl der Nettogenerationen als topologische Invariante weiterhin erhalten, anders als im $(2,2)-$Fall sind die Anzahlen der Generationen und Antigenerationen für sich selbst keine topologischen Invarianten mehr, es existieren also nichtverschwindende Kopplungen $\langle \mathbf{1}\ \mathbf{16}\ \overline{\mathbf{16}}\rangle$, während $\langle \mathbf{1}\ \mathbf{27}\ \overline{\mathbf{27}}\rangle$ bei $(2,2)-$Supersymmetrie verboten ist.

$(0,2)$ – Theorien aus $(2,2)$ – Faktortheorien

Bislang wurde als $(2,2)-$Ausgangspunkt immer ein Gepnermodell gewählt, man kann aber auch mit allgemeineren Modellen starten, wie z.B. Faktortheorien: man betrachte etwa die $(2,2)-$Faktortheorie

$$\left(3^5\right)_{A^5} \Big/ \mathbb{Z}_5. \tag{7.19}$$

In einem späteren Abschnitt wird sich zeigen, daß diese Faktortheorie alternativ unter Zuhilfenahme einer gebrochenen Transformation (GT) als gewichtete Konfiguration

$$\mathbb{P}_{(3,4,4,4,5)}[20] = \mathrm{GT}\left(\mathbb{P}_4[5]/\mathbb{Z}_5 : [0\ 4\ 1\ 0\ 0]\right) \tag{7.20}$$

angesehen werden kann. Dabei wird die Wirkung der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_b$ der Ordnung b mit $[m_1 \dots m_5]$ abgekürzt und bedeutet, daß die Symmetrie gemäß $(z_1, \dots, z_5) \mapsto (\alpha^{m_1} z_1, \dots, \alpha^{m_5} z_5)$ wirkt, wobei α die b-te Einheitswurzel ist. Die GTen werden im übernächsten Abschnitt ausführlich erklärt, sie erlauben, die Ordnung der zyklischen Gruppe sukzessiv zu senken und in den Gewichten des projektiven Raums zu absorbieren. Wendet man die Weitergabe auf die $k = 4$ Koordinate an, so ergibt sich

$$V_{(3,4,4,4,5;20)} \longrightarrow \mathbb{P}_{(3,4,4,5,8,8)}[16\ \ 16]\Big|_{(42,2)}. \tag{7.21}$$

Die SKFT im Parameterraum dieses Modells kann man erhalten, indem man erst den einfachen Strom, der die Faktortheorie erzeugt, anwendet und dann die $(2,2)-$Supersymmetrie wie in den vorigen Fällen bricht, explizit:

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &= (0\ 0\ 0)(0\ \ {-2}\ 0)(0\ 2\ 0)(0\ 0\ 0)^2(0)(0) \\ \Upsilon_2 &= (0\ 5\ 1)(0\ 0\ 0)^4(1)(0). \end{aligned} \tag{7.22}$$

Diese SKFT hat tatsächlich $(N_{16}, N_{\overline{16}}) = (42,2)$. Dieses Modell wird in der Diskussion der Spiegelsymmetrie noch einmal betrachtet werden.
Ein weiteres Beispiel ist das Gepnermodell $\left(1 \cdot 5 \cdot 82^2\right)_{A^4}$, was einen Punkt im Parameterraum der Konfiguration $\mathbb{P}_{(1,1,12,28,42)}[84]$ beschreibt. Mittels gebrochener Transformation wird eine gewisse Faktortheorie davon als normale Konfiguration in einem gewichteten projektiven Raum beschrieben:

$$\mathbb{P}_{(2,3,24,55,84)}[168] = \mathrm{GT}\left(\mathbb{P}_{(1,1,12,28,42)}[84]/\mathbb{Z}_3 : [2\ 0\ 0\ 1\ 0]\right), \tag{7.23}$$

was auf das $(0,2)-$Modell

$$V_{(2,3,24,55,84;168)} \longrightarrow \mathbb{P}_{(2,3,48,55,72,84)}[120\ \ 144]\Big|_{(128,32)} \tag{7.24}$$

führt. Die entsprechende SKFT erhält man durch Anwendung der beiden einfachen Ströme

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &= (0\ \ {-2}\ 0)(0\ 0\ 0)(0\ 56\ 0)(0\ 0\ 0)(0)(0) \\ \Upsilon_2 &= (0\ 0\ 0)(0\ 7\ 1)(0\ 0\ 0)(0\ 0\ 0)(1)(0). \end{aligned} \tag{7.25}$$

Es gibt viele andere Beispiele. Somit ist eine große Klasse von $(0,2)-$Modellen gefunden, die alle das erwünschte Dreigespann CYM/LG/SKFT besitzen. Es bleibt aber noch viel zu tun, um die CY–Phase zu verstehen, wenn die Modelle Hyperflächensingularitäten aufweisen.

SKFTen mit Eichgruppe SU(5) und E$_3$

Bei der Konstruktion exakt lösbarer Modelle wurde auch für Eichgruppen kleineren Rangs durchgeführt. So wurde aus dem Modell $\left(3^5\right)_{A^5}$ mit den einfachen Strömen

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &= (0\ 5\ 1)(0\ 0\ 0)(0\ 0\ 0)^3(1\ 0)(0) \\ \Upsilon_2 &= (0\ 0\ 0)(0\ 5\ 1)(0\ 0\ 0)^3(0\ 1)(0) \end{aligned} \tag{7.26}$$

ein $(0,2)-$Modell. Die zugehörige $(0,2)$–LG–Theorie war durch die Daten

$$V_{(0,1,1,1,1,1;5)} \rightarrow \mathbb{P}_{(1,1,1,2,2,2,2,5)}[4\ \ 4\ \ 4\ \ 4]\Big|_{(N_{10}=64,N_{\overline{10}}=0)} \tag{7.27}$$

gegeben, zur Bedeutung der Notation vgl. (4.49): es wurde ein neue Bedingung F_1 mit Gewicht $k = 5$ eingeführt, die die Nichttransversalität der Koordinate vom Gewicht $k = 5$ behebt, d.h. der quadratische Term $\lambda_1\,\phi_8$ im Superpotential trägt nicht zur Kohomologie bei. Ferner sorgt diese Bedingung dafür, daß die zentrale Ladung der internen SKFT $(c_l, c_r) = (11, 9)$ beträgt, wie es für ein Bündel vom Rang fünf nötig ist. Die Verallgemeinerung der Weitergabe auf diese Modelle ist offensichtlich, man wendet sie einfach auf zwei verschiedene Koordinaten nacheinander an.

Ein Beispiel ist das Gepnermodell $\left(1\cdot 3^3\cdot 13\right)_{A^5}$. Die einfachen Ströme in (7.26) führen zu einer SKFT mit $(N_{10}, N_{\overline{10}}) = (49,1)$. Dasselbe Spektrum liefert das LG–Modell

$$V_{(0,1,3,3,3,5;15)} \longrightarrow \mathbb{P}_{(1,3,5,6,6,6,6,15)}[12\ \ 12\ \ 12\ \ 12]\Big|_{(N_{10}=49,N_{\overline{10}}=1)}. \tag{7.28}$$

Ein weiteres Beispiel ist gegeben durch $\left(1^2\cdot 3\cdot 7\cdot 43\right)_{A^5}$ mit den einfachen Strömen

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &= (0\ 0\ 0)^2(0\ 5\ 1)(0\ 0\ 0)(0\ 0\ 0)(1\ 0)(0) \\ \Upsilon_2 &= (0\ 0\ 0)^2(0\ 0\ 0)(0\ 9\ 1)(0\ 0\ 0)(0\ 1)(0), \end{aligned} \tag{7.29}$$

was zu dem LG–Modell

$$V_{(0,1,5,9,15,15;45)} \longrightarrow \mathbb{P}_{(1,10,15,15,18,18,20,45)}[30\ \ 36\ \ 36\ \ 40]\Big|_{(N_{10}=36,N_{\overline{10}}=12)} \tag{7.30}$$

paßt.

Schließlich kann man völlig analog die Verallgemeinerung auf $E_3 = SU(3)\times SU(2)$ durchführen. Die drei einfachen Ströme

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &= (0\ 5\ 1)(0\ 0\ 0)(0\ 0\ 0)(0\ 0\ 0)^2(1\ 0\ 0)(0) \\ \Upsilon_2 &= (0\ 0\ 0)(0\ 5\ 1)(0\ 0\ 0)(0\ 0\ 0)^2(0\ 1\ 0)(0) \\ \Upsilon_3 &= (0\ 0\ 0)(0\ 0\ 0)(0\ 5\ 1)(0\ 0\ 0)^2(0\ 0\ 1)(0), \end{aligned} \tag{7.31}$$

angewandt auf das Gepnermodell $(3)^5_{A^5}$ führen zu dem Spektrum $(N_6, N_{\overline{6}}) = (50,0)$, was zu dem LG–Modell

$$V_{(0,0,1,1,1,1,1;5)} \longrightarrow \mathbb{P}_{(1,1,2,2,2,2,2,2,5,5)}[4\ \ 4\ \ 4\ \ 4\ \ 4\ \ 4]\Big|_{(N_6=50,N_{\overline{6}}=0)} \tag{7.32}$$

korrespondiert, indem die Weitergabe dreimal angewendet wurde. Da man jedoch als Ausgangspunkt drei ungerade Faktoren im Gepnermodell braucht, gibt es hier vergleichsweise wenige Beispiele.

7.2. (0,2)–LG–Theorien

In diesem Abschnitt wird die Weitergabeabbildung von ihrem exakt lösbaren Ursprung losgelöst und auf die Klasse der $(2,2)$–LG–Modelle verallgemeinert. Eine Liste aller möglichen Kombinationen von Gewichten, die eine Wahl eines Superpotentials mit einer isolierten Singularität zulassen, findet man in [51,52]. Gegeben solch eine $(2,2)$–LG–Theorie, so ist es i.a. möglich, einige verschiedene $(0,2)-$Modelle zu definieren, auch mit verschiedenen Eichgruppen, was von der Anzahl der Weitergaben abhängt. Doch zunächst zum wichtigsten Fall mit einer Weitergabe.

Die SO(10) – Weitergabe

Dieser einfachste Fall ist die Verallgemeinerung eines supersymmetriebrechenden einfachen Stroms. Die resultierende Abbildung kann unabhängig von jeder exakt lösbaren Betrachtung in Rahmen von LG–Theorien formuliert werden:

Die Weitergabe: Angenommen, man hat ein $(2,2)$–LG–Modell, symbolisiert als

$$\mathbb{C}_{(k_1,\ldots,k_{\max})}[d] \quad \text{mit} \quad d = \tfrac{2}{\max-3}\textstyle\sum_{i=1}^{\max} k_i,$$

für das eins der Gewichte, z.B. k_1, die Bedingung $\frac{d}{k_1} = (2\ell+1)$ mit $\ell = 1, 2, \ldots$ erfüllt. Dann garantiert die Datenwahl

$$V_{(k_1,\ldots,k_{\max};d)} \longrightarrow \mathbb{C}_{(2k_1,\ell k_1,k_2,\ldots,k_{\max})}[(\ell{+}2)k_1 \quad 2\ell k_1]$$

gerade die Anomaliekürzung.

Ob allerdings so ein Modell wirklich ein gutes $(0,2)-$Modell mit Eichgruppe $SO(10)$ liefert, ist eine schwierige Frage, kann es doch sein, daß in Abhängigkeit von den Gewichten und Bedingungen Effekte wie die Nichttransversalität des $(0,2)$–LG–Modells oder zusätzliche masselose Gluinos in verdrehten Sektoren auftreten. Letzteres wurde in [45] behandelt, wo dies als das LG–Analogon der Destabilisierung des Vakuums durch Weltflächen–Instantonen in der CY–Phase angesehen wurde. Auf diesen Punkt wird später noch eingegangen. Man sollte bemerken, daß eine Weitergabe mit $\ell = 1$ das Modell nicht ändert, es bleibt beim $(2,2)-$Modell. Dasselbe kann man in der SKFT beobachten, denn dort ändert ein einfacher Strom (7.9) in einem $K = 1$ Tensorfaktor das Spektrum nicht. Ähnliches gilt für die mehrfache Anwendung dieses Stroms in ein– und demselben Faktor.

Bzgl. der Transversalität des $(0,2)$–LG–Superpotentials kann man folgende allgemeine Bemerkung machen: wenn das $(2,2)-$Superpotential als

$$W(x_i) = x_1^{2\ell+1} + P(x_2,\ldots,x_{\max}) \tag{7.33}$$

gewählt werden kann, dann ist die Wahl

$$F_i = \frac{\partial P}{\partial x_i} \quad \text{für } i \in \{2,\ldots,\max\}, \qquad F_1 = y_1^\ell,\ W_1 = y_1\,y_2,\ W_2 = y_2^2 \tag{7.34}$$

für die $(0,2)-$Nebenbedingungen natürlicherweise transversal. Hierbei sind die neuen Koordinaten y_1, y_2 vom Gewicht $\kappa_1 = 2k_1$ bzw. $\kappa_2 = \ell k_1$. Tritt die Koordinate x_1 auch in P auf

$$W(x_i) = x_1^{2\ell+1} + x_1 x_2^{a_2} + Q(x_2,\ldots,x_{\max}), \tag{7.35}$$

so ist die Wahl

$$F_1 = x_2^{a_2},\ F_2 = \frac{\partial Q}{\partial x_2},\ F_i = \frac{\partial Q}{\partial x_i},\ i \in \{3,\ldots,\max\},\quad W_1 = y_1\, y_2,\ \ W_2 = y_1^\ell + y_2^2 \tag{7.36}$$

transversal. Es mag vorkommen, daß Q nicht von x_2 abhängt. In diesem Falle kann man entweder ein anderes Polynom vom richtigen Grad wählen, oder, falls dies nicht möglich ist, $F_2 = 0$ setzen. Man hat dann immer noch $(\max + 1)$ nichttriviale Bedingungen für $(\max + 1)$ Variablen und somit macht die LG–Phase Sinn. Viele, aber nicht alle (21 von 26 bei einer Gesamtzahl von 8027) dieser seltenen Beispiele sind sowieso inkonsistent, da sie weitere Gluinos enthalten.

Um das masselose Spektrum in der LG–Phase systematisch zu berechnen, ist ein programmierbarer Algorithmus vonnöten. Die Beiträge der einzelnen verdrehten Sektoren zur Kohomologie hängen jedoch von der genauen Form der Bedingungen W_j und F_a ab, die das stabile Bündel

$$V_{(n_1,\ldots,n_{r+1};m)} \longrightarrow \mathbb{P}_{(k_1,\ldots,k_{N_i})}[d_1 \cdots d_{N_k}] \tag{7.37}$$

vom Rang r über einem vollständigen Schnitt der Kodimension N_k definieren. Nützlicher ist da das elliptische Geschlecht, zu dem der α-te verdrehte Sektor mit

$$Z^\alpha_{LG}(q,y) = \mathrm{Spur}_{\mathcal{H}_\alpha}\, e^{-\pi i (J_0 - \overline{J}_0)} y^{J_0}\ q^{L_0} \sim \chi_y + O(q) \tag{7.38}$$

beiträgt. Es kann einfach berechnet werden. Benutzt man die Notation aus [102] (dort wird die $(2,2)-$Formel von Vafa [103] auf $(0,2)$ verallgemeinert), so läßt sich das Geschlecht χ_y eines Bündels vom Rang r als

$$\chi_y^\alpha = (-1)^{r\alpha} \left.\frac{\prod_a (-1)^{[\alpha\nu_a]} \left(y^{\nu_a} q^{\frac{\beta_a}{2}}\right)^{\{\alpha\nu_a\}}\ (1 - y^{\nu_a} q^{\{\alpha\nu_a\}})(1 - y^{-\nu_a} q^{-\beta_a})}{\prod_i (-1)^{[\alpha q_i]} \left(y^{q_i} q^{\frac{\beta_i}{2}}\right)^{\{\alpha q_i\}}\ (1 - y^{q_i} q^{\{\alpha q_i\}})(1 - y^{-q_i} q^{-\beta_i})}\right|_* \tag{7.39}$$

schreiben, wobei $|_*$ die Auswertung in $q^0 y^n$, $n \in \{0, 1, \ldots, r\}$ bedeutet. Ferner ist

$$\{x\} := x - [x],\quad \beta_a := \{\alpha\nu_a\} - 1,\quad \beta_i := \{\alpha q_i\} - 1. \tag{7.40}$$

Hier lauten die Ladungen der Felder $q_i = \frac{k_i}{m}$, $\nu_a = 1 - \frac{n_a}{m}$ und $\nu_{r+1+j} = \frac{d_j}{m}$. Verarbeitet man diese Formel in einem C–Programm, so erhält man für das quasiglatte Beispiel am Anfang dieses Kapitels folgende Ergebnisse:

α	χ^α
0	$y^0 + 113y^1 - 113y^3 - y^4$
1	y^4
2	$-3y^2 + 3y^3$
3	$2y^3$
4	0
5	0
6	0
7	$-2y^1$
8	$-3y^1 + 3y^2$
9	$-y^0$
χ	$108y^1 - 108y^3$

Tabelle 63: *Geschlecht* χ_y *von* $\left(3 \cdot 8^3\right)_{A^4}$.

Setzt man $l = 2\alpha$, so spiegelt sich das masselose $(R,R)-$Spektrum wieder. Ferner erkennt man die $CPT-$Invarianz des LG–Modells wieder, die hier durch die Serre–Dualität (in diesem Beispiel hat man bei $\alpha \to 10-\alpha$ nur $y^a \to -y^{4-a}$) entsteht, womit sich der Rechenaufwand halbieren läßt. Für Modelle ohne Abpaarung und ohne zusätzliche Gluinos in verdrehten Sektoren kann man die Anzahlen der Generationen und Antigenerationen direkt am Geschlecht χ_y ablesen.
Es gibt jedoch Umstände, unter denen zusätzliche Gluinos auftreten können. Beispielsweise enthält das Modell

$$V_{(5,5,8,9,18;45)} \longrightarrow \mathbb{P}_{(5,5,8,18,18,18)}[36\ \ 36] \tag{7.41}$$

einen Zustand mit $(q_l, q_r) = (1, \frac{3}{2})$ im $\alpha = 17$ verdrehten Sektor, was zu Gluinos in der Spinordarstellung von $SO(10)$ führt. Wie in [45] dargelegt wurde, kann die Theorie für eine eingeschränkte Wahl der Bedingungen immer noch Sinn machen, allerdings nicht als Modell mit Eichgruppe $SO(10)$. Leider ist das Geschlecht χ_y nur empfindlich auf die rechtslaufende $U(1)-$Ladung modulo zwei und kann daher eine Erweiterung der Eichsymmetrie nicht anzeigen. Man braucht eine bequem zu handhabende Bedingung für die Konsistenz eines Modells. Eine notwendige Bedingung ist nicht schwer aufzustellen. Dazu wird explizit die linkslaufende $U(1)-$Ladung berücksichtigt. Verallgemeinert man das Geschlecht χ_y entsprechend, so ist die erzeugende Funktion aller Zustände im LG–Modell vor der Berechnung der Kohomologie

$$\chi^\alpha = \left.\frac{\prod_a \left(x^{-\rho_a} y^{\nu_a} q^{\frac{\beta_a}{2}}\right)^{\{\alpha\nu_a\}} \ (1 + x^{-\rho_a} y^{\nu_a} q^{\{\alpha\nu_a\}})(1 + x^{\rho_a} y^{-\nu_a} q^{-\beta_a})}{\prod_i \left(x^{-(1-q_i)} y^{q_i} q^{\frac{\beta_i}{2}}\right)^{\{\alpha q_i\}} \ (1 - x^{q_i} y^{q_i} q^{\{\alpha q_i\}})(1 - x^{-q_i} y^{-q_i} q^{-\beta_i})}\right|_* \tag{7.42}$$

mit der Abkürzung

$$\rho_a = 1 - \nu_a. \tag{7.43}$$

Der Einfachheit halber soll im folgenden nur ein Bündel vom Rang vier betrachtet werden. Da der BRST–Operator $\overline{Q}_+$ die Ladungen $(q_l, q_r) = (0,1)$ trägt, erhält man Sequenzen der Form

$$0 \xrightarrow{\overline{Q}_+} \left(q_l, -\frac{3}{2}\right) \xrightarrow{\overline{Q}_+} \left(q_l, -\frac{1}{2}\right) \xrightarrow{\overline{Q}_+} \left(q_l, \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{\overline{Q}_+} \left(q_l, \frac{3}{2}\right) \xrightarrow{\overline{Q}_+} 0 \tag{7.44}$$

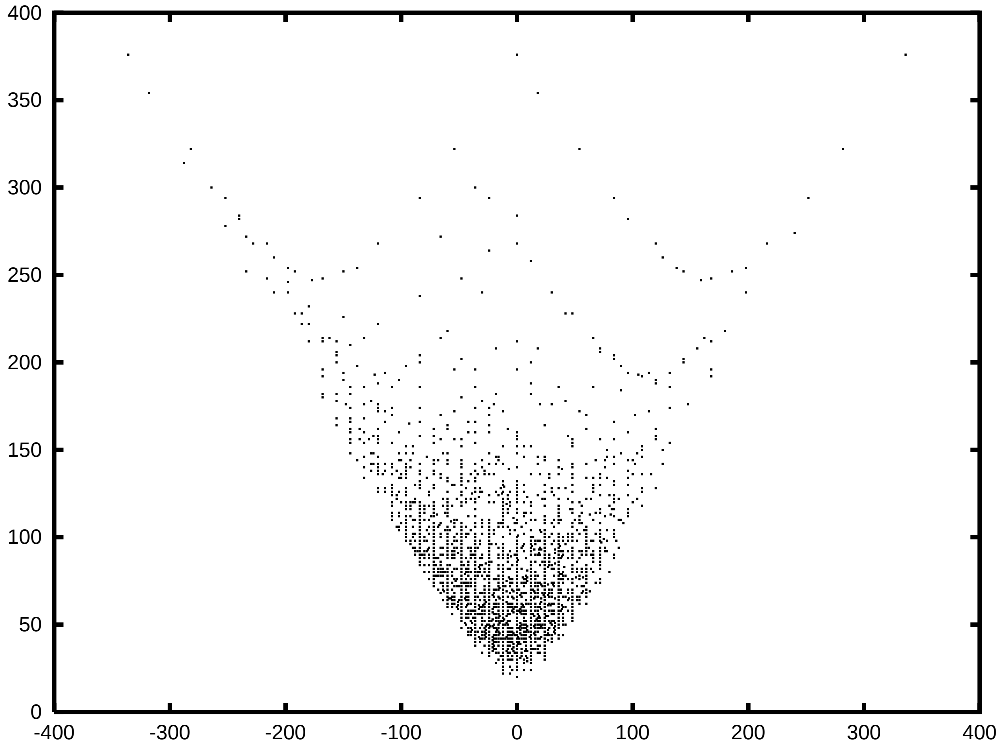
(oder auch länger) mit den Multiplizitäten

$$0 \to a_{-\frac{3}{2}} \to a_{-\frac{1}{2}} \to a_{\frac{1}{2}} \to a_{\frac{3}{2}} \to 0. \tag{7.45}$$

Der BRST–Operator hängt explizit von den Nebenbedingungen

$$\overline{Q}_+ = \oint dz \sum_a \lambda_a F_a + \sum_j \sigma_j W_j \tag{7.46}$$

ab. Wenn jedoch eine Sequenz (7.44) in einem Sektor Gluinos $(q_l, q_r = \pm\frac{3}{2})$, für $q_l = 0, \pm 1$ enthält, so daß $a_{q_r} > a_{q_r+1} + a_{q_r-1}$, dann sind diese unvermeidlich, d.h. nicht durch eine andere Wahl der Nebenbedingungen wegzubekommen. Ist diese Ungleichung nicht erfüllt, so muß man andere mögliche Wahlen detailliert prüfen. In der folgenden Figur sind alle $(0,2)-$Modelle eingetragen, die von der Anwendung einer Weitergabe auf alle ungeraden $(2,2)$–LG–Modelle aus der Tabelle in [52] herrühren. Die Liste der $(0,2)-$Modelle in den folgenden Figuren (und auch die mit kleinerer Eichgruppe) findet sich auf der www–Seite [104]. Alle Modelle



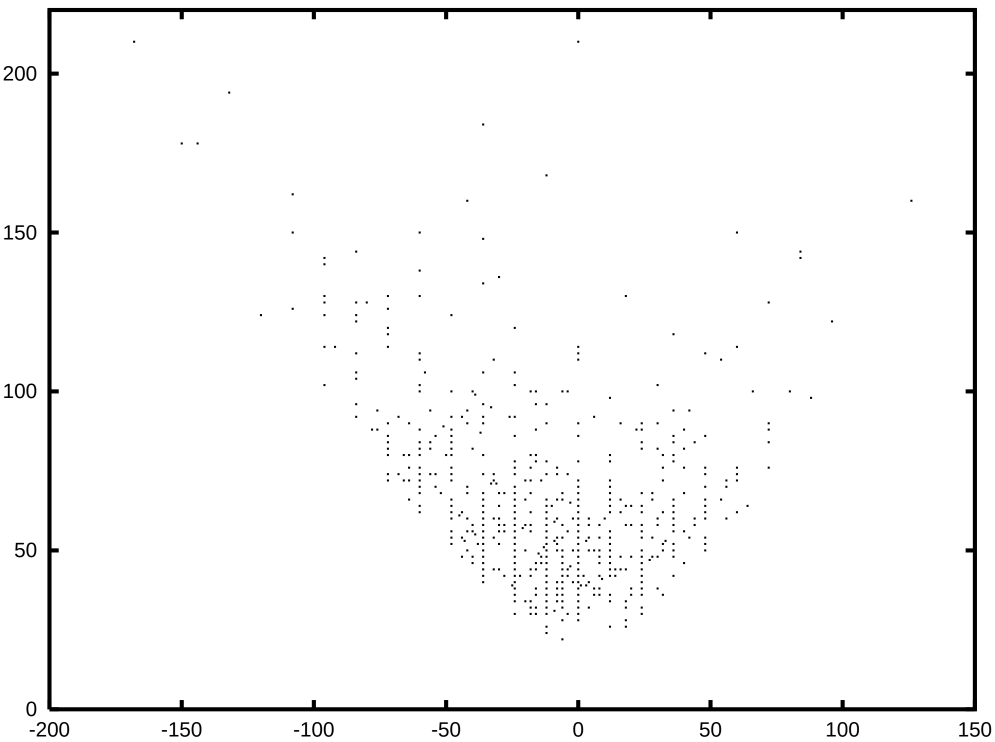
Figur 4: $(N_{16} + N_{\overline{16}})$ gegen $(N_{16} - N_{\overline{16}})$ für alle 1757 $SO(10)$ LG–Spektren.

wurden nach unvermeidbaren Gluinos durchsucht. Die Modelle mit vermeidbaren Gluinos wurden stochastisch untersucht, und in allen Fällen verschwanden die Gluinos durch eine geeignete Wahl der Bedingungen. Unter der Annahme, daß alle diese Modelle gute $(0, 2)-$Modelle mit Eichgruppe $SO(10)$ sind, gibt es ingesamt 6328 verschiedene Modelle, die zu 1757 verschiedenen Spektren führen. Für 1560 der Modelle existiert ein Spiegelpartner, der durch Anwendung der Weitergabe auf ein $(2, 2)-$Spiegelpaar entsteht. Für weitere 3009 Modelle existiert zumindest ein Modell, wo das Paar $(N_{16}, N_{\overline{16}})$ vertauscht wird, was aber nicht unbedingt zu einem echten Spiegelpaar führen muß, kann es doch auch Zufall sein. Obwohl also nur 1759 alleine stehen, gibt es 845 ungepaarte Spektren, also 48%. Wie später diskutiert werden wird, ist für diese Klasse von Modelle eine Asymmetrie aus vielen Gründen zu erwarten. Den Graphen mit den Modellen findet man in Figur 4.

SU(5) und E$_3$

Die obige Konstruktion kann natürlich auch auf die kleineren Eichgruppen $SU(5)$ und $E_3 = SU(3) \times SU(2)$ durch mehrfache Anwendung der Weitergabe übertragen werden. Es ergeben sich 1216 Modelle und 499 Spektren mit der Eichgruppe $SU(5)$, die in Figur 5 gezeigt werden. Für E_3 sind es 81 Modelle mit 48 Spektren, die entsprechende Figur ist eine verstreute Menge von Punkten und wird daher nicht gezeigt. In diesen beiden Fällen werden für Spiegelbilder zwei oder drei ungerade Koordinaten benötigt, die unter der $(2, 2)-$Spiegelabbildung erhalten bleiben müssen, was von vornherein zu deutlich weniger Paaren als bei $SO(10)$ Anlaß gibt. Daher wird sich die folgende Diskussion auf diesen Fall beschränken.

Abschließend sollen die Dreigenerationenmodelle nicht verschwiegen werden. Es sind 23 mit Eichgruppe $SO(10)$ und vier mit $SU(5)$, die der zweiten Tabelle im Anhang entnommen werden können. Bei den Modellen mit der Eichgruppe E_3 traten keine auf, was wegen der geringen Gesamtzahl nicht weiter verwundert.



Figur 5: $(N_{10} + N_{\overline{10}})$ gegen $(N_{10} - N_{\overline{10}})$ für die 499 $SU(5)$–Spektren.

Gewichtete vollständige Polynomschnitte der Kodimension > 1

Die Klasse der LG–Vakua, die in [28,51,52] konstruiert wurden, enthält Potentiale mit mehr als fünf Variablen und viele dieser Theorien können als gewichtete vollständige Polynomschnitte mit mehr als einem Polynom interpretiert werden. Die Kodimension dieser Modelle folgt aus der LG–Theorie aus der totalen Ladung $q = \sum_i q_i$, wobei q_i die Ladungen der einzelnen Variablen sind, diese sind so normiert, daß das Gewicht des Potentials eins ist. Diese Ladung bestimmt gerade die Kodimension der resultierenden CYM, sofern sie existiert [41].
Eine einfache Klasse ist durch

$$\mathbb{C}_{(2k,K-k,2k,K-k,2k_3,2k_4,2k_5)}[2K] \ni \left\{ \sum_{i=1}^{2} \left(x_i^{\frac{K}{k}} + x_i y_i^2 \right) + \sum_{i=3}^{5} x_i^{\frac{K}{k_i}} = 0 \right\} \tag{7.47}$$

mit der totalen Ladung $q = 2$ gegeben. Ist z_5 die ungerade Koordinate mit $\frac{K}{k_5} = (2\ell + 1)$, so führt die Weitergabe zur $(0,2)-$Theorie

$$V_{(2k,K-k,2k,K-k,2k_3,2k_4,2k_5;2K)} \longrightarrow \mathbb{C}_{(2k,K-k,2k,K-k,2k_3,2k_4,4k_5,2\ell k_5)}[2(\ell+2)k_5 \quad 4\ell k_5]. \tag{7.48}$$

In geometrischer Sprache entsprechen diese $(2,2)$–LG–Theorien fünfdimensionalen verallgemeinerten CY–Varietäten [105,106]

$$\mathbb{P}_{(2k,K-k,2k,K-k,2k_3,2k_4,2k_5)}[2K], \tag{7.49}$$

von denen man mittels der Konstruktion in [105] die CYM

$$\begin{array}{l} \mathbb{P}_{(1,1)} \\ \mathbb{P}_{(k,k,k_3,k_4,k_5)} \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ k & K \end{bmatrix} \tag{7.50}$$

ableiten kann, die durch die Polynome

$$
\begin{aligned}
p_1 &= y_1^2 x_1 + y_2^2 x_2 \\
p_2 &= x_1^{\frac{K}{k}} + x_2^{\frac{K}{k}} + x_3^{\frac{K}{k_3}} + x_4^{\frac{K}{k_4}} + x_5^{\frac{K}{k_5}}
\end{aligned}
\tag{7.51}
$$

definiert ist. Für $\frac{K}{k}, \frac{K}{k_i} \in \mathbb{N}$ ergeben sich quasiglatte Varietäten.

7.3. (2,2)–Spiegelsymmetrie

Die angestrebte $(0,2)-$Spiegelkonstruktion basiert auf der im $(2,2)-$Fall. Daher werden in diesem Abschnitt die bekannten Techniken kurz vorgestellt, bevor sie im nächsten Abschnitt auf den $(0,2)-$Fall verallgemeinert werden.

Im Prinzip gibt es vier verschiedene Methoden der Konstruktion von Spiegelpaaren $(2,2)-$symmetrischer Stringvakua. Die präziseste, aber auch eingeschränkteste Formulierung ist die als Faktortheorien exakt lösbarer Theorien [64]. Allgemeiner, aber weniger präzis, sind die LG–Spiegelkonstruktionen in [58] und [107]. Schließlich gibt es eine torische Formulierung [108–110] mit reflexiven Polyedern, jedoch wird das Hauptaugenmerk auf die ersten drei gerichtet sein.

Die erste Aufgabe wird die Verallgemeinerung der Faktortheorie–Technik auf exakt lösbare Modelle sein. Wie im $(2,2)-$Fall wird man sehen, daß dies die größte Einsicht in die Struktur des Spiegelpartner gibt. Um diese Technik auf die allgemeineren LG–Theorien zu verallgemeinern, wird eine Methode benötigt, die Gewichte der Fermionen, die das stabile Bündel der gespiegelten Theorie definieren, abzuleiten. Dazu gibt es zwei Hilfsmittel: zum einen die gebrochenen Transformationen GTen [58], die Faktortheorien bzgl. gewisser diskreter Gruppen auf gewichtete Konfigurationen abbilden und zum anderen die Transpositionskonstruktion von Berglund und Hübsch [107], die in einfachen Situationen alternativ anwendbar ist.

Faktortheorie – Spiegelbilder von Gepnermodellen

Die Spiegelsymmetrie bei den exakt lösbaren Modellen wurde für die Gepnermodelle in [18] entdeckt. Allerdings hat die gesamte Menge dieser Modelle, die in [40,41] berechnet wurden, nur sehr wenige Spiegelpaare. Später fand man jedoch, daß die Faktortheorie mit der maximalen Symmetriegruppe den Spiegelpartner produziert [64].

Eine Alternative, den Spiegelpartner zu finden, besteht in der Modifikation der Zustandssumme mit geeigneten einfachen Strömen. Der Spiegelpartner des Modells

$$
\left(3^5\right)_{A^5} \;\sim\; \mathbb{P}_4[5]^{(1,101)} \tag{7.52}
$$

läßt sich beispielsweise als $\mathbb{Z}_5^3-$Faktortheorie

$$
\left(\mathbb{P}_4[5] \Big/ \mathbb{Z}_5^3 : \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{(101,1)} \tag{7.53}
$$

schreiben. Es stellt sich heraus, daß in der SKFT diese Faktortheorie durch die folgenden einfachen Ströme nachgestellt werden kann:

$$
\begin{aligned}
J_1 &= (0\ \ {-2}\ 0)(0\ 2\ 0)(0\ 0\ 0)(0\ 0\ 0)(0\ 0\ 0)(0) \\
J_2 &= (0\ \ {-2}\ 0)(0\ \ {-2}\ 0)(0\ 4\ 0)(0\ 0\ 0)(0\ 0\ 0)(0) \\
J_3 &= (0\ \ {-2}\ 0)(0\ \ {-2}\ 0)(0\ \ {-2}\ 0)(0\ \ {-4}\ 0)(0\ 0\ 0)(0),
\end{aligned}
\tag{7.54}
$$

und das im Modell $(3^5)_{A^5}$. Es ist bemerkenswert, daß in diesem Falle die einfachen Ströme so gewählt werden können, daß sie lokal zur $GSO-$Projektion sind, also ganzzahlige Dimension haben.
Für das Tensorprodukt

$$(3 \cdot 8^3)_{A^4} \quad \sim \quad \mathbb{P}_{(1,1,1,2,5)}[10], \tag{7.55}$$

das hier schon mehrfach angeführt wurde, erhält man den Spiegelpartner durch die Faktortheorie nach der Gruppe $\mathbb{Z}_{10}^2$

$$\left(\mathbb{P}_{(1,1,1,2,5)}[10] \Big/ \mathbb{Z}_{10}^2 : \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right). \tag{7.56}$$

Die direkte Verallgemeinerung der einfachen Ströme in (7.54) ergibt ein Modell mit dem Spektrum $(99,3)$ statt $(145,1)$. Es ließ sich keine Möglichkeit finden, diese $\mathbb{Z}_{10}^2$ mit nur zwei einfachen lokalen Strömen darzustellen, ein Indiz dafür, daß die Äquivalenz aus [90] keinesfalls offensichtlich ist. Besteht man jedoch nicht auf diesen Voraussetzungen, so erhält man mit den drei einfachen Strömen

$$\begin{aligned} J_1 &= (0\ 0\ 0)(0\ 2\ 0)(0\ 0\ 0)(0\ 0\ 0)(0) \\ J_2 &= (0\ 0\ 0)(0\ 0\ 0)(0\ 2\ 0)(0\ 0\ 0)(0) \\ J_3 &= (0\ 0\ 0)(0\ 0\ 0)(0\ 0\ 0)(0\ 2\ 0)(0) \end{aligned} \tag{7.57}$$

das gespiegelte Spektrum. Da die Ströme nicht lokal sind, braucht man zwei $GSO-$Projektionen.
Ein Beispiel, auf das später noch zurückgekommen werden wird, ist

$$(1 \cdot 2^2 \cdot 7 \cdot 16)_{A^5} \sim \mathbb{P}_{(2,4,9,9,12)}[36]^{(19,43)}. \tag{7.58}$$

Der Spiegelpartner dieses Modells ist die Faktortheorie nach

$$\mathbb{Z}_3 : \ [1\ 0\ 0\ 0\ 2], \tag{7.59}$$

was sich in den einfachen Strom

$$J_{\text{fak}} = (0\ 2\ 0)(0\ 0\ 0)(0\ 0\ 0)(0\ 0\ 0)(0\ \ {-12}\ 0)(0) \tag{7.60}$$

überträgt.

Gewichtete $(2,2)$ – Spiegelpartner mittels gebrochener Transformationen

Die Spiegelsymmetrie ist nicht nur auf die exakt lösbaren Theorien beschränkt. Gleichzeitig mit der Faktortheorie–Konstruktion wurde sie im Zusammenhang der LG–Theorien entdeckt [28], durch explizite Konstruktion einer großen Klasse dieser Modelle. Allerdings war es nicht klar, ob die Spiegelsymmetrie nicht reiner Zufall ist, denn die Hodgezahlen alleine identifizieren die CYM noch lange nicht. Um das ganze auf festen Boden zu stellen, mußte man Darstellungen der Spiegelpartner in gewichteten projektiven Räumen finden. Das tun gerade die gebrochenen Transformationen [58], und nebenbei identifizieren sie Spiegelpaare gewichteter CY–Konfigurationen.
Der einfachste Ausgangspunkt ist wieder einmal die Klasse der exakt lösbaren Gepnermodelle. In [23–25] wurde festgestellt, daß die Gepnermodelle mit einer diagonalen affinen Invariante in jedem der minimalen

Faktoren den Fixpunkt des Renormierungsgruppenflusses einer $N = 2$ supersymmetrischen LG–Theorie definieren, dabei ist das Superpotential vom Fermattyp

$$W = \sum_{i=1}^{r} \Phi_i^{a_i+2}, \tag{7.61}$$

wobei $\Phi_i(z,\theta,\bar\theta) = \phi_i(z) + \ldots$ chirale $N = 2$ Superfelder sind. Zu diesen Potentialen gehören affine Varietäten

$$\mathbb{C}_{(k_1,\ldots,k_r)}[d] \ni \{p(z_i) = \sum_i z_i^{a_i+2} = 0\}, \tag{7.62}$$

die als Nullstellenmenge der Polynome entstehen, die durch Betrachtung der niedrigsten Komponenten $\phi_i = z_i$ der Superfelder gegeben sind.

In [58] wurde gezeigt, daß die Spiegelsymmetrie in den LG–Theorien aus [28] dadurch verstanden werden kann, daß Faktortheorien auf gewichtete Konfigurationen abgebildet werden können, und zwar mittels iterativer Anwendung des Isomorphismus'

$$\begin{array}{l} \mathbb{C}_{\left(\frac{b}{g_{ab}},\frac{a}{g_{ab}}\right)}\left[\dfrac{ab}{g_{ab}}\right] \ni \left\{z_1^a + z_2^b = 0\right\} \Big/ \mathbb{Z}_b : [\,(b-1) \quad 1\,] \quad \sim \\ \mathbb{C}_{\left(\frac{b^2}{h_{ab}},\frac{(a(b-1)-b)}{h_{ab}}\right)}\left[\dfrac{ab(b-1)}{h_{ab}}\right] \ni \left\{y_1^{\frac{a(b-1)}{b}} + y_1 y_2^b = 0\right\} \Big/ \mathbb{Z}_{b-1} : [\,1 \quad (b-2)\,]\,, \end{array} \tag{7.63}$$

der durch gebrochene Transformationen

$$z_1 = y_1^{1-\frac{1}{b}},\ z_2 = y_1^{\frac{1}{b}} y_2, \quad \text{bzw.} \quad y_1 = z_1^{\frac{b}{b-1}},\ y_2 = z_2 z_1^{-\frac{1}{b-1}} \tag{7.64}$$

induziert wird, diese hat eine konstante Jacobideterminante und erhält daher das Maß des Pfadintegrals bis auf einen irrelevanten Faktor. Hier ist g_{ab} der größte gemeinsame Teiler von a und b sowie h_{ab} der von b^2 und $(ab - a - b)$.

Der Isomorphismus (7.63) selbst erzeugt den Spiegelpartner nur für sehr wenige Modelle. Die einfachsten Beispiele dieses Typs sind solche Mannigfaltigkeiten, bei denen bereits eine $\mathbb{Z}_2$ für den Spiegelpartner genügt. In diesen Fällen führt die gebrochene Transformation

$$z_1 = y_1^{\frac{1}{2}}, \qquad z_2 = y_1^{\frac{1}{2}} y_2 \tag{7.65}$$

ohne Umschweife auf die gewichtete Darstellung des Faktortheorie–Spiegelpartners. In den exakt lösbaren Theorien entsprechen solche Spiegelpartner der Ersetzung der diagonalen durch eine D–Invariante in einem der Faktoren des Tensormodells, z.B. das Gepnermodell

$$(1 \cdot 6 \cdot 31 \cdot 86)_{A^4} \quad \sim \quad \mathbb{P}_{(3,8,33,88,132)}[264] \tag{7.66}$$

mit $(h^{1,1}, h^{2,1}) = (57, 86)$, für das die Ersetzung $86_A \to 86_D$ den Spiegelpartner

$$(1 \cdot 6 \cdot 31 \cdot 86)_{A^3 D} \quad \sim \quad \mathbb{P}_{(3,8,66,88,99)}[264] \tag{7.67}$$

ergibt.

Viel nützlicher ist die iterative Anwendung der Relation (7.63). Für das diagonale Modell (7.55) führt die Faktortheorie nach der Gruppe $\mathbb{Z}_{10}^2$ zur gebrochenen Transformation

$$y_1 = z_1^{\frac{9}{10}}, \quad y_2 = z_1^{\frac{1}{10}} z_2^{\frac{9}{10}}, \quad y_3 = z_2^{\frac{1}{10}} z_3, \quad y_4 = z_4, \quad y_5 = z_5, \tag{7.68}$$

die die Faktortheorie in die gewichtete Spiegelkonfiguration

$$\mathbb{P}_{(90,80,73,162,405)}[810] \; = \; \mathrm{GT}\left(\mathbb{P}_{(1,1,1,2,5)}[10]\Big/\mathbb{Z}_{10}^2 : \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \tag{7.69}$$

abbildet.

Diese gebrochene Transformation ist jedoch nicht auf LG–Theorien von Fermattyp, die den Gepnermodellen entsprechen, beschränkt. Als Illustration betrachte man die Konfiguration

$$\mathbb{P}_{(1,1,1,1,3)}[7]^{(2,122)} \ni \{z_1^7 + z_2^7 + z_3^7 + z_4^7 + z_4 z_5^2 = 0\}. \tag{7.70}$$

Nimmt man die Faktortheorie nach $\mathbb{Z}_7^2$ und wendet die gebrochene Transformation an, so findet man die Spiegelkonfiguration

$$\mathbb{P}_{(31,35,36,42,108)}[252]^{(122,2)} \; = \; \mathrm{GT}\left(\mathbb{P}_{(1,1,1,1,3)}[7]\Big/\mathbb{Z}_7^2 : \; \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right). \tag{7.71}$$

Die Relation (7.63) zeigt, daß zum Auffinden der isomorphen Darstellung i.a. noch zusätzliches Herausteilen notwendig ist, nachdem die gebrochene Transformation der ursprünglichen Faktortheorie durchgeführt wurde. In den meisten Fällen wird dieses Herausteilen im Bild der gebrochenen Transformation in der projektiven Äquivalenz des Bildes aufgehen, allerdings nicht immer. Ein Beispiel dazu ist die Spiegel–Faktortheorie (7.58), deren gebrochene Abbildung auf die gewichtete Konfiguration $\mathbb{P}_{(3,4,9,9,11)}[36]$ führt. Diese hat die Kohomologie $(h^{1,1}, h^{2,1}) = (20, 32)$. Man sieht, daß die Wirkung der $\mathbb{Z}_2$ auf dem resultierenden projektiven Raum nichttrivial ist und deshalb herausgeteilt werden muß. Das liefert aber dann das gespiegelte Spektrum, womit also für den Spiegelpartner gilt:

$$\left(\mathbb{P}_{(2,4,9,9,12)}[36]^{(19,43)}\Big/\mathbb{Z}_3 : \; [2\ 0\ 0\ 0\ 1]\right)^{(43,19)} \sim \left(\mathbb{P}_{(3,4,9,9,11)}[36]^{(20,32)}\Big/\mathbb{Z}_2 : \; [1\ 0\ 0\ 0\ 1]\right)^{(43,19)}. \tag{7.72}$$

Die Konstruktion von Berglund und Hübsch

Für Mannigfaltigkeiten, die durch Polynome definiert sind, die nicht vom Fermattyp sind, gibt es eine alternative Konstruktion, die manchmal die Bestimmung der Gewichte der Spiegelkonfiguration erlaubt. Diese Methode [107] gründet sich auf die sog. “Transposition der Polynome”. I.a. ist das Transponieren einer Mannigfaltigkeit nicht ausreichend, um den Spiegelpartner der Hyperfläche zu erhalten, sondern muß um ein zusätzliches Herausdividieren erweitert werden. Für gewisse Konfigurationen wird es jedoch passieren, daß man ohne weiteres Herausteilen auskommt. Dann ist man nicht auf die gebrochene Transformation angewiesen, sondern kann diese einfachere Methode benutzen.

Eine einfache Klasse von Modellen wird durch das $n-$Kaulquappenpolynom [28]

$$p = z_1^{a_1} z_2 + z_2^{a_2} z_3 + \cdots + z_{n-1}^{a_{n-1}} z_n + z_n^{a_n} \tag{7.73}$$

definiert, dessen Gradmatrix

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix} \tag{7.74}$$

lautet, wobei die Zeilen die Grade der einzelnen Monome angeben. Das transponierte Polynom [107] ist einfach durch die transponierte Gradmatrix

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \end{bmatrix} \tag{7.75}$$

gegeben, allerdings hat die hier entstehende Transformation nun eine nichtkonstante Jacobideterminante. Da sich die Dimension der Mannigfaltigkeit bei der Transposition nicht ändern darf, kommen nur die Polynome in Betracht, bei denen die Anzahl der Monome gleich der der Variablen ist, außer einigen Ausnahmen, die in [28] diskutiert werden.

Wie oben erwähnt, ist die durch das transponierte Polynom entstehende Varietät i.a. nicht der Spiegelpartner, es ist vielmehr noch eine Symmetrie herauszudividieren. Diese ist für Paare transponierter Mannigfaltigkeiten dadurch bestimmt, daß die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_d$, deren Ordnung gerade der Polynomgrad ist, aufgeteilt wird. Die Symmetriegruppe $D_p = \mathbb{Z}_{a_1 \cdots a_n}$ kann deshalb in die Quantenphasengruppe [26] $\mathbb{Z}_d$ und die geometrische Phasengruppe G_p gemäß $D_p = \mathbb{Z}_d \times G_p$ und $\mathbb{Z}_{d'} \times G_{p'}$ zerlegt werden. Beim Übergang von der Mannigfaltigkeit zu ihrem Spiegelpartner vertauschen sich dann gerade die Rollen der Quanten– und geometrischen Phasengruppe [111]. Man kann auch eine torische Beschreibung angeben, diese findet man z.B. in [109,110].

Diese Prozedur soll an einigen Beispielen verdeutlicht werden. Zunächst soll es um die Mannigfaltigkeit

$$\mathbb{P}_{(1,4,16,19,40)}[80]^{(15,127)} \ni \{x_1^{61}x_4 + x_2^{20} + x_3^5 + x_1x_4^4 + x_5^2 = 0\} \tag{7.76}$$

gehen, deren Exponentenmatrix lautet:

$$\begin{bmatrix} 61 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{7.77}$$

Transponiert man diese, so ergibt sich $\mathbb{P}_{(10,23,122,150,305)}[610]^{(127,15)}$ mit dem gespiegelten Spektrum.

Ein sogar noch einfacheres Beispiel ist $\mathbb{P}_{(4,5,13,13,30)}[65]$, für das die teilweise Transposition der Blöcke

$$\begin{bmatrix} 13 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 13 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{7.78}$$

zur Spiegelkonfiguration $\mathbb{P}_{(5,5,12,13,30)}[65]$ führt.
Schließlich soll eine zweite Spiegelkonfiguration der Hyperfläche (7.70) angegeben werden. Betrachtet man das Transponierte der Mannigfaltigkeit

$$\mathbb{P}_{(35,43,48,84,126)}[336]^{(122,2)} \ni \{z_1^6 z_5 + z_1 z_2^7 + z_3^7 + z_4^4 + z_4 z_5^2 = 0\}, \tag{7.79}$$

so findet man eine Deformation der 1–Kaulquappe von (7.70) und deshalb ergibt diese Konfiguration eine zweite gewichtete Darstellung des Spiegelpartners dieser 1–Kaulquappe.

7.4. (0,2)–Spiegelsymmetrie

In der Klasse der $(2,2)-$Vakua ist ein spiegelsymmetrisches Paar durch zwei lineare $\sigma-$Modelle bzw. torische Varietäten gegeben, die zu isomorphen superkonformen Fixpunkten führen, die sich lediglich im relativen Vorzeichen der $U(1)-$Ladungen unterscheiden. In der CY–Phase werden einfach die komplexen und Kählerdeformationen ausgetauscht, d.h. die Kohomologiegruppen $H^1(M,TM)$ und $H^1(M,TM^*)$. Benutzt man die Kählerklasse und die holomorphe Dreiform, so stehen diese Gruppen in direkter Beziehung zu den Generationen $H^1(M,TM) = H^{(2,1)}(M)$ und Antigenerationen $H^1(M,TM^*) = H^{(1,1)}(M)$. Bei $(0,2)$ macht diese zweite Definition immer noch Sinn, aber in der $(0,2)$–CY–Phase hat man es nun mit allgemeineren (Dolbeault–)Kohomologiegruppen zu tun, nämlich $H^1(M,V)$ und $H^1(M,V^*)$. Es ist genau dieses Paar, was bei Spiegelpartnern ausgetauscht wird, weshalb $(0,2)-$Spiegelpaare sich sowohl in der CYM als auch im Vektorbündel unterscheiden.
Nun werden die oben zusammengefaßten $(2,2)-$Spiegelkonstruktionen auf die Konstruktion von $(0,2)-$Spiegelpaaren angewendet. Zunächst soll es um die Faktortheorie–Methode der exakt lösbaren Modelle gehen, später werden dann gewichtete $(0,2)$–LG–Spiegelpartner durch gebrochene Transformationen und/oder Transposition benutzt, um die benötigten Gewichte des Spiegel–Eichbündels zu bestimmen.

$(0,2)$ – Spiegelpaare durch Faktortheorien

Wie bereits im $(2,2)-$Fall kann man die exakt lösbaren Tensormodelle durch die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_{K_i+2}$ in jedem Faktor dividieren, um das exakte $(2,2)-$Spiegelbild zu bekommen. Wendet man den supersymmetriebrechenden einfachen Strom (7.9) auf dieses $(2,2)-$Spiegelbild an, so ergibt sich die gespiegelte $(0,2)-$Theorie. Daher ist es klar, daß diese Menge der $(0,2)-$Theorien völlig spiegelsymmetrisch ist, eben wegen der Ordnungs/Unordnungs–Dualität nach Kramers/Wannier der einzelnen minimalen Faktoren [112]. Diese Beobachtung ist allerdings nicht von besonderem Nutzen, denn dieses Herausdividieren operiert nicht auf der Raumzeit. Um das Herausteilen auf dem Grundzustand des Strings richtig anzugeben, muß man die Operation der Symmetrie so einschränken, daß die holomorphe Dreiform auf der CYM invariant bleibt. Man kann zeigen, daß der Spiegelpartner eines Gepnermodells immer mit Operationen dieses Typs erhalten werden kann und daher ergibt sich der exakte $(0,2)-$Spiegelpartner, nachdem noch der supersymmetriebrechende einfache Strom hinzugenommen wird.
Als Beispiel sei die Betrachtung des Modells (7.58) fortgeführt. Die Anwendung des supersymmetriebrechenden einfachen Stroms

$$\Upsilon_{\mathrm{sb}} = (0\ 0\ 0)(0\ 0\ 0)(0\ 0\ 0)(0\ 9\ 1)(0\ 0\ 0)(1)(0) \tag{7.80}$$

ergibt eine $(0,2)-$Theorie, deren LG/CY–Phase durch

$$V_{(2,4,9,9,12;36)} \to \mathbb{P}_{(2,8,9,9,12,16)}[24\ \ 32] \tag{7.81}$$

beschrieben wird und deren Spektrum $(N_{16}, N_{\overline{16}}) = (34, 10)$ lautet. Kombiniert man deshalb den einfachen Strom (7.60), der das $(2,2)-$Spiegelbild produziert, mit dem Strom (7.80), so ergibt sich die exakt lösbare Theorie

$$\left(\left(1 \cdot 2^2 \cdot 7 \cdot 16\right)_{A^5} \Big/ J_{\text{fak}} \otimes \Upsilon_{\text{sb}}\right)^{(10,34)}. \tag{7.82}$$

Somit wird die Spiegeltheorie durch Anwendung der Weitergabe auf das Spiegelbild der $(2,2)-$Theorie erhalten.

$(0,2)$ – LG – Spiegelpartner durch gebrochene Transformationen

Um die Spiegelsymmetrie auf die $(0,2)$–LG–Theorien zu erweitern, geht man wie folgt vor: auf ein gegebenes $(0,2)$–LG–Modell wird zunächst die Weitergabe invertiert angewendet, um die $(2,2)-$CYM zu erhalten. Für diesen Raum wird die gewichtete Spiegelkonfiguration ermittelt. Dann wird die Weitergabe angewendet, um das $(0,2)-$Spiegelbild zu ermitteln. Das war nur eine Beschreibung der Strategie, die am Anfang dieses Kapitels dargestellt wurde:

$$\begin{array}{ccc} V_{(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5;d)} \to \mathbb{P}_{(k_1,k_2,k_3,k_4,2k_5,\ell k_5)}[(\ell{+}2)k_5 \;\; 2\ell k_5] & \longrightarrow & \mathbb{P}_{(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5)}[d] \\ \Downarrow & & \downarrow \\ V_{(k_1',k_2',k_3',k_4',k_5';d')} \to \mathbb{P}_{(k_1',k_2',k_3',k_4',2k_5',\ell k_5')}[(\ell{+}2)k_5' \;\; 2\ell k_5'] & \longleftarrow & \mathbb{P}_{(k_1',k_2',k_3',k_4',k_5')}[d']. \end{array} \tag{7.83}$$

Allerdings gibt es bei diesem Vorgehen eine Menge Dinge, die man beachten muß. Man betrachte z.B. die quintische Hyperfläche. Mit der gebrochenen Transformation kann man sehen, daß der Spiegelpartner durch

$$\mathbb{P}_{(41,48,51,52,64)}[256] = \text{GT}\left(\mathbb{P}_4[5]\Big/\mathbb{Z}_5^4 : \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}\right) \tag{7.84}$$

beschrieben werden kann. Diese gewichtete Hyperfläche erlaubt allerdings nicht die Anwendung der Weitergabe, denn es gibt keine Koordinate k_i mit $\frac{d}{k_i} = (2\ell + 1)$. Man kann jedoch zeigen, daß nur drei der zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}_5$ unabhängig sind, die vierte ist Teil der projektiven Äquivalenz des Raums

$$\mathbb{P}_{(51,64,60,80,65)}[320] = \text{GT}\left(\mathbb{P}_4[5]\Big/\mathbb{Z}_5^3 : \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right), \tag{7.85}$$

der mittels gebrochener Transformation aus der $\mathbb{Z}_5^3-$Faktortheorie entsteht. Dieser Raum enthält jetzt eine entsprechende Koordinate und die Weitergabeabbildung kann angewendet werden, was den Spiegelkandidaten

$$V_{(51,64,60,80,65;320)} \to \mathbb{P}_{(51,60,80,65,128,128)}[256 \;\; 256] \tag{7.86}$$

liefert. Die erste Einschränkung ist daher, daß die gewichtete Darstellung des $(2,2)-$Spiegelbildes einer ungeraden Konfiguration ungerade sein muß.
Beim ersten Beispiel dieses Kapitels, nämlich $\left(3 \cdot 8^3\right)_{A^4}$ mit der Entsprechung

$$V_{(1,1,1,2,5;10)} \to \mathbb{P}_{(1,1,1,4,4,5)}[8 \;\; 8] \tag{7.87}$$

und dem Spektrum $(N_{16}, N_{\overline{16}}) = (113, 5)$, ist dagegen alles von vornherein in Ordnung. Die gebrochene Abbildung (7.69) des $(2,2)-$Bildes $\mathbb{P}_{(1,1,1,2,5)}[10]$ ergibt die Spiegelkonfiguration

$$V_{(90,80,73,162,405;810)} \rightarrow \mathbb{P}_{(90,80,73,324,324,405)}[648 \quad 648] \tag{7.88}$$

mit dem umgekehrten $(0,2)-$Spektrum.

Als nächstes betrachte man

$$V_{(1,1,3,5,5;15)} \rightarrow \mathbb{P}_{(1,1,5,5,6,6)}[12 \quad 12] \tag{7.89}$$

mit dem Spektrum $(N_{16}, N_{\overline{16}}) = (80, 8)$. Mit der Weitergabe und der gebrochenen Abbildung des $(2,2)-$Faktortheorie–Spiegelbildes

$$\mathbb{P}_{(15,13,42,70,70)}[210] = \mathrm{GT}\left(\mathbb{P}_{(1,1,3,5,5)}[10]\Big/\mathbb{Z}_{15} : [14\ 1\ 0\ 0\ 0]\right) \tag{7.90}$$

erhält man die $(0,2)-$Spiegeltheorie

$$V_{(15,13,42,70,70;210)} \rightarrow \mathbb{P}_{(15,13,70,70,84,84)}[168 \quad 168] \tag{7.91}$$

mit dem richtigen Spektrum.

Eine zweite mögliche Einschränkung ist, daß i.a. eine Hyperfläche mehr als ein $(0,2)-$Modell und damit mehrere Spiegelrelationen liefert. In dieser Situation muß man verschiedene Darstellungen des Spiegelbildes verwenden können, indem man verschiedene Darstellungen der Spiegel–Faktortheorie mit der gebrochenen Transformation abbildet. Ein Beispiel besteht in der Mannigfaltigkeit $\mathbb{P}_{(1,2,6,18,27)}[54]$, aus der sich die beiden $(0,2)-$Modelle

$$\begin{aligned} \ell = 4 : \quad & V_{(1,2,6,18,27;54)} \rightarrow \mathbb{P}_{(1,2,12,18,24,27)}[36 \quad 48] \\ \ell = 13 : \quad & V_{(1,2,6,18,27;54)} \rightarrow \mathbb{P}_{(1,4,6,18,26,27)}[30 \quad 52] \end{aligned} \tag{7.92}$$

konstruieren lassen, von denen jedes ein Spiegeldiagramm erzeugt wird. Für $\ell = 4$ wird die Gruppe $\mathbb{Z}_{27} \times \mathbb{Z}_3$ herausgeteilt, um die gespiegelte CYM $\mathbb{P}_{(1,2,6,18,27)}[54]$ zu bekommen. Transformiert man dieses $(2,2)-$Modell in eine $(0,2)-$Theorie, so ergibt sich

$$\begin{array}{ccc} V_{(1,2,6,18,27;54)} \rightarrow \mathbb{P}_{(1,2,12,18,24,27)}[36 \quad 48] & \longrightarrow & \mathbb{P}_{(1,2,6,18,27)}[54] \\ \Big\Downarrow & & \Big\downarrow \\ V_{(18,51,104,295,468;936)} \rightarrow \mathbb{P}_{(18,51,208,295,416,468)}[624 \quad 832] & \longleftarrow & \mathbb{P}_{(18,51,104,295,468)}[936]. \end{array} \tag{7.93}$$

Dagegen teilt man für $\ell = 13$ die Gruppe $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3$ heraus, dies führt auf das $(0,2)-$Spiegelpaar

$$\begin{array}{ccc} V_{(1,2,6,18,27;54)} \rightarrow \mathbb{P}_{(1,4,6,18,26,27)}[30 \quad 52] & \longrightarrow & \mathbb{P}_{(1,2,6,18,27)}[54] \\ \Big\Downarrow & & \Big\downarrow \\ V_{(18,32,141,241,432;864)} \rightarrow \mathbb{P}_{(18,64,141,241,416,432)}[480 \quad 832] & \longleftarrow & \mathbb{P}_{(18,32,141,241,432)}[864]. \end{array} \tag{7.94}$$

Eine dritte mögliche Einschränkung besteht darin, daß die gewichtete $(0,2)-$Spiegelkonfiguration derart ausgesucht werden muß, daß die entstehende $(0,2)-$Theorie nicht inkonsistent ist, weil sie unvermeidbare

Gluinos enthält. Man betrachte als Beispiel das $(0,2)-$Bild der Weitergabe mit $\ell = 3$ des $(2,2)-$Spiegelpaars in (7.71). Dies führt auf

$$V_{(1,1,1,1,3;7)} \longrightarrow \mathbb{P}_{(1,1,1,2,3,3)}[5 \quad 6] \tag{7.95}$$

mit dem Spektrum $(N_{16}, N_{\overline{16}}) = (86, 2)$ und

$$V_{(31,35,36,42,108;252)} \longrightarrow \mathbb{P}_{(31,35,42,72,108,108)}[180 \quad 216]. \tag{7.96}$$

Das letztere Modell ist inkonsistent, weil es unvermeidbare Gluinos besitzt. Das kann man umgehen, indem man das Bündel und nicht die Mannigfaltigkeit transponiert.

Die Transposition stabiler Bündel

Die Transpositionstechnik bei den CYMen kann im Prinzip wörtlich übertragen werden, was nun an einigen Beispielen erläutert wird. Bei der $(0,2)-$Theorie

$$V_{(1,4,16,19,40;80)} \longrightarrow \mathbb{P}_{(1,4,19,32,32,40)}[64 \quad 64] \tag{7.97}$$

mit dem Bild $\mathbb{P}_{(1,4,16,19,40)}[80]^{(15,127)}$ unter der Weitergabe führt die Transpositionsregel wie in (7.76) und (7.77) zur Hyperfläche $\mathbb{P}_{(10,23,122,150,305)}[610]^{(127,15)}$, auf die man die Weitergabe mit $\ell = 2$ anwenden kann und

$$V_{(10,23,122,150,305;610)} \longrightarrow \mathbb{P}_{(10,23,150,244,244,305)}[488 \quad 488] \tag{7.98}$$

erhält. Ein noch einfacheres Beispiel ist

$$V_{(4,5,13,13,30;65)} \longrightarrow \mathbb{P}_{(4,5,13,26,26,30)}[52 \quad 52] \tag{7.99}$$

mit dem Spektrum (21,41) und dem Spiegelpartner

$$V_{(5,5,12,13,30;65)} \longrightarrow \mathbb{P}_{(5,5,12,26,26,30)}[52 \quad 52] \tag{7.100}$$

mit dem Spektrum $(41, 21)$, das man durch Anwendung einer gebrochenen Transformation auf nur einen Block von

$$\begin{bmatrix} 13 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 13 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{7.101}$$

im Bündel bekommt.

Das letzte Beispiel, was zu diskutieren ist, ist das $(0,2)-$Bild der Spiegelpaare in (7.79). Im Gegensatz zu (7.96) ist nun der $(0,2)-$Spiegelpartner von

$$V_{(1,1,1,1,3;7)} \longrightarrow \mathbb{P}_{(1,1,1,2,3,3)}[5 \quad 6] \tag{7.102}$$

mit $(N_{16}, N_{\overline{16}}) = (86, 2)$ wirklich

$$V_{(35,43,48,84,126;336)} \longrightarrow \mathbb{P}_{(35,43,84,96,126,144)}[240 \quad 288] \tag{7.103}$$

mit $(N_{16}, N_{\overline{16}}) = (2, 86)$. I.a. wird sich also das Problem der Konstruktion von $(0,2)$–LG–Spiegelpaaren in zwei Teile gliedern. Ausgehend von einer ungeraden Konfiguration ist nachzuprüfen, ob es eine Darstellung der Spiegel–Faktortheorie als vollständigen Polynomschnitt gibt. Dabei benötigen sowohl die gebrochene Transformation als auch die Transposition i.a. ein weiteres Herausdividieren im Bild, wobei es a priori nicht sichergestellt ist, ob dieses Herausdividieren trivial wird, in dem Sinne, daß es Teil der projektiven Äquivalenz wird, oder aber nicht. Als zweites, selbst wenn man eine entsprechende Hyperfläche der Faktortheorie findet, muß man sicherstellen, daß dieser vollständige Polynomschnitt ungerade ist.

Man überzeugt sich, daß für viele LG–Theorien beide Probleme mit gebrochener Transformation, Transposition oder einer Kombination davon gelöst werden können.

7.5. Diskussion der Vollständigkeit der Spiegelsymmetrie

Da man sich hier auf $(0,2)-$Modelle beschränkt hat, die eine LG–Beschreibung besitzen und von $(2,2)-$Modellen mit einer LG–Phase abstammen, kann man keine komplett spiegelsymmetrische Klasse von Theorien erwarten. Es gibt weitere Gründe für die Asymmetrie.

Erstens wurden nur ungerade Konfigurationen, also nur ein Teil der LG–Theorien betrachtet. Dazu kommt noch, daß die Klasse der $(2,2)$–LG–Theorien selbst nicht spiegelsymmetrisch ist. Die fehlenden Spiegelpartner sind nach [110] allgemeinere Hyperflächen in torischen Varietäten, die formal als nichttransversale Hyperflächen in einem projektiven Raum geschrieben werden können. Ein Beispiel hierfür ist die Mannigfaltigkeit $\mathbb{P}_{(5,8,12,15,35)}[75]^{(30,27)}$ in der Liste in [52]. Dieser Raum hat innerhalb der LG–Theorien keinen Spiegelpartner, kann jedoch durch reflexive Polyeder als eine Hyperfläche in einer torischen Varietät geschrieben werden. Die batyrevsche Konstruktion [108] zeigt dann, daß das Spiegelbild durch das duale Polyeder beschrieben wird. Deshalb ist es klar, daß die Gewichte, die zum dualen Polyeder gehören, keine transversale Wahl der Polynome zulassen und daher auf eine Mannigfaltigkeit mit Hyperflächensingularitäten führen [110]. In [107] wurde durch Kombinieren von Transposition und gebrochener Transformation gezeigt, daß die gewichtete Konfiguration $\mathbb{P}_{(2,4,5,5,9)}[25]$ lautet. Alle dadurch beschriebenen Mannigfaltigkeiten haben eine Hyperflächensingularität am Punkte $(0,0,0,0,1)$. Die Anwendung der Weitergabe ergibt das mögliche $(0,2)-$Spiegelpaar

$$\begin{aligned} &V_{(5,8,12,15,35;75)} \rightarrow \mathbb{P}_{(5,8,12,30,30,35)}[60\ \ 60]\Big|_{(18,30)} \\ &V_{(2,4,5,5,9;25)} \rightarrow \mathbb{P}_{(2,4,5,9,10,10)}[20\ \ 20]. \end{aligned} \tag{7.104}$$

Die Koordinate vom Gewicht $k = 9$ kann in den Bedingungen nur nichttransversal auftreten, daher hat dieses Modell keine $(0,2)-$LG–Phase und man muß die Entwicklung abwarten, ob es zu einer allgemeineren Beschreibung von $(0,2)-$Modellen kommt.

Viel auffälliger ist, daß ein nichttransversales $(2,2)-$Modell ein transversales $(0,2)-$Modell nach sich zieht. Wendet man beispielsweise die Weitergabe auf die $(2,2)-$torische Varietät $\mathbb{P}_{(2,2,2,3,5)}[14]$ an, so ergibt sich

$$V_{(2,2,2,3,5;14)} \rightarrow \mathbb{P}_{(2,2,3,4,5,6)}[10\ \ 12]\Big|_{(51,3)}. \tag{7.105}$$

Wegen der neuen Bedingung vom Gewicht $d = 10$ kann nun die Koordinate vom Gewicht $k = 5$ transversal auftreten, was zu einem $(0,2)-$Modell mit einer vernünftigen LG–Phase führt. Dieses Beispiel zeigt, daß sogar bei den gewichteten Konfigurationen die Klasse der $(0,2)-$ viel reichhaltiger als die der $(2,2)-$Modelle ist.

Ein weiteres Phänomen, was bei $(0,2)-$Theorien auftritt ist, daß ein $(2,2)$–LG–Modell ein durch Gluinos destabilisiertes $(0,2)-$Modell induziert. Dies wurde bereits oben diskutiert.

Schließlich ist es möglich, daß für ein $(2,2)-$Spiegelpaar mit demselben ℓ die $(0,2)-$Modelle nicht spiegelsymmetrisch sind. Dies geschieht z.B. bei den Modellen

$$\begin{aligned} &V_{(3,4,4,4,5;20)} \rightarrow \mathbb{P}_{(3,4,4,5,8,8)}[16\ \ 16]\Big|_{(42,2)} \\ &V_{(13,15,16,16,20;80)} \rightarrow \mathbb{P}_{(13,15,16,20,32,32)}[64\ \ 64]\Big|_{(8,36)}. \end{aligned} \tag{7.106}$$

Die ursprünglichen $(2,2)-$Modelle sind spiegelsymmetrisch, insbesondere sind sie Faktortheorien der quintischen Hyperfläche nach den Gruppen $\mathbb{Z}_5$ bzw. $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$. Dieser scheinbare Widerspruch findet seine Erklärung darin, daß die SKFT über dem Gepnermodell $(3)^5$ mit den beiden einfachen Strömen

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &= (0\ 5\ 1)(0\ 0\ 0)^4(1)(0) \\ \Upsilon_2 &= (0\ 2\ 0)(0\ \ -2\ 0)(0\ 0\ 0)^3(0)(0) \end{aligned} \tag{7.107}$$

das $(0,2)-$Spektrum $(N_{16}, N_{\overline{16}}) = (36,8)$ ergibt. Diese Beobachtung läßt den Schluß zu, daß der Spiegelpartner von

$$V_{(13,15,16,16,20;80)} \rightarrow \mathbb{P}_{(13,15,16,20,32,32)}[64\ \ 64]\Big|_{(8,36)} \tag{7.108}$$

eine weitere $(0,2)-$Faktortheorie von

$$V_{(3,4,4,4,5;20)} \rightarrow \mathbb{P}_{(3,4,4,5,8,8)}[16\ \ 16]\Big|_{(42,2)} \tag{7.109}$$

ist und umgekehrt. Um dies nicht nur auf der Ebene des SKFTen, sondern auf der der LG–Modelle zu untersuchen, braucht man eine Theorie der $(0,2)$–LG–Faktortheorien.

Dieses Beispiel war kein Einzelfall, dasselbe passiert bei den Modellen

$$\begin{aligned} V_{(4,9,12,15,20;60)} &\longrightarrow \mathbb{P}_{(4,9,15,20,24,24)}[48\ \ 48]\Big|_{(39,3)} \\ V_{(5,11,12,12,20;60)} &\longrightarrow \mathbb{P}_{(5,11,12,20,24,24)}[48\ \ 48]\Big|_{(13,25)}, \end{aligned} \tag{7.110}$$

wo das $(2,2)-$Spiegelpaar jeweils Faktortheorien des Gepnermodells $\left(1 \cdot 3^3 \cdot 15\right)_{A^5}$ sind.

Bemerkungen zu $(0,2)$ – Faktortheorien

Diese Theorie wurde in [113] entwickelt. Dabei zeigt sich, daß der Spiegelpartner von (7.108) aus (7.109) durch die sog. diskrete Torsion entsteht. Diese läßt sich im Rahmen der SKFTen auch durch einfache Ströme darstellen wie die anderen Faktortheorien, aber nicht im Rahmen der LG–Theorien durch Herausdividieren zyklischer Gruppen.

Es sei noch bemerkt, daß das hier bereits oft diskutierte $(80,0)$ eine $(0,2) - \mathbb{Z}_2-$Faktortheorie der Quintik ist, überhaupt kann man alle Modelle, die durch die Weitergabe gewonnen wurden, durch solche $(0,2) - \mathbb{Z}_2-$Faktortheorien der zugrundeliegenden $(2,2)-$Modelle erhalten. Die $(0,2)-$Faktortheorien weisen noch die Besonderheit auf, daß für ein Muttermodell jede(!) $\mathbb{Z}_n$ herausdividiert werden kann, bei den Gepnermodellen war man dagegen auf die $\mathbb{Z}_{K_i+2}$ beschränkt: die Faktortheorie kann auf dem Teil $\sum_a \Lambda_a F_a$ des $(0,2)-$Superpotentials wirken und dort so ziemlich alles erzeugen, was noch die beiden Bedingungen (2.29) und (2.30) erfüllt. Man kann sich überlegen, daß man die (endliche) Gesamtzahl der Spektren der Faktortheorien eines Muttermodells schon durch Herausdividieren einer $\mathbb{Z}_n$ mit $2 \leq n \leq n_{\max}$ bekommt. Dies wurde in [114] untersucht.

7.6. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die Beispiele für das Dreigespann CYM/LG/SKFT von drei auf einige tausend erweitert. Dadurch zeigte sich, daß es auch hier eine Spiegelsymmetrie gibt, die durch die Verallgemeinerung der bekannten Konstruktionen erhalten werden kann. Somit überträgt sich die Spiegelsymmetrie auch auf $(0,2)-$Theorien.

Obwohl man beim Umgang mit $(0,2)-$Modellen sehr vorsichtig und immer auf Überraschungen gefaßt sein muß, zeigen die Ergebnisse dieses Kapitels, daß die $(0,2)-$Modelle mindestens genauso wichtig und interessant sind wie die $(2,2)-$Modelle.

8. Zusammenfassung und Ausblick

Obwohl am Ende jedes Kapitels die Ergebnisse schon einmal kurz zusammengefaßt wurden, soll es an dieser Stelle noch einmal kompakt niedergeschrieben und die offenen Fragen angesprochen werden.

In dieser Arbeit wurde zuerst die bewährte Gepnerkonstruktion für $(2,2)-$Theorien zu einer wirklich heterotischen SKFT–Konstruktion verallgemeinert, die alle nötigen Eigenschaften aufweist. Dazu diente die aus der KFT wohlbekannte Methode der einfachen Ströme. Die Konstruktion kann für die Serie von Eichgruppen E_{9-r}, $r = 3, 4, 5, 6$ durchgeführt werden, wobei aber $r = 3$ wieder die Gepnermodelle liefert. Durch diverse Eichgruppenerweiterungen ergab sich eine Vielfalt von Modellen, die sich aber zunächst nicht geometrisch interpretieren ließen, ein systembedingtes Problem bei Rechnungen im Rahmen einer SKFT.

Sodann gelang es, für jede Eichgruppe je einen Vertreter der exakten Modelle mit einem geometrischen bzw. linearen $\sigma-$Modell in Verbindung zu setzen, sprich die drei Mitglieder des Dreigespanns CYM/LG/SKFT anzugeben. Dazu wurden die exakten Yukawakopplungen berechnet und daraus die Struktur des chiralen Rings hergeleitet, die sich in dem geometrischen Modell als ein Polynomring modulo eines Ideals wiederfinden ließ. Dabei mußte allerdings auf z.T. singuläre CYMen zurückgegriffen werden, die sich aber im Rahmen von Varietäten verstehen lassen.

Wegen der Identifikationsprobleme für allgemeine Modelle wurden anschließend Modelle über $K_3 \times T^2$ betrachtet. Damit war die Mannigfaltigkeit vorgegeben und es galt nur noch, das Bündel zu ermitteln. Ferner wurde die exakt lösbare Konstruktion im Rahmen der SKFT so verallgemeinert, daß auch der sonst versteckte Teil E_8 der Eichgruppe gebrochen werden konnte. Durch die Betrachtung der Eichsymmetrie solcher Modelle konnte die Struktur des Parameterraums dieser Modelle untersucht werden, was auf Kandidaten für Dualitäten zu Strings vom Typ II führte.

Die Untersuchung des Parameterraums sollte nicht auf die Modelle mit $(0,4)$–Weltflächen–Supersymmetrie beschränkt sein, auch im Sinne des Fortschritts bei den Identifikationen, dazu wurde zunächst durch Berechnung der Singlets bei dem einfachsten der vorher identifizierten Modelle gezeigt, daß die exakt lösbare SKFT ein Punkt in der LG–Phase des schon ermittelten linearen $\sigma-$Modells ist. Anschließend wurden alle Drei– und Vierpunktfunktionen in der SKFT berechnet, die Aufschlüsse über die zulässigen Deformationen ergaben. Es zeigte sich, daß es einfache Auswahlregeln gibt. Zudem wurde die Kählerklasse angegeben, was leider nicht eindeutig möglich war. Weitere Aussagen über flache Richtungen konnten wegen der Unkenntnis des vollständigen Superpotentials nur Spekulation bleiben.

Schließlich wurden die drei ersten Beispiele zum Dreigespann auf eine ganze Klasse von Modellen, insgesamt einige tausend, erweitert. So ließ sich die Frage der Spiegelsymmetrie im $(0,2)-$Fall aufwerfen und es zeigte sich, daß diese Symmetrie nicht eine Besonderheit von $(2,2)$ ist. Die Konstruktion des Spiegelpartners konnte sich vielmehr der bekannten Methoden bedienen.

Trotz dieses relativen Fortschritts bei den $(0,2)-$Modellen bleiben noch einige offene Fragen, u.a.

- Was passiert, wenn man für die interne SKFT statt Tensorprodukten minimaler Theorien Kazama/Suzuki–Modelle verwendet?
- Wie sieht die genaue Abbildung der exakten Zustände auf die Monome des chiralen Rings bei anderen Modellen als den drei betrachteten aus?
- Welche Struktur hat der Parameterraum von $(0,2)-$Theorien i.a., gibt es insbesondere eine Radiusabhängigkeit der Yukawakopplungen?

- Ist Spiegelsymmetrie bei $(0,2)$ exakt realisiert oder nur auf einen Teil der Modelle beschränkt?
- Wie kann man das Auftreten der Spiegelsymmetrie tiefer verstehen und welche weiteren Anwendungen lassen sich daraus gewinnen?
- Auf welche Weise kann man Hyperflächen– und Faktortheorie–Singularitäten im Rahmen der Auflösungstheorie behandeln?
- Welche neuen Spektren liefert die $(0,2)-$Faktortheorie, kann man vielleicht wie im $(2,2)-$Fall den Spiegelpartner auf diese Weise erhalten?
- Kann man mittels der Dualität von heterotischen $(0,2)-$Modellen mit kompaktifizierter $F-$Theorie die Bündelkonfigurationen klassifizieren?

Es bleibt zu hoffen, daß sich hier Antworten finden lassen, denn die $(0,2)-$Modelle werden bei möglichen Dualitäten $N=1$ supersymmetrischer Theorien eine große Rolle spielen.
Darüber hinaus gibt es noch andere interessante Dinge, die man in diesem Zusammenhang behandeln könnte und die nicht direkt etwas mit $(0,2)$ zu tun haben, erwähnt seien hier nur Deformationen von CYMen in der Nähe des Gepnerpunkts sowie die Konstruktion vierdimensionaler CYMen, die für die Kompaktifizierung von $F-$Theorie auf vier Dimensionen von Bedeutung sind.

Danksagung

Mein Dank gebührt Prof. Werner Nahm, meinen Mitstreitern, in erster Linie Ralph Blumenhagen und in zweiter Linie Rolf Schimmrigk, sowie der restlichen Arbeitsgruppe. Ich möchte hier die Mitglieder der anderen Arbeitsgruppen in der theoretischen Physik nicht vergessen, mit denen man auch über die Physik, die nicht aus Stringtheorie und/oder Mathematik besteht, reden konnte. Ferner zolle ich dem Physikalischen Institut Dank für die Verfügbarkeit des Cip–Pools, ohne den so manche Rechnung nicht möglich gewesen wäre, sowie der Gruppe von Prof. Monien und dem Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn für den Zugang zu ihren Rechnern. Schließlich danke ich meinen Eltern und meiner Patentante für die Unterstützung in der ganzen Studienzeit.

N_{16}	$N_{\overline{16}}$	N_{10}	N_1	# einfache Ströme
9	6	21	218	5
10	7	21	232	3,4,5
10	7	25	236	3
11	8	23	210	3,5
12	9	27	220	2,3,5
12	9	27	226	4,5
12	9	27	230	4
12	9	29	236	2,3,4,5
13	10	29	218	3,4,5
14	11	29	220	2
14	11	29	222	1,2,3,4,5
14	11	31	228	2,3,4
14	11	33	226	2,3,5
16	13	35	230	2,3,4,5
6	9	21	218	3,5
7	10	21	232	3,5
7	10	23	230	3,5
7	10	25	236	2,3,4,5
8	11	23	210	4,5
9	12	27	220	3,4,5
9	12	27	226	4,5
9	12	27	230	4
9	12	29	236	2,4
10	13	29	218	3,5
11	14	29	220	2,3,4
11	14	29	222	2,3,4,5
11	14	31	228	3,4,5
11	14	33	226	1,2,3
13	16	35	230	2,3,4,5

Tabelle 64: *Exakt lösbare Dreigenerationenmodelle aus* $(1)(16)^3_{E_7}$ *mit Eichgruppe* $SO(10)$.

Modell			$N_{16/10}$	$N_{\overline{16}/\overline{10}}$
$V_{(1,9,14,18,21;63)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(1,14,18,18,21,27)}[45\ \ 54]$	35	32
$V_{(1,7,11,14,16;49)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(1,11,14,14,16,21)}[35\ \ 42]$	35	32
$V_{(1,21,30,38,45;135)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(2,21,30,38,45,67)}[69\ \ 134]$	31	28
$V_{(3,4,21,35,42;105)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(4,6,21,35,42,51)}[57\ \ 102]$	31	28
$V_{(1,6,14,21,21;63)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(2,6,14,21,21,31)}[33\ \ 62]$	31	28
$V_{(2,3,11,18,23;57)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(2,6,11,18,23,27)}[33\ \ 54]$	30	27
$V_{(3,6,16,21,23;69)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(6,6,16,21,23,33)}[39\ \ 66]$	27	24
$V_{(3,5,8,8,21;45)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(5,6,8,8,21,21)}[27\ \ 42]$	26	23
$V_{(3,4,13,27,34;81)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(4,6,13,27,34,39)}[45\ \ 78]$	25	22
$V_{(3,4,8,9,21;45)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(4,6,8,9,21,21)}[27\ \ 42]$	25	22
$V_{(4,5,7,25,34;75)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(4,7,10,25,34,35)}[45\ \ 70]$	24	21
$V_{(6,15,21,28,35;105)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(6,21,28,30,35,45)}[75\ \ 90]$	21	18
$V_{(3,11,14,26,27;81)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(6,11,14,26,27,39)}[45\ \ 78]$	17	14
$V_{(1,9,10,30,49;99)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(2,9,10,30,49,49)}[51\ \ 98]$	54	57
$V_{(3,4,9,20,27;63)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(3,4,18,20,27,27)}[45\ \ 54]$	33	36
$V_{(3,4,14,21,39;81)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(4,6,14,21,39,39)}[45\ \ 78]$	31	34
$V_{(1,18,32,39,45;135)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(2,18,32,39,45,67)}[69\ \ 134]$	28	31
$V_{(3,12,21,34,35;105)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(6,12,21,34,35,51)}[57\ \ 102]$	27	30
$V_{(3,15,18,26,31;93)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(6,15,18,26,31,45)}[51\ \ 90]$	21	24
$V_{(3,9,19,24,26;81)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(6,9,19,24,26,39)}[45\ \ 78]$	21	24
$V_{(3,8,21,30,31;93)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(6,8,21,30,31,45)}[51\ \ 90]$	18	21
$V_{(3,4,13,18,19;57)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(4,6,13,18,19,27)}[33\ \ 54]$	17	20
$V_{(4,5,5,7,14;35)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(4,5,7,10,14,15)}[25\ \ 30]$	16	19
$V_{(0,2,3,3,6,7;21)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(2,6,6,6,7,9,9,21)}[15\ \ 15\ \ 18\ \ 18]$	21	18
$V_{(0,1,1,3,4,6;15)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(2,2,3,4,6,7,7,15)}[9\ \ 9\ \ 14\ \ 14]$	17	14
$V_{(0,1,1,2,2,5;11)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(2,2,2,2,5,5,5,11)}[7\ \ 7\ \ 10\ \ 10]$	31	34
$V_{(0,1,9,14,18,21;63)}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{P}_{(2,14,18,18,21,27,31,63)}[33\ \ 45\ \ 54\ \ 62]$	21	24

Tabelle 65: *LG/CY–Dreigenerationenmodelle mit Eichgruppe* $SO(10)$ *bzw.* $SU(5)$.

Zur den formalen Nullen im Bündel bei der Eichgruppe $SU(5)$ geben die Erläuterungen zu (4.49) Auskunft.

Referenzen

[1] G. Nordstrøm, *Über die Möglichkeit, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld zu vereinigen*, Physik. Zeitschr. **15** (1914) 504;
T. Kaluza, *Zum Unitaritätsproblem in der Physik*, Sitzungsber. d. Preuss. Akademie d. Wissenschaften, physik.–mathemat. Klasse **K1** (1921) 966;
O. Klein, *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*, Zeitschr. f. Physik **37** (1926) 895; *The atomicity of electricity as a quantum theory law*, Nature **118** (1926) 516

[2] S. Weinberg, *A model of leptons*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264

[3] J. Scherk und J. Schwarz, *Dual models for non–hadrons*, Nucl. Phys. **B81** (1974) 118

[4] A. Strominger und C. Vafa, *Microscopic origin of the Bekenstein–Hawking entropy*, Phys. Lett. **B379** (1996) 99, hep–th/9601029;
G. Horowitz und A. Strominger, *Counting states near extremal black holes*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 2368, hep–th/9602051;
G. Horowitz, *The origin of black hole entropy in string theory*, Preprint UCSBTH–96–07, gr–qc/9604051

[5] P. Goddard, J. Nuyts und D. Olive, *Gauge theories and magnetic charge*, Nucl. Phys. **B125** (1977) 1;
C. Montonen und D. Olive, *Magnetic monopoles as gauge particles*?, Phys. Lett. **B72** (1977) 117;
D.Olive und E.Witten, *Supersymmetry algebras that include topological charges*, Phys. Lett. **B78** (1978) 97

[6] N. Seiberg und E. Witten, *Electric–magnetic duality, monopole condensation and confinement*, Nucl. Phys. **B426** (1994) 19, hep–th/9407087; Erratum, dto. **B430** (1994) 485

[7] E. Bergshoeff, E. Sezgin und P. Townsend, *Properties of the eleven–dimensional supermembrane theory*, Phys. Lett. **B189** (1987) 75;
M. Duff, P. Howe, T. Inami und K. Stelle, *Superstrings in $D = 10$ from supermembranes in $D = 11$*, Phys. Lett. **B191** (1987) 70;
M. Duff und K. Stelle, *Multimembrane solutions of $D = 11$ supergravity*, Phys. Lett. **B253** (1991) 113;
J. Schwarz, *The power of M–theory*, Phys. Lett. **B367** (1996) 97, hep–th/9510086;
P. Horava und E. Witten, *Heterotic and type I string dynamics from eleven dimensions*, Nucl. Phys. **B460** (1996) 506, hep–th/9510209; *Eleven–dimensional supergravity on a manifold with boundary*, Nucl. Phys. **B475** (1996) 94, hep–th/9603142

[8] C. Vafa, *Evidence for F–theory*, Nucl. Phys. **B469** (1996) 403, hep–th/9602022;
D. Morrison und C. Vafa, *Compactifications of F–theory on Calabi–Yau threefolds I,II*, Nucl. Phys. **B473** (1996) 74, hep–th/9602114; dto. **B476** (1996) 437, hep–th/9603161

[9] J. Scherk, *Zero–slope limit of the dual resonance model*, Nucl. Phys. **B31** (1971) 282;
A. Neveu und J. Scherk, *Connection between Yang–Mills fields and dual models*, Phys. Rev. Lett. **27** (1972) 155

[10] D. Gross, J. Harvey, E. Martinec und R. Rohm, *Heterotic string theory I, the free heterotic string*, Nucl. Phys. **B256** (1985) 253; *Heterotic string theory II, the interacting heterotic string*, dto. **B267** (1986) 75

[11] M. Green und J. Schwarz, *Anomaly cancellations in supersymmetric $D = 10$ gauge theory and superstring theory*, Phys. Lett. **B149** (1984) 118

[12] P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger und E. Witten, *Vacuum configurations for superstrings*, Nucl. Phys. **B258** (1985) 46

[13] T. Banks, L. Dixon, D. Friedan und E. Martinec, *Phenomenology and conformal field theory, or Can string theory predict the weak mixing angle*?, Nucl. Phys. **B299** (1988) 613

[14] M. Dine, N. Seiberg, X. Wen und E. Witten, *Nonperturbative effects on the string world sheet I,II*, Nucl. Phys. **B278** (1986) 769; dto. **B289** (1987) 319;
J. Ellis, C. Gomez, D. Nanopoulos und M. Quiros, *Problems for $(2, 0)$ compactifications*, Phys. Lett.

B176 (1986) 403;
J. Distler, *Resurrecting* $(2,0)$ *compactifications*, Phys. Lett. **B188** (1987) 431
[15] J. Distler und B. Greene, *Aspects of* $(2,0)$ *string compactifications*, Nucl. Phys. **B304** (1988) 1
[16] J. Distler und S. Kachru, *Singlet couplings and* $(0,2)$ *models*, Nucl. Phys. **B430** (1994) 13, hep–th/9406090; *Quantum symmetries and stringy instantons*, Phys. Lett. **B336** (1994) 368, hep–th/9406091
[17] E. Silverstein und E. Witten, *Criteria for conformal invariance of* $(0,2)$ *models*, Nucl. Phys. **B444** (1995) 161, hep–th/9503212; *Global* $U(1)$ *R–symmetry and conformal invariance of* $(0,2)$ *models*, Phys. Lett. **B328** (1994) 307, hep–th/9403054
[18] D. Gepner, *Space–time supersymmetry in compactified string theory and superconformal models*, Nucl. Phys. **B296** (1988) 757
[19] R. Schimmrigk, *A new construction of a three generation Calabi–Yau manifold*, Phys. Lett. **B193** (1987) 175;
D. Gepner, *String theory on Calabi–Yau manifolds: the three generations case*, Preprint PUPT–88–0085, Dezember 1987, hep–th/9301089;
S. Abel und C. Scheich, *Classification of* $(2,2)$ *compactifications by free fermions* 2, Phys. Lett. **B333** (1994) 68, hep–th/9404176
[20] R. Schimmrigk, *Heterotic* $(2,2)$ *vacua: manifold theory and exact results*, Nucl. Phys. **B342** (1990) 231
[21] P. Candelas, A. Dale, C. Lütken und R. Schimmrigk, *Complete intersection Calabi–Yau manifolds*, Nucl. Phys. **B298** (1988) 493
[22] A. Strominger, *Massless black holes and conifolds in string theory*, Nucl. Phys. **B451** (1995) 96, hep–th/9504090;
B. Greene, D. Morrison und A. Strominger, *Black hole condensation and the unification of string vacua*, Nucl. Phys. **B451** (1995) 109, hep–th/9504145
[23] D. Gepner, *Exactly solvable string compactification on manifolds of* $SU(n)$ *holonomy*, Phys. Lett. **B199** (1987) 380
[24] B. Greene, C. Vafa und N. Warner, *Calabi–Yau manifolds and renormalization group flows*, Nucl. Phys. **B324** (1989) 371;
E. Martinec, *Algebraic geometry and effective Lagrangians*, Phys. Lett. **B217** (1989) 431;
J. Schwarz, *Superconformal symmetry and superstring compactification*, Int. J. Mod. Phys. **A4** (1989) 2653;
E. Witten, *On the Landau–Ginzburg description of* $N=2$ *minimal models*, Int. J. Mod. Phys. **A9** (1994) 4783, hep–th/9304026
[25] C. Vafa und N. Warner, *Catastrophes and the classification of conformal theories*, Phys. Lett. **B218** (1989) 51
[26] C. Vafa, *Quantum symmetries of string vacua*, Mod. Phys. Lett. **A4** (1989) 1615
[27] B. de Wit und A. van Proeyen, *Potentials and symmetries of general gauged* $N=2$ *supergravity Yang–Mills models*, Nucl. Phys. **B245** (1984) 89;
E. Cremmer, C. Kounnas, A. van Proeyen, J. Derendinger, S. Ferrara, B. de Wit und L. Girardello, *Vector multiplets coupled to* $N=2$ *supergravity: superhiggs effect, flat potentials and geometric structure*, Nucl. Phys. **B250** (1985) 385;
L. Dixon, V. Kaplunovsky und J. Louis, *On effective field theories describing* $(2,2)$ *vacua of the heterotic string*, Nucl. Phys. **B329** (1988) 27;
A. Strominger, *Special geometry*, Comm. Math. Phys. **133** (1990) 163
[28] P. Candelas, M. Lynker und R. Schimmrigk, *Calabi–Yau manifolds in weighted* $\mathbb{P}_4$, Nucl. Phys. **B341** (1990) 383

[29] M. Lynker und R. Schimmrigk, *Landau–Ginzburg theories as orbifolds*, Phys. Lett. **B249** (1990) 237; K. Intriligator und C. Vafa, *Landau–Ginzburg orbifolds*, Nucl. Phys. **B339** (1990) 95

[30] S. Kachru und C. Vafa, *Exact results for $N=2$ compactifications of heterotic strings*, Phys. Lett. **B361** (1995) 59, hep–th/9505105;
S. Ferrara, J. Harvey, A. Strominger und C. Vafa, *Second quantized mirror symmetry*, Nucl. Phys. **B450** (1995) 69, hep–th/9505162

[31] A. Klemm, W. Lerche und P. Mayr, *K_3 fibrations and heterotic type II string duality*, Phys. Lett. **B357** (1995) 313, hep–th/9506112;
S. Hosono, B. Lian und S. Yau, *Calabi–Yau varieties and pencils of K_3 surfaces*, alg–geom/9603020

[32] S. Kachru, A. Klemm, W. Lerche, P. Mayr und C. Vafa, *Nonperturbative results on the point particle limit of $N=2$ heterotic string compactification*, Nucl. Phys. **B459** (1996) 537, hep–th/9508155

[33] R. Schimmrigk, *Scaling behaviour in string theory*, Phys. Lett. **B388** (1996) 60, hep–th/9412077; *Scaling behaviour on the space of Calabi–Yau manifolds*, in Essays on mirror manifolds II, International Press, 1997, alg–geom/9612012

[34] A. Avram, P. Candelas, D. Jančić und M. Mandelberg, *On the connectedness of moduli spaces of Calabi–Yau manifolds*, Nucl. Phys. **B465** (1996) 458, hep–th/9511230;
A. Avram, M. Kreuzer, M. Mandelberg und H. Skarke, *The web of Calabi–Yau hypersurfaces in toric varieties*, Preprint JHU–TIPAC–96028, TUW–97–05, UTTG–07–97, hep–th/9703003

[35] E. Witten, *New issues in manifolds of $SU(3)$ holonomy*, Nucl. Phys. **B268** (1986) 79

[36] L. Ibáñez, H. Nilles und F. Quevedo, *Orbifolds and Wilson lines*, Phys. Lett. **B187** (1987) 25;
H. Kawai, D. Lewellen und S. Tye, *Construction of four–dimensional fermionic string models*, Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 1832; Erratum, dto. **58** (1987) 429; *Construction of fermionic string models in four dimensions*, Nucl. Phys. **B288** (1987) 1;
W. Lerche, D. Lüst und A. Schellekens, *Chiral four–dimensional heterotic strings from selfdual lattices*, Nucl. Phys. **B287** (1987) 477;
K. Narain, M. Sarmadi und C. Vafa, *Asymmetric orbifolds*, Nucl. Phys. **B288** (1987) 551;
I. Antoniadis, C. Bachas und C. Kounnas, *Four–dimensional superstrings*, Nucl. Phys. **B289** (1987) 87;
A. Font, L. Ibáñez, M. Mondragon, F. Quevedo und G. Ross, *$(0,2)$ heterotic string compactifications from $N=2$ superconformal theories*, Phys. Lett. **B227** (1989) 34;
A. Font, L. Ibáñez, F. Quevedo und A. Sierra, *Twisted $N=2$ coset models, discrete torsion and asymmetric heterotic string compactifications*, Nucl. Phys. **B337** (1990) 119

[37] A. Schellekens und S. Yankielowicz, *New modular invariants for $N=2$ tensor products and four–dimensional strings*, Nucl. Phys. **B330** (1990) 103; CERN–TH.5440S/89 und NIKHEF–H/5440T/89 (unveröffentlichte Tabellen)

[38] D. Gepner, *Yukawa couplings for Calabi–Yau string compactifications*, Nucl. Phys. **B311** (1988) 191

[39] G. Sotkov und M. Stanishkov, *Yukawa couplings for the three generation string model*, Phys. Lett. **B215** (1988) 674;
B. Greene, C. Lütken und G. Ross, *Couplings in the heterotic superconformal three generation model*, Nucl. Phys. **B325** (1989) 101

[40] M. Lynker und R. Schimmrigk, *Heterotic string compactification on $N=2$ superconformal theories with $c=9$*, Phys. Lett. **B208** (1988) 216;
C. Lütken und G. Ross, *Taxonomy of heterotic superconformal field theories*, Phys. Lett. **B213** (1988) 152;
P. Zoglin, *Heterotic string compactifications using minimal $N=2$ superconformal field theory quotient models*, Phys. Lett. **B218** (1989) 444;
J. Fuchs, A. Klemm, C. Scheich und M. Schmidt, *Gepner models with arbitrary invariants and the associated Calabi–Yau spaces*, Phys. Lett. **B232** (1989) 317; *Spectra and symmetries of Gepner models*

compared to Calabi–Yau compactifications, Ann. Phys. **204** (1990) 1

[41] M. Lynker und R. Schimmrigk, *On the spectrum of* $(2,2)$ *compactifications of the heterotic string on conformal field theories*, Phys. Lett. **B215** (1988) 681; *A–D–E quantum Calabi–Yau manifolds*, Nucl. Phys. **B339** (1990) 121

[42] Y. Kazama und H. Suzuki, *New* $N=2$ *superconformal field theories and superstring compactification*, Nucl. Phys. **B321** (1989) 232; *Characterization of* $N=2$ *superconformal models generated by coset space method*, Phys. Lett. **B216** (1989) 112;
M. Lynker und R. Schimmrigk, *String compactifications on* G/H *Landau–Ginzburg theories*, Phys. Lett. **B253** (1991) 83;
A. Schellekens, *Field identification fixed points in* $N=2$ *coset theories*, Nucl. Phys. **B366** (1991) 27

[43] W. Lerche, C. Vafa und N. Warner, *Chiral rings in* $N=2$ *superconformal theories*, Nucl. Phys. **B324** (1989) 427

[44] E. Witten, *Phases of* $N=2$ *theories in two dimensions*, Nucl. Phys. **B403** (1993) 159, hep–th/9301042

[45] J. Distler und S. Kachru, $(0,2)$ *Landau–Ginzburg theory*, Nucl. Phys. **B413** (1994) 213, hep–th/9309110

[46] G.Moore und N.Seiberg, *Classical and quantum conformal field theory*, Comm.Math.Phys. **123** (1989) 177

[47] R. Blumenhagen und A. Wißkirchen, *Exactly solvable* $(0,2)$ *supersymmetric string vacua with GUT gauge groups*, Nucl. Phys. **B454** (1995) 561, hep–th/9506104

[48] A. Schellekens und S. Yankielowicz, *Extended chiral algebras and modular invariant partition functions*, Nucl. Phys. **B327** (1989) 673; *Modular invariants from simple currents. An explicit proof*, Phys. Lett. **B227** (1989) 387; *Simple currents, modular invariants and fixed points*, Int. J. Mod. Phys. **A5** (1990) 2903

[49] K. Intriligator, *Bonus symmetry in conformal field theory*, Nucl. Phys. **B332** (1990) 541

[50] F. Gliozzi, J. Scherk und D. Olive, *Supersymmetry, supergravity theories and the dual spinor model*, Nucl. Phys. **B122** (1977) 253

[51] M. Kreuzer und H. Skarke, *No mirror symmetry in Landau–Ginzburg spectra!*, Nucl. Phys. **B388** (1992) 113, hep–th/9205004

[52] A. Klemm und R. Schimmrigk, *Landau–Ginzburg string vacua*, Nucl. Phys. **B411** (1994) 559, hep–th/9204060

[53] R. Blumenhagen, R. Schimmrigk und A. Wißkirchen, *The* $(0,2)$ *exactly solvable structure of chiral rings, Landau–Ginzburg theories and Calabi–Yau manifolds*, Nucl. Phys. **B461** (1996) 460, hep–th/9510055

[54] R. Blumenhagen und A. Wißkirchen, *Exactly solvable points in the moduli space of heterotic* $N=2$ *strings*, Mod. Phys. Lett. **A11** (1996) 1475, hep–th/9601050

[55] V. Kaplunovsky, J. Louis und S. Theisen, *Aspects of duality in* $N=2$ *string vacua*, Phys. Lett. **B357** (1995) 71, hep–th/9506110;
C. Vafa und E. Witten, *Dual string pairs with* $N=1$ *and* $N=2$ *supersymmetry in four dimensions*, Preprint HUTP–95/A023, IASSNS–HEP–95/58, hep–th/9507050;
I. Antoniadis, E. Gava, K. Narain und T. Taylor, $N=2$ *type II heterotic duality and higher derivative F–terms*, Nucl. Phys. **B455** (1995) 109, hep–th/9507115;
I. Antoniadis und H. Partouche, *Exact monodromy group of* $N=2$ *heterotic superstring*, Nucl. Phys. **B460** (1996) 470, hep–th/9509009

[56] P. Aspinwall und J. Louis, *On the ubiquity of* K_3 *fibrations in string duality*, Phys. Lett. **B369** (1996) 233, hep–th/9510234

[57] P. Aspinwall, *Enhanced gauge symmetries and Calabi–Yau threefolds*, Phys. Lett. **B371** (1996) 231, hep–th/9511171

[58] M. Lynker und R. Schimmrigk, *Conifold transitions and aspects of duality*, Nucl. Phys. **B484** (1997) 562, hep–th/9511058

[59] G. Aldazabal, A. Font, L. Ibáñez und F. Quevedo, *Chains of $N = 2$, $D = 4$ heterotic type II duals*, Nucl. Phys. **B461** (1996) 85, hep–th/9510093

[60] R. Blumenhagen und A. Wißkirchen, *Exploring the moduli space of* $(0,2)$ *strings*, Nucl. Phys. **B475** (1996) 225, hep–th/9604140

[61] P. Candelas und X. de la Ossa, *Moduli space of Calabi–Yau manifolds*, Nucl. Phys. **B355** (1991) 455

[62] E. Silverstein, *Miracle at the Gepner point*, Phys. Lett. **B352** (1995) 69, hep–th/9503150

[63] J. Distler und B. Greene, *Some exact results on the superpotential from Calabi–Yau compactifications*, Nucl. Phys. **B309** (1988) 295

[64] B. Greene und R. Plesser, *Duality in Calabi–Yau moduli space*, Nucl. Phys. **B338** (1990) 15

[65] C. Hull und P. Townsend, *Unity of superstring dualities*, Nucl. Phys. **B438** (1995) 109, hep–th/9410167;
E. Witten, *String theory dynamics in various dimensions*, Nucl. Phys. **B443** (1995) 85, hep–th/9503124

[66] P. Candelas, P. Green und T. Hübsch, *Finite distances between distinct Calabi–Yau vacua: (other worlds are just around the corner)*, Phys. Rev. Lett. **62** (1989) 1956; *Rolling among Calabi–Yau vacua*, Nucl. Phys. **B330** (1990) 49

[67] R. Blumenhagen, R. Schimmrigk und A. Wißkirchen, $(0,2)$ *mirror symmetry*, Nucl. Phys. **B486** (1997) 598, hep-th/9609167

[68] K. Kodaira und D. Spencer, Proc. Nat. Acad. Sci. **39** (1953) 868

[69] M. Kreuzer und M. Nikbakht–Tehrani, $(0,2)$ *string compactifications*, Preprint TUW–96–22, hep–th/9611130, Beitrag zum 30. *International symposion Ahrenshoop on the theory of elementary particles* in Buckow, August 1996

[70] M. Nikbakht–Tehrani, *On the Calabi–Yau phase of* $(0,2)$ *models*, Nucl. Phys. **B491** (1997) 279, hep–th/9612067

[71] T. Chiang, J. Distler und B. Greene, *Some features of* $(0,2)$ *moduli space*, Preprint CLNS–96–1456, hep–th/9702030

[72] M. Green, J. Schwarz und E. Witten, *Superstring theory I,II*, Cambridge University Press 1987;
D. Lüst und S. Theisen, *Lectures on string theory*, Springer–Verlag 1990

[73] G. Veneziano, *Construction of a crossing–symmetric amplitude with Regge behaviour*, Phys. Rev. **177** (1969) 2309;
J. Shapiro, *Electrostatic analogue for the Virasoro model*, Phys. Lett. **B33** (1970) 361

[74] Y. Nambu, *Lectures at the Copenhagen symposion*, 1970;
T. Goto, *Relativistic quantum mechanics of one–dimensional mechanical continuum and subsidary condition of dual model*, Prog. Theor. Phys. **46** (1971) 1560

[75] L. Kreuzer, *Experimental measurements of the equivalence of active and passive gravitational mass*, Phys. Rev. **169** (1968) 1007;
R. Hellings, P. Adams, J. Anderson, M. Keesey, E. Lau, E. Standish, V. Canuto und I. Goldman, *Experimental test of the variability of G using Viking lander ranging data*, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 1609;
S. Holding, F. Stacey und G. Tuck, *Gravity in mines – an investigation of Newton's law*, Phys. Rev. **D33** (1986) 3487

[76] A. Polyakov, *Quantum geometry of bosonic string*, Phys. Lett. **B103** (1981) 207

[77] J. Kogut und D. Soper, *Quantum electrodynamics in the infinite–momentum frame*, Phys. Rev. **D1** (1970) 2901;
P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi und C. Thorn, *Quantum dynamics of a massless relativistic string*, Nucl. Phys. **B56** (1972) 109

[78] M. Green und J. Schwarz, *Supersymmetrical string theories*, Phys. Lett. **B109** (1982) 444

[79] W. Lerche und N. Warner, *Index theorems in $N=2$ superconformal theories*, Phys. Lett. **B205** (1988) 471;
R. Blumenhagen und A. Wißkirchen, *A note on ADE string compactifications*, Phys. Lett. **B355** (1995) 99, hep–th/9503129

[80] E. Witten, *Search for a realistic Kaluza–Klein theory*, Nucl. Phys. **B186** (1981) 412

[81] E. Calabi, *On Kähler manifolds with vanishing canonical class, algebraic geometry and topology*, in *Algebraic geometry and topology: a symposion in honor of S. Lefshetz*, Princeton University Press, 1955;
S. Yau, *Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry*, Proc. Natl. Acad. Soc. **74** (1974) 1798

[82] S. Donaldson, *An application of gauge theory to four dimensional topology*, J. Diff. Geom. **18** (1983) 279; *Antiselfdual Yang–Mills connections on complex algebraic surfaces and stable bundles*, Proc. London Math. Soc. **3** (1985) 1;
K. Uhlenbeck und S. Yau, *On the existence of hermitian Yang–Mills connections on stable bundles over compact Kähler manifolds*, Comm. Pure App. Math. **39** (1986) 257, **42** (1986) 703

[83] B. Greene, *Superconformal compactifications in weighted projective space*, Comm. Math. Phys. **130** (1990) 335

[84] E. Witten, *Symmetry breaking patterns in superstring models*, Nucl. Phys. **B258** (1985) 75

[85] L. Dixon, J. Harvey, C. Vafa und E. Witten, *Strings on orbifolds I,II*, Nucl. Phys. **B261** (1985) 620, dto. **B274** (1986) 285

[86] C.Hull und E.Witten, *Supersymmetric sigma models and the heterotic string*, Phys. Lett. **B160** (1985) 398

[87] A. Cappelli, C. Itzykson und J. Zuber, *The ADE classification of minimal and $A_1^{(1)}$ conformal invariant theories*, Comm. Math. Phys. **113** (1987) 1

[88] A. Schwimmer und N. Seiberg, *Comments on the $N=2,3,4$ superconformal algebras in two dimensions*, Phys. Lett. **B184** (1987) 191

[89] J. Distler, B. Greene und D. Morrison, *Resolving singularities in $(0,2)$ models*, Nucl. Phys. **B481** (1996) 289, hep–th/9605222

[90] M. Kreuzer und A. Schellekens, *Simple currents versus orbifolds with discrete torsion – a complete classification*, Nucl. Phys. **B411** (1994) 97, hep–th/9306145

[91] S. Odake, *Character formulas of an extended superconformal algebra relevant to string compactification*, Int. J. Mod. Phys. **A5** (1990) 897

[92] T. Eguchi, H. Ooguri, A. Taormina und S. Yang, *Superconformal algebras and string compactification on manifolds with $SU(n)$ holonomy*, Nucl. Phys. **B315** (1989) 193;
R. Blumenhagen und A. Wißkirchen, *Generalized string functions of $N=1$ space–time supersymmetric string vacua*, Phys. Lett. **B349** (1995) 63, hep–th/9501072

[93] A. Schellekens und N. Warner, *Anomalies, characters and strings*, Nucl. Phys. **B287** (1987) 317

[94] S. Kachru, *Some three generation $(0,2)$ Calabi–Yau models*, Phys. Lett. **B349** (1995) 76, hep–th/9501131

[95] P. Berglund, C. Johnson, S. Kachru und P. Zaugg, *Heterotic coset models and $(0,2)$ string vacua*, Nucl. Phys. **B460** (1996) 252, hep–th/9509170

[96] D. Friedan, E. Martinec und S. Shenker, *Conformal invariance, supersymmetry and string theory*, Nucl. Phys. **B271** (1986) 93

[97] A.Zamolodchikov und V.Fateev, *Parafermionic currents in the two–dimensional conformal quantum field theory and selfdual critical points in $\mathbb{Z}(N)$ invariant statistical systems*, Sov. Phys. JETP **62** (1986) 215

[98] S. Kachru und E. Witten, *Computing the complete massless spectrum of a Landau–Ginzburg orbifold*, Nucl. Phys. **B407** (1993) 637, hep–th/9307038

[99] E. Cremmer, S. Ferrara, L. Girardello, B. Julia, J. Scherk und P. van Nieuwenhuizen, *Spontaneous symmetry breaking and Higgs effect in supergravity without cosmological constant*, Nucl. Phys. **B147**

(1979) 105;

J. Bagger, *Coupling the gauge invariant supersymmetric nonlinear sigma–model to supergravity*, Nucl. Phys. **B211** (1983) 302

[100] J. Distler und S. Kachru, *Duality of* $(0,2)$ *string vacua*, Nucl. Phys. **B442** (1995) 64, hep–th/9501111

[101] M. Kreuzer und H. Skarke, *ADE string vacua with discrete torsion*, Phys. Lett. **B318** (1993) 305, hep–th/9307145

[102] T. Kawai und K. Mohri, *Geometry of* $(0,2)$ *Landau–Ginzburg orbifolds*, Nucl. Phys. **B425** (1994) 191, hep–th/9402148

[103] C. Vafa, *String vacua and orbifoldized LG–models*, Mod. Phys. Lett. **A4** (1989) 1169

[104] http://thew02.physik.uni–bonn.de/~netah/cy.html

[105] R. Schimmrigk, *Critical superstring vacua from noncritical manifolds: a novel framework for string compactification and mirror symmetry*, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 3688, hep–th/9210062; *Mirror symmetry and string vacua from a class of Fano varieties*, Int. J. Mod. Phys. **A11** (1996) 3049, hep–th/9405086

[106] P. Candelas, E. Derrick und L. Parkes, *Generalized Calabi–Yau manifolds and the mirror of a rigid manifold*, Nucl. Phys. **B407** (1993) 115, hep–th/9304045

[107] P. Berglund und T. Hübsch, *A generalized construction of mirror manifolds*, Nucl. Phys. **B393** (1993) 377, hep–th/9201014

[108] V. Batyrev, *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi–Yau hypersurfaces in toric varieties*, J. Alg. Geom. **3** (1994) 493, alg–geom/9310003

[109] P. Berglund und S. Katz, *Mirror symmetry constructions: a review*, in Essays on mirror manifolds II, International Press, 1997, hep–th/9406008

[110] P. Candelas, X. de la Ossa und S. Katz, *Mirror symmetry for Calabi–Yau hypersurfaces in weighted* $\mathbb{P}_4$ *and extensions of Landau–Ginzburg theory*, Nucl. Phys. **B450** (1995) 267, hep–th/9412117

[111] B. Greene, R. Plesser und S. Roan, *New constructions of mirror manifolds: probing moduli space far from Fermat points*, in Essays on mirror manifolds, International Press, 1992;

P. Berglund und M. Henningson, *Landau–Ginzburg orbifolds, mirror symmetry and the elliptic genus*, Nucl. Phys. **B433** (1995) 311, hep–th/9401029;

M. Kreuzer, *The mirror map for invertible LG models*, Phys. Lett. **B328** (1994) 312, hep–th/9402114

[112] D. Gepner und Z. Qiu, *Modular invariant partition functions for parafermionic field theories*, Nucl. Phys. **B285** (1987) 423

[113] R. Blumenhagen und S. Sethi, *On orbifolds of* $(0,2)$ *models*, Nucl. Phys. **B491** (1997) 263, hep–th/9611172

[114] R. Blumenhagen und M. Flohr, *Aspects of* $(0,2)$ *orbifolds and mirror symmetry*, Nucl. Phys. **B491** (1997) 263, hep–th/9702199