Analytische Torsion
und
Kritische Metriken

Analytische Ray-Singer-Torsion, Quillenmetrik und Regularisierte Determinanten

von
Katrin Wendland

Diplomarbeit in Mathematik

Oktober 1996

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Regularisierte Determinanten elliptischer Operatoren spielen eine große Rolle in verschiedenen Gebieten der Mathematik und Physik. Eine Methode, diese Regularisierung vorzunehmen, beruht auf der Verwendung von *Zetafunktionen*, wie sie für den Laplace-Beltrami-Operator 1949 von S. Minakshisundaram und A. Pleijel [MP] und 1967 von R. Seeley für elliptische Pseudodifferentialoperatoren definiert wurden: Es bezeichne $H : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ einen selbstadjungierten elliptischen Pseudodifferentialoperator auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit X, welcher der Einfachheit halber positiv definit sei. $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ seien dessen Eigenwerte, dann ist die *Zetafunktion von* H für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, s \gg 0$ definiert durch

$$\zeta_H(s) := \mathrm{tr}\, \left(H^{-s}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-s} \quad .$$

Die Zetafunktion läßt sich auch als Mellintransformierte der Spur des *Wärmeleitungskernes* zu H beschreiben und auf diese Weise meromorph auf die gesamte komplexe Ebene fortsetzen; die meromorphe Fortsetzung wird ebenfalls mit ζ_H bezeichnet.
Bekannte Zusammenhänge zwischen Spektrum eines elliptischen Operators auf X und Geometrie sowie Topologie von X können nun mit Hilfe der Zetafunktion ζ_H formuliert und untersucht werden. Dies betrifft vor allem Laplace-Operatoren (ein Laplace-Operator Δ wird dazu auf das orthogonale Komplement seines Kernes eingeschränkt), deren Spektren eng verknüpft sind mit geometrischen und topologischen Daten der Mannigfaltigkeit X, auf der sie operieren [ABP, APS, BGM]: Dimension, topologischer Typ, Volumen, Durchmesser, Krümmung von X etc. lassen sich mitunter allein aus dem Spektrum des Laplace-Operators ablesen (siehe z.B. [McK]). Berühmt ist in diesem Zusammenhang die von M. Kac 1966 gestellte Frage: „Can one hear the shape of a drum?“ [Kac], mit anderen Worten, bestimmt die Menge der Obertöne einer Trommel, i.e. das Spektrum des Laplace-Operators, die Geometrie der Trommel bis auf Isometrie? – mehr dazu weiter unten.
Wie oben erwähnt, läßt sich die Zetafunktion eines elliptischen Operators als Mellintransformierte der Spur seines *Wärmeleitungskernes* schreiben. Unter anderem das bessere Verständnis der Eigenschaften des Wärmeleitungskernes, insbesondere des asymptotischen Verhaltens seiner Spur (!), führte auf die moderneren analytischen Beweise des Atiyah-Singer-Indexsatzes, 1973 von M.F. Atiyah, R. Bott und V.K. Patodi [ABP] und 1983 von E. Getzler [Ge], und damit von dessen „Spezialfällen“, dem Satz von Gauß-Bonnet-Chern, dem Hirzebruch-Signatursatz sowie dem Riemann-Roch-Hirzebruch-Theorem.
Die Zetafunktion eines elliptischen Pseudodifferentialoperators H wie oben kann nun insbesondere verwendet werden, um eine *regularisierte Determinante* von H zu definieren. Unter Ausnutzung der formalen Identität

$$-\log\left(\prod_{j=1}^{\infty} \lambda_j\right) = \zeta_H'(0)$$

(man kann zeigen, daß die Zetafunktion im Nullpunkt analytisch ist), definiert man nach D.B. Ray und I.M. Singer (1971)

$$\det H := e^{-\zeta_H'(0)}$$

[RS1]. Es handelt sich bei $\det H$ offenbar um eine spektrale Invariante, die von allen Eigenwerten von H (bis auf den Kern) abhängt. Wiederum stellt sich die Frage, welche Information die regularisierte Determinante über Geometrie und Topologie der Mannigfaltigkeit X enthält. B. Osgood, R. Phillips und P. Sarnak verwenden 1988 die Determinante des Laplace-Operators zur Konstruktion extremaler Metriken auf kompakten Riemannschen Flächen, indem sie $\det \Delta$ als Funktional auf dem Raum der Riemannschen Metriken solch einer Fläche auffassen und dieses Funktional variieren [OPS]. Sie können damit Kac' Frage nach der Hörbarkeit einer Trommel zum Teil beantworten: Kreisförmige Trommeln mit isotroper Dichteverteilung können aus einer konformen Klasse von Trommeln (mit gewissen Nebenbedingungen an die Dichteverteilung) herausgehört werden [OPS, Corollary 2]. Die Variationsformel, die in der zitierten Arbeit für die Konstruktion extremaler Metriken bezüglich der Determinante des Laplace-Operators verwendet wird, geht auf A. Polyakov und damit auf Arbeiten aus der physikalischen Fachliteratur zurück [Alv, Po1, Po2]. Daß regularisierte Determinanten auch in der Physik von Bedeutung sind, ist nicht verwunderlich, wenn man bedenkt, daß der Wärmeleitungskern eine zentrale Rolle in ihrer Definition spielt, der Kern zu derjenigen Gleichung, die Diffusionsprozesse von Wärme (oder Tinte) beschreibt. Vor allem in der Quantengeometrie von Strings sind regularisierte Determinanten als Einschleifen-Korrekturen in den Störungsreihen von Pfadintegralen wohlbekannt [Ha].
Als Verallgemeinerung der Determinante des Laplace-Operators kann die *Ray-Singer--Torsion* verstanden werden, die D.B. Ray und I.M. Singer ebenfalls 1971 auf reellen Mannigfaltigkeiten als gewichtetes Produkt der Determinanten von Laplace-Operatoren auf p-Formen definierten [RS1]. Sie vermuteten bereits, daß diese Invariante (die Ray-Singer-Torsion ist, abgesehen von den Beiträgen der harmonischen Formen, von der Metrik unabhängig) mit der klassischen *Reidemeister-Franz-Torsion*, einer topologischen Invariante, übereinstimme. Dies konnten W. Müller und J. Cheeger unabhängig voneinander 1978 bzw. 1979 beweisen [Mü1, Chee].
D.B. Ray und I.M. Singer hatten inzwischen (1973) als weitere Verallgemeinerung der Ray-Singer-Torsion die *analytische Ray-Singer-Torsion* auf komplexen Mannigfaltigkeiten definiert. Auch hierbei handelt es sich um ein gewichtetes Produkt der Determinanten von Laplace-Operatoren, diesmal jedoch auf $(0,q)$-Formen. Die analytische Ray-Singer--Torsion ist im Gegensatz zu ihrer Vorläuferin nicht unabhängig von der Metrik. Ähnlich wie die Determinante des Laplace-Operators kann sie daher als Funktional auf dem Raum der Riemannschen Metriken der betreffenden Mannigfaltigkeit aufgefaßt werden. Auch die analytische Ray-Singer-Torsion hat vor nicht allzu langer Zeit Einzug in die theoretische Physik gehalten, und zwar als Einschleifen-Korrektur einer bestimmten Zustandssumme in der Stringtheorie.

Mit Hilfe der analytischen Ray-Singer-Torsion wiederum läßt sich die *Quillenmetrik* auf *Determinantenbündeln* definieren; diese Definition stammt von J.-M. Bismut und D.S. Freed (1986) [BF1] und geht auf Ideen von D. Quillen zurück (1985) [Qu]. Die Theorie der Determinantenbündel findet man hingegen wiederum zuerst in der physikalischen Fachliteratur, und zwar 1985 bei L. Alvarez-Gaumé bzw. E. Witten [Wi1] im Zusammenhang mit der Untersuchung von Anomalien von Quantenfeldtheorien. Genau genommen ist die Quillenmetrik das „geometrische Objekt", mit dem auch der analytischen Ray-Singer-Torsion eine geometrische Bedeutung gegeben werden kann. Auch sie kann als Funktional auf dem Raum der Riemannschen Metriken der betreffenden Mannigfaltigkeit X aufgefaßt und zur Konstruktion kritischer Metriken verwendet werden, so geschehen in gewissen Spezialfällen bei S.K. Donaldson [Do] und M. Itoh, H. Nakajima [IN] im Zusammenhang mit der Suche nach stabilen Bündeln.
Die Verallgemeinerungen weitertreibend kann man auch *höhere Torsionsformen* definieren und etwa das Theorem von Grothendieck-Riemann-Roch für metrisierte Bündel auf arithmetischen Varietäten formulieren [GS], worauf an dieser Stelle jedoch nicht näher eingegangen werden soll.

Das Thema meiner Diplomarbeit ist die Untersuchung der analytischen Ray-Singer-Torsion, der Quillenmetrik und damit auch der regularisierten Determinanten von Laplace--Operatoren auf ihre Abhängigkeit von der Metrik, insbesondere die Bestimmung kritischer Metriken.

Kritische Punkte von Funktionalen auf dem Raum der Riemannschen Metriken einer Mannigfaltigkeit zu finden, kann zum einen darum interessant sein, weil die Analyse solcher Funktionale Informationen über den Raum der Metriken liefern sollte, zum andern weil interessante geometrische Eigenschaften für die Extrema erwartet werden dürfen.
Beispiele für die Ausnutzung der Variationsrechnung findet man in der Physik en masse: Nach Lagrange liefert die Variation von Wirkungsfunktionalen die Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik. D. Hilbert zeigte schon 1915 für die Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie auf einer Mannigfaltigkeit, daß sie aus der Variation der totalen Skalarkrümmung des Konfigurationsraumes gewonnen werden können [Hil]. Die totale Skalarkrümmung wird dabei als Funktional auf dem Raum der Riemannschen Metriken aufgefaßt. Führt man bei der Suche nach kritischen Metriken bezüglich der totalen Skalarkrümmung noch eine Nebenbedingung ein, schränkt man nämlich die Suche auf eine konforme Klasse von Metriken ein, dann sind die Metriken konstanter Skalarkrümmung genau die kritischen Metriken. Die Existenzfrage für diese kritischen Metriken ist das bekannte Yamabe-Problem. Neben der totalen Skalarkrümmung können auch die Integrale über das Normquadrat von Krümmungstensor, Ricci-Tensor oder Weyl-Tensor variiert werden, um unter anderem Einsteinmetriken zu finden; siehe hierzu [Be2, Chapter 4H].
Nun beruhen alle genannten Funktionale auf *lokalen* Daten der Geometrie (der Krümmung nämlich), während in der weiter oben genannten Arbeit von B. Osgood, R. Phillips und P. Sarnak [OPS] mit der Determinante des Laplace-Operators erstmalig ein Funktional auf

dem Raum der Riemannschen Metriken einer Mannigfaltigkeit auf Extrempunkte untersucht wird, das vom gesamten Spektrum des Laplace-Operators abhängt, also gewissermassen von *globalen* Daten; genauer gesagt, ist die Determinante des Laplace-Operators ein *semilokales* Funktional, weil die Variation bezüglich der Metrik wieder lokale Ausdrücke liefert. Kritische Metriken bezüglich der Determinanten von Laplace-Operatoren, der analytischen Ray-Singer-Torsion oder der Quillenmetrik, wie sie in dieser Arbeit gesucht werden, können daher insbesondere weiteren Aufschluß über den Zusammenhang zwischen spektralen und geometrischen Daten geben.

Ich habe meine Arbeit in drei große Teile gegliedert:
Im ersten Teil mit dem Titel **Allgemeine Vorbemerkungen** findet man die Definitionen derjenigen mathematischen Begriffe, die in der gesamten Arbeit verwendet werden. In gewisser Weise ist dies ein Grundwortschatz, der für jemanden, der mit der Materie vertraut ist, nichts Neues enthalten wird. Die im ersten Abschnitt zusammengestellten Rechnungen sind alle elementar, aber schon allein zur Vereinheitlichung von Vorzeichen- und Normierungskonventionen notwendig. Wen der erste Abschnitt also langweilt, der kann ihn getrost überschlagen; in den folgenden Kapiteln gibt es genügend Querverweise, um im Zweifelsfall auch zurückblättern zu können.
Der zweite Teil enthält, wie sein Titel schon sagt, **mathematische Ergebnisse**. Dies sind zum einen meine eigenen Resultate, zum andern aber auch zusammenfassende Darstellungen bereits bekannter Ergebnisse, die das Gesamtbild abrunden sollen.
Der dritte Teil meiner Arbeit, **Anwendungen in der theoretischen Physik**, soll schlaglichtartig aufzeigen, welche Rolle die Regularisierung von Determinanten in verschiedenen Bereichen der theoretischen Physik spielt. Hierbei handelt es sich bis auf zusätzliche Verifikationen um eine reine Literaturarbeit.

Im einzelnen ist die Arbeit wie folgt aufgebaut:
Kapitel 1 dient der Einführung von Notationen und Konventionen für Rechnungen in lokalen holomorphen Koordinaten, z.B. der Darstellung von Metrik und Differentialformen bezüglich solcher Koordinaten, sowie der Definition des für meine Arbeit zentralen Operators, des *Dolbeaut-Laplace-Operators*.
In **Kapitel 2** liegt das Hauptgewicht auf differentialgeometrischen Aspekten. Neben den Definitionen der speziellen Mannigfaltigkeiten, auf denen später die analytische Ray-Singer-Torsion und die Quillenmetrik studiert werden sollen, findet man hier erste Rechnungen mit *Krümmungstensoren* und *Chernklassen*.
Kapitel 3 enthält die Definitionen der *mit Hilfe von Zetafunktionen regularisierten Determinanten*, der *analytischen Ray-Singer-Torsion* sowie der *Quillenmetrik*. Mit Ausnahme des Kapitels über Determinantenbündel (Kapitel 3.3) habe ich die *Allgemeinen Vorbemerkungen* sehr ausführlich dargestellt (wem diese Grundlagen schon vertraut sind, der sollte den ersten Abschnitt ja ohnehin überschlagen).
Die bekannten Ergebnisse zum Verhalten des Laplace-Operators auf *Riemannschen Flächen* habe ich in **Kapitel 4** aufgeführt. Sie dienen auch als Motivation für das weitere

Vorgehen.
In **Kapitel 5** geht es um das Verhalten der Determinante des Laplace-Operators unter *konformer Variation* der Metrik; Kapitel 5.1 enthält die erste Verallgemeinerung der in Kapitel 4 zitierten Ergebnisse, nämlich auf nichtkompakte Riemannsche Flächen, während in Kapitel 5.2 die bekannten Ergebnisse für kompakte Mannigfaltigkeiten höherer Dimensionen zusammengestellt sind.
Kapitel 6 ist das längste Kapitel; mit dem Verhalten der analytischen Ray-Singer-Torsion und der Quillenmetrik unter *Variation der Metrik innerhalb der Kählerklasse* habe ich mich auch am intensivsten auseinandergesetzt. Konkret studiere ich dieses Verhalten auf *geschlossenen Riemannschen Flächen* (Kapitel 6.3), *Mannigfaltigkeiten mit konstanter holomorpher Krümmung* (Kapitel 6.4), *komplexen Tori* (Kapitel 6.8) sowie *kompakten $K3$-Flächen* (Kapitel 6.9). Dabei verwende ich zum Teil die schon bekannte Anomalienformel (Kapitel 6.2 bis 6.4), kann aber für einige Mannigfaltigkeiten, nämlich die *Zwimannigfaltigkeiten* (Kapitel 6.6 und 6.7), auf elementarem Wege eine eigene Formel für die Variation der analytischen Ray-Singer-Torsion in Spezialfällen herleiten. Die Ergebnisse dieses sechsten Kapitels führen auch zu einer Beurteilung, ob analytische Ray-Singer-Torsion oder Quillenmetrik das geeignetere Funktional für eine Variation darstellt.
Die Quillenmetrik kann auch für Familien von Dolbeaut-Dirac-Operatoren auf Formen mit Werten in holomorphen Bündeln definiert werden. Für den Fall, daß diese holomorphen Bündel Tensorprodukte aus speziellen *amplen Linienbündeln* sind, studiere ich die Quillenmetrik unter Variation der Metrik auf der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit in **Kapitel 7**.
Kapitel 8 enthält einen Abriß über die Theorie der *Pfadintegrale* mit Hauptgewicht auf denjenigen Gebieten, in denen regularisierte Determinanten eine Rolle spielen.
In **Kapitel 9** schließlich sind – wiederum eher schlaglichtartig – Anwendungen der analytischen Ray-Singer-Torsion in der theoretischen Physik erläutert. Vor allem die Zusammenhänge mit der *Stringtheorie* (Kapitel 9.2) berühren aktuelle Probleme, die bis dato nicht in voller Allgemeinheit verstanden sind.

Ich habe Sätze, Lemmata, Korollare und Definitionen in jedem Unterkapitel durchgängig numeriert, ebenso die Gleichungen, allerdings mit einem unabhängigen Zähler. Deswegen gibt es ein Lemma 1.1.1 sowie eine Gleichung (1.1.1), es sollten aber keine Verwechslungen auftreten, da Klammern konsequent nur um die Gleichungsnummern gesetzt wurden.

Allgemeine Vorbemerkungen

In diesem ersten Abschnitt meiner Arbeit sind zum einen die grundlegenden Definitionen zusammengestellt, die ich innerhalb der Arbeit verwende, zum anderen finden sich hier technische Vorbereitungen: Die Rechnungen, welche in den beiden folgenden Abschnitten der Arbeit dargestellt sind, müssen nämlich zum Teil in lokalen Koordinaten ausgeführt werden. Einzelne Bausteine solcher Rechnungen habe ich –soweit möglich– in den ersten Abschnitt der Arbeit verbannt: Bei den eigentlichen Rechnungen reduziert sich dadurch die Indexdichte.

1 Rechnungen in lokalen holomorphen Koordinaten

1.1 Differentialformen und Metriken auf komplexen Mannigfaltigkeiten

Sei X eine komplexe Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\dim_{\mathbb{C}} X = N$, mit Hermitescher Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle = g$. $\Lambda^{p,q}(T^*X)$ bezeichnet dann die **Garbe der komplexen C^∞-Formen auf X vom Typ (p,q)**.
Auf $\Lambda^{p,q}(T^*X)$ wird nun durch die Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle$ von X in kanonischer Weise eine **Metrik** induziert, die ebenfalls mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezeichnet wird [GH, p.80]: Ist $(\varphi^1,...,\varphi^N)$ ein orthonormaler Korahmen für die Metrik auf X ($\varphi^i \in \Lambda^{1,0}(T^*X)$ für $i = 1,...,N$, und der zu $(\varphi^1,...,\varphi^N)$ duale Rahmen ist orthonormal), und setzt man für $I = \{i_1,...,i_p\} \subset \{1,...,N\}$ mit $i_1 < \cdots < i_p$ abkürzend $\varphi^I := \varphi^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^{i_p}$ etc., dann soll $\left\{\varphi^I(z) \wedge \overline{\varphi}^J(z)\right\}_{\substack{\#I=p \\ \#J=q}}$ orthogonal sein bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $\|\varphi^I \wedge \overline{\varphi}^J\|^2 = 2^{p+q}$.
Bei Rechnungen in lokalen holomorphen Koordinaten $(z^1,...,z^N)$ schreibe ich für eine Indexmenge $A = \{a_1,...,a_m\} \subset \{1,...,N\}$ mit $a_1 < \cdots < a_m$ im folgenden immer $dz^A := dz^{a_1} \wedge \cdots \wedge dz^{a_m}$ etc.
In Koordinaten berechnet man nun die Metrik folgendermaßen:

Lemma 1.1.1
Sei X eine komplexe Riemannsche Mannigfaltigkeit, $N = \dim_{\mathbb{C}} X$, mit Hermitescher Metrik $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$. Bezüglich lokaler holomorpher Koordinaten $(z^1,...,z^N)$ läßt sich die auf $\oplus_{p,q}\Lambda^{p,q}(T^*X)$ induzierte Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle$ wie folgt schreiben:
Definiere $g_{i\bar{j}} := \left\langle \frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}\right\rangle$ und $g^{i\bar{j}}$ mit $\sum_{i=1}^N g^{i\bar{j}} g_{i\bar{k}} = \delta_{jk} = \sum_{i=1}^N g^{j\bar{i}} g_{k\bar{i}}$ (g ist Hermitesch!);
für $K, L \subset \{1,...,N\}$ sei $g^{KL} := \begin{cases} \det\left(g^{k\bar{l}}\right)_{\substack{k\in K \\ l\in L}} & \text{falls } \#K = \#L \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Dann gilt für $I, J, K, L \subset \{1,...,N\}$:

$$\left\langle dz^I \wedge d\bar{z}^J, dz^K \wedge d\bar{z}^L \right\rangle = 2^{\#I+\#K} g^{IK} \overline{g^{JL}} \quad .$$

Beweis:
Falls $\#I \neq \#K$ oder $\#J \neq \#L$, steht nach Konstruktion von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf beiden Seiten der zu beweisenden Gleichung 0; sei jetzt $\#I = \#K$ und $\#J = \#L$.
Nach Konstruktion von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und wegen der Hermitezität des Skalarproduktes gilt:

$$\left\langle dz^I \wedge d\bar{z}^J, dz^K \wedge d\bar{z}^L \right\rangle = \left\langle dz^I, dz^K \right\rangle \cdot \overline{\langle dz^J, dz^L \rangle} \quad ,$$

so daß es genügt, die Behauptung für $J = L = \emptyset$ zu zeigen.
Sei nun wieder $(\varphi^1, ..., \varphi^N)$ ein orthonormaler Korahmen bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$, d.h. der dazu duale Rahmen $(v_1, ..., v_N)$ ist orthonormal bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ mit $v_i \in T^{1,0}X$ für $i = 1, ..., N$.

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \sum_{k=1}^{N} h_i^k v_k \quad \Rightarrow \quad g_{i\bar{j}} = \left\langle \frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j} \right\rangle = \sum_{k,l} h_i^k \overline{h_j^l} \, \langle v_k, v_l \rangle = \sum_{k=1}^{N} h_i^k \overline{h_j^k} \tag{1.1.1}$$

$$dz^i = \sum_{k=1}^{N} h^i{}_k \varphi^k \quad \Rightarrow \quad \delta_{ij} = dz^i \left(\frac{\partial}{\partial z^j} \right) = \sum_{k,l} h^i{}_k h_j^l \, \varphi^k(v_l) = \sum_{k=1}^{N} h^i{}_k h_j^k \quad , \tag{1.1.2}$$

$$\left\langle dz^i, dz^j \right\rangle = \sum_{l,m} h^i{}_l \overline{h^j{}_m} \left\langle \varphi^l, \varphi^m \right\rangle = 2 \sum_{l=1}^{N} h^i{}_l \overline{h^j{}_l} \tag{1.1.3}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{N} \left\langle dz^i, dz^j \right\rangle \, g_{i\bar{k}} \quad &\overset{(1.1.1),(1.1.3)}{=} \quad 2 \sum_{i,l,m} h^i{}_l \overline{h^j{}_l} h_i^m \overline{h_k^m} \\ &\overset{(1.1.2)}{=} \quad 2 \sum_{l=1}^{N} \overline{h^j{}_l \, h_k^l} \overset{(1.1.2)}{=} 2\delta_{jk} \\ \Rightarrow \quad \left\langle dz^i, dz^j \right\rangle = 2 g^{i\bar{j}} \quad . \end{aligned}$$

Für $\#I = \#K = 1$ ist die Behauptung damit bewiesen, für $\#I = \#K$ mit $\#I, \#K > 1$ folgt sie daraus induktiv mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes. □

Innerhalb der gesamten Arbeit wird die zu einer Hermiteschen Metrik g **assoziierte** $(1,1)$**-Form** mit ω bezeichnet, d.h. ω ist das $(-1/2)$-fache des Imaginärteiles von g. Alle Mannigfaltigkeiten werden im folgenden als orientiert vorausgesetzt, und μ bezeichnet stets die **Volumenform** zur Metrik g. Es gilt $\mu = \frac{\omega^N}{N!}$ [GH, p.80].

Bemerkung 1.1.2
Für jeden orthonormalen Korahmen $(\varphi^1, ..., \varphi^N)$ zu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ gilt (nach obiger Definition von ω ist $\omega = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{N} \varphi^j \wedge \overline{\varphi}^j$ [GH, p.29])

$$\mu = \left(\frac{i}{2} \right)^N \varphi^1 \wedge \overline{\varphi}^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^N \wedge \overline{\varphi}^N \quad . \tag{i}$$

Daraus folgt sofort

$$\forall\, z \in X : \qquad \det \mu(z) = \langle \mu(z), \mu(z) \rangle = 1 \quad , \tag{ii}$$

denn mit $\varphi^j = d\xi^j + i\,d\eta^j$ rechnet man nach:

$$\varphi^j \wedge \overline{\varphi}^j = \left(d\xi^j + i\,d\eta^j\right) \wedge \left(d\xi^j - i\,d\eta^j\right) = -2i\left(d\xi^j \wedge d\eta^j\right), \quad \det\left(d\xi^j \wedge d\eta^j\right) = 1 \quad .$$

Bezüglich lokaler holomorpher Koordinaten $(z^1, ..., z^N)$ ist $\omega = \frac{i}{2}\sum_{j,k} g_{j\bar{k}} dz^j \wedge d\bar{z}^k$, so daß gilt ($\mathcal{S}_N$ sei die Gruppe der Permutationen von $\{1, ..., N\}$):

$$\begin{aligned}
\mu &= \left(\frac{i}{2}\right)^N \frac{1}{N!} \sum_{\sigma,\tau\in\mathcal{S}_N} g_{\sigma(1)\overline{\tau(1)}} \cdots g_{\sigma(N)\overline{\tau(N)}}\, dz^{\sigma(1)} \wedge d\bar{z}^{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge dz^{\sigma(N)} \wedge d\bar{z}^{\tau(N)} \\
&= \left(\frac{i}{2}\right)^N \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_N} g_{\sigma(1)\bar{1}} \cdots g_{\sigma(N)\bar{N}}\, dz^{\sigma(1)} \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge dz^{\sigma(N)} \wedge d\bar{z}^N \\
&= \left(\frac{i}{2}\right)^N \det(g_{a\bar{b}})\, dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge dz^N \wedge d\bar{z}^N \\
\mu &= \left(\frac{i}{2}\right)^N (-1)^{N(N-1)/2} \det(g_{a\bar{b}})\, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^N \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^N \quad .
\end{aligned} \tag{iii}$$

Zusammen mit (ii) ergibt dies:

$$\det\left(dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^N \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^N\right) = \left(\det(g_{a\bar{b}})\right)^{-1} (-1)^{N(N-1)/2} \left(\frac{2}{i}\right)^N \quad . \tag{iv}$$

Im Zusammenhang mit der Krümmungsform auf *Kähler-Mannigfaltigkeiten* benötige ich das folgende Ergebnis:

Lemma 1.1.3
Sei (X, g) eine komplex N-dimensionale Kähler-Mannigfaltigkeit (d.h. die zu g assoziierte $(1,1)$-Form ω ist geschlossen) mit metrischem Zusammenhang. Ω bezeichne die Krümmungsform, r der Riccitensor und μ die Volumenform auf X. Dann gilt:

$$\Omega \wedge \omega^{N-1} = -2i(N-1)!\, r\, \mu \qquad \Big(\in \mathrm{End}(TX) \otimes \Lambda^{N,N}(T^*X) \Big) \quad .$$

<u>Beweis:</u>
Auf X sei ein orthonormaler Korahmen $(\varphi^1, ..., \varphi^N)$ zu g gewählt. Dann gilt nach Definition $\omega = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^N \varphi^j \wedge \overline{\varphi}^j$ und

$$\omega^{N-1} = \left(\frac{i}{2}\right)^{N-1} (N-1)! \sum_{j=1}^{N} \varphi^1 \wedge \overline{\varphi}^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\varphi^j} \wedge \widehat{\overline{\varphi}^j} \wedge \cdots \wedge \varphi^N \wedge \overline{\varphi}^N \quad ,$$

wobei die Terme mit Hut ihren Hut genommen haben, also weggelassen sind. Wählt man außerdem noch lokale holomorphe Koordinaten $(z^1, ..., z^N)$, dann besitzt die Komponente $\Omega^j_{\ k}$ der Krümmungsform bezüglich dieser Koordinaten eine Darstellung $\Omega^j_{\ k} =$

$\sum_{l,m} \alpha^j{}_{kl\bar{m}} \varphi^l \wedge \overline{\varphi}^m$. Damit erhält man ($R$ bezeichnet den Riemannschen Krümmungstensor zu g)

$$
\begin{aligned}
\Omega^j{}_k \wedge \omega^{N-1} &= \left(\frac{i}{2}\right)^{N-1} (N-1)! \sum_{l=1}^{N} \alpha^j{}_{kl\bar{l}}\, \varphi^1 \wedge \overline{\varphi}^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^N \wedge \overline{\varphi}^N \\
&\overset{\substack{\text{Bemerkung}\\ \text{1.1.2 (i)}}}{=} \frac{2}{i}(N-1)! \sum_{l=1}^{N} \alpha^j{}_{kl\bar{l}}\, \mu \\
&\overset{\substack{\text{Lemma}\\ \text{1.1.1}}}{=} (N-1)! \left\langle \Omega^j{}_k, \omega \right\rangle \mu \\
&\overset{\text{[Go, (5.3.34)]}}{=} -(N-1)! \sum_{l,m,p,q} R^j{}_{kl\bar{m}} \left(-\frac{i}{2} g_{q\bar{p}}\right) \left\langle dz^l \wedge d\bar{z}^m, dz^p \wedge d\bar{z}^q \right\rangle \mu \\
&\overset{\substack{\text{Lemma}\\ \text{1.1.1}}}{=} 2i(N-1)!\, R^j{}_{kl\bar{m}} g^{l\bar{m}} \mu \\
&= 2i(N-1)!\, g^{l\bar{m}} g^{j\bar{n}} R_{\bar{n}kl\bar{m}}\, \mu \\
&\overset{\text{[Go, (5.3.41)]}}{=} 2i(N-1)!\, g^{j\bar{n}} R^l{}_{lk\bar{n}}\, \mu \\
&\overset{\text{[Go, (5.3.35)]}}{=} -2i(N-1)!\, r^j{}_k \mu \quad .
\end{aligned}
$$

□

Definition 1.1.4
Der **Hodge-Operator** $* : \Lambda^{p,q}(T^*X) \longrightarrow \Lambda^{N-p,N-q}(T^*X)$ *ist folgendermaßen definiert* [GH, p.80]*:*

$$\forall\, \nu, \nu' \in \Lambda^{p,q}(T^*X), \forall\, z \in X : \quad \nu(z) \wedge *\nu'(z) = \langle \nu(z), \nu'(z) \rangle\, \mu(z) \quad .$$

Um die Beschreibung des Hodge-Operators in lokalen holomorphen Koordinaten zu vereinfachen, führe ich noch folgende Notationen ein:
Zu $K \subset \{1, ..., N\}$ definiere ich $K_0 := \{1, ..., N\} - K$.
Außerdem: Für $K \subset \{1, ..., N\}, K' \subset \{1', ..., N'\}$ sei $\varepsilon_{KK'} := \operatorname{sign} \begin{pmatrix} 1 \cdots N & 1' \cdots N' \\ K_0 \quad K_0' & K \quad K' \end{pmatrix}$.

Lemma 1.1.5
Sei X eine komplexe Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension N mit Hermitescher Metrik $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Bezüglich lokaler holomorpher Koordinaten $(z^1, ..., z^N)$ gilt für jede Funktion f auf X und für $A, B \subset \{1, ..., N\}$ mit $p := \#A, q := \#B$:

$$* \left(f\, dz^A \wedge d\bar{z}^B\right) = (-1)^N i^{N^2} 2^{p+q-N} \det(g_{a\bar{b}})\, \bar{f} \sum_{\substack{\#I=N-p\\ \#J=N-q}} \varepsilon_{IJ}\, g^{I_0 A}\, \overline{g^{J_0 B}}\, dz^I \wedge d\bar{z}^J \quad .$$

Beweis:
Mit dem Ansatz

$$*\left(f\, dz^A \wedge d\bar{z}^B\right) = \sum_{\substack{\#I=N-p\\ \#J=N-q}} h_{IJ}\, dz^I \wedge d\bar{z}^J$$

folgt für fest gewählte Mengen $I, J \subset \{1, ..., N\}$ mit $\#I = N-p, \#J = N-q$:

$$h_{IJ}\, \varepsilon_{IJ}\, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^N \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^N = \left(dz^{I_0} \wedge d\bar{z}^{J_0}\right) \wedge * \left(f\, dz^A \wedge d\bar{z}^B\right) \;;$$

bildet man auf beiden Seiten die Determinante, so erhält man mit Bemerkung 1.1.2 (iv):

$$\begin{aligned}
&h_{IJ}\, \varepsilon_{IJ}\, (\det(g_{a\bar{b}}))^{-1}\, (-1)^{N(N-1)/2} \left(\frac{2}{i}\right)^N \\
&\quad = \det\left(\left(dz^{I_0} \wedge d\bar{z}^{J_0}\right) \wedge * \left(f\, dz^A \wedge d\bar{z}^B\right)\right) \\
&\quad \overset{\text{Def. 1.1.4, Bem. 1.1.2 (ii)}}{=} \left\langle dz^{I_0} \wedge d\bar{z}^{J_0}, f\, dz^A \wedge d\bar{z}^B \right\rangle \\
&\quad \overset{\text{Lemma 1.1.1}}{=} 2^{p+q}\, \bar{f}\, g^{I_0 A}\, \overline{g^{J_0 B}} \quad .
\end{aligned}$$

Wegen $(-1)^{N(N-1)/2} = i^{N^2-N}$ folgt daraus die Behauptung. □

Durch Einsetzen und mit Hilfe der Cramer'schen Regel rechnet man sofort nach:

Korollar 1.1.6

Ist X eine zweidimensionale komplexe Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann gilt bezüglich lokaler holomorpher Koordinaten (z^1, z^2) für jede Funktion f auf X:

$$\begin{aligned}
*(f) &= \frac{\bar{f}}{4} \det(g_{a\bar{b}}) dz^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar{z}^1 \wedge d\bar{z}^2 \\
*(f\, d\bar{z}^1) &= \frac{\bar{f}}{2} \det(g_{a\bar{b}}) \left(-g^{1\bar{2}} d\bar{z}^1 + g^{1\bar{1}} d\bar{z}^2\right) \wedge dz^1 \wedge dz^2 \\
&= \frac{\bar{f}}{2} \left(g_{2\bar{1}} d\bar{z}^1 + g_{2\bar{2}} d\bar{z}^2\right) \wedge dz^1 \wedge dz^2 \\
*(f\, d\bar{z}^2) &= \frac{\bar{f}}{2} \det(g_{a\bar{b}}) \left(-g^{2\bar{2}} d\bar{z}^1 + g^{2\bar{1}} d\bar{z}^2\right) \wedge dz^1 \wedge dz^2 \\
&= \frac{\bar{f}}{2} \left(-g_{1\bar{1}} d\bar{z}^1 - g_{1\bar{2}} d\bar{z}^2\right) \wedge dz^1 \wedge dz^2 \\
*(f\, d\bar{z}^1 \wedge d\bar{z}^2) &= \bar{f}\, dz^1 \wedge dz^2 \\
*(f\, dz^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar{z}^1) &= 2\bar{f}\, \left(-g^{1\bar{2}} d\bar{z}^1 + g^{1\bar{1}} d\bar{z}^2\right) \\
*(f\, dz^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar{z}^2) &= 2\bar{f}\, \left(-g^{2\bar{2}} d\bar{z}^1 + g^{2\bar{1}} d\bar{z}^2\right) \\
*(f\, dz^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar{z}^1 \wedge d\bar{z}^2) &= 4\bar{f}\, (\det(g_{a\bar{b}}))^{-1} \quad .
\end{aligned}$$

Lemma 1.1.7
Sei X eine komplexe Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\dim_{\mathbb{C}} X = N$, mit Hermitescher Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dann gilt:

i. $\forall\, \nu, \nu' \in \Lambda^{p,0}(T^*X), \forall\, \xi \in \Lambda^{0,N}(T^*X): \quad \langle \nu \wedge \xi, \nu' \wedge \xi \rangle = \langle \nu, \nu' \rangle \, \|\xi\|^2$,

ii. $\forall\, \nu, \nu' \in \Lambda^{p,q}(T^*X): \quad \langle *\nu, *\nu' \rangle = \langle \overline{\nu}, \overline{\nu}' \rangle$,

iii. N *gerade* $\Rightarrow \quad \forall\, \nu \in \Lambda^{0,N}(T^*X): \quad \nu = \overline{*\nu}$.

<u>Beweis:</u>

i. Folgt unmittelbar aus der Definition der Metrik auf $\Lambda^{p,q}(T^*X)$.

ii. Nach Definition 1.1.4 gilt:

$$\begin{aligned}
&\forall\, \nu, \nu' \in \Lambda^{p,q}(T^*X): \\
&\qquad \langle *\nu, *\nu' \rangle \;\mu &=&\; *\nu \wedge *^2 \nu' \\
&&\overset{\text{[GH, p.82]}}{=}&\; (-1)^{p+q} \; * \nu \wedge \nu' \\
&&=&\; (-1)^{p+q+(p+q)(2N-p-q)} \; \nu' \wedge *\nu \\
&&=&\; (-1)^{(p+q)(1+p+q)} \; \langle \nu', \nu \rangle \;\mu \\
&&=&\; \langle \overline{\nu}, \overline{\nu}' \rangle \;\mu \quad .
\end{aligned}$$

iii. Sei wieder $(\varphi^1, ..., \varphi^N)$ ein orthonormaler Korahmen bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$, dann gilt mit $\nu = a\,\overline{\varphi}^1 \wedge \cdots \wedge \overline{\varphi}^N \in \Lambda^{0,N}(T^*X)$ nach Definition 1.1.4:

$$\begin{aligned}
&\forall\, \nu' = a'\overline{\varphi}^1 \wedge \cdots \wedge \overline{\varphi}^N \in \Lambda^{0,N}(T^*X): \\
&\qquad \nu' \wedge *\nu &=&\; \langle \nu', \nu \rangle \;\mu \\
&&\overset{\text{Bem. 1.1.2 (i)}}{=}&\; i^N (-1)^{N(N+1)/2} \overline{a}\, a' \;\overline{\varphi}^1 \wedge \cdots \overline{\varphi}^N \wedge \varphi^1 \wedge \cdots \wedge \varphi^N \\
&&=&\; i^{N(N+2)} \nu' \wedge \overline{\nu} \\
&\overset{N \text{ gerade}}{\Rightarrow} \quad \nu &=&\; \overline{*\nu} \quad .
\end{aligned}$$

□

1.2 Definition des Dolbeaut-Laplace-Operators

Sei nun (X, g) mit $\dim_{\mathbb{C}} X = N$ eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit und $E \longrightarrow X$ ein holomorphes Hermitesches Vektorbündel; $\Lambda^{p,q}(X,E) := E \otimes \Lambda^{p,q}(T^*X)$ bezeichnet die **Garbe der komplexen C^∞-Formen auf X vom Typ (p,q) mit Werten in E**. Wie zuvor induziert die Hermitesche Metrik g von X eine Metrik auf $\Lambda^{p,q}(T^*X)$, und durch Multiplikation mit der Metrik von E erhält man in kanonischer Weise eine Metrik g auf $\Lambda^{p,q}(X,E)$.

Das äußere Differential d auf $\Lambda^{p,q}(X,E)$ spaltet auf:
$d = \partial + \overline{\partial}$ mit $\partial : \Lambda^{p,q}(X,E) \longrightarrow \Lambda^{p+1,q}(X,E)$, $\quad \overline{\partial} : \Lambda^{p,q}(X,E) \longrightarrow \Lambda^{p,q+1}(X,E)$; weil E ein holomorphes Bündel ist, gilt $\overline{\partial}^2 = 0$, so daß mittels $\overline{\partial}$ die **Dolbeaut-Kohomologie** definiert werden kann:

$$H^{p,q}(X,E) = H^{p,q}_{\overline{\partial}}(X,E) := \ker\left(\overline{\partial} : \Lambda^{p,q}(X,E) \longrightarrow \Lambda^{p,q+1}(X,E)\right) / \overline{\partial}\Lambda^{p,q-1}(X,E).$$

Der zu d bezüglich der induzierten Metrik adjungierte Operator wird mit d^* bezeichnet. Weil E Hermitesch und holomorph ist, gilt $\partial^* + \overline{\partial}^* = d^* = - * d *$ [Wel, Prop.V.2.4], woraus man

$$\partial^* = - * \partial * \;\text{ und }\; \overline{\partial}^* = - * \overline{\partial} * \qquad (1.2.1)$$

abliest. Zur Dolbeaut-Kohomologie gehört der **Dolbeaut-Laplace-Operator** $\Delta_{\overline{\partial}}$, der auf $\Lambda^{p,q}(X,E)$ durch $\Delta_{p,q} := \left(\overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\,\overline{\partial}\right)_{|\Lambda^{p,q}(X,E)}$ definiert ist.
Weil X Kähler ist, besteht ein enger Zusammenhang zwischen der eben beschriebenen Dolbeaut-Kohomologie und der **de Rham-Kohomologie**

$$H^r_d(X,E) := \ker\left(d : \Lambda^r(X,E) \longrightarrow \Lambda^{r+1}(X,E)\right) / d\Lambda^{r-1}(X,E) \quad .$$

Für den zur de Rham-Kohomologie gehörigen **de Rham-Laplace-Operator** Δ_d gilt dann nämlich $\Delta_d = 2\Delta_{\overline{\partial}}$ [Wel, Theorem 3.7], woraus mit $\Delta_r := (dd^* + d^*d)_{|\Lambda^r(X,E)}$ sofort $\ker(\Delta_r) \cong \oplus_{p+q=r} \ker(\Delta_{p,q})$ und damit unter Verwendung der kanonischen Isomorphismen $\ker(\Delta_r) \cong H^r_d(X,E)$ und $\ker(\Delta_{p,q}) \cong H^{p,q}_d(X,E)$ [Wel, Theorem IV.5.2] die **Hodge-Zerlegung** folgt [Wel, Theorem V.4.1]:

$$H^r_d(X,E) \cong \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}_{\overline{\partial}}(X,E).$$

Bei Rechnungen in lokalen holomorphen Koordinaten $(z^1, ..., z^N)$ verwende ich folgende abkürzende Schreibweise: Ist f eine Funktion auf X, so ist $f_j := \frac{\partial f}{\partial z^j}$, $f_{\bar{j}} := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j}$ etc. Hat die abzuleitende Funktion Indizes, so werden die „Ableitungsindizes" von diesen durch ein Semikolon getrennt (siehe z.B. (1.2.2)).

Satz 1.2.1
Sei X eine komplexe N-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Kählermetrik g. Bezüglich lokaler holomorpher Koordinaten $(z^1, ..., z^N)$ gilt dann auf $\Lambda^{0,0}(T^*X)$:

$$\Delta_{0,0} = -2 \sum_{j,k} g^{j\bar{k}} \frac{\partial^2}{\partial z^j \partial \bar{z}^k} \quad .$$

Beweis:
Weil $g = (g_{j\bar{k}})$ eine Kählermetrik ist, gilt:

$$g_{j\bar{k};l} = g_{l\bar{k};j} \quad , \qquad (1.2.2)$$

wie man unmittelbar aus der Geschlossenheit der Kählerform folgern kann.
Weiter gilt wegen $\sum_{j=1}^N g^{j\bar{k}} g_{j\bar{m}} = \delta_{km}$:

$$g^{l\bar{k}}{}_{;n} = \sum_{j,m} g^{j\bar{k}}{}_{;n} g_{j\bar{m}}\, g^{l\bar{m}} = -\sum_{j,m} g^{j\bar{k}} g_{j\bar{m}\,;\,n}\, g^{l\bar{m}} \quad .$$

Daraus ergibt sich mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial z^j}\Big(g^{j\bar{k}} \det(g_{a\bar{b}})\Big) \quad &= \quad \sum_{l=1}^N g^{l\bar{k}}{}_{;\,l} \det(g_{a\bar{b}}) + \sum_{j,l,m} g^{j\bar{k}} \frac{\partial\,(\det(g_{a\bar{b}}))}{\partial g_{l\bar{m}}} g_{l\bar{m}\,;j} \\
&= \quad \sum_{j,l,m} \Big(-g^{j\bar{k}} g_{j\bar{m}\,;\,l}\, g^{l\bar{m}} \det(g_{a\bar{b}}) + g^{j\bar{k}} \det(g_{a\bar{b}}) g^{l\bar{m}} g_{l\bar{m}\,;j}\Big) \\
&\overset{(1.2.2)}{=} \quad 0 \quad . \qquad (1.2.3)
\end{aligned}$$

Seien nun f und h beliebige Funktionen auf X. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_X \langle \Delta_{0,0} f, h\rangle\; \mu \quad &= \quad \int_X \Big\langle \overline{\partial} f, \overline{\partial} h\Big\rangle\; \mu \\
&= \quad \int_X \sum_{j,k} \Big\langle f_{\bar{k}}\, d\bar{z}^k, h_{\bar{j}}\, d\bar{z}^j\Big\rangle\; \mu \\
&\overset{\substack{\text{Lemma 1.1.1 ,}\\ \text{Bem. 1.1.2 (iii)}}}{=} \quad \int_X \sum_{j,k} 2 f_{\bar{k}}\, \overline{h_{\bar{j}}}\, \overline{g^{k\bar{j}}}\, \frac{i^{N^2}}{2^N} \det(g_{a\bar{b}})\, dz^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^N \\
&\overset{\substack{\text{Satz von}\\ \text{Stokes}}}{=} \quad -\int_X 2 \sum_{j,k} \Bigg(f_{j\bar{k}}\, g^{j\bar{k}} \det(g_{a\bar{b}}) \\
&\qquad\qquad + f_{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial z^j}\Big(g^{j\bar{k}} \det(g_{a\bar{b}})\Big)\Bigg)\; \overline{h}\; \frac{i^{N^2}}{2^N}\, dz^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^N \\
&\overset{\substack{\text{Bem. 1.1.2 (iii),}\\ (1.2.3)}}{=} \quad -\int_X \Bigg(2 \sum_{j,k} g^{j\bar{k}}\, f_{j\bar{k}}\, \overline{h}\Bigg)\; \mu \\
&= \quad \int_X \Bigg\langle -2 \sum_{j,k} g^{j\bar{k}} f_{j\bar{k}}, h\Bigg\rangle\; \mu \quad .
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. $\square$

1.3 Variation einer Kählermetrik innerhalb der Kählerklasse

In der gesamten Arbeit wird die Variation der Kählermetrik innerhalb der Kählerklasse folgendermaßen durchgeführt:

Definition 1.3.1
Sei g eine Kählermetrik auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit X und ω die zugehörige Kählerform. Mit φ soll im Zusammenhang mit Variationen der Metrik innerhalb der Kählerklasse stets eine Funktion aus $C^\infty(X, \mathbb{R})$ bezeichnet werden, die folgende Eigenschaft hat:

$$\textit{Für jedes } \varepsilon \in [-1,1] \textit{ ist } \omega^\varepsilon := \omega + \frac{i\varepsilon}{2}\,\partial\overline{\partial}\varphi \textit{ Kählerform einer Kählermetrik } g^\varepsilon. \tag{1.3.1}$$

*Die so durch φ definierte Familie g^ε von Kählermetriken heißt **φ-Variation von g**.*

Bemerkung 1.3.2

i. Jede φ-Variation ist offenbar eine **Variation der Kählermetrik innerhalb einer festen Kählerklasse**: Ist nämlich g^ε eine φ-Variation, so folgt in $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$:

$$\left[\omega^\varepsilon\right] = \left[\omega + \frac{i\varepsilon}{2}\,\partial\overline{\partial}\varphi\right] = \left[\omega - \frac{i\varepsilon}{4}\left(\partial + \overline{\partial}\right)\left(\partial - \overline{\partial}\right)\varphi\right] = \left[\omega\right] \quad .$$

Umgekehrt gehört jede Metrik in der Kählerklasse von g zu einer φ-Variation g^ε von g, wie sofort aus dem Hodge-Theorem folgt (siehe z.B. [GH, p.116]).

ii. Es läßt sich recht leicht zeigen, unter welchen Voraussetzungen $\varphi \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ bei gegebener Metrik g die Bedingung (1.3.1) erfüllt:

Mit ω genügt offenbar auch ω^ε der Kählerbedingung $d\omega^\varepsilon = 0$. $\varphi \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ muß also lediglich so gewählt werden, daß g^ε für alle $\varepsilon \in [-1,1]$ positiv definit ist.

g^ε ist nach Definition Hermitesch und daher positiv definit genau dann, wenn nach Wahl lokaler holomorpher Koordinaten $(z^1, ..., z^N)$ auf X für alle $\varepsilon \in [-1,1]$ jeder Hauptminor der Matrix $(g^\varepsilon_{j\bar{k}})_{jk} = (g_{j\bar{k}} + \varepsilon\varphi_{j\bar{k}})_{jk}$ positiv ist, also

$$\forall\, m \in \{1, ..., N\}, \forall\, \varepsilon \in [-1,1]: \ \det\left(g_{j\bar{k}} + \varepsilon\varphi_{j\bar{k}}\right)_{j,k\leq m} > 0 \quad .$$

Für $\varepsilon = 0$ ist die Ungleichung mit beliebigem $\varphi \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ erfüllt, da g eine Kählermetrik auf X ist. Weil die linke Seite der Ungleichung jedoch stetig von ε abhängt und ein Polynom in $g_{j\bar{k}}$ und $\varepsilon\varphi_{j\bar{k}}$ ist, kann jedes $\varphi \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ so skaliert werden, daß die Ungleichung für alle $\varepsilon \in [-1,1]$ erfüllt ist. Sie stellt demnach keine wesentliche Einschränkung dar (man könnte ebensogut das Intervall verkleinern, aus dem ε gewählt wird; im allgemeinen interessiert das Verhalten der φ-Variation g^ε nur nahe $\varepsilon = 0$).

Bei der Berechnung der Variation der analytischen Ray-Singer-Torsion wird der folgende schon von D.B. Ray und I.M. Singer definierte Operator von Nutzen sein [RS2]:

Definition 1.3.3
Sei g^ε eine φ-Variation der Kählermetrik g auf X; dann definiert jede der Metriken g^ε einen Hodge-Operator $(*_\varepsilon =)\, *$. Es sei

$$\dot{*}(=\dot{*}_\varepsilon) := \frac{\partial}{\partial\varepsilon}* \,, \quad \alpha\,(=\alpha_\varepsilon)\, := *^{-1}\dot{*} \quad .$$

Im Falle $\dim_{\mathbb{C}} X = 2$ wird später die Darstellung von α an der Stelle $\varepsilon = 0$ in lokalen Koordinaten benötigt. Daher beweise ich zunächst folgendes Lemma (wo $\varepsilon = 0$ schon eingesetzt ist, lasse ich der Übersichtlichkeit halber die entsprechenden oberen Indizes „0“ weg):

Lemma 1.3.4
Sei (X, g) eine zweidimensionale Kähler-Mannigfaltigkeit, g^ε eine φ-Variation von g, und seien (z^1, z^2) lokale holomorphe Koordinaten. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha(1) &= -\frac{\Delta\varphi}{2} \\
\alpha(d\bar{z}^1) &= \left(g^{1\bar{2}}\varphi_{1\bar{2}} + g^{2\bar{2}}\varphi_{2\bar{2}}\right) d\bar{z}^1 - \left(g^{1\bar{1}}\varphi_{1\bar{2}} + g^{2\bar{1}}\varphi_{2\bar{2}}\right) d\bar{z}^2 \\
\alpha(d\bar{z}^2) &= -\left(g^{1\bar{2}}\varphi_{1\bar{1}} + g^{2\bar{2}}\varphi_{2\bar{1}}\right) d\bar{z}^1 + \left(g^{1\bar{1}}\varphi_{1\bar{1}} + g^{2\bar{1}}\varphi_{2\bar{1}}\right) d\bar{z}^2 \\
\alpha\left(d\bar{z}^1 \wedge d\bar{z}^2\right) &= 0 \quad .
\end{aligned}$$

<u>*Beweis:*</u>
Ich definiere $\gamma(\varepsilon) := \det(g^\varepsilon)$; dann gilt:

$$\dot{\gamma}(\varepsilon)\left(=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\gamma(\varepsilon)\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial\gamma(\varepsilon)}{\partial g^\varepsilon_{i\bar{j}}} \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(g^\varepsilon_{i\bar{j}}\right) \quad ,$$

und mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes in zwei Dimensionen sowie der Definition 1.3.1 der φ-Variation folgt:

$$\dot{\gamma}(\varepsilon) = \sum_{i,j} \det(g^\varepsilon_{a\bar{b}})(g^\varepsilon)^{i\bar{j}}\varphi_{i\bar{j}} \overset{\text{Satz 1.2.1}}{=} -\det(g^\varepsilon_{a\bar{b}})\frac{\Delta^\varepsilon\varphi}{2} \quad . \tag{1.3.2}$$

Für die weitere Rechnung wird Korollar 1.1.6 verwendet:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & *(1) & \overset{\substack{\text{Kor.}\\ 1.1.6}}{=} & \frac{1}{4}\det(g_{a\bar{b}})dz^1\wedge dz^2\wedge d\bar{z}^1\wedge d\bar{z}^2 \\
\Longrightarrow & *^{-1}dz^1\wedge dz^2\wedge d\bar{z}^1\wedge d\bar{z}^2 & = & 4\left(\det(g_{a\bar{b}})\right)^{-1} \\
\Longrightarrow & \alpha(1) & \overset{(1.3.2)}{=} & -\frac{1}{4}*^{-1}\det(g_{a\bar{b}})\frac{\Delta\varphi}{2}dz^1\wedge dz^2\wedge d\bar{z}^1\wedge d\bar{z}^2 \\
 & & = & -\frac{\Delta\varphi}{2}\ ;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcl}
 & *(d\bar{z}^1) & \overset{\substack{\text{Kor.}\\ 1.1.6}}{=} & \frac{1}{2}\left(g_{2\bar{1}}d\bar{z}^1+g_{2\bar{2}}d\bar{z}^2\right)\wedge dz^1\wedge dz^2\ , \\
 & *(d\bar{z}^2) & \overset{\substack{\text{Kor.}\\ 1.1.6}}{=} & \frac{1}{2}\left(-g_{1\bar{1}}d\bar{z}^1-g_{1\bar{2}}d\bar{z}^2\right)\wedge dz^1\wedge dz^2 \\
\Longrightarrow & *^{-1}dz^1\wedge dz^2\wedge d\bar{z}^1 & = & 2\left(g^{1\bar{2}}d\bar{z}^1-g^{1\bar{1}}d\bar{z}^2\right)\ , \\
 & *^{-1}dz^1\wedge dz^2\wedge d\bar{z}^2 & = & 2\left(g^{2\bar{2}}d\bar{z}^1-g^{2\bar{1}}d\bar{z}^2\right) \\
\Longrightarrow & \alpha(d\bar{z}^1) & = & \frac{1}{2}*^{-1}\Big(\varphi_{2\bar{1}}\,dz^1\wedge dz^2\wedge d\bar{z}^1+\varphi_{2\bar{2}}\,dz^1\wedge dz^2\wedge d\bar{z}^2\Big) \\
 & & = & \varphi_{1\bar{2}}\left(g^{1\bar{2}}d\bar{z}^1-g^{1\bar{1}}d\bar{z}^2\right)+\varphi_{2\bar{2}}\left(g^{2\bar{2}}d\bar{z}^1-g^{2\bar{1}}d\bar{z}^2\right)\ , \\
 & \alpha(d\bar{z}^2) & = & -\frac{1}{2}*^{-1}\Big(\varphi_{1\bar{1}}\,dz^1\wedge dz^2\wedge d\bar{z}^1+\varphi_{1\bar{2}}\,dz^1\wedge dz^2\wedge d\bar{z}^2\Big) \\
 & & = & -\varphi_{1\bar{1}}\left(g^{1\bar{2}}d\bar{z}^1-g^{1\bar{1}}d\bar{z}^2\right)-\varphi_{2\bar{1}}\left(g^{2\bar{2}}d\bar{z}^1-g^{2\bar{1}}d\bar{z}^2\right)\ ;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcl}
 & *(d\bar{z}^1\wedge d\bar{z}^2) & \overset{\substack{\text{Kor.}\\ 1.1.6}}{=} & dz^1\wedge dz^2 \\
\Longrightarrow & \dot{*}\left(d\bar{z}^1\wedge d\bar{z}^2\right) & = & 0 \\
\Longrightarrow & \alpha\left(d\bar{z}^1\wedge d\bar{z}^2\right) & = & 0\quad .
\end{array}
$$

□

2 Differentialgeometrische Grundlagen

2.1 Mannigfaltigkeiten konstanter holomorpher Krümmung

Im Mittelpunkt von Kapitel 6.4 stehen Metriken *konstanter holomorpher Krümmung*, deren Definition und für die dortigen Betrachtungen wesentlichen Eigenschaften im folgenden zusammengestellt sind:

Definition 2.1.1
Sei X eine Kähler-Mannigfaltigkeit mit Hermitescher Metrik $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ und zugehörigem metrischem Zusammenhang. J bezeichne den linearen Endomorphismus, der die komplexe Struktur definiert, und R sei der Riemannsche Krümmungstensor.
Für $z \in X$ ist die **holomorphe Schnittkrümmung** *H_z in Richtung $\xi \in T_zX$ mit $g(\xi, \xi) = 1$ definiert durch* [Be2, Def. 2.57]

$$H_z(\xi) := \langle R_z(\xi, J\xi)\xi, J\xi \rangle \quad .$$

Die Definition einer Mannigfaltigkeit *konstanter holomorpher Krümmung* vereinfacht sich wegen des folgenden Satzes:

Satz 2.1.2
Ist die holomorphe Schnittkrümmung einer Kähler-Mannigfaltigkeit (X, g) für jedes $z \in X$ konstant auf T_zX, so ist sie konstant auf der gesamten Mannigfaltigkeit.
Außerdem ist g in diesem Fall eine Kähler-Einstein-Metrik, d.h. für den Ricci-Tensor r zu g gilt $r = \lambda g$ mit konstantem $\lambda \in \mathbb{R}$.

Zum Beweis siehe [Go, Theorem 6.1.2].

Die erste Aussage von Satz 2.1.2 motiviert folgende Definition:

Definition 2.1.3
Eine Kähler-Mannigfaltigkeit (X, g), deren holomorphe Schnittkrümmung für jedes $z \in X$ konstant ist auf T_zX, heißt **Mannigfaltigkeit konstanter holomorpher Krümmung**.

Alle kompakten Mannigfaltigkeiten konstanter holomorpher Krümmung sind bekannt:

Satz 2.1.4
Sei (X, g) eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit konstanter holomorpher Krümmung H, $\dim_{\mathbb{C}} X = N$.

- *Ist $H > 0$, so ist X isomorph zu $\mathbb{C}P^N$ mit einer Fubini-Study-Metrik.*
- *Ist $H = 0$, so ist X isomorph zu einem (kompakten) Quotienten $\mathbb{C}^N/\Gamma$, wobei $\mathbb{C}^N$ mit der flachen Metrik versehen und Γ eine diskrete Gruppe von Isometrien von $\mathbb{C}^N$ ist.*
- *Ist $H < 0$, so ist X isomorph zu einem (kompakten) Quotienten D^N/Γ, wobei D^N der komplexe N-dimensionale Einheitsball, versehen mit einer Bergmann-Metrik, und Γ eine diskrete Gruppe von Isometrien von D^N ist.*

Zum Beweis siehe [KN, p.171].

Bei späteren Rechnungen werden die Darstellungen von Krümmungstensor und Krümmungsform bezüglich lokaler holomorpher Koordinaten benötigt:

Satz 2.1.5
Ist (X,g) eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit konstanter holomorpher Krümmung H, $\dim_{\mathbb{C}} X = N$, so hat der Riemannsche Krümmungstensor R von (X,g) bezüglich lokaler holomorpher Koordinaten $(z^1,...,z^N)$ die Darstellung

$$\begin{aligned} R_{j\bar{k}l\bar{m}} &= \frac{H}{2}\left(g_{j\bar{k}}g_{l\bar{m}} + g_{j\bar{m}}g_{l\bar{k}}\right) \\ \text{bzw.} \quad R^j{}_{kl\bar{m}} &= \sum_{p=1}^{N} g^{j\bar{p}} R_{\bar{p}kl\bar{m}} = -\frac{H}{2}\left(\delta_{jk}g_{l\bar{m}} + \delta_{jl}g_{k\bar{m}}\right). \end{aligned}$$

Zum Beweis siehe [Go, (6.1.1)].

Korollar 2.1.6
Sei (X,g) wie in Satz 2.1.5, ω bezeichne die zu g assoziierte Kählerform und Ω die Krümmungsform. Dann gilt bezüglich lokaler holomorpher Koordinaten $(z^1,...,z^N)$:

$$\Omega^j{}_k = -iH\delta_{jk}\,\omega + \frac{H}{2}\sum_{m=1}^{N} g_{k\bar{m}}dz^j \wedge d\bar{z}^m \quad .$$

2.2 Chernklassen

In diesem Kapitel habe ich diverse voneinander unabhängige Resultate zusammengetragen, die Chernklassen betreffen und die ich in späteren Teilen der Arbeit verwendet habe. Die formale Definition der Chernklassen entnimmt man einem beliebigen Buch über Topologie (z.B. [Hir, §4.2]); (2.2.2) kann ebenfalls als Definition der Chernklassen aufgefaßt werden.

Lemma 2.2.1
Sei X eine Kähler-Mannigfaltigkeit (d.h. auf X existiere eine Kählermetrik), $\dim_{\mathbb{C}} X = N$.
Dann gilt $c_1(X) = -c_1(\Lambda^{N,0}(T^*X))$.
<u>*Beweis:*</u>
Auf X sei eine Kählermetrik g mit zugehörigem holomorphem Zusammenhang und Ricciform Ric gewählt. Wie zu Beginn von Kapitel 1.1 beschrieben, induziert g auf $\Lambda^{N,0}(T^*X)$ eine Metrik. Θ sei die Krümmungsform des zugehörigen holomorphen Zusammenhanges auf $\Lambda^{N,0}(T^*X)$. In lokalen holomorphen Koordinaten $(z^1,...,z^N)$ ist $dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^N$ ein

lokaler nicht verschwindender Schnitt von $\Lambda^{N,0}(T^*X)$, und daher gilt [GH, p.142]:

$$\begin{aligned} \Theta &= -\partial\overline{\partial}\log\|dz^1\wedge\cdots\wedge dz^N\|^2 \\ &\overset{\text{Lemma 1.1.1}}{=} -\partial\overline{\partial}\log\left[2^N\det(g^{i\bar{j}})\right] \\ &= \partial\overline{\partial}\log\det(g_{i\bar{j}}) \\ &\overset{\text{[Go, (5.3.36)]}}{=} -\mathrm{Ric} \quad . \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Damit:

$$c_1(X) \overset{\text{[Go, (5.3.38)]}}{=} \left[\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{Ric}\right] \overset{(2.2.1)}{=} -\left[\frac{1}{2\pi i}\,\Theta\right] \overset{\text{[Go, (5.3.38)]}}{=} -c_1(\Lambda^{N,0}(T^*X)) \quad .$$

□

Satz 2.2.2
Sei (X,g) eine zweidimensionale Kähler-Mannigfaltigkeit mit Ricci-flacher Kähler-Einstein-Metrik und zugehörigem holomorphem Zusammenhang. Ω bezeichne die Krümmungsform und W den Weylschen Krümmungstensor, μ die zu g gehörige Volumenform. Dann gilt:

$$c_2(\Omega) = \frac{\|W\|^2}{2\cdot(8\pi)^2}\,\mu \quad .$$

Beweis:
Sei ω die zu g assoziierte Kählerform, L der Operator $L : \Lambda^{p,q}(T^*X) \to \Lambda^{p+1,q+1}(T^*X)$ mit $L\nu := \omega\wedge\nu$ für $\nu\in\Lambda^{p,q}(T^*X)$ sowie Λ der zu L adjungierte Operator. Dann gilt, da g nach Voraussetzung Ricci-flach ist [Be2, (2.80)] (das gemäß der von Besse verwendeten Normierung [Be2, 1.38] angegebene Ergebnis wurde dazu auf die von mir verwendete Normierung umgerechnet):

$$\frac{1}{2}\Lambda^2\left(c_2\left(\Omega\right)\right) = \frac{\|W\|^2}{2\cdot(8\pi)^2} \quad .$$

Wegen $\mu = \frac{\omega^2}{2}$ für $\dim_{\mathbb{C}} X = 2$ [GH, p.80] folgt daraus mit Bemerkung 1.1.2 (ii) sofort die Behauptung. □

Im Kapitel 6.4 wird das Verhalten der analytischen Ray-Singer-Torsion auf kompakten Kähler-Mannigfaltigkeiten studiert, auf denen eine Metrik konstanter holomorpher Krümmung existiert (siehe Definition 2.1.1 und Satz 2.1.4). Für diese Rechnungen werden Darstellungen von Repräsentanten der Chernklassen benötigt:

Satz 2.2.3
Sei (X,g) eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit konstanter holomorpher Krümmung H, $\dim_{\mathbb{C}} X = N$. ω sei die zu g assoziierte Kählerform, Ω die Krümmungsform von $T^{1,0}X$. Dann gilt:

$$c_j(\Omega) = \left[\binom{N+1}{j} \left(-\frac{H}{2\pi}\omega \right)^j \right] \in H^{2j}(X, \mathbb{Z}) \quad .$$

<u>Beweis:</u>
Um eckige Klammern zu sparen, bezeichne ich im folgenden mit $c_j(\Omega)$ auch die Repräsentanten der entsprechenden Chernklasse.
Zunächst gilt nach Wahl von lokalen holomorphen Koordinaten $(z^1, ..., z^N)$ mit $\delta^{l_1 \dots l_j}_{k_1 \dots k_j} := \det \left(\delta^{l_n}_{k_m} \right)_{mn}$:

$$c_j(\Omega) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^j \frac{1}{j!} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_j, l_1, \dots, l_j \\ \in \{1, \dots, N\}}} \delta^{l_1 \dots l_j}_{k_1 \dots k_j} \Omega^{k_1}_{l_1} \wedge \dots \wedge \Omega^{k_j}_{l_j} \tag{2.2.2}$$

[Go, (6.12.1)]. Dabei ist offenbar

$$\delta^{l_1 \dots l_j}_{k_1 \dots k_j} \neq 0 \iff \{k_1, ..., k_j\} = \{l_1, ..., l_j\} \text{ mit paarweise verschiedenen } k_m,$$

und wenn $\sigma \in \mathcal{S}_j$ mit $\sigma(k_1, ..., k_j) = (l_1, ..., l_j)$, dann gilt $\delta^{l_1 \dots l_j}_{k_1 \dots k_j} = \operatorname{sign}\sigma$. Also folgt:

$$\begin{aligned}
c_j(\Omega) &= \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^j \frac{1}{j!} \sum_{\substack{k_1, \dots, k_j \in \{1, \dots, N\} \\ \text{paarweise verschieden}}} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_j} \operatorname{sign}\sigma \, \Omega^{k_1}_{k_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge \Omega^{k_j}_{k_{\sigma(j)}} \\
&\overset{\substack{\text{Korollar} \\ 2.1.6}}{=} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^j \frac{1}{j!} \sum_{k_1, \dots, k_j} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_j} \operatorname{sign}\sigma \prod_{l=1}^{j} \left(-iH \delta_{k_l \, k_{\sigma(l)}} \omega + \frac{H}{2} \sum_{m=1}^{N} g_{k_{\sigma(l)} \bar{m}} dz^{k_l} \wedge d\bar{z}^m \right) \\
&= \left(\frac{H}{2\pi i} \right)^j \frac{1}{j!} \sum_{k_1, \dots, k_j} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_j} \operatorname{sign}\sigma \sum_{p=0}^{j} (-i\omega)^p \cdot \\
&\qquad \cdot \sum_{\substack{L \subset \{1, \dots, j\} \\ |\# L = p}} \prod_{l \in L} \delta_{k_l \, k_{\sigma(l)}} \prod_{l \notin L} \left(\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N} g_{k_{\sigma(l)} \bar{m}} dz^{k_l} \wedge d\bar{z}^m \right) \\
&= \left(\frac{H}{2\pi i} \right)^j \frac{1}{j!} \sum_{k_1, \dots, k_j} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_j} \sum_{p=0}^{j} (-i\omega)^p \sum_{\substack{L \subset \{1, \dots, j\} \\ |\# L = p, L \subset \mathrm{Fix}(\sigma)}} \prod_{l \notin L} \left(\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N} g_{k_l \bar{m}} dz^{k_l} \wedge d\bar{z}^m \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{H}{2\pi i}\right)^j \frac{1}{j!} \sum_{p=0}^{j} (-i\omega)^p \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_{j-p} \in \{1,\ldots,N\} \\ \text{paarweise verschieden}}} \begin{pmatrix} N-(j-p) \\ p \end{pmatrix} \frac{j!}{(j-p)!} \cdot \\
&\qquad (j-p)! \prod_{l=1}^{j-p} \left(\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N} g_{k_l \bar{m}} dz^{k_l} \wedge d\bar{z}^m \right) \\
&= \left(\frac{H}{2\pi i}\right)^j \sum_{p=0}^{j} (-i\omega)^p \begin{pmatrix} N-j+p \\ p \end{pmatrix} (-i\omega)^{j-p} \\
&= \gamma_j \left(-\frac{H}{2\pi}\omega \right)^j
\end{aligned}
$$

mit $\gamma_j := \sum_{p=0}^{j} \binom{N-j+p}{p}$. Via vollständiger Induktion zeigt man leicht $\gamma_j = \binom{N+1}{j}$. □

2.3 $K3$-Flächen

Da in Kapitel 6.9 die analytische Ray-Singer-Torsion auf $K3$-Flächen studiert wird, stelle ich hier neben der Definition erste Eigenschaften dieser Mannigfaltigkeiten zusammen.

Definition 2.3.1
Eine zweidimensionale komplexe Mannigfaltigkeit X heißt **K3-Fläche***, *wenn die erste Chernklasse und die erste Bettizahl von X verschwinden:* $c_1(X) = 0, b^1(X) = 0$ [Be2, p.365].

Satz 2.3.2
Jede $K3$-Fläche ist Kähler.
Zum Beweis siehe [Siu].

Die Voraussetzung $b^1(X) = 0$ hat für eine komplexe Mannigfaltigkeit X beliebiger Dimension zur Folge, daß holomorphe Linienbündel auf X durch ihre erste Chernklasse klassifiziert werden:

Lemma 2.3.3
Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit mit verschwindender erster Bettizahl. $L \longrightarrow X$ und $L' \longrightarrow X$ seien holomorphe Linienbündel mit $c_1(L) = c_1(L')$. Dann sind L und L' isomorph als holomorphe Bündel.
Beweis:
Betrachtet man die kurze exakte Sequenz von Garben

$$
0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0 \quad ,
$$

*A. Weil hat den Namen *K3-Fläche* im Kommentar zu seinem Abschlußbericht zum Kontrakt AF 18 (603)-57 erklärt: „*ainsi nommées en l'honneur de Kummer, Kähler, Kodaira et de la belle montagne K2 au Cachemire*“ [Wei, p.546].

so ist c_1 – nach Identifikation der *Picardgruppe* $\mathrm{Pic}(X)$ mit $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ – der Verbindungshomomorphismus der zugehörigen langen exakten Kohomologie-Sequenz:

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \cong \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z})$$

[Wel, Theorem 4.5]. Nach Voraussetzung gilt $0 = b^1(X) = 2h^{0,1}(X)$, d.h. $0 = H_{\bar\partial}^{0,1}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X)$ [GH, p.45], also ist

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z})$$

exakt. Daraus folgt die Behauptung. □

Korollar 2.3.4
Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit, deren erste Chernklasse und deren erste Bettizahl verschwinden, dann ist das kanonische Bündel $\Lambda^{N,0}(T^*X)$ von X holomorph trivial.
Insbesondere ist das kanonische Bündel jeder $K3$-Fläche holomorph trivial.
<u>*Beweis:*</u>
Nach Voraussetzung gilt $0 = c_1(X) \overset{\text{Lemma 2.2.1}}{=} -c_1(\Lambda^{N,0}(T^*X))$. Lemma 2.3.3 liefert daher sofort die Behauptung. □

Laut Satz 2.3.2 gibt es auf jeder $K3$-Fläche eine Kählermetrik; es gilt sogar:

Korollar 2.3.5
Auf jeder kompakten $K3$-Fläche X existiert in jeder Kählerklasse genau eine Ricci-flache Kähler-Einstein-Metrik.
<u>*Beweis:*</u>
Nach Definition 2.3.1 ist $c_1(X) = 0$, so daß die Behauptung aus dem Calabi-Yau-Theorem [Ya, Theorem 2] folgt. □

Bemerkung 2.3.6
Ich habe mich auf die Betrachtung kompakter $K3$-Flächen beschränkt.
Eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit mit verschwindender erster Chernklasse und erster Bettizahl gleich Null heißt **Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit** [Gr, p.4]. Die Beweise der Korollare 2.3.4 und 2.3.5 sind unabhängig von $\dim_{\mathbb{C}} X$, so daß folgt:
Das kanonische Bündel jeder Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit ist holomorph trivial, und auf jeder Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit existiert in jeder Kählerklasse genau eine Ricci-flache Kähler-Einstein-Metrik.
Die Bedingung, daß die erste Bettizahl verschwinde, wird in der Definition von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten mitunter weggelassen. Dann stimmt die obige Aussage immer noch, falls die Eulerzahl der Mannigfaltigkeit nicht verschwindet:
Zu zeigen ist, daß für jede kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit X mit verschwindender erster Chernzahl und nichtverschwindender Eulerzahl auch die erste Bettizahl verschwindet, also keine harmonischen Einsformen außer 0 existieren.

Auf X kann nach wie vor gemäß dem Calabi-Yau-Theorem [Ya, Theorem 2] eine Ricci-flache Kähler-Einstein-Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle$ gewählt werden. Angenommen $\nu \in \Lambda^{1,0}(T^*X)$ sei harmonisch bezüglich dieser Metrik, so folgt aus der Weitzenböckformel [Be2, 1.136] $\nabla^*\nabla\nu = 0$, da die Ricci-Krümmung der Metrik verschwindet. Also gilt:

$$0 = \int_X \langle \nu, \nabla^*\nabla\nu\rangle\,\mu = \int_X \langle \nabla\nu, \nabla\nu\rangle\,\mu$$

(μ ist wie immer die Volumenform zur Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle$). Daraus folgt nun $\nabla\nu = 0$. Es ist aber $\chi(X) \neq 0$ vorausgesetzt, d.h. ν hat nach dem Theorem von Poincaré-Hopf (siehe z.B. [BGV, Theorem 1.56]) mindestens eine Nullstelle, woraus dann $\nu \equiv 0$ folgt, was zu zeigen war.

Satz 2.3.7

Sei X eine N-dimensionale kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit mit trivialem kanonischem Bündel und g eine Kähler-Einstein-Metrik auf X. Dann gilt nach Wahl des zugehörigen holomorphen Zusammenhanges $\mathrm{Ric} = 0$.

Beweis:

Es gilt $c_1(X) \overset{\text{Lemma 2.2.1}}{=} -c_1\left(\Lambda^{N,0}(T^*X)\right) = 0$ nach Voraussetzung. Für die Ricciform Ric zu einer beliebigen Kählermetrik g auf X folgt also

$$\left[\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{Ric}\right] \overset{\text{[Go, (5.3.38)]}}{=} c_1(X) = 0 \quad . \tag{2.3.1}$$

Ist g eine Kähler-Einstein-Metrik, so gilt für die Kählerform ω zu g: Ric$=\lambda\omega$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Zu zeigen ist also $\lambda = 0$, was durch Widerspruch geschieht:

Annahme: $\lambda \neq 0$.

Dann ist $[\omega] = 0$, da $0 = \left[\frac{1}{2\pi i}\mathrm{Ric}\right] = \left[\frac{\lambda}{2\pi i}\,\omega\right]$ mit $\lambda \neq 0$. Es gibt also eine global definierte Form $\xi \in \Lambda^1(T^*X)$ mit $\omega = d\xi$. Nun gilt aber wegen $\mu = \frac{\omega^N}{N!}$ [GH, p.80] und der Geschlossenheit der Kählerform

$$0 < N!\,\mathrm{vol}\,(X) = \int_X \omega^N = \int_X d\xi \wedge \omega^{N-1} = \int_X d\left(\xi \wedge \omega^{N-1}\right) \overset{\text{Satz von Stokes}}{=} 0 \quad . \quad \lightning$$

$\square$

Auf Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten sind somit die Ricci-flachen Kählermetriken genau die Kähler-Einstein-Metriken.

Satz 2.3.8
Für jede kompakte $K3$-Fläche gilt:

$$\begin{array}{lllcccc} i) & \textit{Die Eulercharakteristik ist} & \chi(X) & = & c_2(X) & = & 24\ . \\ ii) & \textit{Die Signatur beträgt} & \tau(X) & = & -\frac{2}{3}\,\chi(X) & = & -16\ . \end{array}$$

<u>Beweis:</u>
i) Da X kompakt und als $K3$-Fläche zusammenhängend ist [BPV, p.239], gilt $h^{0,0} = 1$ (hier und im folgenden sind $h^{p,q}$ die Hodgezahlen von X). Weil X eine $K3$-Fläche ist, folgt $0 = b^1(X) = 2h^{0,1}$, also $h^{0,1} = 0$.
Nach Korollar 2.3.4 ist das kanonische Bündel von X holomorph trivial, so daß $h^{0,2} = 1$. Hieraus ergibt sich:

$$\chi(\mathcal{O}_X) = h^{0,0} - h^{0,1} + h^{0,2} = 2 \quad ,$$

also nach dem Satz von Hirzebruch-Riemann-Roch [Hir, Theorem 21.1.1]:

$$2 = \chi(\mathcal{O}_X) = \mathrm{Td}\left(c_1(X), c_2(X)\right) \overset{\text{[Hir, §1.7]}}{=} \frac{1}{12}\left(c_1(X)^2 + c_2(X)\right) \quad .$$

Da $c_1(X) = 0$ (denn X ist eine $K3$-Fläche), folgt daraus schon $c_2(X) = 24$, und $\chi(X) = c_2(X)$ gilt nach dem Satz von Gauß-Bonnet [GH, p.416].

ii) Der Hodge-Index-Satz [Hir, Theorem 8.2.2] besagt für jede kompakte $4k$-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit M^{4k}

$$\tau\left(M^{4k}\right) = L_k\left(p_1, ..., p_k\right)\left[M^{4k}\right] \quad ,$$

wobei $\{L_j\}$ die zur Potenzreihe $\frac{\sqrt{z}}{\tanh\sqrt{z}}$ gehörige m-Folge ist und $p_1, ..., p_k$ die Pontryagin-Zahlen sind. Da $L_1(p_1) \overset{\text{[Hir, §1.5]}}{=} \frac{1}{3}p_1$, folgt mit $p_1 \overset{\text{[Hir, §1.3]}}{=} -2c_2 + c_1^2$ und $c_1(X) = 0$:

$$\tau(X) = \frac{1}{3}\Big(-2c_2(X) + c_1^2(X)\Big) = -\frac{2}{3}\,c_2(X) \overset{\text{i)}}{=} -\frac{2}{3}\,\chi(X) \overset{\text{i)}}{=} -16 \quad .$$

$\square$

Korollar 2.3.9
Der Hodge-Diamant einer kompakten $K3$-Fläche X ist

$$\begin{pmatrix} & & h^{0,0} & & \\ & h^{1,0} & & h^{0,1} & \\ h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} \\ & h^{2,1} & & h^{1,2} & \\ & & h^{2,2} & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 20 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{pmatrix} \quad .$$

Beweis:
X ist kompakt, also $h^{0,0} = h^{2,2} = 1, \quad b^0 = b^4 = 1$.
X ist eine $K3$-Fläche, daher gilt $b^1 = b^3 = 0$, also $h^{1,0} = h^{0,1} = h^{1,2} = h^{2,1} = 0$.
Nach Korollar 2.3.4 ist $\Lambda^{2,0}(T^*X)$ holomorph trivial, so daß $h^{2,0} = h^{0,2} = 1$.
Nach Satz 2.3.8 gilt

$$\begin{aligned} 24 &= \chi(X) = b^0 - b^1 + b^2 - b^3 + b^4 = b^2 + 2 \\ \Rightarrow \quad h^{1,1} &= 22 - h^{0,2} - h^{2,0} = 20 \quad . \end{aligned}$$

□

Satz 2.3.10
Sei X eine kompakte $K3$-Fläche, nach Korollar 2.3.5 kann X also mit einer Ricci-flachen Kählermetrik g versehen werden. Weiter werde der zu dieser Metrik gehörige holomorphe Zusammenhang gewählt. $W = W^+ + W^-$ sei die Zerlegung des Weylschen Krümmungstensors in seine selbstduale und seine antiselbstduale Komponente; dann gilt für den Riemannschen Krümmungstensor R:

$$R = W^- \ ,$$

d.h. insbesondere, daß (X, g) nach Umkehrung der Orientierung halbkonform flach ist (siehe [Be2, Definition 13.16]).
Beweis:
Sei $R = U + Z + W$ die Zerlegung des Krümmungstensors in irreduzible Komponenten [Be2, p.45ff]. Weil Ricci-Krümmung und Skalarkrümmung nach Wahl der Metrik verschwinden, gilt $U = 0, Z = 0$ und somit $R = W$. Zu zeigen ist also nur noch $W^+ = 0$.
Der Satz von Gauß-Bonnet für vierdimensionale Mannigfaltigkeiten [Be1] lautet nach Umnormierung auf die von mir gewählte Normierung (vgl. den Beweis von Satz 2.2.2):

$$\chi(X) = \frac{1}{8\pi^2} \int_X \left(\|U\|^2 - \|Z\|^2 + \|W\|^2 \right) \frac{\mu}{16}$$

(μ ist das Volumenelement zur Ricci-flachen Metrik g), und für die Signatur gilt [Be1]:

$$\tau(X) = \frac{1}{12\pi^2} \int_X \left(\|W^+\|^2 - \|W^-\|^2 \right) \frac{\mu}{16} \quad .$$

Mit $U = 0, Z = 0$ ergibt sich

$$\int_X \left(\|W^+\|^2 - \|W^-\|^2\right)\frac{\mu}{16} = 12\pi^2\tau(X) \overset{\text{Satz}}{\underset{}{\overset{2.3.8}{=}}} -8\pi^2\chi(X) = -\int_X \left(\|W^+\|^2 + \|W^-\|^2\right)\frac{\mu}{16},$$

woraus $\|W^+\| = 0$ und damit die Behauptung folgt. □

Nach einem Theorem von N. Hitchin [Be2, Theorem 13.30] sind kompakte $K3$-Flächen (mit umgekehrter Orientierung) neben der Sphäre und $\mathbb{C}P^2$ mit ihren Standardmetriken die einzigen kompakten, halbkonform flachen Einstein-Mannigfaltigkeiten in zwei komplexen Dimensionen mit nichtnegativer Krümmung.

3 Funktionaldeterminanten und analytische Ray-Singer-Torsion

In diesem Kapitel ist X generell eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit.

3.1 Die regularisierte Determinante des Laplace-Operators

Für den in Kapitel 1.2 definierten Dolbeaut-Laplace-Operator $\Delta_{p,q}$ auf $\Lambda^{p,q}(X,E) = E \otimes \Lambda^{p,q}(T^*X)$ (mit einem holomorphen Hermiteschen Vektorbündel $E \longrightarrow X$) kann bekanntlich mit Hilfe von Zetafunktionen eine **regularisierte Determinante** gebildet werden:

Sind $\{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ die mit ihren Multiplizitäten gezählten Eigenwerte von $\Delta_{p,q}$, so definiert man zunächst in Analogie zur *Riemannschen Zetafunktion* für Re $s > \frac{N}{2}$

$$\zeta_{p,q}(s) := \sum_{\lambda_n > 0} \lambda_n^{-s} = \operatorname{tr}\left((\Delta'_{p,q})^{-s}\right) \quad ,$$

wobei $\Delta'_{p,q}$ die Einschränkung von $\Delta_{p,q}$ auf das orthogonale Komplement seines Kernes bezeichnet. $\zeta_{p,q}$ kann folgendermaßen auf die gesamte komplexe Ebene meromorph fortgesetzt werden:

Man betrachte die Halbgruppe kompakter Operatoren $\{P^t_{p,q} := \exp(-t\Delta_{p,q}) \mid t > 0\}$; nach dem Spektralsatz gilt $P^t_{p,q} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} P_{p,q}$, wobei $P_{p,q} : \Lambda^{p,q}(X,E) \longrightarrow \mathcal{H}^{p,q}(X,E) := \{\nu \in \Lambda^{p,q}(X,E) \mid \Delta_{p,q}\nu = 0\}$ die orthogonale Projektion auf die harmonischen Formen vom Typ (p,q) ist. Beachtet man für $\lambda > 0$

$$\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t\lambda}dt \overset{\vartheta := t\lambda}{=} \lambda^{-s}\int_0^\infty \vartheta^{s-1}e^{-\vartheta}d\vartheta = \lambda^{-s}\Gamma(s) \quad ,$$

so erhält man für Re $s > \frac{N}{2}$

$$\zeta_{p,q}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\operatorname{tr}\left(e^{-t\Delta_{p,q}} - P_{p,q}\right)dt \quad . \tag{3.1.1}$$

Mit Hilfe der asymptotischen Entwicklung der Spur des Wärmeleitungskernes zu $\Delta_{p,q}$ zeigt man nun, daß das Integral in (3.1.1) für fast alle $s \in \mathbb{C}$ konvergiert [MP], mittels dieser Formel also eine meromorphe Fortsetzung von $\zeta_{p,q}$ nach ganz $\mathbb{C}$ möglich ist. Insgesamt gelangt man zur

Definition 3.1.1
Die Zetafunktion zu $\Delta_{p,q}$ auf einer kompakten Kähler-Mannigfaltigkeit ist die für $s \in \mathbb{C}$ durch (3.1.1) *definierte meromorphe Funktion $\zeta_{p,q}$.*

Für einige Beweise werde ich folgendes Ergebnis aus der Indextheorie benötigen:

Lemma 3.1.2
Sei (X, g) eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit mit $\dim_{\mathbb{C}} X = N$ und $E \longrightarrow X$ ein holomorphes Hermitesches Vektorbündel. Dann gilt:

$$\forall\, p \in \{0, ..., N\} : \sum_{q=0}^{N} (-1)^q \zeta_{p,q}(s) = 0 \quad .$$

<u>*Beweis:*</u>
Definiere

$$\begin{aligned} \Lambda^{p,+}(X, E) &:= \bigoplus_{q=0}^{[N/2]} \Lambda^{p,2q}(X, E) \qquad , \\ \Lambda^{p,-}(X, E) &:= \bigoplus_{q=0}^{[(N-1)/2]} \Lambda^{p,2q+1}(X, E) \quad . \end{aligned}$$

Der Dobeaut-Dirac-Operator $\overline{\partial} + \overline{\partial}^*$ ist dann ein selbstadjungierter elliptischer Operator, der $\Lambda^{p,+}(X, E)$ in $\Lambda^{p,-}(X, E)$ abbildet und umgekehrt (Elliptizität rechnet man nach; siehe z.B.[Hir, p.189]). Setze

$$D_p^+ := \overline{\partial} + \overline{\partial}^* : \Lambda^{p,+}(X, E) \longrightarrow \Lambda^{p,-}(X, E) \quad .$$

Weil D_p^+ elliptisch ist, gilt:

$$\begin{aligned} \Lambda^{p,-}(X, E) &= \ker(D_p^+)^* \oplus \operatorname{im} D_p^+ \quad , \\ \Lambda^{p,+}(X, E) &= \ker D_p^+ \oplus \left(\ker D_p^+\right)^\perp \end{aligned}$$

(die direkten Summen sind jeweils orthogonale direkte Summen), und D_p^+ respektiert diese Zerlegungen [Mü4, Theorem 5.22].
$\Delta_p^+ := (D_p^+)^* D_p^+$ und $\Delta_p^- := D_p^+ (D_p^+)^*$ sind elliptische selbstadjungierte Operatoren, $(\ker \Delta_p^+)^\perp = (\ker D_p^+)^\perp$ und $(\ker \Delta_p^-)^\perp = (\ker(D_p^+)^*)^\perp = \operatorname{im} D_p^+$ zerfallen also in orthogonale direkte Summen aus abzählbar vielen Eigenräumen von Δ_p^+ bzw. Δ_p^- [ABP, Theorem

EII]: Für einen Operator A sei $\Gamma_\lambda(A)$ der Eigenraum zum Eigenwert λ; dann gilt

$$\left(\ker D_p^+\right)^\perp = \bigoplus_{\lambda\neq 0}\Gamma_\lambda(\Delta_p^+), \quad \left(\ker(D_p^+)^*\right)^\perp = \bigoplus_{\mu\neq 0}\Gamma_\mu(\Delta_p^-).$$

Sei $\psi \in \Gamma_\lambda(\Delta_p^+)$, d.h. $D_p^+\psi \in \operatorname{im} D_p^+ = \left(\ker\Delta_p^-\right)^\perp$, also

$$\Delta_p^-(D_p^+\psi) = D_p^+(D_p^+)^*\,D_p^+\psi = D_p^+\Delta_p^+\psi = \lambda D_p^+\psi \quad ;$$

analog gilt für $\widetilde{\psi} \in \Gamma_\mu(\Delta_p^-)$:

$$\Delta_p^+(D_p^+)^*\widetilde{\psi} = (D_p^+)^*\,D_p^+(D_p^+)^*\,\widetilde{\psi} = (D_p^+)^*\Delta_p^-\psi = \mu\,(D_p^+)^*\widetilde{\psi} \quad ,$$

d.h. $D_p^+(\Gamma_\lambda(\Delta_p^+)) \subset \Gamma_\lambda(\Delta_p^-)$ und $(D_p^+)^*(\Gamma_\mu(\Delta_p^-)) \subset \Gamma_\mu(\Delta_p^+)$, so daß für alle $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$: $\Gamma_\lambda(\Delta_p^+) \cong \Gamma_\lambda(\Delta_p^-)$, da ja $(D_p^+)^*\,D_p^+ = \Delta_p^+$ auf $\Gamma_\lambda(\Delta_p^+)$ die Multiplikation mit λ und damit ein Isomorphismus ist. Daraus folgt für $\operatorname{Re} s > \frac{N}{2}$:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\sum_{\lambda>0} e^{-\lambda t}\left\{\dim\Gamma_\lambda(\Delta_p^+) - \dim\Gamma_\lambda(\Delta_p^-)\right\}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\sum_{\lambda>0} e^{-\lambda t}\left\{\sum_{q=0}^{[N/2]}\dim\Gamma_\lambda(\Delta_{p,2q}) - \sum_{q=0}^{[(N-1)/2]}\dim\Gamma_\lambda(\Delta_{p,2q+1})\right\}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\sum_{q=0}^{N}(-1)^q\sum_{\lambda>0} e^{-\lambda t}\dim\Gamma_\lambda(\Delta_{p,q})dt \\
&= \sum_{q=0}^{N}(-1)^q\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\operatorname{tr}\left(e^{-t\Delta_{p,q}} - P_{p,q}\right)dt \\
&\overset{\substack{\text{Definition}\\ 3.1.1}}{=} \sum_{q=0}^{N}(-1)^q\zeta_{p,q}(s) \quad .
\end{aligned}$$

Weil beide Seiten der Gleichung eindeutige meromorphe Fortsetzungen nach $\mathbb{C}$ besitzen, gilt sie überall. □

$\zeta_{p,q}$ ist bekanntlich in $s=0$ analytisch (siehe z.B. [MP]), so daß man die Determinante von $\Delta_{p,q}$ folgendermaßen regularisieren kann:

Definition 3.1.3
Die **regularisierte Determinante** *des Dolbeaut-Laplace-Operators ist definiert durch*

$$\det\Delta_{p,q} := \exp\left(-\frac{d}{ds}\zeta_{p,q}(s)_{|\,s=0}\right) \quad .$$

Die regularisierte Determinante aus Definition 3.1.3 ist offenbar formal gleich der Determinante des entsprechenden Dolbeaut-Laplace-Operators auf dem orthogonalen Komplement seines Kernes. Dies folgt direkt aus der Tatsache, daß – wie oben schon bemerkt wurde – die Zetafunktion in $s \in \mathbb{C}$ (zumindest für $\operatorname{Re} s \gg 0$) gerade die Spur der entsprechenden negativen Potenz des Laplace-Operators auf dem orthogonalen Komplement seines Kernes ist. Ohne zu regularisieren, hätte man aber offensichtlich keine Chance, eine solche Determinante zu definieren, denn die Eigenwerte des Laplace-Operators für Funktionen auf kompakten Mannigfaltigkeiten sind unbeschränkt, da Differentialoperatoren unbeschränkte Operatoren sind.
Ich werde in den folgenden Kapiteln noch eine Verallgemeinerung der bisher definierten Objekte benötigen:

Definition 3.1.4
Ein **verallgemeinerter Laplace-Operator** *H ist ein Differentialoperator zweiter Ordnung mit Hauptsymbol $\sigma_2(H)(x,\xi) = |\xi|^2$.*
Zu jedem selbstadjungierten verallgemeinerten Laplace-Operator H auf einer kompakten Mannigfaltigkeit gibt es in Verallgemeinerung von (3.1.1) *eine Zetafunktion: H ist nach unten beschränkt, hat also nur endlich viele nichtpositive Eigenwerte (siehe z.B.* [BGV, Proposition 2.5]*). P_H bezeichne die Projektion auf die orthogonale direkte Summe aus Eigenräumen von H zu nichtpositiven Eigenwerten, und H' sei die Einschränkung von H auf $\operatorname{im}(id - P_H)$. Dann ist für $\operatorname{Re} s > \frac{N}{2}$ eine* **Zetafunktion** *via*

$$\zeta_H(s) := \operatorname{tr}\left((H')^{-s}\right) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \operatorname{tr}\left(e^{-tH} - P_H\right) dt$$

definiert. Die rechte Seite kann wiederum als Definition der meromorphen Fortsetzung von ζ_H nach $\mathbb{C}$ verwendet werden [BGV, Proposition 9.35], *die ebenfalls mit ζ_H bezeichnet wird.*

Weil für jeden verallgemeinerten Laplace-Operator H die Zetafunktion ζ_H in $s = 0$ analytisch ist [BGV, Proposition 9.35], kann man analog zu Definition 3.1.3 die Determinante von solchen Operatoren regularisieren:

Definition 3.1.5
Die **regularisierte Determinante** *eines selbstadjungierten verallgemeinerten Laplace-Operators H ist definiert durch*

$$\det H := \exp\left(-\frac{d}{ds}\zeta_H(s)_{|\,s=0}\right) \quad .$$

Die hier beschriebene Regularisierungsmethode mag wie eine bloße mathematische Manipulation wirken – tatsächlich sind auch andere Methoden gängig, zumindest in der physikalischen Fachliteratur. Ich diskutiere die sogenannte *dimensionale Regularisierung* im Vergleich zur oben beschriebenen und von mir im folgenden verwendeten *Regularisierung via Zetafunktionen* im Kapitel 8.3.

Unter Umständen wird es von Interesse sein, das Skalierungsverhalten der Zetafunktionen bestimmter Operatoren zu studieren. Dazu verwende ich

Definition 3.1.6
Ein **skalenkovarianter** *Differentialoperator H ist ein Differentialoperator der Ordnung $2l$, welcher geometrisch ist (d.h. die Koeffizienten von H bezüglich der kovarianten Ableitungen sind Funktionen der Metrik und ihrer Ableitungen) und der unter Umskalierung $\widetilde{g} = \lambda g$ der Metrik g um einen konstanten Faktor $\lambda > 0$ in $\widetilde{H} = \lambda^{-l} H$ übergeht.*

Der von mir vornehmlich verwendete Dolbeaut-Laplace-Operator ist ein skalenkovarianter Differentialoperator [Be2, 1.159].

Lemma 3.1.7
Ist H ein skalenkovarianter, selbstadjungierter verallgemeinerter Laplace-Operator, dann geht die Zetafunktion ζ_H zu H unter Umskalierung $\widetilde{g} = \lambda g$ der Metrik g um einen konstanten Faktor $\lambda > 0$ in die Zetafunktion $\zeta_{\widetilde{H}}(s) = \lambda^s \zeta_H(s)$ über.
<u>*Beweis:*</u>
Für Re $s > \frac{N}{2}$ ist die Formel klar, da dort mit $\widetilde{H} = \lambda^{-1} H$ folgt: $\zeta_{\widetilde{H}}(s) = \mathrm{tr}\,((\widetilde{H}')^{-s}) = \lambda^s \,\mathrm{tr}\,((H')^{-s}) = \lambda^s \zeta_H(s)$. Weil beide Seiten der Gleichung eindeutige meromorphe Fortsetzungen nach $\mathbb{C}$ besitzen, folgt die Behauptung. □

3.2 Definition der analytischen Ray-Singer-Torsion

Sei wieder $E \longrightarrow X$ ein holomorphes Hermitesches Vektorbündel. Mit Hilfe der in Definition 3.1.1 eingeführten Zetafunktion $\zeta_{p,q}$ läßt sich die **analytische Ray-Singer-Torsion** als Produkt von regularisierten Determinanten des Dolbeaut-Laplace-Operators definieren [RS2]:

Definition 3.2.1
Ist (X, g) eine N-dimensionale kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit und $E \longrightarrow X$ ein holomorphes Hermitesches Vektorbündel, so ist die **analytische Ray-Singer-Torsion** *(auch kurz „***analytische Torsion***") $\tau_p(X, g)$ für $p \in \{0, ..., N\}$ definiert durch*

$$\tau_p(X,g) := \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{N}(-1)^q q \;\; \frac{d}{ds}\zeta_{p,q}(s)_{|\,s=0}\right) \overset{\text{Definition 3.1.3}}{=} \prod_{q=0}^{N} \left(\det \Delta_{p,q}\right)^{(-1)^{q+1}\, q/2} .$$

Bemerkung 3.2.2

i. Die ursprüngliche Definition von D.B. Ray und I.M. Singer erfolgte nur für spezielle Bündel $E \longrightarrow X$ [RS2]:

   $\chi : \pi_1(X) \longrightarrow GL(V)$ sei eine endlichdimensionale unitäre Darstellung der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ von X, und E_χ sei das **assoziierte Vektorbündel**: $\pi_1(X)$ operiert auf der universellen Überlagerung $\widetilde{X}$ von X durch Decktransformationen, daher hat man auf $\widetilde{X} \times V$ eine Äquivalenzrelation, nämlich $\forall\, \gamma \in \pi_1(X),\ (x, v) \in \widetilde{X} \times V$: $(x, v) \sim (\gamma.x, \chi(\gamma)(v))$; dann ist $E_\chi := \widetilde{X} \times V/\sim$.

   E_χ ist ein flaches holomorphes Bündel über X, so daß wie vorher $\Lambda^{p,q}(X, E_\chi)$ betrachtet werden kann: Das sind die Formen $\widetilde{f}$ auf der universellen Überlagerung $\widetilde{X}$ von X mit Werten in V, die für jedes $\gamma \in \pi_1(X)$ die Transformationsgleichung $\widetilde{f} \circ \gamma = \chi(\gamma) \circ \widetilde{f}$ erfüllen. Weil E_χ holomorph ist, kann auch die Dolbeaut-Kohomologie gebildet und im übrigen genauso wie oben vorgegangen werden, um die analytische Torsion zu definieren.

   D.B. Ray und I.M. Singer untersuchten insbesondere auch die Abhängigkeit der analytischen Torsion von der Darstellung χ [RS2].

ii. Da $\Delta_{p,q}$ von der Metrik g abhängt, ist dies auch für die analytische Ray-Singer--Torsion der Fall; eines der Ziele der vorliegenden Arbeit ist es ja gerade, die Abhängigkeit der analytischen Torsion von der Metrik zu untersuchen.

   Im Gegensatz dazu ist die auf *reellen Mannigfaltigkeiten* definierte **Ray-Singer--Torsion** $\tilde{\tau}$ [RS1] unabhängig von der Metrik (abgesehen von Beiträgen der harmonischen Formen) [RS1, Theorem 2.1], was sehr wichtig ist im Hinblick auf deren physikalische Interpretation im Zusammenhang mit stationären Phasenapproximationen des Pfadintegrales auf Riemannschen Flächen (siehe [At2, p.55ff]). Ich gehe darauf in Kapitel 9.1 näher ein.

   $\tilde{\tau}$ wird ganz analog zu Definition 3.2.1 gebildet, indem die Terme $q\zeta_{p,q}$ durch $r\zeta_r$ ersetzt werden, wobei ζ_r die Zetafunktion auf $\Lambda^r(X, E_\chi)$ zum de Rham-Laplace-Operator Δ_r ist.

   Daß $\tilde{\tau}$ von der Metrik unabhängig ist, beweist man für gerade reelle Dimension mit einem zu Lemma 3.1.2 analogen Sätzchen (siehe unten). Für Mannigfaltigkeiten X ungerader reeller Dimension mit verschwindender Kohomologie mit Werten in E_χ wird im oben zitierten Artikel von D.B. Ray und I.M. Singer gezeigt, daß für zwei Riemannsche Metriken g und g' auf X gilt: $\forall\, u \in [0, 1] : \frac{d}{du}\tilde{\tau}(X, (1-u)g + ug') = 0$. Dies ist lediglich eine Folgerung aus der Tatsache, daß die asymptotische Entwicklung der entsprechenden Wärmeleitungskerne für $t \to 0$ keine singulären Terme enthält, da $\frac{1}{2}\dim(X) \notin \mathbb{N}$; es folgt natürlich die Unabhängigkeit der Torsion $\tilde{\tau}$ von der Metrik.

Faßt man die Kähler-Mannigfaltigkeit X als reelle Mannigfaltigkeit der Dimension $2N$ auf, so kann natürlich auch die Ray-Singer-Torsion $\tilde{\tau}(X)$ gebildet werden, und nach obigem ist

$$\log \tilde{\tau}(X) = \sum_{p=0}^{N} (-1)^p \log \tau_p(X,g)$$

(hier habe ich unter anderem Lemma 3.1.2 verwendet). Diese Summe verschwindet [RS2, Theorem 3.1], so daß $\tilde{\tau}$ auf der Kähler-Mannigfaltigkeit X immer 1 und daher nicht besonders spannend ist.

Auf komplex zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten ist nur eine der drei Torsionen aus Definition 3.2.1 „interessant“:

Satz 3.2.3
Für $\dim_{\mathbb{C}} X = N = 2$ *gilt:*

$$\tau_1(X,g) = 1 \ , \ \tau_2(X,g) = (\tau_0(X,g))^{-1} \quad .$$

<u>*Beweis:*</u>
Da $\zeta_{p,q}$ in 0 analytisch ist, liefert Lemma 3.1.2 für $N = 2$:

$$\zeta'_{0,0}(0) = \zeta'_{0,1}(0) - \zeta'_{0,2}(0) \ . \tag{3.2.1}$$

Der Hodge-Operator $* : \Lambda^{p,q}(X,E) \longrightarrow \Lambda^{N-p,N-q}(X,E)$ definiert eine Bijektion, die mit dem Laplace-Operator vertauscht, d.h. insbesondere für $N = 2$

$$\zeta'_{2,1}(0) = \zeta'_{0,1}(0) \quad , \quad \zeta'_{2,2}(0) = \zeta'_{0,0}(0) \quad , \tag{3.2.2}$$

denn die Spektren von $\Delta_{p,q}$ und $\Delta_{N-p,N-q}$ müssen jeweils übereinstimmen. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\log \tau_2(X,g) &\overset{\text{Definition 3.2.1}}{=} -\frac{1}{2}\zeta'_{2,1}(0) + \zeta'_{2,2}(0) \\
&\overset{(3.2.2)}{=} -\frac{1}{2}\zeta'_{0,1}(0) + \zeta'_{0,0}(0) \\
&\overset{(3.2.1)}{=} -\frac{1}{2}\zeta'_{0,1}(0) + \zeta'_{0,1}(0) - \zeta'_{0,2}(0) \\
&= -\left(-\frac{1}{2}\zeta'_{0,1}(0) + \zeta'_{0,2}(0)\right) \\
\overset{\text{Definition 3.2.1}}{\Longrightarrow} \quad \log \tau_2(X,g) &= -\log \tau_0(X,g) \quad .
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Es gilt $\sum_{p=0}^{N} (-1)^p \log \tau_p(X,g) = 0$ [RS2, Theorem 3.1], also für $N = 2$:

$$\log \tau_1(X,g) = \log \tau_0(X,g) + \log \tau_2(X,g) \overset{(3.2.3)}{=} 0 \quad . \tag{3.2.4}$$

(3.2.3) und (3.2.4) liefern die Behauptungen. □

æ

3.3 Determinantenbündel und Quillenmetrik

In diesem Kapitel erläutere ich eine *geometrische Interpretation* der analytischen Torsion mit Hilfe der Quillenmetrik auf Determinantenbündeln.
Die Konstruktionen gehen auf Ideen von D. Quillen zurück, die das Verständnis in der allgemeinen Situation erleichtern. Ich stelle sie auch aus historischen Gründen im ersten Unterkapitel kurz dar. Im zweiten Unterkapitel gebe ich das endlichdimensionale Analogon für die Konstruktion des Determinantenbündels über Familien von Dirac-Operatoren auf kompakten Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension an, die ich dann in den weiteren drei Unterkapiteln erläutere, und die auf J.-M. Bismut und D.S. Freed zurückgehen [BF1, BF2].

Quillens Definition von Determinantenbündel und Quillenmetrik

Nach D. Quillen kann man ein Determinantenbündel über dem Raum $\mathcal{F}$ von Fredholm-Operatoren zwischen zwei Hilberträumen $\mathcal{H}^0$ und $\mathcal{H}^1$ konstruieren [Qu]. Er definiert ein holomorphes Linienbündel $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{F}$ mit Fasern $\mathcal{L}_T = \det(\ker T)^* \otimes \det(\operatorname{coker} T)$, wobei für einen endlichdimensionalen Vektorraum V mit $\det V$ die höchste äußere Potenz von V gemeint ist. Um lokale Trivialisierungen von $\mathcal{L}$ anzugeben, werden folgendermaßen offene Umgebungen in $\mathcal{F}$ konstruiert: Ist $F \subset \mathcal{H}^1$ ein endlichdimensionaler Unterraum, dann sei $U_F := \{T \in \mathcal{F} \mid \operatorname{im} T + F = \mathcal{H}^1\}$. Für $T \in U_F$ hat man nun exakte Sequenzen

$$0 \to \ker T \hookrightarrow T^{-1}F \xrightarrow{T} F \to \operatorname{coker} T \to 0 \quad , \tag{3.3.1}$$

also kanonische Isomorphismen $\det(T^{-1}F)^* \otimes \det(F) \cong \det(\ker T)^* \otimes \det(\operatorname{coker} T)$, mit deren Hilfe man über der offenen Umgebung $U_F \subset \mathcal{F}$ die komplexe Struktur des holomorphen Bündels $\coprod_{T \in U_F} \det(T^{-1}F)^* \otimes \det(F)$ nach $\mathcal{L}_{|U_F}$ zurückziehen kann.
Über der Zusammenhangskomponente von $\mathcal{F}$ aller Fredholm-Operatoren vom Index 0 hat $\mathcal{L}$ einen holomorphen Schnitt σ, der unter dem kanonischen Isomorphismus $\mathcal{L}_T \cong \mathbb{C}$ genau in denjenigen $T \in \mathcal{F}$ verschwindet, welche nicht invertierbar sind, und überall sonst 1 ist [Qu, p.32].
Nun sei X eine kompakte komplex eindimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $E \longrightarrow X$ ein C^∞-Bündel; $\mathcal{A}^{1,1}$ bezeichne den affinen Raum aller Differentialoperatoren $D : \Lambda^{0,0}(E) \longrightarrow \Lambda^{0,1}(E)$, welche bezüglich einer lokalen Koordinate z auf X und eines lokalen Rahmens auf E die Gestalt $D = d\bar{z}\,(\partial_{\bar{z}} + \alpha(z))$ mit glattem α haben; für $D \in \mathcal{A}^{1,1}$ und $f \in \Lambda^{0,0}(T^*X), s \in \Gamma(X, E)$, also $s \otimes f \in \Lambda^{0,0}(X, E)$, gilt nach Konstruktion $D(s \otimes f) = (Ds) \otimes f + s \otimes Df$, und $D^2 = 0$ ist ebenfalls nach Konstruktion klar. Also gibt es nach dem Newlander-Nirenberg Theorem [NN] zu jedem $D \in \mathcal{A}^{1,1}$ eine holomorphe Struktur auf E. Umgekehrt kann man jeder holomorphen Struktur auf E einen Operator $D \in \mathcal{A}^{1,1}$ mit obigen Eigenschaften zuordnen, nämlich denjenigen Differentialoperator erster Ordnung, dessen Kern genau aus den holomorphen Schnitte von E besteht [GH, p.70]. Somit steht $\mathcal{A}^{1,1}$ in $1:1$-Korrespondenz zu den holomorphen Strukturen auf E, $\mathcal{A}^{1,1} \subset \mathcal{A} = \{\text{Raum der Zusammenhänge auf } E\}$ ist genau der Raum der *integrablen Zusammenhänge* auf E.

Jedem Element aus $\mathcal{A}^{1,1}$ kann in kanonischer Weise ein Fredholm-Operator zugeordnet werden, der quadratintegrierbare Schnitte von E in den Sobolevraum der $(0,1)$-Formen mit Werten in E und schwachen ersten Ableitungen abbildet [Qu, p.32]. Man erhält also eine affin lineare Abbildung von $\mathcal{A}^{1,1}$ nach $\mathcal{F}$ modulo kompakte Operatoren und kann so $\mathcal{L}$ nach $\mathcal{A}^{1,1}$ zurückziehen. Das zurückgezogene Bündel, das wieder mit $\mathcal{L}$ bezeichnet wird, ist holomorph und hat über den Operatoren vom Index 0 einen kanonischen holomorphen Schnitt, nämlich die Zurückziehung von σ, welcher ebenfalls mit σ bezeichnet wird (siehe [Qu, p.32]).

Definition 3.3.1
Sei X eine kompakte komplex eindimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einem C^∞-Bündel $E \longrightarrow X$. Weiter seien auf E ein inneres Produkt und auf X eine mit der komplexen Struktur verträgliche Riemannsche Metrik gegeben. Auf den Räumen $\ker D$ und $\operatorname{coker} D \cong \ker D^*$ werden dadurch ebenfalls innere Produkte induziert.
Auf $\mathcal{L}$ sei nun eine Metrik $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$ definiert, indem in jeder Faser $\mathcal{L}_D$ das eben beschriebene induzierte innere Produkt mit der jeweiligen regularisierten Determinante des Laplace-Operators D^*D multipliziert wird. Diese Metrik heißt **Quillenmetrik**.

Zum besseren Verständnis des folgenden Unterkapitels gebe ich den nächsten Satz mit Beweis an [Qu, p.32, Proposition]:

Satz 3.3.2
Die Quillenmetrik ist glatt.
Beweis:
Bezeichnet $\mathcal{H}^\pm_{[0,\mu)}$ die orthogonale direkte Summe der Eigenräume des Laplace-Operators $\Delta^+ = D^*D$ bzw. $\Delta^- = DD^*$ zu Eigenwerten in $[0,\mu)$, also

$$\mathcal{H}^+_{[0,\mu)} = \ker D \oplus \bigoplus_{0<\lambda<\mu} \Gamma_\lambda\left(D^*D\right), \quad \mathcal{H}^-_{[0,\mu)} = \ker D^* \oplus \bigoplus_{0<\lambda<\mu} \Gamma_\lambda\left(DD^*\right)$$

mit den Bezeichnungen und Ergebnissen aus dem Beweis von Lemma 3.1.2, so hat man wegen $\Gamma_\lambda(D^*D) \cong \Gamma_\lambda(DD^*)$ für $\lambda \neq 0$ (vergleiche Beweis von Lemma 3.1.2) offenbar einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathcal{L}_D \cong \det\left(\mathcal{H}^+_{[0,\mu)}\right)^* \otimes \det\left(\mathcal{H}^-_{[0,\mu)}\right) , \tag{3.3.2}$$

unter welchem die Quillenmetrik auf $\mathcal{L}_D$ einer Metrik entspricht, die durch Multiplikation der durch (3.3.1) auf $\det(\mathcal{H}^+_{[0,\mu)})^* \otimes \det(\mathcal{H}^-_{[0,\mu)})$ induzierten Metrik mit der regularisierten Determinante von $(DD^*)_{|\mathcal{H}^+_{[\mu,\infty)}}$ entsteht. Die Räume $\mathcal{H}^\pm_{[0,\mu)}$ sowie die regularisierten Determinanten von $(DD^*)_{|\mathcal{H}^+_{[\mu,\infty)}}$ hängen glatt von D ab, sofern μ nicht Eigenwert von D ist. μ ist aber beliebig, woraus die Glattheit des inneren Produktes auf $\mathcal{L}_D$ folgt. □

Aus obigen Überlegungen folgt weiter, daß im Fall vom Index 0 die Norm des kanonischen holomorphen Schnittes σ von $\mathcal{L}$ in $D \in \mathcal{A}^{1,1}$ gerade die regularisierte Determinante des Laplace-Operators D^*D ist, sofern $\ker D = \{0\}$ (andernfalls ist ja $\sigma_D = 0$).

Jeder komplexen Struktur auf X entspricht demnach ein Operator $D \in \mathcal{A}^{1,1}$, dem wiederum ein Laplace-Operator D^*D zugeordnet ist. Seine regularisierte Determinante

$$\begin{aligned} \|\sigma_D\|_Q^2 \;=\; \det(D^*D) \quad &= \quad e^{-\frac{d}{ds}(\zeta_{0,0}(s))_{|s=0}} \\ &\overset{\text{Lemma 3.1.2}}{=} \quad e^{-\frac{d}{ds}(\zeta_{0,1}(s))_{|s=0}} \overset{\text{Definition 3.2.1}}{=} (\tau_0(X))^2 \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

kann nach Quillen als Korrekturfaktor interpretiert werden, um aus der auf den Fasern von $\mathcal{L}_D$ kanonisch induzierten Metrik eine glatte Metrik auf $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{A}^{1,1}$ zu machen.
Um diese Ergebnisse auf den in Kapitel 1.2 definierten Dolbeaut-Laplace-Operator anwenden zu können, muß man als Hilbertraum $\mathcal{H}^0$ natürlich das orthogonale Komplement der 1 in $C^\infty(X, \mathbb{C})$ wählen.
Die Konstruktion von Quillen kann auf Kähler-Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension verallgemeinert werden, wie ich im folgenden Unterkapitel erläutern werde. Ebenso kann folgendes zentrale Ergebnis von D. Quillen [Qu] verallgemeinert werden (zum Beweis für den hier angegebenen Spezialfall siehe [Qu, p.34]):
Da $\mathcal{A}^{1,1}$ ein affiner Raum bezüglich $\Lambda^{0,1}(\mathrm{End}E)$ ist, gibt es auf $\mathcal{A}^{1,1}$ eine Kählerform, die zu folgendem inneren Produkt auf $\Lambda^{0,1}(\mathrm{End}E)$ gehört:

$$\forall\, B \in \Lambda^{0,1}(\mathrm{End}E): \; \|B\|^2 := \frac{i}{2\pi} \int_X \mathrm{tr}_E\,(B^*B) \quad . \tag{3.3.4}$$

Satz 3.3.3
Die Krümmungsform des Determinantenbündels $\mathcal{L}$ mit der Quillenmetrik und zugehörigem holomorphem Zusammenhang ist gleich der Kählerform zum inneren Produkt (3.3.4).

Nach Wahl eines Basispunktes $D_0 \in \mathcal{A}^{1,1}$ kann man nun leicht einen flachen Zusammenhang auf $\mathcal{L}$ angeben: Man definiert $q(D) := \|D - D_0\|^2$, dann ist $\partial\overline{\partial}q$ gerade die Kählerform zum inneren Produkt (3.3.4), und der holomorphe Zusammenhang zu derjenigen Metrik, welche durch Multiplikation der Quillenmetrik mit $e^{q(D)}$ entsteht, ist flach. $\mathcal{L}$ kann also mit Hilfe eines parallelen Schnittes trivialisiert werden. Über den Operatoren mit Index 0 definiert das Bild des kanonischen holomorphen Schnittes σ von $\mathcal{L}$ unter dieser Trivialisierung eine holomorphe Funktion $\det(D, D_0)$ auf $\mathcal{A}^{(1,1)}$ mit

$$|\det(D, D_0)|^2 = \det(D^*D)e^{q(D)} \quad .$$

$\det(D, D_0)$ ist bis auf einen skalaren Phasenfaktor vom Betrag 1 durch obige Gleichung schon eindeutig bestimmt [Qu, p.33, Corollary]. Aus der Abhängigkeit dieser Funktion vom Basispunkt D_0 folgt jedoch, daß sie **nicht** eichinvariant ist: Es ist im allgemeinen nicht möglich, eine Determinante von D zu definieren, die sowohl holomorph als auch eichinvariant ist (Stichwort „Anomalien": siehe Kapitel 8.5).

Ein endlichdimensionales Analogon

In diesem Unterkapitel folge ich im wesentlichen den Ausführungen in der Arbeit [BGSI]. Sei

$$(H,\overline{\partial}):\ 0 = H^{-1} \longrightarrow H^0 \xrightarrow{\overline{\partial}} H^1 \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} H^l \longrightarrow H^{l+1} = 0$$

ein azyklischer Komplex endlichdimensionaler Hermitescher Vektorräume H^q. Weil $(H,\overline{\partial})$ azyklisch ist, muß für alle $q \in \{0,...,l\}:\ H^q = \overline{\partial}H^{q-1} \oplus \overline{\partial}^* H^{q+1}$ gelten, und mit $n_q := \dim(\overline{\partial}H^q)$ folgt

$$\dim H^q = n_{q-1} + n_q \quad . \tag{3.3.5}$$

Nun sei $H^+ := \bigoplus_q H^{2q},\ H^- := \bigoplus_q H^{2q+1}$, und mit $D := \overline{\partial} + \overline{\partial}^*$ in Analogie zu Lemma 3.1.2 sei $D_q := D_{|H^q}$ sowie $D^{\pm} := D_{|H^{\pm}}$. Wie im vorigen Unterkapitel ist für einen endlichdimensionalen Vektorraum V mit $\det V$ die höchste äußere Potenz gemeint. Die eindimensionalen Vektorräume $\det H^{\pm}$ und $\det H^q$ seien mit den von den Vektorräumen H^q kanonisch induzierten Hermiteschen Metriken versehen, die alle mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezeichnet werden.

Der zur analytischen Ray-Singer-Torsion analoge Ausdruck ist jetzt

$$\tau := \left\{ \left(\det D_1^2\right) \left(\det D_2^2\right)^{-2} \left(\det D_3^2\right)^3 \cdots \right\}^{\frac{1}{2}} \quad , \tag{3.3.6}$$

und der zum Determinantenbündel analoge Vektorraum ist

$$L := \left(\det H^0\right)^* \otimes \left(\det H^1\right) \otimes \left(\det H^2\right)^* \otimes \cdots \quad .$$

Es soll nun ein kanonisches Element von L gefunden und gezeigt werden, daß dessen Norm gerade τ ist:

Dazu wählt man für $q \in \{0,...,l\}$ Elemente $s^q \in \Lambda^{n_q}(H^q)$ mit $\overline{\partial}s^q \neq 0$. Dann ist nämlich $\overline{\partial}s^q \wedge s^{q+1} \in \det H^{q+1} - \{0\}$ und

$$\sigma := (s^0)^* \otimes \left(\overline{\partial}s^0 \wedge s^1\right) \otimes \left(\overline{\partial}s^1 \wedge s^2\right)^* \otimes \cdots \quad \in L \tag{3.3.7}$$

ist unabhängig von der Wahl der s^q (denn diese findet jeweils in einem eindimensionalen Vektorraum statt) und nicht Null und wird darum als *kanonisches Element* bezeichnet. Um die Norm von σ zu berechnen, bedient man sich eines eindimensionalen „Hilfsvektorraumes“

$$L' := \left(\det H^+\right)^* \otimes \det H^- \quad ,$$

der vermöge der Abbildung

$$\iota : L \longrightarrow L', \quad (t^0)^* \otimes t^1 \otimes (t^2)^* \otimes \cdots \mapsto \left(t^0 \wedge t^2 \wedge \cdots\right)^* \otimes \left(t^1 \wedge t^3 \wedge \cdots\right)$$

isometrisch zu L ist. Jetzt wird das kanonische Element von L' bestimmt:

Wählt man ein $s \in \det H^+$ mit $s \neq 0$, dann ist $\det D^+ := s^* \otimes D^+ s \in L'$ offenbar unabhängig von der Wahl von s. Die Bezeichnung $\det D^+$ erklärt sich aus folgender kleiner Rechnung:

$$\left|\det D^+\right|^2 = \left\langle s^* \otimes D^+ s, s^* \otimes D^+ s\right\rangle = |s^*|^2 \left\langle D^2 s, s\right\rangle = \prod_q \det(D_{2q})^2 \quad .$$

$(H, \overline{\partial})$ kann jetzt in azyklische Komplexe aus Eigenräumen von D^2 zu den einzelnen Eigenwerten $\lambda \in \operatorname{spec}(D^2)$ mit $\lambda \neq 0$ aufgespalten werden. Darum kann ab sofort o.B.d.A. angenommen werden, D^2 habe nur einen einzigen Eigenwert $\lambda > 0$, und es folgt:

$$\left|\det D^+\right|^2 = \lambda^{\dim H^0 + \dim H^2 + \cdots} \overset{(3.3.5)}{=} \lambda^{n_0 + n_1 + n_2 + \cdots} \quad . \tag{3.3.8}$$

Wählt man jetzt Elemente $s^q \in \det(\overline{\partial}^* H^{q+1})$ mit $s^q \neq 0$ und $D^2 s^q = \lambda s^q$, dann ist $s := s^0 \wedge (\overline{\partial} s^1 \wedge s^2) \wedge (\overline{\partial} s^3 \wedge s^4) \wedge \cdots \in \det H^+$ und $s \neq 0$ sowie

$$\begin{aligned}
D^+ s &= \left(\overline{\partial} s^0 \wedge \overline{\partial}^* \overline{\partial} s^1\right) \wedge \left(\overline{\partial} s^2 \wedge \overline{\partial}^* \overline{\partial} s^3\right) \wedge \cdots \\
&= \left(\overline{\partial} s^0 \wedge \lambda^{n_1} s^1\right) \wedge \left(\overline{\partial} s^2 \wedge \lambda^{n_3} s^3\right) \wedge \cdots \\
\Longrightarrow \quad \det D^+ &= \lambda^{n_1 + n_3 + \cdots} \left(s^0 \wedge \left(\overline{\partial} s^1 \wedge s^2\right) \wedge \cdots\right)^* \otimes \left(\left(\overline{\partial} s^0 \wedge s^1\right) \wedge \left(\overline{\partial} s^2 \wedge s^3\right) \wedge \cdots\right) \\
&= \lambda^{n_1 + n_3 + \cdots} \iota \left((s^0)^* \otimes \left(\overline{\partial} s^0 \wedge s^1\right) \otimes \left(\overline{\partial} s^1 \wedge s^2\right)^* \otimes \cdots\right) \\
&\overset{(3.3.7)}{=} \lambda^{n_1 + n_3 + \cdots} \iota(\sigma) \quad .
\end{aligned}$$

Damit erhält man das gewünschte Resultat:

$$\begin{aligned}
|\sigma|^2 &= |\iota(\sigma)|^2 = \left|\det D^+\right|^2 \lambda^{-2n_1 - 2n_3 - \cdots} \\
&\overset{(3.3.8)}{=} \lambda^{n_0 - n_1 + n_2 \pm \cdots} \overset{(3.3.5)}{=} \lambda^{\dim H^1 - 2\dim H^2 + 3\dim H^3 \pm \cdots} \\
&= \left(\det D_1^2\right) \left(\det D_2^2\right)^{-2} \left(\det D_3^2\right)^3 \cdots \\
&\overset{(3.3.6)}{=} \tau^2 \quad .
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Die Norm des kanonischen Elementes des Determinantenbündels ist also gerade der Ausdruck, welcher der analytischen Ray-Singer-Torsion entspricht.
Dies gilt es nun auf die unendlichdimensionale Situation zu verallgemeinern. J.-M. Bismut verallgemeinerte Quillens Konstruktion des Determinantenbündels auf Kähler-Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension und definierte Zusammenhänge auf diesen Bündeln [Bi]; die Quillenmetrik konstruierten J.-M. Bismut und D.S. Freed auf Determinantenbündeln über Familien elliptischer Operatoren erster Ordnung [BF1] und speziell über Familien von Dirac-Operatoren [BF2].

Die Bausteine für das Determinantenbündel

Ich folge hier den Darstellungen in den Referenzen [BGSII] und [BGV, §§9.2,9.7].
Es sei $(M_z \mid z \in B)$ eine **Familie von komplexen Mannigfaltigkeiten**, d.h. M und B sind komplexe Mannigfaltigkeiten und $\pi : M \longrightarrow B$ ein glattes Faserbündel mit $M_z := \pi^{-1}(z) \cong Z$. Die Fasern M_z seien dabei alle kompakt und π sei holomorph. J sei die komplexe Struktur auf M. $TZ \subset TM$ bezeichne das Bündel der vertikalen Tangentialvektoren, und T^HM sei ein glattes Unterbündel von TM mit $TM = T^HM \oplus TZ$. Weiter sei (π, g^Z, T^HM) eine **Kählerfaserung**, d.h. $g^Z = \langle\cdot,\cdot\rangle$ ist eine glatte Metrik auf TZ und es existiert eine geschlossene $(1,1)$-Form ω auf M, so daß T^HM und TZ orthogonal sind bezüglich ω und für alle $\nu, \nu' \in TZ$ gilt: $\omega(\nu,\nu') = \langle J\nu, \nu'\rangle$.
$\mathcal{E} \longrightarrow M$ sei ein holomorphes Hermitesches Vektorbündel, $\Lambda^{0,q}(T^*Z) \otimes \mathcal{E}$ ist dann für $q \in \mathbb{N}$ ebenfalls ein holomorphes Bündel über M. Dem Bündel $\mathcal{E} \longrightarrow M$ werden für $q \in \{0, ..., l := \dim_{\mathbb{C}} Z\}$ unendlichdimensionale Bündel über B assoziiert, die mit $E^q := \Gamma(M, \Lambda^{0,q}(T^*Z) \otimes \mathcal{E}) \longrightarrow B$ bezeichnet werden und deren Fasern in $z \in B$ durch $E^q_z = \Gamma(M_z, \Lambda^{0,q}(T^*Z) \otimes \mathcal{E})$ gegeben sind. Nun setzt man $E^+ := \bigoplus_q E^{2q}$, $E^- := \bigoplus_q E^{2q+1}$ und erhält das Superbündel $E := E^+ \oplus E^-$. Für jedes $z \in B$ trägt die Faser E_z eine kanonische Metrik: Für $\psi_z \in E_z = \Gamma(M_z, \bigoplus_q \Lambda^{0,q}(T^*Z) \otimes \mathcal{E})$ ist in jedem $x \in M_z$ die Norm $|\psi_z(x)|$ über die von g^Z und der Metrik auf $\mathcal{E}$ induzierte Metrik definiert, so daß

$$|\psi_z|^2_{L^2(M_z,dx)} := \int_{M_z} |\psi_z(x)|^2 \, dx \tag{3.3.10}$$

mit dem Riemannschen Volumenelement dx wohldefiniert ist. Die Metrik $|\cdot|_{L^2(M_z,dx)}$ auf E_z heißt **L^2-Metrik**.
Die Fasern E_z von E tragen induzierte holomorphe Strukturen mit zugehörigen $\overline{\partial}$-Operatoren $\overline{\partial}_z$ [BGSII, p.89]; dann ist durch $D_z := \overline{\partial}_z + \overline{\partial}^*_z$ eine **Familie von Dirac-Operatoren** definiert, die ich generell als **Dolbeaut-Dirac-Operatoren** bezeichne, wobei D_z auf der Faser E_z operiert. Für jedes $z \in B$ sind also $D^\pm_z : E^\pm_z = \Gamma(M_z, \Lambda^{0,\pm}(T^*Z) \otimes \mathcal{E}) \longrightarrow E^\mp_z = \Gamma(M_z, \Lambda^{0,\mp}(T^*Z) \otimes \mathcal{E})$ Differentialoperatoren erster Ordnung und $(D_z)^2$ ist ein verallgemeinerter Laplace-Operator wie in Definition 3.1.4 (die Operatoren D_z liegen demnach im Raum $\mathcal{A}^{1,1}$ der integrablen Zusammenhänge, der im ersten Unterkapitel definiert wurde, wenn statt des dortigen Bündels E das Bündel $\bigoplus_q \Lambda^{0,q}(T^*Z) \otimes \mathcal{E}$ eingesetzt wird).
Jetzt sind alle Bausteine zurechtgelegt, um das Determinantenbündel basteln zu können:

Konstruktion des Determinantenbündels

In diesem und dem nächsten Unterkapitel folge ich im wesentlichen der Darstellung in der Arbeit [BGSIII].
Über B soll das zu der Familie $D = (D_z \mid z \in B)$ gehörige Determinantenbündel definiert werden; die Operatoren D_z sind auf den Fasern des Bündels E definiert, die aber unendlichdimensional sind, so daß das endlichdimensionale Analogon aus dem zweiten Unterkapitel erst verallgemeinert werden muß. Dafür kann natürlich der Trick aus der

Konstruktion von Quillen verwendet werden: Das Determinantenbündel wird aus endlichdimensionalen Unterbündeln zusammengeklebt, auf denen das endlichdimensionale Analogon benutzt werden kann. Quillens Idee ist darum nicht so einfach auf beliebige Dimensionen zu verallgemeinern, weil $D = \overline{\partial} + \overline{\partial}^*$ im allgemeinen nicht in eine *holomorphe* Familie von Dirac-Operatoren eingebettet werden kann; im eindimensionalen Fall war $D = \overline{\partial}$, so daß diese Schwierigkeit nicht auftrat. Daher erweist es sich als technisch einfacher, nicht vollständig die Analogie zu Quillens Methode [Qu] zu wahren, sondern für die Definition des Determinantenbündels den Isomorphismus (3.3.2) heranzuziehen.

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $U_\lambda := \{z \in B \mid \lambda \notin \operatorname{spec}(D_z^2)\} \subset B$, und $\left((P^q_{[0,\lambda)})_z \mid z \in U_\lambda\right)$ sei die Familie der orthogonalen Projektionen auf die orthogonale direkte Summe von Eigenräumen des verallgemeinerten Laplace-Operators $(D_z)^2$ als Operator auf E^q_z zu Eigenwerten kleiner als λ. Die U_λ bilden eine offene Überdeckung von B (dies ist klar, da die Operatoren $(D_z)^2$ diskretes Spektrum haben), und durch $(\mathcal{H}^q_{[0,\lambda)})_z := (P^q_{[0,\lambda)})_z\,(E^q_z)$ werden glatte endlichdimensionale Superbündel $\mathcal{H}^q_{[0,\lambda)} \subset E^q$ über U_λ definiert [BGV, Proposition 9.10]. Nun sei wie vorher

$$\mathcal{H}^+_{[0,\lambda)} := \bigoplus_q \mathcal{H}^{2q}_{[0,\lambda)}, \quad \mathcal{H}^-_{[0,\lambda)} := \bigoplus_q \mathcal{H}^{2q+1}_{[0,\lambda)}, \quad \mathcal{H}_{[0,\lambda)} := \mathcal{H}^+_{[0,\lambda)} \oplus \mathcal{H}^-_{[0,\lambda)} \quad .$$

Weil alle diese Bündel endlichdimensional sind, kann das endlichdimensionale Analogon benutzt und das Linienbündel

$$\mathcal{L}_{[0,\lambda)} = \det\left(\mathcal{H}_{[0,\lambda)}\right) := \left(\det \mathcal{H}^0_{[0,\lambda)}\right)^* \otimes \left(\det \mathcal{H}^1_{[0,\lambda)}\right) \otimes \left(\det \mathcal{H}^2_{[0,\lambda)}\right)^* \cdots$$

über U_λ definiert werden.

Für $0 < \lambda < \mu$ sei analog zu den obigen Bezeichnungen $\left((P^q_{(\lambda,\mu)})_z \mid z \in U_\lambda \cap U_\mu\right)$ die Familie von orthogonalen Projektionen auf die orthogonale direkte Summe aus Eigenräumen der $(D_z)^2$ als Operatoren auf E^q_z zu Eigenwerten in (λ, μ), und $(\mathcal{H}^q_{(\lambda,\mu)})_z := (P^q_{(\lambda,\mu)})_z\,(E^q_z)$ sind wieder die Fasern von glatten endlichdimensionalen Superbündeln. Mit diesen Daten können auch völlig analog zu obigem die Bündel $\mathcal{H}^\pm_{(\lambda,\mu)}$, $\mathcal{H}_{(\lambda,\mu)}$ sowie ein glattes Linienbündel $\mathcal{L}_{(\lambda,\mu)} = \det(\mathcal{H}_{(\lambda,\mu)})$ über $U_\lambda \cap U_\mu$ definiert werden.

Ist $\overline{\partial}_{(\lambda,\mu)}$ die Einschränkung von $\overline{\partial}$ auf $\mathcal{H}_{(\lambda,\mu)}$, dann ist nach Konstruktion der Kettenkomplex

$$(\mathcal{H}_{(\lambda,\mu)}, \overline{\partial}):\ 0 \longrightarrow \mathcal{H}^0_{(\lambda,\mu)} \xrightarrow{\overline{\partial}_{(\lambda,\mu)}} \mathcal{H}^1_{(\lambda,\mu)} \xrightarrow{\overline{\partial}_{(\lambda,\mu)}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}_{(\lambda,\mu)}} \mathcal{H}^l_{(\lambda,\mu)} \longrightarrow 0$$

azyklisch, so daß auch die Ergebnisse aus dem endlichdimensionalen Analogon benutzt werden können:

$\mathcal{L}_{(\lambda,\mu)}$ besitzt einen kanonischen von Null verschiedenen glatten Schnitt $\sigma_{(\lambda,\mu)}$ über $U_\lambda \cap U_\mu$ [BGSIII, p.305], der $\mathcal{L}_{(\lambda,\mu)}$ somit trivialisiert. Wegen

$$\mathcal{H}_{[0,\mu)} = \mathcal{H}_{[0,\lambda)} \oplus \mathcal{H}_{(\lambda,\mu)}$$

für $\lambda < \mu$ gilt

$$\mathcal{L}_{[0,\mu)} \cong \mathcal{L}_{[0,\lambda)} \otimes \mathcal{L}_{(\lambda,\mu)} \quad ,$$

und $\mathcal{L}_{[0,\lambda)}$ kann über $U_\lambda \cap U_\mu$ mit $\mathcal{L}_{[0,\mu)}$ via

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_{[0,\lambda)} & \longrightarrow & \mathcal{L}_{[0,\mu)} \\ s & \mapsto & s \otimes \sigma_{(\lambda,\mu)} \end{array} \tag{3.3.11}$$

identifiziert werden. Darum kann definiert werden:

Definition 3.3.4
Das Linienbündel, welches durch Zusammenkleben der Bündel $\mathcal{L}_{[0,\lambda)} = \det(\mathcal{H}_{[0,\lambda)})$ *nach obiger Klebevorschrift* (3.3.11) *entsteht, wird mit* $\mathcal{L} = \det(\mathcal{E}, D)$ *bezeichnet und* **Determinantenbündel** *zur Familie* D *von Dirac-Operatoren genannt.*

Offensichtlich hat man jetzt einen Isomorphismus

$$\det(\mathcal{E}, D) \cong \det(\ker D)^* \otimes \det(\ker D^*) \quad ,$$

auf dem ja Quillens Konstruktion beruhte. Man kann zeigen ([BF1, Theorem 1.18] bzw. [BGSIII, Theorem 1.3]):

Satz 3.3.5
Für jedes $\lambda > 0$ *gibt es über* U_λ *eine eindeutig bestimmte holomorphe Struktur auf dem glatten Hermiteschen Linienbündel* $\mathcal{L}_{[0,\lambda)}$*, die mit der von der* L^2*-Metrik auf* E *induzierten Metrik* $|\cdot|_{[0,\lambda)}$ *verträglich ist.*
Ebenso gibt es für $0 < \lambda < \mu$ *über* $U_\lambda \cap U_\mu$ *eine eindeutig bestimmte holomorphe Struktur auf* $\mathcal{L}_{(\lambda,\mu)}$*, die mit der von der* L^2*-Metrik auf* E *induzierten Metrik* $|\cdot|_{(\lambda,\mu)}$ *verträglich ist.*
Der Schnitt $\sigma_{(\lambda,\mu)}$ *von* $\mathcal{L}_{(\lambda,\mu)}$ *verschwindet nirgends und ist holomorph über* $U_\lambda \cap U_\mu$*.*
Die holomorphe Struktur auf $\mathcal{L}_{[0,\lambda)} \longrightarrow U_\lambda$ *kann zu einer holomorphen Struktur auf dem Determinantenbündel* $\mathcal{L} = \det(\mathcal{E}, B) \longrightarrow B$ *zusammengesetzt werden.*

Konstruktion der Quillenmetrik

Nach Definition des Determinantenbündels ist für $0 < \lambda < \mu$ über $U_\lambda \cap U_\mu$ ein Schnitt $s \in \mathcal{L}_{[0,\lambda)}$ mit dem Schnitt $s \otimes \det \sigma_{(\lambda,\mu)} \in \mathcal{L}_{[0,\mu)}$ zu identifizieren (3.3.11).
Weil aber $(\mathcal{H}_{(\lambda,\mu)}, \overline{\partial}_{(\lambda,\mu)})$ nach Konstruktion ein azyklischer Komplex ist, gilt mit den Ergebnissen aus dem endlichdimensionalen Analogon $|\sigma_{(\lambda,\mu)}|_{(\lambda,\mu)} = \tau_{(\lambda,\mu)}$ (das zur analytischen Torsion analoge Element auf $\mathcal{L}_{(\lambda,\mu)}$ sei mit $\tau_{(\lambda,\mu)}$ bezeichnet). Weil $\mathcal{H}_{[0,\lambda)}$ und $\mathcal{H}_{(\lambda,\mu)}$ zu einander orthogonale Unterräume von $\mathcal{H}_{[0,\mu)}$ sind, folgt daraus für einen Schnitt s wie oben:

$$\left| s \otimes \sigma_{(\lambda,\mu)} \right|_{[0,\mu)} = |s|_{[0,\lambda)} \, \tau_{(\lambda,\mu)} \quad , \tag{3.3.12}$$

d.h. die L^2-Metriken auf den Unterbündeln $\mathcal{L}_{[0,\lambda)}$ „passen nicht zusammen“.
Jetzt erinnere man sich daran, wie Quillens Konstruktion funktionierte:

$(\zeta^q_{(\lambda,\mu)})_z$ bzw. $(\zeta^q_{[\mu,\infty)})_z$ seien die Zetafunktionen zu $(D_z)^2_{|\mathcal{H}^q_{(\lambda,\mu)}}$ bzw. $(D_z)^2_{|E^q-\mathcal{H}^q_{[0,\mu)}}$, dann sei mit $l = \dim_{\mathbb{C}} Z$

$$\vartheta_{(\lambda,\mu)} := \sum_{q=0}^{l}(-1)^q q\zeta^q_{(\lambda,\mu)}, \quad \vartheta_{[\mu,\infty)} := \sum_{q=0}^{l}(-1)^q q\zeta^q_{[\mu,\infty)} \quad .$$

Nach Konstruktion und wegen des endlichdimensionalen Analogons ist klar, daß über $U_\lambda \cap U_\mu$ die Gleichungen $\vartheta_{(\lambda,\mu)} + \vartheta_{[\mu,\infty)} = \vartheta_{[\lambda,\infty)}$ und $\log \tau_{(\lambda,\mu)} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\vartheta_{(\lambda,\mu)}(s)\right)_{|s=0}$ gelten müssen. Für

$$\tau^\lambda := \exp\left(\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\vartheta_{[\lambda,\infty)}(s)_{|\,s=0}\right)$$

gilt daher $\tau_{(\lambda,\mu)} \cdot \tau^\mu = \tau^\lambda$ über $U_\lambda \cap U_\mu$, und die Metriken $\|\cdot\|_\lambda := |\cdot|_{[0,\lambda)}\,\tau^\lambda$ auf U_λ „passen zusammen“, da jetzt über $U_\lambda \cap U_\mu$ für jeden Schnitt $s \in \mathcal{L}_{[0,\mu)}$ gilt:

$$\|s\|_\lambda = |s|_{[0,\lambda)}\,\tau^\lambda = |s|_{[0,\lambda)}\,\tau_{(\lambda,\mu)}\tau^\mu \overset{(3.3.12)}{=} |s \otimes \sigma_{(\lambda,\mu)}|_{[0,\mu)}\tau^\mu = \|s \otimes \sigma_{(\lambda,\mu)}\|_\mu \quad .$$

Damit kann definiert werden [BF1, Theorem 1.11]:

Definition 3.3.6
Die oben konstruierten Metriken $\|\cdot\|_\lambda = |\cdot|_{[0,\lambda)}\,\tau^\lambda$ über U_λ definieren eine glatte Metrik $\|\cdot\|_Q$ auf dem Determinantenbündel $\mathcal{L} = \det(\mathcal{E}, D)$. Diese Metrik heißt **Quillenmetrik**.

Wieder dient die analytische Ray-Singer-Torsion als Korrekturfaktor zu der kanonisch auf den Fasern induzierten Metrik, um eine glatte Metrik auf dem Determinantenbündel definieren zu können.
Hat die Familie D von Dirac-Operatoren Index 0, dann können über U_0 die Schnitte $\tau_{(\lambda,\mu)}$ der Bündel $\mathcal{L}_{(\lambda,\mu)}$ zu einem holomorphen, nirgends verschwindenen Schnitt τ zusammengeklebt werden, für den gilt:

$$\tau_0\left(M, g^Z\right) = \|\tau\| \quad ,$$

wobei $\tau_0(M_z, g^{Z_z})$ die analytische Ray-Singer-Torsion von (M_z, g^{Z_z}) mit $g^{Z_z} := g^Z_{|T_zZ}$ ist (siehe [BGSIII, Remark 1.10]).

Das zu Satz 3.3.3 analoge Ergebnis ist nur für Tensorprodukte mit gewissen *amplen Linienbündeln* richtig, so daß dessen Formulierung noch ein wenig mehr definitorische Vorarbeit erfordert. Ich werde es daher erst in Kapitel 7 zitieren. æ

Mathematische Ergebnisse

Nachdem der „Grundwortschatz“ *mathematischer Begriffe* bereitgestellt ist, kann ich die *mathematischen Resultate* darstellen. Dies ist allerdings nicht mehr in ganz so elementarer Form wie im ersten Abschnitt möglich.
Im folgenden werde ich die Metrik auf zwei verschiedene Weisen („konform“ bzw. „komplex“) auf diversen Mannigfaltigkeiten variieren und dabei das Verhalten der analytischen Ray-Singer-Torsion und der Quillenmetrik studieren. Insbesondere bin ich auf der Suche nach kritischen Punkten – oder aber nach einem geeigneten Funktional, dessen kritische Punkte interessante geometrische Eigenschaften haben.

4 Bekannte Ergebnisse für kompakte Riemannsche Flächen

Die analytische Ray-Singer-Torsion einer Riemannschen Fläche X hat besonders einfache Gestalt, denn es gilt

$$\tau_0(X) \overset{\text{Definition 3.2.1}}{=} e^{-\frac{1}{2}\zeta'_{0,1}(0)} \overset{\text{Lemma 3.1.2}}{=} e^{-\frac{1}{2}\zeta'_{0,0}(0)} \overset{\text{Definition 3.1.3}}{=} \det \Delta_{0,0} \quad .$$

Ist man also auf der Suche nach kritischen Punkten der analytischen Ray-Singer Torsion, so muß man die Determinante des Laplace-Operators $\Delta := \Delta_{0,0}$ variieren.
Weil Riemannsche Flächen als komplex eindimensionale Mannigfaltigkeiten automatisch Kähler sind, kann man die Metrik auch konform variieren, ohne die Kählereigenschaft zu verletzen (die Kählerklasse wird dabei allerdings nicht beibehalten). Die konforme Variation ist auf Riemannschen Flächen leichter zu handhaben als auf höherdimensionalen Mannigfaltigkeiten, da der Laplace-Operator in einer komplexen Dimension (und *nur* in einer komplexen Dimension) ein *konform kovarianter Operator* ist (siehe Kapitel 5.2). Andererseits ist das Verhalten des Laplace-Operators unter *konformer Variation* einfacher zu studieren als unter *Variation innerhalb der Kählerklasse*; dies kann man schon an den entsprechenden Variationsformeln für den Laplace-Operator erkennen [Ri, Lemma 1], [RS2, p.157].
Die Bestimmung von kritischen Punkten der Determinante des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen unter konformer Variation der Metrik haben B. Osgood, R. Phillips und P. Sarnak vollständig durchgeführt [OPS]: Ich werde die Ergebnisse kurz zusammenstellen und kommentieren, da sie als Motivation für das weitere Vorgehen bei der Bestimmung von kritischen Punkten der analytischen Torsion dienen können:
Im folgenden sei X eine kompakte Riemannsche Fläche mit glattem Rand ∂X. Die Variation kann sinnvoll nur unter geeigneten Nebenbedingungen durchgeführt werden, denn die Determinante des Laplace-Operators könnte ja prinzipiell durch Skalierung der Metrik mit einem konstanten Faktor beliebig klein gemacht werden: Der Laplace-Operator ist

nämlich skalenkovariant im Sinne von Definition 3.1.6 [Be2, 1.159], so daß man mit Lemma 3.1.7 leicht sieht, daß det Δ beliebig klein gemacht werden kann: $\zeta_{0,0}(0) = \frac{\chi(X)}{6} - 1 \neq 0$ [OPS, (1.9)]. Falls $\partial X = \emptyset$, ist es naheliegend, das Volumen der Mannigfaltigkeit während der Variation konstant zu halten. Für $\partial X \neq \emptyset$ stellt man unter anderem Dirichletsche Randbedingungen an den Laplace-Operator. Im einzelnen wird in der zitierten Arbeit folgender Satz bewiesen [OPS, Theorem 1]:

Satz 4.1
a) Ist X eine geschlossene Riemannsche Fläche, so hat innerhalb einer gegebenen konformen Klasse von Metriken bei vorgegebenem Volumen von X die **Metrik konstanter Krümmung** *die maximale Determinante des Laplace-Operators.*

b) Ist X eine kompakte Riemannsche Fläche mit glattem Rand $\partial X \neq \emptyset$, so hat innerhalb einer gegebenen konformen Klasse von Metriken g, die bei vorgegebenem Volumen der Bedingung

$$\int_X \kappa \mu_g \leq 2\pi\chi(X)$$

genügen (κ ist die Gaußkrümmung, μ_g die Volumenform zur Metrik g und $\chi(X)$ die Eulercharakteristik der Fläche), die **Metrik konstanter Krümmung, bezüglich der ∂X disjunkte Vereinigung geschlossener Geodätischer ist,** *die maximale Determinante des Laplace-Operators.*
Obige Bedingung ist nach dem Satz von Gauß-Bonnet äquivalent zu der Bedingung

$$\int_{\partial X} k \, ds_g \geq 0$$

(k ist die geodätische Krümmung von ∂X und ds_g bezeichnet die Bogenlänge bezüglich der Metrik g).

c) Ist X eine kompakte Riemannsche Fläche mit glattem Rand $\partial X \neq \emptyset$, so hat innerhalb einer gegebenen konformen Klasse von Metriken g, die bei vorgegebener Länge des Randes der Bedingung

$$\int_X \kappa \mu_g \leq 0$$

genügen, die **flache Metrik, bezüglich der ∂X konstante geodätische Krümmung hat,** *die maximale Determinante des Laplace-Operators.*
Obige Bedingung ist nach dem Satz von Gauß-Bonnet äquivalent zu der Bedingung

$$\int_{\partial X} k \, ds_g \geq 2\pi\chi(X) \quad .$$

Die Formulierung obigen Satzes beinhaltet auch die Existenz und Eindeutigkeit einer Metrik, mit der die Determinante unter den angegebenen Nebenbedingungen maximal wird.

Auf den Beweis von Satz 4.1 a) werde ich in Kapitel 5.1 genauer eingehen, weil ich ihn dort auf nichtkompakte Riemannsche Flächen verallgemeinere.
Nun hat man in jeder konformen Klasse von Metriken (mit oben genannten Nebenbedingungen) genau ein Maximum der Determinante; B. Osgood, R. Phillips und P. Sarnak gehen auch auf die Frage ein, welches dieser Maxima das absolute Maximum sei [OPS]. Konkret wird dabei unter anderem folgendes bewiesen [OPS, Corollary 1]:

Korollar 4.2
a) Für jede Metrik g auf der Sphäre S^2 mit Volumen 4π gilt

$$\det \Delta_g \leq \exp\left(\tfrac{1}{2} - 4\zeta'(-1)\right) = 3.19531...$$

(ζ bezeichnet die Riemannsche Zetafunktion), und Gleichheit gilt genau dann, wenn g die Standardmetrik mit konstanter Krümmung 1 ist.

b) Für jede Metrik g auf dem komplexen Torus der Dimension 1 mit Volumen 1 gilt

$$\det \Delta_g \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\left|\eta\left(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|^4 = 0.35575...$$

(η bezeichnet die Dedekindsche Etafunktion), und Gleichheit gilt genau dann, wenn g die flache Metrik auf dem Torus mit Volumen 1 ist, der durch $\mathbb{C}^2/\Gamma$ mit dem Gitter $\Gamma = \langle 1, \frac{1}{\sqrt{3}} + i\rangle$ gegeben ist.

Es stellt sich jetzt sofort die Frage, wie die Resultate von B. Osgood, R. Phillips und P. Sarnak überhaupt verallgemeinert werden können. Folgende Ansätze habe ich im Rahmen meiner Diplomarbeit verfolgt:
Ich konnte obiges Ergebnis auf *nichtkompakte Riemannsche Flächen* verallgemeinern (siehe Kapitel 5.1), wobei man geeignete Bedingungen an die Metrik im Unendlichen stellen muß, damit die Determinante des Laplace-Operators überhaupt definiert werden kann, hat doch Δ auf einer nichtkompakten Riemannschen Fläche auch ein kontinuierliches Spektrum.
Andererseits kann man natürlich versuchen, analoge Resultate in höheren Dimensionen zu erlangen:
Über das Verhalten der Determinante des Laplace-Operators unter *konformer Variation* der Metrik gibt es eine ganze Reihe von Veröffentlichungen, die ich in Kapitel 5.2 diskutiere.
Eine zweite natürliche Möglichkeit, die Metrik auf einer Kähler-Mannigfaltigkeit zu variieren, ist die *Variation innerhalb der Kählerklasse*. Es bietet sich dann an, die *analytische Ray-Singer-Torsion* als Verallgemeinerung der Determinante vom Laplace-Operator zu betrachten (bzw. die Determinante des Laplace-Operators als Spezialfall der analytischen Torsion aufzufassen) und diese zu variieren: Nachdem Variationsformeln für die Determinante allein recht kompliziert werden, kann man hoffen, daß in Analogie zum Beweis des lokalen Atiyah-Singer-Indexsatzes „bemerkenswerte Annulierungen" („remarkable cancellations" [ABP, p.280]) bei der Variation der analytischen Torsion auftreten und

zu erheblichen Vereinfachungen führen werden – die Definition der analytischen Torsion weist schließlich gewisse Analogien zur Definiton der Eulercharakteristik des Dolbeaut-Komplexes auf. Aus Gründen, die ich in Kapitel 6.2 darstellen werde, ist es mir nur auf komplex eindimensionalen Mannigfaltigkeiten gelungen, die Euler-Lagrange-Gleichung für die Variation der analytischen Torsion aufzustellen (Kapitel 6.3). Es ist einfacher, von vornherein eine Metrik zu variieren, von der man schon vermutet, daß sie ein kritischer Punkt für die Torsion sein wird. Hierfür muß man sich natürlich fragen, wie das Analogon zur Bedingung der konstanten Gaußkrümmung in höheren Dimensionen lauten soll; auf diese Frage gibt es zwei naheliegende Antworten:
Zum einen kann man *Mannigfaltigkeiten mit Metriken konstanter holomorpher Krümmung* als Verallgemeinerung der Riemannschen Flächen mit konstanter Gaußkrümmung betrachten. Das ist vor allem dann einleuchtend, wenn man bedenkt, daß unter anderem kompakte Quotienten des N-dimensionalen komplexen Einheitsballes D^N durch eine diskrete Gruppe von Isometrien solche Metriken zulassen, und wenn man sich an das Poincaré-Modell der hyperbolischen Halbebene erinnert. Mit solchen Mannigfaltigkeiten befasse ich mich in Kapitel 6.4.
Zum andern kommen *Mannigfaltigkeiten mit holomorph trivialem kanonischem Bündel* in Frage: Dies ist zumindest im komplex zweidimensionalen Fall eine naheliegende Verallgemeinerung elliptischer Kurven, die ebenfalls über die Trivialität des kanonischen Bündels definiert werden können [Kob, p.257]. Auf solchen Mannigfaltigkeiten verschwindet die erste Chernklasse, d.h. auf ihnen existieren nach dem Calabi-Yau-Theorem [Ya, Theorem 2] (Ricci-flache) Kähler-Einstein-Metriken. Komplex zweidimensionale Mannigfaltigkeiten dieser Art sind das Thema der Kapitel 6.5 bis 6.9.

5 Extremale Metriken bei konformer Variation

5.1 Nichtkompakte Riemannsche Flächen

Im folgenden sei X immer eine vollständige Riemannsche Fläche mit m Spitzen und g eine Hermitesche Metrik auf X, so daß $\mathrm{vol}_g(X) < \infty$. Ich stelle zunächst die Resultate zusammen, die man verwenden muß, um auf solch einer Fläche eine Determinante für den Laplace-Operator definieren zu können.
Dazu sei vorerst vorausgesetzt, daß X „in der Nähe der Spitzen“, d.h. außerhalb einer kompakten Menge, hyperbolisch ist. (X, g) heißt unter dieser Voraussetzung **zulässig** [Mü3, p.269]. $\Delta : C^\infty(X, \mathbb{R}) \to C^\infty(X, \mathbb{R})$ bezeichne den de Rham-Laplace-Operator zur Metrik g auf X. Als Operator auf $L^2(X, \mu)$ mit vollständigem X ist Δ ein wesentlich selbstadjungierter Operator [Cher]. Das Spektrum seiner selbstadjungierten Erweiterung $\bar{\Delta}$ wird, da X nichtkompakt ist, im allgemeinen einen diskreten und einen kontinuierlichen Anteil haben, was die Analysis gegenüber dem kompakten Fall erheblich erschwert. Dennoch kann zu $\bar{\Delta}$ ein Wärmeleitungskern K konstruiert werden [Mü2, Sect.4].

Nach Voraussetzung hat X eine Zerlegung $X = X_0 \cup Z_1 \cup \cdots \cup Z_m$, wobei X_0 kompakt mit glattem Rand ist und für alle $j \in \{1, ..., m\} : Z_j \cong [a_j, \infty) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit $a_j > 0$, so daß g auf Z_j hyperbolisch ist. Für $j \in \{1, ..., m\}$ sei

$$k_j \in C^0(Z_j \times Z_j \times \mathbb{R}^+) : \quad k_j\left((y, x), (y', x'), t\right) := \sqrt{\frac{yy'}{4\pi t}} \exp\left(-\frac{t}{4} - \frac{\log^2 \frac{y}{y'}}{4t}\right) \quad . \tag{5.1.1}$$

Dann ist k_j der konstante Term der Fourierentwicklung in x von K auf der Spitze Z_j [Mü3, p.272]. Setzt man

$$k(z, z', t) := \begin{cases} k_j(z, z', t) & \text{falls } z, z' \in Z_j \text{ für } j \text{ mit } 1 \leq j \leq m, \\ 0 & \text{sonst} , \end{cases}$$

so ist $K(z, z, t) - k(z, z, t)$ absolut integrierbar [Mü2, Sect.8]. Außerdem kann man eine Spurformel angeben [Mü2, Theorem 8.13], die offenbar neben den Beiträgen von diskreten Eigenwerten, wie wir sie vom kompakten Fall kennen, auch Terme enthalten muß, welche vom kontinuierlichen Spektrum des Operators $\bar{\Delta}$ stammen. Die Spektralzerlegung dieses kontinuierlichen Spektrums wird durch verallgemeinerte Eigenfunktionen $E_i(z, s), i \in \{1, ..., m\}$ beschrieben, die meromorph in $s \in \mathbb{C}$, holomorph in $z \in X$ sind und $\Delta E_i(z, s) = s(1 - s)E_i(z, s)$ erfüllen. Der Fourierkoeffizient $a_0(z; s)$ von E_i in der Spitze $Z_j \cong [a_j, \infty) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ hat die Gestalt

$$\forall\, z = (y_j, x) \in [a_j, \infty) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}, s \in \mathbb{C} : \quad a_0(y_j, x; s) = \delta_{ij} y_j^s + \Phi_{ij}(s) y_j^{1-s} \quad ,$$

und $\Phi(s) = (\Phi_{ij}(s))_{ij}, s \in \mathbb{C}$, ist die sogenannte **Streumatrix** auf (X, g). Mit Hilfe der Streumatrix werden in der Spurformel [Mü2, Theorem 8.13] diejenigen Terme beschrieben, welche vom kontinuierlichen Spektrum von $\bar{\Delta}$ stammen, und die Mellintransformierte dieser Spurformel kann wie im kompakten Fall verwendet werden, um eine Zetafunktion zu Δ zu definieren [Mü3, (6.1)]:

Definition 5.1.1
(X, g) sei eine vollständige Riemannsche Fläche mit m Spitzen und endlichem Volumen, $X = X_0 \cup Z_1 \cup \cdots \cup Z_m$ mit kompaktem, glatt berandetem X_0 und für alle $j \in \{1, ..., m\}$: $Z_j \cong [a_j, \infty) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit $a_j > 0$, so daß g auf Z_j hyperbolisch ist. $\bar{\Delta}$ sei die selbstadjungierte Erweiterung von Δ als Operator auf $L^2(X, \mu)$, deren Punktspektrum durch $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ gegeben sei. Weiter bezeichne $\Phi(s)$ für $s \in \mathbb{C}$ die Streumatrix zu diesen Daten und $\varphi(s)$ deren Determinante.
Für $\mathrm{Re}\, s \gg 0$ *ist die* **Zetafunktion zum Laplace-Operator auf** X *definiert durch*

$$\zeta(s) := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-s} - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\tfrac{1}{4} + \lambda^2\right)^{-s} \frac{\varphi'}{\varphi}\left(\tfrac{1}{2} + i\lambda\right) d\lambda + \left[\mathrm{tr}\, \left(\Phi\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) + m\right] 4^{s-1} \quad .$$

Der Summand $m4^{s-1}$ in der Definition taucht in der Mellintransformation der oben erwähnten Spurformel nicht auf. Warum er hier scheinbar künstlich hinzugefügt ist, wird Satz 5.1.4 zeigen. Für ζ gilt [Mü3, Theorem 6.3,(2.2),(2.3)]:

Satz 5.1.2
Die Zetafunktion ζ kann meromorph nach $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden, und die einzigen Pole der Fortsetzung (die ebenfalls mit ζ bezeichnet werde) in der Halbebene $\mathrm{Re}\ s > -\frac{1}{2}$ *sind* $s = 1$ *und* $s = \frac{1}{2}$. *Für* $\mathrm{Re}\ s > 1$ *gilt:*

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\left[\int_X \Big(K(z,z,t) - k(z,z,t)\Big)\,\mu(z) - 1\right] dt \\ &\qquad + 4^{s-1}\left(m - \frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\pi^{-1/2}\sum_{j=1}^m \log a_j\right) ,\end{aligned}$$

wobei μ die Volumenform zur Metrik g ist.

Nach Satz 5.1.2 kann ζ im wesentlichen als „relative Zetafunktion" angesehen werden: $\bar{\Delta}_{\mathrm{hyp}}$ sei die Einschränkung des Laplace-Operators auf die nullten Fourierkoeffizienten in den Spitzen mit Dirichletschen Randbedingungen, also die direkte Summe von Operatoren der Gestalt $-(y^j)^2\frac{d^2}{(dy^j)^2}$, welche auf $L^2([a_j,\infty), \frac{(dy^j)^2}{(y^j)^2})$ operieren (jede Funktion auf $[a_j,\infty)$ kann als Funktion auf $Z_j \cong [a_j,\infty)\times S^1$ aufgefaßt werden, d.h. $L^2([a_j,\infty), \frac{(dy^j)^2}{(y^j)^2}) \subset L^2(Z_j,\mu)$). Dann ist k bis auf einen Term der Spurklasse der Wärmeleitungskern von $\bar{\Delta}_{\mathrm{hyp}}$ (vergleiche [Mü3, Remark to Theorem 6.3]) . Um dies genauer formulieren zu können, führe ich eine *relative Zetafunktion* ein:

Definition 5.1.3
Sei p der Wärmeleitungskern der Einschränkung $\bar{\Delta}_{\mathrm{hyp}}$ des Laplace-Operators auf die nullten Fourierkoeffizienten in den Spitzen mit Dirichletschen Randbedingungen, dann ist für $\mathrm{Re}\ s > 1$ *die* **relative Zetafunktion zum Laplace-Operator auf** X *definiert durch*

$$\zeta_{\mathrm{rel}}(s) := \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\left[\int_X \Big(K(z,z,t) - p(z,z,t)\Big)\,\mu(z) - 1\right] dt \quad .$$

Die Zetafunktionen ζ und ζ_{rel} unterscheiden sich für $\mathrm{Re}\ s > 1$ um einen von der (zulässigen) Metrik weitgehend unabhängigen Term:

Satz 5.1.4
Unter den in Definition 5.1.1 *gemachten Voraussetzungen und mit den dortigen Bezeichnungen gilt für* $\mathrm{Re}\ s > 1$*:*

$$\zeta_{\mathrm{rel}}(s) = \zeta(s) + \frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}4^{s-1}\pi^{-1/2}\sum_{j=1}^m \log a_j \quad .$$

Beweis:
Aus Satz 5.1.2 und Definition 5.1.3 folgt zunächst für Re $s>1$:

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathrm{rel}}(s)-\zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\int_X \Big(k(z,z,t)-p(z,z,t)\Big)\mu(z)dt\\ &\qquad -4^{s-1}\left(m-\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\pi^{-1/2}\sum_{j=1}^m \log a_j\right)\\ &= \sum_{j=1}^m \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\int_{Z_j}\Big(k_j(z,z,t)-p_j(z,z,t)\Big)\mu(z)dt\\ &\qquad -4^{s-1}\left(m-\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\pi^{-1/2}\sum_{j=1}^m \log a_j\right)\quad ,\end{aligned} \tag{5.1.2}$$

wobei p_j die Einschränkung von p auf Z_j ist. Eine Darstellung von p_j in Abhängigkeit von den Randbedingungen für $\bar{\Delta}_{\mathrm{hyp}}$ entnimmt man der oben zitierten Arbeit von W. Müller [Mü2]: Sind für $\bar{\Delta}_{\mathrm{hyp}}$ auf $C_0^\infty([a_j,\infty),\mathbb{R})$ die Randbedingungen $f(a_j)=\frac{a_j}{b}f'(a_j)$ gewählt [Mü2, (5.2)], dann gilt für $z=(y,x), z'=(y',x')\in[a_j,\infty)\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}p_j(z,z',t) &= \sqrt{\frac{yy'}{4\pi t}}e^{-t/4}\left\{\exp\left(-\frac{\log^2\frac{y}{y'}}{4t}\right)+\exp\left(-\frac{(\log(yy')-2\log a_j)^2}{4t}\right)\right.\\ &\qquad \left.-2\int_0^\infty \exp\left(-\eta-\frac{\left(\log(yy')-2\log a_j+\frac{\eta}{b-1/2}\right)^2}{4t}\right)d\eta\right\}\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

(siehe [Mü2, (6.2)]). Da Dirichletsche Randbedingungen verwendet wurden, ist $b=\infty$, so daß aus (5.1.1) und (5.1.3) folgt:

$$\begin{aligned}k_j(z,z,t)-p_j(z,z,t) &= -\frac{y}{\sqrt{4\pi t}}e^{-t/4}\exp\left(-\frac{\left(\log\frac{y}{a_j}\right)^2}{t}\right)\left\{1-2\int_0^\infty e^{-\eta}d\eta\right\}\\ &= \frac{y}{\sqrt{4\pi t}}e^{-t/4}\exp\left(-\frac{\left(\log\frac{y}{a_j}\right)^2}{t}\right)\quad .\end{aligned}$$

Dies ergibt:

$$\begin{aligned}\int_{Z_j}(k_j(z,z,t)-p_j(z,z,t))\mu(z) &= \frac{e^{-t/4}}{\sqrt{4\pi t}}\int_{a_j}^\infty \exp\left(-\frac{\left(\log\frac{y}{a_j}\right)^2}{t}\right)\frac{dy}{y}\\ &\overset{u:=\log\frac{y}{a_j}}{=} \frac{e^{-t/4}}{\sqrt{4\pi t}}\int_0^\infty e^{-u^2/t}du\\ &= \frac{e^{-t/4}}{4}\quad .\end{aligned}$$

Aus (5.1.2) folgt nun

$$\begin{aligned}
\zeta_{\mathrm{rel}}(s)-\zeta(s) &= \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{t^{s-1}e^{-t/4}}{4}dt-4^{s-1}\left(m-\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\pi^{-1/2}\sum_{j=1}^{m}\log a_j\right)\\
&= \frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}4^{s-1}\pi^{-1/2}\sum_{j=1}^{m}\log a_j \quad .
\end{aligned}$$

□

ζ_{rel} ist nach Definition eine „relative Zetafunktion“ wie oben beschrieben: Durch die Differenzbildung $K(z,z,t)-p(z,z,t)$ wird der Laplace-Operator mit der direkten Summe eindimensionaler Laplace-Operatoren auf einem Halbstrahl verglichen. Die Eigenschaften von ζ_{rel} sind wegen Satz 5.1.4 die gleichen wie die von ζ, insbesondere kann ζ_{rel} gemäß Satz 5.1.2 nach $\mathbb{C}$ meromorph fortgesetzt werden und ist in $s=0$ analytisch. Die meromorphe Fortsetzung von ζ_{rel} wird ebenfalls mit ζ_{rel} bezeichnet. Nach Satz 5.1.4 stimmen ζ und ζ_{rel} überein, falls für alle $j\in\{1,...,m\}: a_j=1$, was o.B.d.A. angenommen werden kann. Weiter gilt:

Satz 5.1.5
Ist g eine zulässige Metrik auf der Riemannschen Fläche X und $\lambda>0$ eine reelle Konstante, dann können Zetafunktionen $\widetilde{\zeta}$ und $\widetilde{\zeta}_{\mathrm{rel}}$ zu der Metrik $\widetilde{g}:=\lambda g$ definiert werden, und zwar mit denselben Konstruktionen wie ζ und ζ_{rel}. Es gilt dann wie für die Zetafunktion im kompakten Fall (Lemma 3.1.7):

$$\widetilde{\zeta}_{\mathrm{rel}}(s)=\lambda^s\zeta_{\mathrm{rel}}(s)\ ,\quad \widetilde{\zeta}(s)=\lambda^s\zeta(s)\quad .$$

<u>*Beweis:*</u>
Daß $\widetilde{\zeta}$ und $\widetilde{\zeta}_{\mathrm{rel}}$ ohne weiteres auch für die Metrik $\widetilde{g}$ definiert werden können, folgt aus Satz 5.1.2, da für den Laplace-Operator $\widetilde{\Delta}$ zu $\widetilde{g}$ folgt: $\widetilde{\Delta}=\lambda^{-1}\Delta$ [Be2, 1.159], und daher für die Wärmeleitungskerne $\widetilde{K}(z,z',t)=K(z,z',\lambda^{-1}t)$ bzw. $\widetilde{k}(z,z',t)=k(z,z',\lambda^{-1}t)$ gelten muß. Anhand von Definition 5.1.3 ist auch $\widetilde{\zeta}_{\mathrm{rel}}(s)=\lambda^s\zeta_{\mathrm{rel}}(s)$ klar (vergleiche Lemma 3.1.7). Nun gilt nach Satz 5.1.4 (der nach Konstruktion auch für die reskalierten Zetafunktionen gelten muß)

$$\widetilde{\zeta}(s)=\lambda^s\zeta_{\mathrm{rel}}(s)+\widetilde{\left(\frac{\pi^{-1/2}}{4}\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\sum_{j=1}^{m}\log a_j\left(\frac{1}{2}\right)^{-2s}\right)}\qquad ;$$

verfolgt man die einzelnen Terme in der Konstruktion zurück [Mü2, Sect. 8], so stellt man fest, daß nur der Faktor $\frac{1}{2}$ im zweiten Summanden reskaliert werden muß, denn dieser stammt aus der üblichen Darstellung $s(1-s)=(\frac{1}{2}+ir)(\frac{1}{2}-ir)$ der Eigenwerte der Eisensteinreihen. Weil der Laplace-Operator mit λ^{-1} reskaliert wird [Be2, 1.159], muß daher $\frac{1}{2}$ durch $(2\sqrt{\lambda})^{-1}$ ersetzt werden, d.h.

$$
\begin{aligned}
\tilde{\zeta}(s) &= \lambda^s \zeta_{\mathrm{rel}}(s) + \frac{\pi^{-1/2}}{4} \frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \sum_{j=1}^{m} \log a_j \left(2\sqrt{\lambda}\right)^{2s} \\
&= \lambda^s \left(\zeta_{\mathrm{rel}}(s) + \frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} 4^{s-1} \pi^{-1/2} \sum_{j=1}^{m} \log a_j \right) \\
&\overset{\text{Satz 5.1.4}}{=} \lambda^s \zeta(s) \quad .
\end{aligned}
$$

□

Analog zur Definition im kompakten Fall kann man wegen Satz 5.1.2 mit Hilfe der oben definierten Zetafunktion die Determinante des Laplace-Operators auch auf der nichtkompakten Mannigfaltigkeit X regularisieren [Mü3, (6.4)]:

Definition 5.1.6
Die **regularisierte Determinante des Laplace-Operators** *auf einer zulässigen Riemannschen Fläche X ist definiert durch*

$$\det \Delta := e^{-\zeta'(0)} \quad .$$

Nach Satz 5.1.4 stimmt das Skalierungsverhalten beider bisher definierter Zetafunktionen mit dem Verhalten im kompakten Fall überein. Die oben definierte Determinante hat jedoch ein anderes Skalierungsverhalten als erwünscht, was auf den „künstlichen" Summanden $m4^{s-1}$ in der Definition 5.1.1 von ζ zurückzuführen ist. Darum verwende ich für das folgende die Zetafunktion $\zeta_{\det}$, die direkt aus der Mellintransformation der Spurformel hervorgeht. Zugunsten des korrekten Skalierungsverhaltens der Determinante verzichte ich damit auf die Interpretation der Zetafunktion als relative Zetafunktion.

Definition 5.1.7
Für Re $s \gg 0$ *ist die* **Determinanten-Zetafunktion zum Laplace-Operator auf** X *definiert durch*

$$\zeta_{\det}(s) := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-s} - \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\tfrac{1}{4} + \lambda^2\right)^{-s} \frac{\varphi'}{\varphi} \left(\tfrac{1}{2} + i\lambda\right) d\lambda + \operatorname{tr}\left(\Phi\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) 4^{s-1} = \zeta(s) - m4^{s-1} \, .$$

Wegen Satz 5.1.2 ist $\zeta_{\det}(s)$ nach ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzbar, die meromorphe Fortsetzung wird ebenfalls mit $\zeta_{\det}(s)$ bezeichnet.
Die **skalierende Determinante des Laplace-Operators** *auf X ist definiert durch*

$$\det{}_S \Delta := e^{-\zeta'_{\det}(0)} \quad .$$

Die Definition dieser dritten Zetafunktion wird durch folgenden Satz gerechtfertigt:

Satz 5.1.8
Ist g eine zulässige Metrik auf der Riemannschen Fläche X und $\lambda > 0$ eine reelle Konstante, so kann die skalierende Determinante des Laplace-Operators $\widetilde{\Delta}$ zur Metrik $\widetilde{g} := \lambda g$ definiert werden, und zwar mit denselben Konstruktionen wie $\det_S \Delta$. Es gilt dann:

$$\log \det{}_S \Delta - \log \det{}_S \widetilde{\Delta} = \log \lambda \left(\frac{\chi(X)}{6} - 1 \right) \quad .$$

<u>Beweis:</u>
Zunächst ist nach Konstruktion mit denselben Argumenten wie im Beweis von Satz 5.1.5 für die Determinanten-Zetafunktion $\widetilde{\zeta}_{\mathrm{det}}$ zu $\widetilde{g}$ klar:

$$\widetilde{\zeta}_{\mathrm{det}}(s) = \lambda^s \zeta_{\mathrm{det}}(s) \quad .$$

Daraus folgt:

$$\log \det{}_S \Delta - \log \det{}_S \widetilde{\Delta} = \widetilde{\zeta}'_{\mathrm{det}}(0) - \zeta'_{\mathrm{det}}(0) = (\log \lambda)\, \zeta_{\mathrm{det}}(0) \quad .$$

Um $\zeta_{\mathrm{det}}(0)$ zu bestimmen, verwendet man die asymptotische Entwicklung des Spurintegrales $\int_X (K(z,z,t) - k(z,z,t))\, \mu(z)$ für $t \to 0$ [Mü3, (2.3)], d.h. für $k \in \mathbb{N}$ gibt es $\varrho(t)$ mit $\varrho(t) = \mathcal{O}(\sqrt{t})$ für $t \to 0$, so daß mit Definition 5.1.7 und Satz 5.1.2 für Re $s > 1$ (γ bezeichnet die Eulersche Konstante)

$$\begin{aligned}
\zeta_{\mathrm{det}}(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \left[\int_X (K(z,z,t) - k(z,z,t))\, \mu(z) - 1 \right] dt \\
&\quad - \frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} 4^{s-1} \pi^{-1/2} \sum_{j=1}^m \log a_j \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)} \left\{ \int_0^1 t^{s-1} \left[\frac{\mathrm{vol}_g(X)}{4\pi t} + \frac{m}{2} \frac{\log t}{\sqrt{4\pi t}} \right.\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{3\gamma m}{2} + \sum_{j=1}^m \log a_j \right) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} + \frac{\chi(X)}{6} - 1 + \varrho(t) \right] dt \\
&\quad + \int_1^\infty t^{s-1} \left[\int_X (K(z,z,t) - k(z,z,t))\, \mu(z) - 1 \right] dt \\
&\quad \left. - \Gamma\left(s - \tfrac{1}{2}\right) 4^{s-1} \pi^{-1/2} \sum_{j=1}^m \log a_j \right\} \\
\zeta_{\mathrm{det}}(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \left\{ \frac{\mathrm{vol}_g(X)}{4\pi(s-1)} + \left(\frac{(3\gamma+1)m}{2} + \sum_{j=1}^m \log a_j \right) \frac{1}{\sqrt{4\pi}(s-\frac{1}{2})} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\chi(X)}{6} - 1 \right) \frac{1}{s} + h(s) \right\} \quad ,
\end{aligned}$$

wobei h in $s = 0$ holomorph ist. Weil beide Seiten der letzten Gleichung meromorph nach $\mathbb{C}$ fortsetzbar sind, gilt sie überall, und wegen $\frac{1}{\Gamma(s)} = sf(s)$ mit holomorphem f und $f(0) = 1$ folgt

$$\zeta_{\det}(0) = \frac{\chi(X)}{6} - 1 \quad ,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Wie gewünscht, weist die *skalierende Determinante* das gleiche Skalierungsverhalten auf wie die regularisierte Determinante des Laplace-Operators auf kompakten Riemannschen Flächen (vergleiche [OPS, (1.9) and p.156]).

Nachdem bisher alle Konstruktionen weitgehend analog zum kompakten Fall möglich waren, stellt sich die Frage nach kritischen Punkten der Determinante des Laplace-Operators auf nichtkompakten Riemannschen Flächen. Wie in Kapitel 4 erläutert, kann dabei konform variiert werden, und die Variation muß unter der Nebenbedingung durchgeführt werden, daß das Volumen von X konstant bleibt, denn $\det_S \Delta$ hat nach Satz 5.1.8 das gleiche Skalierungsverhalten wie die Determinante des Laplace-Operators im kompakten Fall.

Vergleicht man mit den Ergebnissen von B. Osgood, R. Phillips und P. Sarnak auf kompakten Riemannschen Flächen [OPS] (siehe Kapitel 4), so wird man kritische Punkte der Determinante in Metriken konstanter Gaußkrümmung erwarten. Dann muß aber $\chi(X) + m \leq 0$ vorausgesetzt werden: Die punktierte Sphäre mit einer Spitze etwa ist via stereographischer Projektion diffeomorph zum $\mathbb{R}^2$ und trägt somit eine flache Metrik, mit der sie aber unendliches Volumen hat. In der gleichen Weise wird die punktierte Sphäre mit zwei Spitzen zu einem unendlich langen flachen Zylinder, der ebenfalls kein endliches Volumen hat etc. Die Identifikation der kritischen Punkten von $\det \Delta$ auf einer zulässigen Riemannschen Fläche X ist mir unter der Voraussetzung $\chi(X) + m < 0$ weitgehend analog zum kompakten Fall [OPS] gelungen.

Es seien zunächst die folgenden Bezeichnungen festgelegt: g sei eine zulässige Metrik auf der Riemannschen Fläche X mit Volumen $V := \mathrm{vol}_g(X)$, $(\psi^\varepsilon \in C_0^\infty(X, \mathbb{R}) \mid \varepsilon \in [-1, 1])$ eine glatte Familie glatter reellwertiger Funktionen mit $\psi^0 \equiv 0$. Jede derartige Familie ψ^ε definiert eine konforme Variation der Metrik g via $g^\varepsilon := e^{2\psi^\varepsilon} g$, und jede der Metriken g^ε ist zulässig. Volumenform, Laplace-Operator, Wärmeleitungskerne und Zetafunktion zu g^ε werden mit einem oberen Index „ε“ versehen, und κ bzw. κ^ε seien die Gaußkrümmungen zu g bzw. g^ε nach Wahl des Levi-Civita Zusammenhanges ∇ bzw. ∇^ε. Ableitungen nach ε werden durch einen Punkt symbolisiert, weggelassene obere und untere Indizes „ε“ bedeuten $\varepsilon = 0$.

Definition 5.1.9
Auf dem Raum

$$\mathcal{F} := \{h \in C_b^\infty(X, \mathbb{R}) \mid \Delta h \in C_b^\infty(X, \mathbb{R})\}$$

($C_b^\infty(X, \mathbb{R})$ ist der Raum der beschränkten Funktionen in $C^\infty(X, \mathbb{R})$) sei das Funktional F definiert durch

$$\forall\, h \in \mathcal{F}: \quad F(h) := \frac{1}{4}\int_X h(\Delta h)\mu + \int_X \kappa h \mu - \pi\chi(X)\log\left(\frac{1}{V}\int_X e^{2h}\mu\right) \quad .$$

Dann gilt in Anlehnung an die bei B. Osgood, R. Phillips und P. Sarnak [OPS, (1.13)] angegebene Polyakov-Formel [Po1, Po2] (vergleiche auch [Lu, Theorem 1.1]):

Satz 5.1.10
Für jede glatte Familie von Funktionen ψ^ε mit den oben angegebenen Eigenschaften (insbesondere mit $\psi^\varepsilon \in C_0^\infty(X, \mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$ für alle $\varepsilon \in [-1, 1]$) gilt:

$$F(\psi^\varepsilon) = 6\pi \log \det{}_S \Delta - 6\pi \log \det{}_S \Delta^\varepsilon + \pi\,(6 - \chi(X))\log\left(\frac{\mathrm{vol}_\varepsilon(X)}{V}\right) \quad .$$

<u>*Beweis:*</u>
Sei ψ^ε eine beliebige glatte Familie von Funktionen mit den oben angegebenen Eigenschaften. Dann existiert eine kompakte, glatt berandete Menge $X_0 \subset X$, mit $\cup_{\varepsilon\in[-1,1]} \operatorname{supp} \psi^\varepsilon \subset X_0$ und $X = X_0 \cup Z_1 \cup \cdots \cup Z_m$, wobei für alle $j \in \{1, ..., m\} : Z_j \cong [a_j, \infty) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit $a_j > 0$ und g auf Z_j hyperbolisch ist. Für Re $s > 1$ gilt nach Definition 5.1.7 und Satz 5.1.2

$$\begin{aligned} \zeta^\varepsilon_{\det}(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\left[\int_X \Big(K^\varepsilon(z,z,t) - k(z,z,t)\Big)\mu^\varepsilon(z) - 1\right] dt \\ &\qquad - \frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} 4^{s-1}\pi^{-1/2}\sum_{j=1}^m \log a_j \ . \end{aligned}$$

Da μ^ε auf dem Träger von k unabhängig von ε und K^ε der Wärmeleitungskern von $\widetilde{\Delta}^\varepsilon$ ist, folgt wie im kompakten Fall [OPS, p.155f], weil $\dot{\psi}^\varepsilon$ kompakten Träger hat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\zeta^\varepsilon_{\det}(s) &= \frac{2}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^s \operatorname{tr}\left(\dot{\psi}^\varepsilon \widetilde{\Delta}^\varepsilon e^{-\widetilde{\Delta}^\varepsilon t}\right) dt \\ &= \frac{2}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^s \frac{d}{dt}\operatorname{tr}\left(-\dot{\psi}^\varepsilon\left[e^{-\widetilde{\Delta}^\varepsilon t} - \frac{1}{\mathrm{vol}_\varepsilon(X)}\right]\right) dt \\ &= \frac{2s}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\operatorname{tr}\left(\dot{\psi}^\varepsilon\left[e^{-\widetilde{\Delta}^\varepsilon t} - \frac{1}{\mathrm{vol}_\varepsilon(X)}\right]\right) dt \\ &= \frac{2s}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\int_X\left(\dot{\psi}^\varepsilon(z)\left[K^\varepsilon(z,z,t) - \frac{1}{\mathrm{vol}_\varepsilon(X)}\right]\mu^\varepsilon(z)\right) dt \quad . \end{aligned}$$

Für $K^\varepsilon(z,z,t)$ kann nun die asymptotische Entwicklung

$$K^\varepsilon(z,z,t) \overset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{4\pi t}\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l^\varepsilon(z) t^l$$

mit $\alpha_0^\varepsilon \equiv 1$ und $\alpha_1^\varepsilon \equiv \frac{1}{3}\kappa^\varepsilon$ [Mü2, (3.20)] eingesetzt werden, d.h. für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$K^\varepsilon(z,z,t) = \frac{1}{4\pi t}\sum_{l=0}^{k} \alpha_l^\varepsilon(z) t^l + \varrho^\varepsilon(z,t), \quad \forall\, z \in X: \ \varrho^\varepsilon(z,t) = \mathcal{O}(t^k) \text{ für } t \to 0\ ,$$

und ϱ^ε ist glatt und integrierbar. Dies liefert für Re $s > 1$ (der Wärmeleitungskern ist auf supp $\dot\psi^\varepsilon \subset X_0$ absolut integrierbar, und $\dot\psi^\varepsilon$ ist beschränkt, so daß der Satz von Fubini angewandt werden kann)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\zeta_{\det}^\varepsilon(s) &= \frac{2s}{\Gamma(s)}\left\{\int_X \dot\psi^\varepsilon(z)\left[\int_0^1 t^{s-1}\left(\frac{1}{4\pi t}\sum_{l=0}^{k}\alpha_l^\varepsilon(z)t^l + \varrho^\varepsilon(z,t) - \frac{1}{\mathrm{vol}_\varepsilon(X)}\right)dt\right.\right.\\
&\qquad\left.\left. + \int_1^\infty t^{s-1}\left(K^\varepsilon(z,z,t) - \frac{1}{\mathrm{vol}_\varepsilon(X)}\right)dt\right]\mu^\varepsilon(z)\right\}\\
&= \frac{2s}{\Gamma(s)}\left\{\int_X \dot\psi^\varepsilon(z)\left[\frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{k}\frac{\alpha_l^\varepsilon(z)}{s+l-1} - \frac{1}{s\,\mathrm{vol}_\varepsilon(X)} + \int_0^1 t^{s-1}\varrho^\varepsilon(z,t)dt\right.\right.\\
&\qquad\left.\left. + \int_1^\infty t^{s-1}\left(K^\varepsilon(z,z,t) - \frac{1}{\mathrm{vol}_\varepsilon(X)}\right)dt\right]\mu^\varepsilon(z)\right\}\\
&= \frac{2}{\Gamma(s)}\left\{\int_X \dot\psi^\varepsilon(z)\left[\frac{\alpha_1^\varepsilon(z)}{4\pi} - \frac{1}{\mathrm{vol}_\varepsilon(X)}\right]\mu^\varepsilon(z) + s h^\varepsilon(s)\right\} \quad ,
\end{aligned}$$

wobei h^ε eine in $s=0$ holomorphe Funktion ist. Es gilt $\frac{1}{\Gamma(s)} = sf(s)$ mit holomorphem f und $f(0)=1$, so daß mit $\alpha_1^\varepsilon \equiv \frac{1}{3}\kappa^\varepsilon$ [Mü2, (3.20)] sowie $\kappa^\varepsilon = e^{-2\psi^\varepsilon}(\frac{\Delta\psi^\varepsilon}{2}+\kappa)$ und $\mu^\varepsilon = e^{2\psi^\varepsilon}\mu$ [OPS, (1.11)] folgt (wie man leicht nachprüft, stimmen die in der zitierten Arbeit verwendeten Vorzeichenkonventionen und Normierungen nicht mit den meinigen überein [O'N, Prop. 44(2)]; ich habe die angegebene Formel entsprechend modifiziert):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\zeta_{\det}^\varepsilon\right)'(0) &= 2\int_X \dot\psi^\varepsilon(z)\left(\frac{\kappa^\varepsilon(z)}{12\pi} - \frac{1}{\mathrm{vol}_\varepsilon(X)}\right)\mu^\varepsilon(z)\\
&= \frac{1}{6\pi}\int_X \dot\psi^\varepsilon(z)\left(\frac{\Delta\psi^\varepsilon(z)}{2} + \kappa(z)\right)\mu(z) - \frac{2}{\mathrm{vol}_\varepsilon(X)}\int_X \dot\psi^\varepsilon(z)e^{2\psi^\varepsilon(z)}\mu(z)\\
&= \frac{1}{6\pi}\int_X \dot\psi^\varepsilon(z)\left(\frac{\Delta\psi^\varepsilon(z)}{2} + \kappa(z)\right)\mu(z) - \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\log\mathrm{vol}_\varepsilon(X) \quad .
\end{aligned}$$

Somit gibt es eine Konstante C, so daß

$$\begin{aligned}
-\log \det_S \Delta^\varepsilon = (\zeta^\varepsilon_{\det})'(0) &= \frac{1}{6\pi}\left\{\frac{1}{4}\int_X \psi^\varepsilon(\Delta\psi^\varepsilon)\mu + \int_X \kappa\psi^\varepsilon\mu\right\} - \log \mathrm{vol}_\varepsilon(X) + C \\
&= \frac{1}{6\pi}F(\psi^\varepsilon) + \left(\frac{\chi(X)}{6} - 1\right)\log\left(\frac{\mathrm{vol}_\varepsilon(X)}{V}\right) - \log V + C \quad .
\end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{vol}_g(X) = V$ gilt $F(0) = 0$ und somit $C = \log V - \log \det_S \Delta$, woraus die Behauptung folgt. □

Das Ergebnis von Satz 5.1.10 kann zum Anlaß genommen werden, eine *skalierende Determinante* für den Laplace-Operator jeder Metrik $g^\psi = e^{2\psi}g$ zu definieren, sofern g eine zulässige Metrik ist und ψ im Definitionsbereich $\mathcal{F}$ des Funktionales F liegt:

Definition 5.1.11
Ist g eine zulässige Metrik auf der Riemannschen Fläche X, dann heißt für $\psi \in \mathcal{F}$ die Metrik $g^\psi := e^{2\psi}g$ **konform zulässig** *und die g-***skalierende Determinante des Laplace-Operators** *Δ_{g^ψ} ist definiert durch*

$$\log \det{}^g_S \Delta_{g^\psi} := \log \det_S \Delta - \frac{1}{24\pi}\int_X \psi(\Delta\psi)\mu - \frac{1}{6\pi}\int_X \kappa\psi\mu + \log\left(\frac{1}{V}\int_X e^{2\psi}\mu\right) \quad .$$

Bemerkung:
Obige Definition ist wegen Satz 5.1.10 konsistent mit der Definition der Determinante des Laplace-Operators für zulässige Metriken, die außerhalb eines Kompaktums mit g übereinstimmen. Anhand von Satz 5.1.8 prüft man zudem sofort mit Hilfe des auch auf zulässigen Riemannschen Flächen gültigen Satzes von Gauß-Bonnet [CG] nach, daß die oben definierte g-skalierende Determinante das gleiche Skalierungsverhalten hat wie $\det_S \Delta$.
Um die skalierende Determinante für beliebige Metriken $e^{2\psi}g$ mit $\psi \in \mathcal{F}$ zu definieren, könnte man auch versuchen, $\psi \in \mathcal{F}$ durch eine Folge $\{\psi_k\}$ von Funktionen mit kompakten Trägern zu approximieren, und dann für $\det_S \Delta_{g^{\psi_k}}$ den Grenzübergang $k \to \infty$ vorzunehmen. Wie dieser Grenzübergang etwa mit der Definition der skalierenden Determinante über Integrale von Wärmeleitungskernen ausgeführt werden kann, ist jedoch nicht klar. Stattdessen kann aber das Funktional F untersucht werden: Es sei dazu $a := \max\{a_1, ..., a_m\}$, und für $k \in \mathbb{N}$ sei nach Wahl lokaler Koordinaten $(y^j, x^j) \in [a_j, \infty) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong Z_j$ auf den Spitzen

$$X_k := X_0 \cup \bigcup_{j=1}^m \left\{z = (y^j, x^j) \in Z_j \mid y^j \leq a + k\right\} \quad . \tag{5.1.4}$$

Zu $\psi \in \mathcal{F}$ kann eine Folge $\{\psi_k\}$ mit $\psi_k \in C_0^\infty(X, \mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$ definiert werden, so daß $(\psi_k)_{|X_k} \equiv \psi_{|X_k}, (\psi_k)_{|X-X_{k+1}} \equiv 0$ und für alle $z \in X$: $|\psi_k(z)| \leq C_1|\psi(z)|, |\Delta\psi_k(z)| \leq$

$C_2|\Delta\psi(z)|$ für Konstanten C_1 und C_2. Dann ist wegen der Beschränktheit von ψ und $\Delta\psi$ und wegen der Konstruktion von X_k klar, daß in der L^2-Norm $\psi_k \to \psi, \Delta\psi_k \to \Delta\psi$ und $e^{\psi_k} \to e^{\psi}$ konvergieren. Daraus folgt nun sofort $\lim_{k\to\infty} F(\psi_k) = F(\psi)$. Auch in diesem Sinne ist also Definition 5.1.11 konsistent, und die Elemente von $\{e^{2\psi}g \mid \psi \in \mathcal{F}\}$ können als Metriken interpretiert werden, die „in der Nähe" einer zulässigen Metrik g liegen.
Ob für eine zulässige Metrik $g^{\psi} = e^{2\psi}g$ mit $\psi \in C^{\infty}(X, \mathbb{R}) - C_0^{\infty}(X, \mathbb{R})$ (g sei ebenfalls nach wie vor zulässig) $\det_S^g \Delta_{g^{\psi}} = \det_S \Delta_{g^{\psi}}$ gilt, ist jedoch nicht klar. Man hat aber (mit den naheliegenden Notationen $\Delta^{\psi} = e^{-2\psi}\Delta, \mu^{\psi} = e^{2\psi}\mu, \kappa^{\psi} = e^{-2\psi}(\frac{\Delta\psi}{2} + \kappa)$ [OPS, (1.11)] und $V^{\psi} = \mathrm{vol}_{g^{\psi}}(X)$ für die entsprechenden Objekte bezüglich g^{ψ}):

$$
\begin{aligned}
&\log \det{}_S^g \Delta_{g^{\psi}} - \log \det{}_S \Delta_{g^{\psi}} \\
\overset{\text{Def. 5.1.11}}{=} \quad & \log \det{}_S \Delta - \frac{1}{24\pi}\int_X \psi e^{-2\psi}(\Delta\psi)e^{2\psi}\mu - \frac{1}{6\pi}\int_X e^{-2\psi}\left(\frac{\Delta\psi}{2} + \kappa\right)\psi e^{2\psi}\mu \\
& + \frac{1}{12\pi}\int_X \psi e^{-2\psi}(\Delta\psi)e^{2\psi}\mu + \log\left(\frac{1}{V}\int_X e^{2\psi}\mu\right) - \log \det{}_S \Delta_{g^{\psi}} \\
= \quad & \log \det{}_S \Delta + \frac{1}{24\pi}\int_X \psi(\Delta^{\psi}\psi)\mu^{\psi} - \frac{1}{6\pi}\int_X \kappa^{\psi}\psi\mu^{\psi} + \log\left(\frac{V^{\psi}}{V}\right) \\
& - \log \det{}_S \Delta_{g^{\psi}} \\
\overset{\text{Def. 5.1.11}}{=} \quad & \log \det{}_S \Delta - \log \det{}_S^{g^{\psi}} \Delta \quad ,
\end{aligned}
$$

d.h. die Definition der g-skalierenden Determinante ist „umkehrbar".

Nun kann bei der Suche nach Extrempunkten der Determinante auf die Bedingung verzichtet werden, daß die Metriken der Variation zulässig sind. Wegen Satz 5.1.10 (der jetzt per definitionem für alle $\psi \in \mathcal{F}$ gilt) ist klar, daß die kritischen Punkte von $\det_S^g \Delta$ unter konformer Variation der Metrik bei konstantem Volumen V in einer konformen Klasse konform zulässiger Metriken genau die Metriken $e^{2\psi}g$ mit $\psi \in \mathcal{F}$ sind, für die das Funktional F unter der Nebenbedingung $\int_X e^{2h}\mu = V$ in ψ einen kritischen Punkt hat. Maxima von $\det_S^g \Delta$ sind dabei Minima von F und umgekehrt. Wegen des folgenden Satzes ist es einfacher, für F kritische Punkte zu suchen als direkt für $\det_S^g \Delta$:

Satz 5.1.12
Das Funktional F ist translationsinvariant und unter der Voraussetzung $\chi(X) \leq 0$ strikt konvex auf $\{h \in \mathcal{F} \mid \int_X h\mu = 0\}$.
<u>Beweis:</u>
Sei A eine Konstante und $h \in \mathcal{F}$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
F(h + A) - F(h) &= \int_X \kappa A\mu - \pi\chi(X)\log\frac{\int_X e^{2(h+A)}\mu}{\int_X e^{2h}\mu} \\
&= A\left(\int_X \kappa\mu - 2\pi\chi(X)\right) \quad .
\end{aligned}
$$

Weil auch auf zulässigen Riemannschen Flächen der Satz von Gauß-Bonnet gilt [CG], folgt aus dieser Gleichung die Translationsinvarianz von F.
Seien nun $\tau \in (0,1)$ und $h, \tilde{h} \in \mathcal{F}$. Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung erhält man wegen $\chi(X) \leq 0$:

$$
\begin{aligned}
F\left(\tau h + (1-\tau)\tilde{h}\right) \quad &= \quad \frac{1}{4}\int_X \left(\tau^2 h(\Delta h) + \tau(1-\tau)\left(h(\Delta\tilde{h}) + \tilde{h}(\Delta h)\right)\right. \\
&\qquad \left. +(1-\tau)^2\tilde{h}(\Delta\tilde{h})\right)\mu \\
&\qquad +\tau\int_X \kappa h\mu + (1-\tau)\int_X \kappa\tilde{h}\mu \\
&\qquad -\pi\chi(X)\log\left(\frac{1}{V}\int_X e^{2\tau h}e^{2(1-\tau)\tilde{h}}\mu\right) \\
&\leq \quad \frac{1}{4}\int_X \left\{\tau(\tau-1)\left(h(\Delta h) - \tilde{h}(\Delta h) - h(\Delta\tilde{h}) + \tilde{h}(\Delta\tilde{h})\right)\right\}\mu \\
&\qquad +\frac{1}{4}\int_X \left\{\tau h(\Delta h) + (1-\tau)\tilde{h}(\Delta\tilde{h})\right\}\mu \\
&\qquad +\tau\int_X \kappa h\mu + (1-\tau)\int_X \kappa\tilde{h}\mu \\
&\qquad -\pi\chi(X)\log\left\{\frac{1}{V}\left[\int_X e^{2h}\mu\right]^{\tau}\cdot\left[\int_X e^{2\tilde{h}}\mu\right]^{1-\tau}\right\} \\
&= \quad \tau(\tau-1)\frac{1}{4}\int_X \left\{(h-\tilde{h})\left(\Delta(h-\tilde{h})\right)\right\}\mu \\
&\qquad +\tau F(h) + (1-\tau)F(\tilde{h}) \\
&\overset{\tau\in(0,1)}{\leq} \quad \tau F(h) + (1-\tau)F(\tilde{h})
\end{aligned}
$$

mit Gleichheit in der letzten Zeile genau dann, wenn $\Delta h = \Delta\tilde{h}$ gilt. Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 5.1.12 ist in dieser Form für die Suche nach kritischen Punkten von F bei Konstanthaltung des Volumens noch nicht brauchbar, da dort die Nebenbedingung $\int_X h\mu = 0$ verwendet wird. Weil aber für jedes $h \in \mathcal{F}$

$$\int_X \exp\left(2h - \log\left(\frac{1}{V}\int_X e^{2h}\mu\right)\right)\mu = V$$

gilt, kann aus einem kritischen Punkt $\psi \in \mathcal{F}$ für die Variation unter der Nebenbedingung $\int_X h\mu = 0$ sofort via

$$\widetilde{\psi} := \psi - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{V}\int_X e^{2\psi}\mu\right) \tag{5.1.5}$$

ein kritischer Punkt $\psi \in \mathcal{F}$ für die Variation unter der Nebenbedingung $\int_X e^{2h}\mu = V$ konstruiert werden, denn nach Satz 5.1.12 gilt $F(\widetilde{\psi}) = F(\psi)$. Die Suche nach kritischen Punkten von F unter der Nebenbedingung $\int_X h\mu = 0$ ist somit äquivalent zur Suche nach

kritischen Punkten unter der Nebenbedingung $\int_X e^{2h}\mu = V$, also unter Konstanthaltung des Volumens, und diese wiederum ist äquivalent zur Suche nach kritischen Metriken für $\det_S^g \Delta$. Von nun an wird F unter der Nebenbedingung $\int_X h\mu = 0$ variiert.
Dann folgt aber weiter aus Satz 5.1.12, daß es höchstens einen kritischen Punkt von F geben kann, und daß dieser, so er denn existiert, ein Minimum ist. Mit anderen Worten: In jeder konformen Klasse konform zulässiger Metriken eines vorgegebenen Volumens kann es höchstens einen kritischen Punkt der g-skalierenden Determinante des Laplace-Operators geben; falls ein kritischer Punkt existiert, so liegt ein Maximum vor.
Als nächstes leite ich ein Kriterium dafür ab, ob die Metrik g ein kritischer Punkt der g-skalierenden Determinante ist:

Satz 5.1.13
Auf einer Riemannschen Fläche X mit $\chi(X) \leq 0$ sei g eine zulässige Metrik. Dann hat $\det_S^g \Delta$ in der Metrik $g^* = e^{2\psi^*}g$ mit $\psi^* \in \mathcal{F}$ genau dann ein Maximum innerhalb ihrer Klasse von konform zulässigen Metriken mit Volumen $V := \mathrm{vol}_g(X) = \mathrm{vol}_{g^*}(X)$, wenn die Gaußkrümmung κ^* von g^* konstant ist.
<u>*Beweis:*</u>
Nach obigen Überlegungen muß gezeigt werden, daß $\psi := \psi^* - \frac{1}{V}\int_X \psi^*\mu$ ein Minimum des Funktionales F auf

$$\left\{h \in \mathcal{F} \mid \int_X h\mu = 0\right\}$$

genau dann ist, wenn die Gaußkrümmung κ^ψ von $g^\psi := e^{2\psi}g$ konstant ist. Dazu berechne ich für eine beliebige Familie von Funktionen $\psi^\varepsilon \in \mathcal{F}$ mit $\int_X \psi^\varepsilon\mu = 0$ und $\psi^0 = \psi$ die Variation

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(\psi^\varepsilon)_{|\varepsilon=0} &= \int_X \left\{\frac{1}{4}\left(\dot{\psi}(\Delta\psi) + \psi(\Delta\dot{\psi})\right) + \kappa\dot{\psi} - \pi\chi(X)\frac{2\dot{\psi}e^{2\psi}}{\int_X e^{2\psi}\mu}\right\}\mu \\
&= \int_X \dot{\psi}\left\{\frac{\Delta\psi}{2} + \kappa - \frac{2\pi\chi(X)}{V^\psi}e^{2\psi}\right\}\mu \\
&\overset{[\text{OPS, (1.11)}]}{=} \int_X \dot{\psi}\left\{\kappa^\psi - \frac{2\pi\chi(X)}{V^\psi}\right\}\mu^\psi \quad ,
\end{aligned}$$

wobei $\mu^\psi = e^{2\psi}\mu$ die Volumenform zur Metrik g^ψ ist. Für jedes Kompaktum $\widehat{X} \subset X$ gilt $C_0^\infty(\widehat{X}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$, so daß zu jedem $h \in C_0^\infty(\widehat{X}, \mathbb{R})$ durch $A := \frac{1}{V}\int_X h\mu$ und $\psi^\varepsilon := \varepsilon(h - A) + \psi$ eine Familie von Funktionen mit den geforderten Eigenschaften und mit $\dot{\psi} = h - A$ konstruiert werden kann, für die nach obiger Rechnung und dem Satz von Gauß-Bonnet folgt:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(\psi^\varepsilon)_{\varepsilon=0} = \int_X (h - A)\left\{\kappa^\psi - \frac{2\pi\chi(X)}{V^\psi}\right\}\mu^\psi = \int_X h\left\{\kappa^\psi - \frac{2\pi\chi(X)}{V^\psi}\right\}\mu^\psi \quad .$$

ψ ist somit kritischer Punkt von F (und damit Minimum von F wegen Satz 5.1.12) genau dann, wenn $\kappa^\psi - 2\pi\chi(X)/V^\psi \equiv 0$, i.e. $\kappa^\psi = 2\pi\chi(X)/V^\psi = \text{const.}$ □

Nun muß noch die *Existenz* eines Maximums in jeder Klasse konform zulässiger Metriken vorgegebenen Volumens gezeigt werden. Dies geschieht in der bisher als Vorbild dienenden Arbeit von B. Osgood, R. Phillips und P. Sarnak [OPS] durch Betrachtung einer Minimalfolge von F, deren Konvergenz insbesondere mit Hilfe des Sobolevschen Einbettungssatzes gezeigt wird. Dieser steht nun auf der nichtkompakten Mannigfaltigkeit X nicht zur Verfügung, so daß X als erstes kompaktifiziert werden muß.

Satz 5.1.14
In jeder konformen Klasse konform zulässiger Metriken auf einer vollständigen Riemannschen Fläche X mit m Spitzen und $\chi(X)+m < 0$ gibt es genau eine Metrik mit konstanter Gaußkrümmung und vorgegebenem Volumen V.
<u>*Beweis:*</u>
Sei g eine zulässige Metrik auf X und $X = X_0 \cup Z_1 \cup \cdots \cup Z_m$ mit kompaktem, glatt berandetem X_0. Für alle $j \in \{1, ..., m\}$ gelte dabei $Z_j \cong [a_j, \infty) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ mit $a_j > 0$, und g sei hyperbolisch auf Z_j. Für $k \in \mathbb{N}$ seien nach (5.1.4) kompakte Mengen $X_k \subset X$ definiert. Weiter sei ϱ eine glatte Funktion auf X, so daß auch $\log \varrho$ glatt ist und

$$\varrho(z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } z \in X_1 \ , \\ y^{-2}e^{2y} & \text{falls } z = (y, x) \in X - X_2 \end{cases} \quad .$$

Nun definiere ich $g_0 := \varrho^{-1}g$, und diese Metrik ist auf $Z_j \cap (X - X_2)$ in lokalen Koordinaten $z = (y, x) \in [a_j, \infty) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong Z_j$ auf Z_j durch $ds_0^2 = e^{-2y}(dy^2 + dx^2)$ gegeben. Offenbar hat X auch bezüglich der Metrik g_0 endliches Volumen:

$$\int_{Z_j \cap (X - X_2)} e^{-2y} dx dy = \left[-\frac{e^{-2y}}{2} \right]_{a+2}^{\infty} = \frac{e^{-2(a+2)}}{2} < \infty \quad .$$

Außerdem ist g_0 sogar glatt auf $\bar{X}$, wie man folgendermaßen sieht: Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : [a + 2, \infty) \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\longrightarrow \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| \in (0, e^{-2\pi(a+2)}] \right\} \\ (y, x) &\longmapsto e^{2\pi i(x+iy)} = e^{-2\pi y} e^{2\pi i x} \end{aligned}$$

überführt die Metrik g_0 mit $ds_0^2 = e^{-2y}|dz|^2$ wegen $d\Phi(z) = 2\pi i \Phi(z) dz$ in

$$\frac{4\pi^2 |\Phi(z)|^2 |dz|^2}{|\Phi(z)|^2} = 4\pi^2 |dz|^2 \quad ,$$

und diese Metrik ist offensichtlich auch in 0 glatt, dem Bild des Punktes $\infty_j = \bar{Z}_j - Z_j$ unter Φ. $(\bar{X}, g_0)$ ist also eine kompakte Mannigfaltigkeit mit glatter Metrik und $\chi(\bar{X}) = \chi(X) + m < 0$ sowie $g = \varrho g_0$. Damit sind die Voraussetzungen eines Satzes von D.

Hulin und M. Troyanov erfüllt [HT, Theorem 8.1], der (zusammen mit seinem Beweis) die Existenz einer konform zulässigen Metrik mit konstanter Gaußkrümmung und Volumen V in der konformen Klasse von g zeigt. Diese Metrik ist nach Satz 5.1.13 kritischer Punkt von F und somit nach Satz 5.1.12 und den Überlegungen zu (5.1.5) eindeutig bestimmt in ihrer konformen Klasse. □

<u>Bemerkung:</u>
A priori ist nicht klar, warum $\chi(X)+m=0, m>0$ im Beweis von Satz 5.1.14 ausgeschlossen werden mußte. Für diesen Fall kann man aber zeigen, daß *keine* Metriken konstanter negativer Krümmung auf X existieren [HT, Theorem 7.2]. Jede Metrik konstanter Gaußkrümmung ist flach [HT, Theorems 7.1, 7.2], mit einer Metrik dieser Art hätten die Z_j jedoch unendliches Volumen.
Satz 5.1.13 und Satz 5.1.14 liefern zusammen das zentrale Ergebnis dieses Kapitels, welches völlig analog zu Satz 4.1 a) ist:

Satz 5.1.15
Ist X eine vollständige Riemannsche Fläche mit m Spitzen und $\chi(X)+m<0$, dann hat innerhalb der konformen Klasse jeder zulässigen Metrik g unter den konform zulässigen Metriken mit vorgegebenem Volumen die **Metrik konstanter Krümmung** *die maximale g-skalierende Determinante des Laplace-Operators. Weitere kritische Punkte gibt es nicht.*

5.2 Bekannte Ergebnisse in höheren Dimensionen

Im Rahmen meiner Diplomarbeit habe ich mich zuerst mit dem Verhalten der Determinanten von Laplace-Operatoren bzw. der analytischen Torsion auf komplex zweidimensionalen Kähler-Mannigfaltigkeiten unter konformer Variation der Metrik befaßt, leider ohne Erfolg. Des Rätsels Lösung findet man in der mittlerweile veröffentlichten Dissertation von K. Richardson [Ri].
Die mir bis dato bekannten Ergebnisse für konforme Variationen der Metrik möchte ich der Vollständigkeit halber in diesem Kapitel zusammenstellen.
Es gibt etliche Veröffentlichungen, die sich mit dem Verhalten der Determinante *konform kovarianter Operatoren* unter konformer Variation der Metrik befassen [BCY, BØ, CY]: Ein **konform kovarianter** Operator H ist ein geometrischer Operator, der unter konformer Transformation $\widetilde{g}=e^{2\psi}g$ der Metrik g mit glattem reellwertigem ψ in $\widetilde{H}=e^{-b\psi}He^{a\psi}$ übergeht, wobei a und b Konstanten sind. Auf kompakten, lokal symmetrischen Einstein Vier-Mannigfaltigkeiten kann man für solche Operatoren eine explizite Formel für $\log|\det\widetilde{H}|-\log|\det H|$ angeben [BØ, Proposition 2.1]. Leider ist der *de Rham-Laplace-Operator* und damit auch der für die analytische Torsion relevante *Dolbeaut-Laplace-Operator* nur auf reell zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten konform kovariant (vergleiche Kapitel 4), so daß dieses Ergebnis für die von mir betrachtete Fragestellung nicht

brauchbar ist. Zur selben Beurteilung kommt übrigens auch K. Richardson [Ri, p.55]. Auf reellen Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension ist die Determinante des konformen Laplace-Operators sogar in jeder konformen Klasse konstant [BØ, (1.2)].
Für den *de Rham-Laplace-Operator* auf kompakten orientierten Mannigfaltigkeiten gibt S. Rosenberg eine Variationsformel von $\zeta_r'(0) = -\log\det\Delta_r$ unter beliebigen Variationen der Metrik an [Ros]. Für den Beweis werden ähnliche Methoden verwendet wie in meinen Herleitungen für die Variationsformel der analytischen Torsion in den Kapiteln 6.1, 6.2 und 6.5: Zunächst differenziert man für $\mathrm{Re}\, s \gg 0$ die Darstellung von $\zeta_r(s)$ durch Mellin-Transformation des Wärmeleitungskerns (Definition 3.1.1). Das Ergebnis wird nach ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortgesetzt und dann nahe 0 die Asymptotik des Wärmeleitungskernes eingesetzt. Ich habe bei meinen Rechnungen diese Asymptotik auf dem Intervall $[0,1]$ verwendet, während sie von S. Rosenberg auf einem Intervall $[0,p]$ eingesetzt wird, so daß die Formeln zum Schluß noch eine Abhängigkeit vom Abschneideparameter p aufweisen. Der meinem Satz 6.5.1 entsprechende Satz [Ros, Theorem 2.5] lautet nun:

Satz 5.2.1
Sei (X,g) eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit der reellen Dimension n und ζ_r die Zetafunktion des de Rham-Laplace-Operators Δ_r. Weiter seien ein Abschneideparameter $p \in \mathbb{R}^+$ und eine natürliche Zahl k gewählt. $g^\varepsilon := g + \varepsilon\delta g$ sei eine Familie von Riemannschen Metriken auf X sowie $\hat{\alpha}$ – in Verallgemeinerung der Definition 1.3.3 des Operators α auf beliebige Variationen – durch $\hat{\alpha} := \left(*^{-1}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}*\right)_{|\varepsilon=0}$ definiert. Dann gilt für $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\delta\zeta_r'(0) &= \log p\;\delta\zeta_r(0) + \sum_{\substack{j=0\\ j\neq n/2}}^{k} \frac{p^{j-\frac{n}{2}}}{j-\frac{n}{2}}\,\delta res\Gamma\left(\tfrac{n}{2}-j\right)\zeta_r\left(\tfrac{n}{2}-j\right)\\
&\quad + \int_p^\infty \mathrm{tr}\left(-\hat{\alpha}d\delta e^{-t\Delta_{r+1}} + \hat{\alpha}\delta d e^{-t\Delta_r} + \hat{\alpha}\delta d e^{-t\Delta_{r-1}} - \hat{\alpha}d\delta e^{-t\Delta_r}\right)dt\\
&\quad + \mathcal{O}\left(p^{k+1-\frac{n}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Interessant ist Satz 5.2.1 auch, weil die dort angegebene Formel die regularisierte Version von

$$\begin{aligned}
\delta\zeta_r'(0) &= \int_0^\infty \mathrm{tr}\left(-\hat{\alpha}d\delta e^{-t\Delta_{r+1}} + \hat{\alpha}\delta d e^{-t\Delta_r} + \hat{\alpha}\delta d e^{-t\Delta_{r-1}} - \hat{\alpha}d\delta e^{-t\Delta_r}\right)dt\\
&= -\,\mathrm{tr}\left(\delta\Delta_r\Delta_r^{-1}\right) \qquad (5.2.1)
\end{aligned}$$

ist [Ros, (2.6)], also das unendlichdimensionale Analogon der für Matrizen geltenden Formel $\log\det A = \mathrm{tr}\,\log A$, wie es in der physikalischen Literatur gerne verwendet wird (z.B. [Wi1, (19)]).
Das Problem bei der Auswertung von Satz 5.2.1 besteht darin, daß die Variationsformel mit dem Integral eine nichtlokale Größe enthält. Mit dem analogen Problem hatte ich bei

der Aufstellung der Euler-Lagrange-Gleichung für die Variation der analytischen Torsion (Kapitel 6.2 und 6.3) zu kämpfen.
S. Rosenberg zeigt nun [Ros, Proposition 2.15], daß in bestimmten Fällen unter *konformer Variation* die formale Gleichung (5.2.1) auch im strengen Sinne gültig ist. Das betrifft Metriken konstanter Krümmung für $n = 3, 4, 5$ und Metriken, die auf einem lokal symmetrischen Raum $\Gamma \setminus G/K$ (mit einem symmetrischen Raum G/K und einer torsionsfreien diskreten kokompakten Untergruppe $\Gamma \subset G/K$) von einer G-invarianten Metrik auf G/K induziert sind.
Mein Ergebnis in Satz 6.7.2 kann als Analogon für die analytische Torsion zum Ergebnis von S. Rosenberg [Ros, Proposition 2.15] betrachtet werden, die Bedingung, die ich berechnet habe, ist auch ähnlich schlecht zu handhaben wie die von S. Rosenberg angegebene.

Etwas konkretere Ergebnisse gibt K. Richardson [Ri] für die konforme Variation der Determinante des *de Rham-Laplace-Operators* $\Delta := \Delta_0$ an. Auch er macht die Feststellung, daß die Situation für höhere Dimensionen erheblich komplizierter ist als für zwei reelle Dimensionen, weil nichtlokale Terme in der Variationsformel auftauchen [Ri, p.54]. Ich werde die von K. Richardson angewandten Methoden genauer erläutern.
Im folgenden sei (X, g) eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\dim_{\mathbb{R}} X = n$, und ψ^ε eine Familie glatter reellwertiger Funktionen mit $\psi^0 \equiv 0$ und $\int_X (\frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial \varepsilon})_{|\varepsilon=0}\, \mu = 0$ (diese Bedingung trägt der Tatsache Rechnung, daß während der Variation das Volumen konstant gehalten werden muß (vergleiche Kapitel 4); μ ist die Volumenform zur Metrik g). Durch $g^\varepsilon := e^{\psi^\varepsilon} g$ wird jetzt eine konforme Variation der Metrik definiert. Im folgenden sollen Ableitungen nach ε immer durch einen Punkt symbolisiert werden.
Mit den üblichen Methoden leitet K. Richardson zuerst Formeln für $\dot{\Delta}$ und $\dot{\zeta}'(0)$ her. Ist $\varphi^0, \varphi^1, \varphi^2, \ldots.$ ein vollständiges Orthonormalsystem aus Eigenfunktionen von $\Delta = \Delta_g$ zu Eigenwerten $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$, dann wird für $\mathrm{Re}\, s > \frac{n}{2}$ eine verallgemeinerte Zetafunktion

$$\zeta_g(s, x, y) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi^j(x)\varphi^j(y)}{\lambda_j^s}$$

definiert, die nach $\mathbb{C}$ meromorph fortgesetzt werden kann. Außerdem sei die asymptotische Entwicklung des Wärmeleitungskernes K von Δ durch

$$K(x, x, t) \overset{t \to 0}{\sim} t^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(x) t^j$$

gegeben. Dann kann man zeigen [Ri, Corollary 1.1]:

Satz 5.2.2
Ist die reelle Dimension von X gerade, so ist g kritischer Punkt der Determinante des Laplace-Operators unter konformer Variation der Metrik bei konstantem Volumen genau dann, wenn

$$\zeta_g(1, x, x) = \mathrm{const.}$$

Ist die reelle Dimension von X ungerade, so ist g kritischer Punkt der Determinante des Laplace-Operators unter konformer Variation der Metrik bei konstantem Volumen genau dann, wenn

$$\alpha_{n/2}(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right)\Delta\left(\zeta_g(s,x,x) - \frac{\alpha_{(n/2-1)}(x)}{s-1}\right)_{|s=1} = \text{const.}$$

Diese Bedingungen sind offenbar nicht lokal, denn die Zetafunktion enthält ja die gesamte Spektralinformation.
Weil sowohl die Koeffizienten der asymptotischen Entwicklung des Wärmeleitungskernes als auch die Zetafunktion invariant unter Isometrien sind, liest man aus Satz 5.2.2 direkt ab, daß Metriken auf homogenen Mannigfaltigkeiten kritische Punkte sind [Ri, Corollary 1.3]. Es ist jedoch nicht klar, ob es noch andere Beispiele für kritische Punkte gibt [Ri, p.63]. K. Richardson konstruiert Beispiele für lokal symmetrische Metriken, welche *nicht* kritische Punkte der Determinante des Laplace-Operators sind [Ri, §2].
Die Methode, die K. Richardson für den Fall $n = 3$ verwendet, um die zweite Variation zu berechnen [Ri, §3], ist recht interessant: Bezeichnet ζ^ε die übliche Zetafunktion zum de Rham-Laplace-Operator Δ^ε für die Metrik g^ε und K^ε den zugehörigen Wärmeleitungskern, dann gilt [Ri, (3.3)]:

$$\begin{aligned} \left(\dot{\zeta^\varepsilon}\right)'(0) &= \left[\frac{1}{4\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\int_X \Delta^\varepsilon\dot{\psi}^\varepsilon(x)\left(K^\varepsilon(t,x,x) - \frac{1}{\operatorname{vol}(X)}\right)\mu_\varepsilon(x)dt\right]_{|s=1}. \\ \text{Mit}\qquad F(\varepsilon) &:= \left[\frac{1}{4\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\int_X \Delta^\varepsilon\dot{\psi}^\varepsilon(x)\left(K^0(t,x,x) - \frac{1}{\operatorname{vol}(X)}\right)\mu_\varepsilon(x)dt\right]_{|s=1} \end{aligned}$$

(die beiden Zeilen unterscheiden sich, solange $\varepsilon \neq 0$, im Wärmeleitungskern unter dem Integral) kann man $\dot{F} \equiv 0$ zeigen [Ri, (3.7)]. Daher folgt $(\ddot{\zeta^\varepsilon})'(0) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}((\dot{\zeta^\varepsilon})'(0) - F(\varepsilon))$, und die Differenz $(\dot{\zeta^\varepsilon})'(0) - F(\varepsilon)$ ist erheblich einfacher zu handhaben als $(\dot{\zeta^\varepsilon})'(0)$ allein. So kann

$$\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}\left((\zeta^\varepsilon)'(0)\right)_{|\varepsilon=0} = \frac{1}{4}\operatorname{tr}\left(\Delta\dot{\psi}(\Delta^{-1})^{\cdot} - \frac{3}{2}\dot{\psi}\Delta\dot{\psi}\Delta^{-1}\right)$$

gezeigt werden [Ri, (3.15)], wobei weggelassene obere und untere Indizes „ε“ bedeuten, daß $\varepsilon = 0$ gesetzt wurde, und Δ^{-1} Konstanten auf Null und die Eigenfunktion φ^j mit $j > 0$ auf $\lambda_j^{-1}\varphi^j$ abbildet.
Der Trick in K. Richardsons Methode besteht nun darin, eine neue Zetafunktion zu definieren, die im wesentlichen die rechte Seite obiger Gleichung darstellt; man definiert

$$\begin{aligned} Af &:= \frac{1}{\operatorname{vol}(X)}\int_X f\mu\,, \quad Lf := \int_X \Delta^{-1}\dot{\psi}f\mu\,, \\ Z(s) &:= \frac{1}{4}\operatorname{tr}\left(\frac{5}{4}\Delta\dot{\psi}\Delta^{-s}\circ\dot{\psi} + \frac{1}{4}\left(\Delta\dot{\psi}\Delta^{-s}\right)^2 - \frac{7}{4}\dot{\psi}\Delta\dot{\psi}\Delta^{-s}\right. \\ &\qquad\left. - \frac{5}{4\operatorname{vol}(X)}\Delta\dot{\psi}L - \frac{5}{4}\Delta\dot{\psi}\Delta^{-1}\circ\dot{\psi}A\right) \end{aligned}$$

und kann dann

$$\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}\left(\left(\zeta^\varepsilon\right)'(0)\right)_{|\varepsilon=0} = Z(1)$$

zeigen [Ri, (3.19),(3.20)]. Jetzt können die Summanden von Z einzeln analytisch fortgesetzt werden, und letztendlich erhält man [Ri, Theorem 3]

$$\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}\left(\left(\zeta^\varepsilon\right)'(0)\right)_{|\varepsilon=0} = -\frac{\zeta(1)}{8\,\mathrm{vol}\,(X)}\left\langle\Delta\dot\psi,\dot\psi\right\rangle + \frac{1}{16}\,\mathrm{tr}\,\left((\Delta\dot\psi\Delta^{-1})^2\right) - \frac{5}{8\,\mathrm{vol}\,(X)}\left\langle\dot\psi,\dot\psi\right\rangle\ .$$

Aus dieser Gleichung können nun gewisse Bedingungen für Maxima und Minima gefolgert werden [Ri, Corollaries 3.1-3.3].
Konkrete Ergebnisse erhält K. Richardson nur, wenn die Eigenwerte des Laplace-Operators explizit bekannt sind. So kann man mit obiger Formel zeigen, daß die euklidische Metrik auf einem *flachen, reell dreidimensionalen Torus* ein relatives Maximum der Determinante des Laplace-Operators unter konformer Variation bei festem Volumen ist [Ri, Theorem 4]. Als Folgerung ergibt sich durch Deformation des euklidischen Torus dieselbe Aussage für „viele" Tori; ob sie jedoch für alle Tori richtig ist, bleibt dahingestellt. Für die *Sphäre* ist die Zetafunktion explizit bekannt, mit etwas Aufwand kann man beweisen, daß die Standardmetrik auf der Sphäre S^3 ein relatives Maximum der Determinante des Laplace-Operators unter konformer Variation bei festem Volumen ist [Ri, Theorem 5].

Bemerkung:
Die konforme Variation unter Konstanthaltung des Volumens zerstört auf geschlossenen Kähler-Mannigfaltigkeiten der komplexen Dimension $N = 2n \geq 2$ in jedem Fall die Kählerbedingung: Ist ω die Kählerform zu einer Kählermetrik g auf X und ψ eine reellwertige glatte Funktion, so daß die konforme Variation $e^\psi g$ der Metrik weder das Volumen verändert noch die Kählerbedingung zerstört, dann folgt zunächst $0 = d(e^\psi\omega) = d\psi\wedge e^\psi\omega$. Wegen $\omega\in\Lambda^{1,1}(T^*X)$ ergibt sich sofort $\partial\psi\wedge\omega = 0$ und $\overline{\partial}\psi\wedge\omega = 0$. In lokalen holomorphen Koordinaten $(z^1,...,z^N)$ auf X folgt aus diesen Bedingungen $\forall\, j,k,l:\ \psi_j g_{k\bar l} = \psi_k g_{j\bar l}$. Wählt man zu jedem $j\in\{1,...,N\}$ ein $k\,(=k(j))\neq j$, dann folgt daraus

$$\forall\, j\in\{1,...,N\}:\quad \psi_j = \sum_{l=1}^N \psi_j g_{k\bar l} g^{k\bar l} = \sum_{l=1}^N \psi_k g_{j\bar l} g^{k\bar l} = \psi_k\delta_{jk} = 0\quad ,$$

also $\partial\psi = 0$. Analog zeigt man $\overline{\partial}\psi = 0$, d.h. $\Delta\psi = 0$ und somit $\psi\equiv\mathrm{const}$, da X kompakt ist. Mit der Voraussetzung, daß das Volumen von X für die Metriken g und $e^\psi g$ gleich sein soll, folgt sofort $\psi\equiv 0$. Mit anderen Worten: Es gibt keine konforme Variation der Metrik, die das Volumen konstant läßt und die Kählerbedingung nicht zerstört. Die Variation innerhalb der Kählerklasse kann also keinesfalls auf eine konforme Variation zurückgeführt werden.

6 Extremale Metriken bei Variation innerhalb der Kählerklasse

In diesem Kapitel untersuche ich das Verhalten der analytischen Torsion $\tau_0(X, g)$ und der Quillennorm auf geschlossenen Kähler-Mannigfaltigkeiten unter Variation der Metrik g innerhalb der Kählerklasse. Das Hauptgewicht liegt dabei auf komplex zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten, einige Ergebnisse (Kapitel 6.4 und 6.8) konnte ich jedoch für beliebige Dimensionen beweisen.

6.1 Vorbemerkungen zur Herleitung einer Variationsformel

In den Kapiteln 6.2 und 6.5 führe ich zwei unterschiedliche Methoden zur Herleitung einer Variationsformel für $\tau_0(X, g)$ bei Variation der Metrik innerhalb der Kählerklasse vor.
Die erste (Kapitel 6.2) basiert auf den Ergebnissen von J.-M. Bismut, H. Gillet und C. Soulé [BGSI, BGSII, BGSIII] und kann für beliebige Kähler-Mannigfaltigkeiten durchgeführt werden.
Die zweite (Kapitel 6.5) konnte ich nur auf *zweidimensionale kompakte Tori* und *kompakte $K3$-Flächen* anwenden, abgesehen von geschlossenen Riemannschen Flächen (siehe Kapitel 6.3). Dafür ist die Herleitung der Variationsformel aber elementar, der Atiyah-Singer-Indexsatz oder verwandte Sätze müssen nicht bemüht werden.
Die beiden Zugänge spiegeln die Dualität zwischen topologischen und analytischen Methoden wider, die durch den Atiyah-Singer-Indexsatz gegeben ist: Die elementare Methode gründet sich auf lokale Berechnungen von asymptotischen Entwicklungen der Wärmeleitungskerne, während die Formel von J.-M. Bismut, H. Gillet und C. Soulé im Zusammenhang mit dem Atiyah-Singer-Indexsatz steht und auf die Berechnung von Ableitungen charakteristischer Klassen hinausläuft. Dabei ist die zweite Formel genau genommen eine Variationsformel für die Quillenmetrik, der entsprechende Korrekturterm für die Variation von $\tau_0(X, g)$ verschwindet jedoch gerade in den Spezialfällen, in denen mir die elementare Herleitung gelungen ist.
Beide Herleitungen basieren auf folgendem Ergebnis, das fast direkt der entsprechenden Rechnung von D.B. Ray und I.M. Singer [RS2] zu entnehmen ist:

Lemma 6.1.1
Sei (X, g) eine kompakte, komplex N-dimensionale Kähler-Mannigfaltigkeit mit holomorphem Zusammenhang, und g^ε eine φ-Variation von g (siehe Definition 1.3.1).
Für $\operatorname{Re} s \gg 0$ und $\varepsilon \in [-1, 1]$ sei

$$F^\varepsilon(s) := -\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{N}(-1)^q \frac{s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \operatorname{tr}\left(\alpha\left(e^{-t\Delta^\varepsilon_{0,q}} - P^\varepsilon_{0,q}\right)\right) dt$$

($P^\varepsilon_{0,q}$ ist – wie schon in Definition 3.1.1 – die orthogonale Projektion auf den Raum der harmonischen Formen vom Typ $(0, q)$). Dann läßt sich F^ε meromorph fortsetzen, und die

meromorphe Fortsetzung von F^ε ist in $s=0$ analytisch. Außerdem gilt mit $\tau^\varepsilon := \tau_0(X, g^\varepsilon)$ und $(F^\varepsilon)'(s) := \frac{d}{ds}F^\varepsilon(s)$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\log\tau^\varepsilon = (F^\varepsilon)'(0) \quad .$$

<u>*Beweis:*</u>
Ich setze zunächst

$$G^\varepsilon(s) := \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\sum_{q=0}^{N}(-1)^q q\zeta_{0,q}^\varepsilon(s) \quad . \tag{6.1.1}$$

G^ε ist meromorph und in $s=0$ analytisch, weil dies für die Funktionen $\zeta_{0,q}^\varepsilon$ richtig ist (siehe Kapitel 3.1). Außerdem entnimmt man der Definition 3.2.1 der analytischen Torsion sofort:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\log\tau^\varepsilon = \frac{1}{2}\,(G^\varepsilon)'(0) \quad .$$

Daher genügt es, für jedes $\varepsilon\in[-1,1]$ zu zeigen:

$$\text{Für Re } s \gg 0 \text{ gilt} \qquad F^\varepsilon(s) = \frac{1}{2}G^\varepsilon(s). \tag{6.1.2}$$

Die folgenden Rechnungen für Re $s \gg 0$ stammen von D.B. Ray und I.M. Singer [RS2, p.157f].
Um $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\sum_{q=0}^{N}(-1)^q q\zeta_{0,q}^\varepsilon(s)$ zu berechnen, verwendet man die Definition 3.1.1 von $\zeta_{0,q}^\varepsilon$:

$$\zeta_{0,q}^\varepsilon(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\,\mathrm{tr}\,\left(e^{-t\Delta_{0,q}^\varepsilon} - P_{0,q}^\varepsilon\right)\,dt \quad .$$

Weil tr $P_{0,q}^\varepsilon$ die Dimension des Raumes der harmonischen Formen vom Typ $(0,q)$, also wegen des Dolbeaut-Isomorphismus gleich $h^{0,q}$ und somit unabhängig von ε ist, verschwindet dieser Summand beim Differenzieren. Mit $\dot\Delta_{0,q}^\varepsilon := \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Delta_{0,q}^\varepsilon$ gilt: $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\,\mathrm{tr}\,\left(e^{-t\Delta_{0,q}^\varepsilon}\right) = -t\mathrm{tr}\,\left(\dot\Delta_{0,q}^\varepsilon e^{-t\Delta_{0,q}^\varepsilon}\right)$ [RS1, Section 6]. Dies liefert:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\sum_{q=0}^{N}(-1)^q q\zeta_{0,q}^\varepsilon(s) = -\frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{q=0}^{N}(-1)^q q\int_0^\infty t^s\,\mathrm{tr}\,\left(\dot\Delta_{0,q}^\varepsilon e^{-t\Delta_{0,q}^\varepsilon}\right)\,dt \quad . \tag{6.1.3}$$

Ich erinnere an den Operator $\alpha = *^{-1}\dot *$ aus Definition 1.3.3: Aus $(*^2)_{|\Lambda^{p,q}(T^*X)} = (-1)^{p+q}$ [GH, p.82] folgt, daß $*\dot * = -\dot * *$ und daher $\alpha = -\dot * *^{-1}$. Dies liefert nun (der Einfachheit halber lasse ich hier die Indizes an den Operatoren $\overline\partial$ und $\overline\partial^*$ weg):

$$-\dot\Delta_{0,q}^\varepsilon \overset{(1.2.1)}{=} \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(*\overline\partial*\overline\partial + \overline\partial*\overline\partial*\right) = \alpha\overline\partial^*\overline\partial - \overline\partial^*\alpha\overline\partial + \overline\partial\alpha\overline\partial^* - \overline\partial\,\overline\partial^*\alpha \quad .$$

Wegen tr$\,(AB)$ = tr$\,(BA)$ für einen kompakten Operator A der Spurklasse und einen beschränkten Operator B gilt

$$\mathrm{tr}\,\left(\overline\partial^*\alpha\overline\partial e^{-t\Delta_{0,q}^\varepsilon}\right) = \mathrm{tr}\,\left(e^{-\frac{t}{2}\Delta_{0,q}^\varepsilon}\overline\partial^*\alpha\overline\partial e^{-\frac{t}{2}\Delta_{0,q}^\varepsilon}\right) = \mathrm{tr}\,\left(\alpha\overline\partial e^{-t\Delta_{0,q}^\varepsilon}\overline\partial^*\right) \quad ,$$

und mit analogen Rechnungen für die übrigen Summanden erhält man

$$\begin{aligned}
-\operatorname{tr}\left(\dot{\Delta}^{\varepsilon}_{0,q}e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,q}}\right) &= \operatorname{tr}\left(\alpha\overline{\partial}^*\overline{\partial}e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,q}}\right) - \operatorname{tr}\left(\alpha\overline{\partial}e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,q}}\overline{\partial}^*\right)\\
&\quad + \operatorname{tr}\left(\alpha\overline{\partial}^*e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,q}}\overline{\partial}\right) - \operatorname{tr}\left(\alpha e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,q}}\overline{\partial}\,\overline{\partial}^*\right)\\
&= \operatorname{tr}\left(\alpha\overline{\partial}^*\overline{\partial}e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,q}}\right) - \operatorname{tr}\left(\alpha\overline{\partial}\,\overline{\partial}^*e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,q+1}}\right) \qquad (6.1.4)\\
&\quad + \operatorname{tr}\left(\alpha\overline{\partial}^*\overline{\partial}e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,q-1}}\right) - \operatorname{tr}\left(\alpha\overline{\partial}\,\overline{\partial}^*e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,q}}\right) \quad .
\end{aligned}$$

Jetzt kann eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\sum_{q=0}^{N}(-1)^q q\zeta^{\varepsilon}_{0,q}(s)\\
\overset{(6.1.3),\,(6.1.4)}{=}\ & \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^s\Bigg[\sum_{q=1}^{N-1}\Big\{(-1)^q q\operatorname{tr}\left(\alpha\overline{\partial}^*\overline{\partial}e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,q}}\right) + (-1)^q(q-1)\operatorname{tr}\left(\alpha\overline{\partial}\,\overline{\partial}^*e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,q}}\right)\\
&\qquad - (-1)^q(q+1)\operatorname{tr}\left(\alpha\overline{\partial}^*\overline{\partial}e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,q}}\right) - (-1)^q q\operatorname{tr}\left(\alpha\overline{\partial}\,\overline{\partial}^*e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,q}}\right)\Big\}\\
&\quad +(-1)^N(N-1)\operatorname{tr}\left(\alpha\overline{\partial}\,\overline{\partial}^*e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,N}}\right) - (-1)^0\operatorname{tr}\left(\alpha\overline{\partial}^*\overline{\partial}e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,0}}\right)\\
&\quad -(-1)^N N\operatorname{tr}\left(\alpha\overline{\partial}\,\overline{\partial}^*e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,N}}\right)\Bigg]\,dt\\
=\ & -\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^s\Bigg[\sum_{q=1}^{N-1}(-1)^q\Big\{\operatorname{tr}\left(\alpha\overline{\partial}^*\overline{\partial}e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,q}}\right) + \operatorname{tr}\left(\alpha\overline{\partial}\,\overline{\partial}^*e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,q}}\right)\Big\}\\
&\quad +(-1)^N\operatorname{tr}\left(\alpha\overline{\partial}\,\overline{\partial}^*e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,N}}\right) + (-1)^0\operatorname{tr}\left(\alpha\overline{\partial}^*\overline{\partial}e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,0}}\right)\Bigg]\,dt\\
=\ & -\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^s\sum_{q=0}^{N}(-1)^q\operatorname{tr}\left(\alpha\Delta^{\varepsilon}_{0,q}e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,q}}\right)\,dt \quad ,
\end{aligned}$$

also

$$G^{\varepsilon}(s) \overset{(6.1.1)}{=} \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\sum_{q=0}^{N}(-1)^q q\zeta^{\varepsilon}_{0,q}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^s\sum_{q=0}^{N}(-1)^q\operatorname{tr}\left(\alpha\frac{d}{dt}e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,q}}\right)\,dt \quad . \qquad (6.1.5)$$

So weit die Rechnung von D.B. Ray und I.M. Singer. Jetzt kann aber noch partiell integriert werden:

$$\begin{aligned}
G^{\varepsilon}(s) &\overset{(6.1.5)}{=} \sum_{q=0}^{N}(-1)^q\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^s\operatorname{tr}\left(\alpha\frac{d}{dt}\left(e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,q}} - P^{\varepsilon}_{0,q}\right)\right)\,dt\\
&= \sum_{q=0}^{N}(-1)^q\Bigg\{\left[\frac{1}{\Gamma(s)}t^s\operatorname{tr}\left(\alpha\left(e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,q}} - P^{\varepsilon}_{0,q}\right)\right)\right]_0^\infty\\
&\qquad -\frac{s}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\operatorname{tr}\left(\alpha\left(e^{-t\Delta^{\varepsilon}_{0,q}} - P^{\varepsilon}_{0,q}\right)\right)\,dt\Bigg\} \quad .
\end{aligned}$$

Sind $0 = \lambda_0^q(\varepsilon) \leq \lambda_1^q(\varepsilon) \leq \lambda_2^q(\varepsilon) \leq \dots$ die mit ihren Multiplizitäten gezählten Eigenwerte von $\Delta_{0,q}^{\varepsilon}$, dann gilt offenbar

$$\text{für } t \to \infty: \quad \operatorname{tr}\left(\alpha\left(e^{-t\Delta_{0,q}^{\varepsilon}} - P_{0,q}^{\varepsilon}\right)\right) = \mathcal{O}\left(\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j^q(\varepsilon)t}\right) = \mathcal{O}\left(e^{-\lambda_1^q(\varepsilon)t}\right) \quad ,$$

d.h. die Randterme in obiger Formel verschwinden (es ist immer noch Re $s \gg 0$ vorausgesetzt), und man erhält daher:

$$G^{\varepsilon}(s) = -\sum_{q=0}^{N}(-1)^q \frac{s}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} \operatorname{tr}\left(\alpha\left(e^{-t\Delta_{0,q}^{\varepsilon}} - P_{0,q}^{\varepsilon}\right)\right) dt = 2F^{\varepsilon}(s)$$

für Re $s \gg 0$, was nach (6.1.2) nur noch zu zeigen war. □

Die meromorphe Fortsetzung von F^{ε} bezeichne ich ab sofort ebenfalls mit F^{ε}.

6.2 Die Anomalienformel

Für die Herleitung einer Variationsformel für $\tau_0(X,g)$ bei Variation der Metrik innerhalb der Kählerklasse verwende ich in diesem Kapitel die von J.-M. Bismut, H. Gillet und C. Soulé hergeleitete **Anomalienformel** [BGSIII]. Die Bezeichnung *Anomalienformel* für dieses Resultat (siehe auch [BGV, Theorem 10.35]) hängt mit der physikalischen Bedeutung der Formel zusammen (siehe Kapitel 9.2). Die in der zitierten Arbeit verwendete Beweismethode mittels Brownscher Brücken [BGSIII, Beweis von Theorem 1.22] läßt Anregungen aus der Theorie der Pfadintegrale vermuten, so daß ich auch im mathematischen Teil meiner Arbeit die Bezeichnung *Anomalienformel* aus dem physikalischen Fachjargon übernehme.
Zunächst definiere ich jedoch noch zwei auch in den folgenden Kapiteln häufig gebrauchte Operatoren:

Definition 6.2.1
Sei (X,g) eine N-dimensionale Kähler-Mannigfaltigkeit und g^{ε} eine φ-Variation von g. Dann setze ich

$$\Phi := \frac{\partial g^{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \text{ und } U^{\varepsilon} := (g^{\varepsilon})^{-1}\Phi \quad .$$

Nach Definition 1.3.1 der φ-Variation ist Φ unabhängig von ε, und bezüglich lokaler holomorpher Koordinaten $(z^1,...,z^N)$ gilt:

$$\Phi = (\varphi_{i\bar{\jmath}})_{i\bar{\jmath}} \quad .$$

Satz 6.2.2
Sei (X, g) eine N-dimensionale geschlossene Kähler-Mannigfaltigkeit mit metrischem Zusammenhang. g^ε sei eine φ-Variation von g, Ω^ε die zu g^ε mit metrischem Zusammenhang gehörige Krümmungsform von $T^{1,0}X$ und $\tau^\varepsilon := \tau_0(X, g^\varepsilon)$. Td bezeichne das Toddgeschlecht und $Td_j = [Td]^j \in H^{2j}(X, \mathbb{Z})$ dessen Komponenten in den einzelnen Kohomologieklassen. $\overline{Td}$ sei das „untopologische“ Toddgeschlecht (siehe [BGV, p.49]*), wie es J.-M. Bismut, H. Gillet, C. Soulé in* [BGSI, BGSII, BGSIII] *verwenden, d.h. in der Definition der Chernklassen und damit des Toddgeschlechtes werden $(-2\pi i)^{-j}$-Faktoren weggelassen. Dann gilt:*

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\log\tau^\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^N \int_X \frac{\partial}{\partial b}\overline{Td}_{N+1}\left(-\Omega^\varepsilon - bU^\varepsilon\right)_{|b=0} + \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{N}(-1)^q \operatorname{tr}\left(\alpha P^\varepsilon_{0,q}\right) \quad .$$

<u>*Beweis:*</u>
Obige Formel ist, wie ich zeigen werde, keine andere als die von J.-M. Bismut, H. Gillet und C. Soulé hergeleitete [BGSIII, (1.144)]:
Zunächst sei bemerkt, daß in der zitierten Arbeit die Algebra $\bigoplus_{q=0}^N \Lambda^{0,q}(T^*X)$ der Differentialformen vom Typ $(0,q)$ mit $q \in \{0, ..., N\}$ auf X als **Superalgebra** aufgefaßt wird, wobei die Parität von q die Parität der Differentialformen vom Typ $(0,q)$ ist. Für einen Operator A der Spurklasse auf $\bigoplus_{q=0}^N \Lambda^{0,q}(T^*X)$ ist dann die **Superspur** tr_S definiert via

$$\operatorname{tr}_S(A) := \sum_{q=0}^{N}(-1)^q \operatorname{tr}_{\Lambda^{0,q}(T^*X)}\left(A_{|\Lambda^{0,q}(T^*X)}\right) \quad .$$

Setzt man noch $\Delta^\varepsilon := \bigoplus_{q=0}^N \Delta^\varepsilon_{0,q}$ und $P^\varepsilon := \bigoplus_{q=0}^N P^\varepsilon_{0,q}$, dann liest sich das Ergebnis von Lemma 6.1.1 so:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\log\tau^\varepsilon = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left\{\frac{s}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\operatorname{tr}_S\left(\alpha\left(e^{-t\Delta^\varepsilon} - P^\varepsilon\right)\right)\, dt\right\}_{|\ s=0} \quad . \tag{6.2.1}$$

Nun gibt es eine asymptotische Entwicklung

$$-\operatorname{tr}_S\left(\alpha\left(e^{-t\Delta^\varepsilon} - P^\varepsilon\right)\right) \overset{t\to 0}{\sim} \sum_{j=-N}^{\infty} M_{j,\varepsilon}t^j + \operatorname{tr}_S\left(\alpha P^\varepsilon\right)$$

[BGSIII, Theorem 1.18], d.h. für $k \in \mathbb{N}$ ist $-\operatorname{tr}_S\left(\alpha\left(e^{-t\Delta^\varepsilon} - P^\varepsilon\right)\right) = \sum_{j=-N}^{k} M_{j,\varepsilon}t^j + \operatorname{tr}_S\left(\alpha P^\varepsilon\right) + \varrho(t)$ mit $\varrho(t) = \mathcal{O}(t^{k+1})$. Dann folgt für Re $s \gg 0$:

$$
\begin{aligned}
-\int_0^\infty & t^{s-1}\,\mathrm{tr}_S\left(\alpha\left(e^{-t\Delta^\varepsilon}-P^\varepsilon\right)\right)\,dt \\
&= \int_0^1\left[\sum_{j=-N}^{k} M_{j,\varepsilon}\,t^{j+s-1}+\mathrm{tr}_S\,(\alpha P^\varepsilon)\,t^{s-1}\right]dt+\int_0^1 t^{s-1}\varrho(t)\,dt \\
&\quad -\int_1^\infty t^{s-1}\,\mathrm{tr}_S\left(\alpha\left(e^{-t\Delta^\varepsilon}-P^\varepsilon\right)\right)\,dt \\
&= \sum_{j=-N}^{k}\frac{M_{j,\varepsilon}}{j+s}+\frac{\mathrm{tr}_S\,(\alpha P^\varepsilon)}{s}+h_\varepsilon(s) \quad ,
\end{aligned}
$$

wobei h_ε eine in $s=0$ holomorphe Funktion ist, wie aus $\varrho(t)=\mathcal{O}(t^{k+1})$ und der Weylschen Formel für die Asymptotik der Eigenwerte von Δ^ε auf einer kompakten Mannigfaltigkeit ohne Rand folgt. Die Gleichung gilt also für jedes $s\in\mathbb{C}$.
Weil es eine in $s=0$ holomorphe Funktion f gibt mit $\frac{1}{\Gamma(s)}=sf(s)$ und $f(0)=1$, folgt aus obiger Gleichung zusammen mit (6.2.1):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\log\tau^\varepsilon &= \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left\{s^2 f(s)\left(\sum_{j=-N}^{k}\frac{M_{j,\varepsilon}}{j+s}+\frac{\mathrm{tr}_S\,(\alpha P^\varepsilon)}{s}+h_\varepsilon(s)\right)\right\}_{|\,s=0} \\
&= \frac{1}{2}\left(M_{0,\varepsilon}+\mathrm{tr}_S\,(\alpha P^\varepsilon)\right) \quad . \qquad (6.2.2)
\end{aligned}
$$

Die Resultate von J.-M. Bismut, H. Gillet und C. Soulé [BGSIII, (1.103),(1.136)] liefern nun wegen $\dim_{\mathbb{C}} X=N$ sofort:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\log\tau^\varepsilon &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^N\int_X\frac{\partial}{\partial b}\overline{\mathrm{Td}}\,(-\Omega^\varepsilon-bU^\varepsilon)_{|b=0}+\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_S\,(\alpha P^\varepsilon) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^N\int_X\left[\frac{\partial}{\partial b}\overline{\mathrm{Td}}(-\Omega^\varepsilon-bU^\varepsilon)_{|b=0}\right]^N+\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_S\,(\alpha P^\varepsilon) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^N\int_X\frac{\partial}{\partial b}\overline{\mathrm{Td}}_{N+1}(-\Omega^\varepsilon-bU^\varepsilon)_{|b=0}+\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_S\,(\alpha P^\varepsilon) \quad ,
\end{aligned}
$$

wie behauptet. □

In Kapitel 3.3 habe ich die geometrische Interpretation der analytischen Torsion als *Korrekturfaktor zu der kanonisch auf den Fasern des Determinantenbündels induzierten L^2-Metrik* angegeben, um eine glatte Metrik auf dem Determinantenbündel zu erhalten. Diese glatte Metrik, die *Quillenmetrik*, ist also das eigentliche „geometrische“ Objekt, das zu variieren unter Umständen interessanter sein kann, als die analytische Torsion zu variieren. Dazu muß zunächst über die Quillenmetrik ein von der Metrik auf X abhängiges Funktional definiert werden, das nachher für die Variation verwendet werden soll:

Definition 6.2.3
X sei eine N-dimensionale geschlossene Kähler-Mannigfaltigkeit und B eine Kählerklasse von Metriken auf X. Weil jede Kählermetrik g aus B einen Dirac-Operator $D_g := \overline{\partial}_g + \overline{\partial}_g^*$ auf X definiert, kann wie in Kapitel 3.3 beschrieben mit $M := X \times B \longrightarrow B$ über B ein Determinantenbündel $\mathcal{L}$ zur Familie $(D_g \mid g \in B)$ von Dirac-Operatoren definiert werden, das mit der Quillenmetrik $\|\cdot\|_Q$ versehen ist.
Nun sei in B eine Metrik g^* als „Basispunkt" gewählt. Dann gibt es für jede Metrik g in B einen kanonischen Isomorphismus $\iota_g : \mathcal{L}_{g^*} \to \mathcal{L}_g$, der als nichtverschwindender Schnitt von $(\mathcal{L}_{g^*})^* \otimes \mathcal{L}_g$ aufgefaßt werden kann [BGSIII, p.317]. *Damit kann auf B das Funktional $\mathcal{Q}$ durch*

$$\mathcal{Q}(X, g) := \|\iota_g\|_Q$$

definiert werden.
In obiger Definition ist für das holomorphe Bündel $\mathcal{E} \longrightarrow X$, das in Kapitel 3.3 bei der Konstruktion des Determinantenbündels auftaucht, $\mathcal{E} = X \times \mathbb{C}$ vorausgesetzt. Eine Verallgemeinerung obiger Definition für die Quillenmetrik zu Familien von Dolbeaut--Dirac-Operatoren $\overline{\partial} + \overline{\partial}^*$ auf Formen mit Werten in beliebigen holomorphen Bündeln $\mathcal{E} \longrightarrow X$ ist natürlich ohne weiteres möglich (und wird in Kapitel 7 auch verwendet).
Nach Konstruktion gibt $\mathcal{Q}(X, g)$ die Abhängigkeit der Quillenmetrik von der Metrik g an. Die kritischen Punkte von $\mathcal{Q}$ in der Kählerklasse B sind in diesem Sinne die **kritischen Punkte der Quillenmetrik**. Weil $\mathcal{Q}$ nur für die Suche nach kritischen Punkten der Quillenmetrik verwendet wird, ist die Abhängigkeit vom Basispunkt in der Notation vernachlässigt worden, und unter einem gewissen Notationsmißbrauch werde ich im folgenden $\mathcal{Q}(X, g)$ als *Quillenmetrik* bezeichnen. Nun gilt:

Satz 6.2.4
Sei (X, g) eine N-dimensionale geschlossene Kähler-Mannigfaltigkeit mit metrischem Zusammenhang. g^ε sei eine φ-Variation von g, und im übrigen seien alle Bezeichnungen aus Satz 6.2.2 übernommen. Dann gilt für $\mathcal{Q}^\varepsilon := \mathcal{Q}(X, g^\varepsilon)$:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \log \mathcal{Q}^\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^N \int_X \frac{\partial}{\partial b} \overline{\mathrm{Td}}_{N+1} \left(-\Omega^\varepsilon - bU^\varepsilon \right)_{|b=0} \quad .$$

<u>Beweis:</u>
Mit den Bezeichnungen aus Kapitel 3.3 und aus Definition 6.2.3 gilt (insbesondere ist $|\cdot|_{L^2}$ die L^2-Metrik auf den Fasern von $\mathcal{L}$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \log \mathcal{Q}^\varepsilon \quad &= \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \log \tau^\varepsilon + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \log |\iota_{g^\varepsilon}|_{L^2(X, \mu^\varepsilon)} \\ &\overset{\text{Satz 6.2.2}}{=} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^N \int_X \frac{\partial}{\partial b} \overline{\mathrm{Td}}_{N+1} \left(-\Omega^\varepsilon - bU^\varepsilon \right)_{|b=0} + \frac{1}{2} \operatorname{tr}_S \left(\alpha P^\varepsilon \right) \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \log |\iota_{g^\varepsilon}|_{L^2(X, \mu^\varepsilon)} \quad . \end{aligned}$$

Zu zeigen ist also

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\log|\iota_{g^\varepsilon}|_{L^2(X,\mu^\varepsilon)} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_S\,(\alpha P^\varepsilon) \quad .$$

Dies entnimmt man jedoch direkt der Arbeit von J.-M. Bismut, H. Gillet und C. Soulé [BGSIII, (1.120)]. □

Die in Satz 6.2.4 angegebene Variationsformel ist offenbar einfacher zu handhaben als die in Satz 6.2.2, da im ersten Fall „nur" charakteristische Klassen differenziert werden müssen. Die Quillenmetrik, deren Variation die linke Seite der Gleichung in Satz 6.2.4 nach Konstruktion beschreibt, ist aber ohnehin das geometrisch interessantere Objekt, so daß ich es mitunter bei deren Variation belassen habe. In einigen Spezialfällen verschwindet jedoch der Differenzterm $\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_S\,(\alpha P^\varepsilon)$ der beiden Variationsformeln, welcher von der Variation der L^2-Metrik auf den Fasern des Determinantenbündels stammt (siehe Beweis von Satz 6.2.4) und im übrigen gerade die Variation des *sekundären Bott-Chern Charakters* $\widetilde{\mathrm{ch}}(\det H^*, |\cdot|_{L^2(X,\mu)}, |\cdot|_{L^2(X,\mu^\varepsilon)})$ des Determinantenbündels ist (zur Definition der sekundären Bott-Klassen siehe [BGSI, Theorem 1.29] bzw. [BC]). Verschwindet dieser Term, so werde ich im folgenden die *Variation der analytischen Torsion* betrachten, andernfalls geht es um die *Variation der Quillenmetrik.*
Da in diesem Kapitel das Hauptgewicht auf ein- und zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten liegen soll, formuliere ich die Sätze 6.2.2 und 6.2.4 noch einmal für diese Fälle:

Korollar 6.2.5
Sei (X,g) eine geschlossene Kähler-Mannigfaltigkeit der Dimension $N\in\{1,2\}$ mit metrischem Zusammenhang. Im übrigen seien alle Bezeichnungen wie in Satz 6.2.2 und Satz 6.2.4. Dann gilt:

$N=1$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\log\mathcal{Q}^\varepsilon &= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\log\tau^\varepsilon\\ &= -\frac{1}{24}\int_X\left\{3c_1(\Omega^\varepsilon)\frac{\Delta^\varepsilon\varphi}{2}+\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{tr}\,(\Omega^\varepsilon U^\varepsilon)\right\}\end{aligned}$$

$N=2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\log\mathcal{Q}^\varepsilon &= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\log\tau^\varepsilon+\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\left(\alpha P^\varepsilon_{0,1}\right)\\ &= \frac{1}{48}\int_X\left\{\frac{\Delta^\varepsilon\varphi}{2}\left[c_2(\Omega^\varepsilon)+c_1^2(\Omega^\varepsilon)\right]+\frac{1}{2\pi i}c_1(\Omega^\varepsilon)\,\mathrm{tr}\,(\Omega^\varepsilon U^\varepsilon)\right\}\ ,\end{aligned}$$

wobei mit Multiplikationen von Kohomologieklassen stets das äußere Produkt gemeint ist und $\Delta^\varepsilon := \Delta^\varepsilon_{0,0}$.
<u>*Beweis:*</u>
Ich bestimme zunächst für $N=1$ und $N=2$ die von der L^2-Metrik stammenden Terme $\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_S\,(\alpha P^\varepsilon)$ aus Satz 6.2.2 :

Für $N = 1$ zeigt man völlig analog zum Beweis von Korollar 1.1.6 bzw. Lemma 1.3.4:

$$\begin{aligned}\alpha(1) &= -\frac{\Delta^\varepsilon\varphi}{2} \\ \alpha(d\bar{z}^1) &= 0 \quad .\end{aligned}$$

Weil X geschlossen ist, sind die einzigen harmonischen 0-Formen auf X die Konstanten, und

$$\frac{1}{2}\operatorname{tr}_S(\alpha P^\varepsilon) = -\frac{1}{2\mathrm{vol}_\varepsilon(X)}\int_X \frac{\Delta^\varepsilon\varphi}{2}\mu^\varepsilon = 0 \quad .$$

Für $N = 2$ folgert man ebenso aus Lemma 1.3.4:

$$\frac{1}{2}\operatorname{tr}_S(\alpha P^\varepsilon) = -\frac{1}{2\mathrm{vol}_\varepsilon(X)}\int_X \frac{\Delta^\varepsilon\varphi}{2}\mu^\varepsilon - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\alpha P^\varepsilon_{0,1}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\alpha P^\varepsilon_{0,1}\right) \quad .$$

Damit sind wegen Satz 6.2.2 und Satz 6.2.4 jeweils die ersten Zeilen der behaupteten Gleichungen für $N = 1$ und $N = 2$ bewiesen. Unter Verwendung von Satz 6.2.4 mit $N = 1$ bzw. $N = 2$ muß also nur noch

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial b}\overline{\mathrm{Td}}_2(-\Omega^\varepsilon - bU^\varepsilon)_{|b=0} &\overset{[\text{Hir, §1.7}]}{=} \frac{1}{12}\frac{\partial}{\partial b}\left(\left(\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2\right)(-\Omega^\varepsilon - bU^\varepsilon)\right)_{|b=0} \quad , \\ \frac{\partial}{\partial b}\overline{\mathrm{Td}}_3(-\Omega^\varepsilon - bU^\varepsilon)_{|b=0} &\overset{[\text{Hir, §1.7}]}{=} \frac{1}{24}\frac{\partial}{\partial b}\left((\bar{c}_1\bar{c}_2)(-\Omega^\varepsilon - bU^\varepsilon)\right)_{|b=0}\end{aligned}$$

berechnet werden, wobei $\bar{c}_j$ analog zu $\overline{\mathrm{Td}}$ in Satz 6.2.2 die „untopologischen“ Chernklassen $\bar{c}_j(\mathcal{R}) = c_j(2\pi i\mathcal{R})$ bezeichnet.
Ab sofort wähle ich als Repräsentanten für die Chernklassen diejenigen Formen, die durch Ω^ε gegeben sind, also $\bar{c}_1(\Omega^\varepsilon) = [\operatorname{tr}(\Omega^\varepsilon)]$ und $\bar{c}_2(\Omega^\varepsilon) = [\det(\Omega^\varepsilon)]$ (siehe (2.2.2)), schreibe aber der Kürze halber dennoch weiterhin $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$. Außerdem werden die Chernklassen jetzt durch *Potenzsummen* s_k ausgedrückt, bildet man also formal $\sum_{j=0}^N \bar{c}_j(\Omega)x^j = \prod_{j=1}^N(1+\gamma_j x)$, so ist s_k die k-te elementarsymmetrische Funktion in $\gamma_1, ..., \gamma_N$: $\bar{c}_1 = s_1$ und $\bar{c}_2 = \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2)$. Dann gilt offenbar:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial b}\bar{c}_1(-\Omega^\varepsilon - bU^\varepsilon)_{|b=0} &= -\operatorname{tr}(U^\varepsilon) \ , \\ \frac{\partial}{\partial b}\bar{c}_2(-\Omega^\varepsilon - bU^\varepsilon)_{|b=0} &= \bar{c}_1(\Omega^\varepsilon)\operatorname{tr}(U^\varepsilon) - \operatorname{tr}(\Omega^\varepsilon U^\varepsilon) \ .\end{aligned} \tag{6.2.3}$$

Damit erhalte ich

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial b}\overline{\mathrm{Td}}_2\left(-\Omega^\varepsilon - bU^\varepsilon\right)_{|b=0} &= \frac{1}{12}\left\{2\frac{\partial}{\partial b}\bar{c}_1\left(-\Omega^\varepsilon - bU^\varepsilon\right)_{|b=0}\bar{c}_1\left(-\Omega^\varepsilon\right)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial}{\partial b}\bar{c}_2\left(-\Omega^\varepsilon - bU^\varepsilon\right)_{|b=0}\right\}\\
&= \frac{1}{12}\left\{3\,\mathrm{tr}\,\left(U^\varepsilon\right)\bar{c}_1\left(\Omega^\varepsilon\right) - \mathrm{tr}\,\left(\Omega^\varepsilon U^\varepsilon\right)\right\} \quad , \qquad (6.2.4)\\
\frac{\partial}{\partial b}\overline{\mathrm{Td}}_3\left(-\Omega^\varepsilon - bU^\varepsilon\right)_{|b=0} &= \frac{1}{24}\left\{\frac{\partial}{\partial b}\bar{c}_1\left(-\Omega^\varepsilon - bU^\varepsilon\right)_{|b=0}\bar{c}_2\left(-\Omega^\varepsilon\right)\right.\\
&\qquad\left.+\bar{c}_1\left(-\Omega^\varepsilon\right)\frac{\partial}{\partial b}\bar{c}_2\left(-\Omega^\varepsilon - bU^\varepsilon\right)_{|b=0}\right\}\\
&= \frac{1}{24}\left\{-\,\mathrm{tr}\,\left(U^\varepsilon\right)\bar{c}_2\left(\Omega^\varepsilon\right)\right.\\
&\qquad\left.-\bar{c}_1^2\left(\Omega^\varepsilon\right)\mathrm{tr}\,\left(U^\varepsilon\right) + \bar{c}_1\left(\Omega^\varepsilon\right)\mathrm{tr}\,\left(\Omega^\varepsilon U^\varepsilon\right)\right\} \quad .
\end{aligned}
$$

Nach Einsetzen in Satz 6.2.2 erhält man sofort die Behauptung, wenn man beachtet, daß gemäß Definition 6.2.1 der Abbildung U^ε nach Wahl lokaler holomorpher Koordinaten $(z^1, ..., z^N)$ gilt:

$$
\mathrm{tr}\left(U^\varepsilon\right) = \sum_{j,k}\left(g^\varepsilon\right)^{j\bar{k}}\varphi_{j\bar{k}} \overset{\text{Satz 1.2.1}}{=} -\frac{\Delta^\varepsilon_{0,0}\,\varphi}{2} \qquad (6.2.5)
$$

und daß $\bar{c}_j(\Omega^\varepsilon) = (2\pi i)^j\, c_j(\Omega^\varepsilon)$. □

Im Fall $N = 1$ entnimmt man Korollar 6.2.5 , daß die Variation von Quillennorm und analytischer Torsion identisch sind. Für $N = 2$ stimmt das nur noch in Spezialfällen.
Mit völlig analogen Rechnungen wie im Beweis von Korollar 6.2.5 könnte man natürlich aus Satz 6.2.2 oder Satz 6.2.4 „explizitere" Variationsformeln in jeder beliebigen Dimension folgern. Die Auswertung der Variationsformel für geschlossene Riemannsche Flächen in Kapitel 6.3 wird jedoch zeigen, daß es tatsächlich nur in *einer* komplexen Dimension ohne größere Probleme möglich ist, die Euler-Lagrange-Gleichung für die Variation anzugeben.

Man kann mit Hilfe von Satz 6.2.2 oder Satz 6.2.4 aber auch höhere Variationen berechnen, wiederum für den zweidimensionalen Fall möchte ich dies hier vorführen (für den eindimensionalen Fall werde ich die Rechnung in Kapitel 6.3 direkt in lokalen holomorphen Koordinaten durchführen; siehe Satz 6.3.2):

Korollar 6.2.6
Sei (X, g) eine geschlossene zweidimensionale Kähler-Mannigfaltigkeit mit metrischem Zusammenhang. Im übrigen seien alle Bezeichnungen wie in Satz 6.2.2, Satz 6.2.4 bzw. Korollar 6.2.5 . Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}\log\mathcal{Q}^\varepsilon &= \frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}\log\tau^\varepsilon + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\operatorname{tr}\left(\alpha P^\varepsilon_{0,1}\right)\\
&= \frac{1}{48}\int_X\left\{\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\Delta^\varepsilon\varphi}{2}\right)\left[c_2(\Omega^\varepsilon)+c_1^2(\Omega^\varepsilon)\right]\right.\\
&\qquad + \frac{\Delta^\varepsilon\varphi}{2}\left[3\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big(c_1(\Omega^\varepsilon)\Big)\,c_1(\Omega^\varepsilon)+\frac{1}{4\pi^2}\operatorname{tr}\left(\Omega^\varepsilon\wedge\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Omega^\varepsilon\right)\right]\\
&\qquad \left.+\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big(c_1(\Omega^\varepsilon)\Big)\operatorname{tr}\left(\Omega^\varepsilon U^\varepsilon\right)+\frac{1}{2\pi i}c_1(\Omega^\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big(\operatorname{tr}\left(\Omega^\varepsilon U^\varepsilon\right)\Big)\right\}\ .
\end{aligned}
$$

Beweis:
Obige Formel folgt durch Differentiation der in Korollar 6.2.5 angegebenen Formel. Wie dort wähle ich als Repräsentanten für die Chernklassen diejenigen Formen, die durch Ω^ε gegeben sind, schreibe aber der Kürze halber dennoch weiterhin c_1 und c_2.
Dabei verwende ich wieder die Darstellung der Chernklassen durch Potenzsummen und erhalte so:

$$
\frac{\partial}{\partial\varepsilon}c_2(\Omega^\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{1}{2}\Big(c_1(\Omega^\varepsilon)^2 - s_2(\Omega^\varepsilon)\Big) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big(c_1(\Omega^\varepsilon)\Big)\,c_1(\Omega^\varepsilon) - \operatorname{tr}\left(\frac{\Omega^\varepsilon}{2\pi i}\wedge\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{\Omega^\varepsilon}{2\pi i}\right) \quad .
$$

Dies wird nun beim Differenzieren der Formel aus Korollar 6.2.5 eingesetzt und liefert genau die Behauptung. □

Bemerkung:
Ich konnte die Formel in Korollar 6.2.6 noch etwas vereinfachen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}\log\mathcal{Q}^\varepsilon &= \frac{1}{48}\int_X\left\{\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\Delta^\varepsilon\varphi}{2}\right)\left[c_2(\Omega^\varepsilon)+c_1^2(\Omega^\varepsilon)\right]\right.\\
&\qquad + \frac{\Delta^\varepsilon\varphi}{2}\left[3\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big(c_1(\Omega^\varepsilon)\Big)\,c_1(\Omega^\varepsilon)+\frac{1}{2\pi^2}\operatorname{tr}\left(\Omega^\varepsilon\wedge\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Omega^\varepsilon\right)\right]\\
&\qquad \left.+\frac{1}{2\pi i}c_1(\Omega^\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big(\operatorname{tr}\left(\Omega^\varepsilon U^\varepsilon\right)\Big)\right\} \quad ;
\end{aligned}
$$

keiner der Beweise, in denen die zweite Variation berechnet wird, ist jedoch übersichtlicher mit obiger Formel als mit der in Korollar 6.2.6 angegebenen, so daß ich hier darauf verzichte, die Herleitung der „vereinfachten“ Formel anzugeben.

6.3 Auswertung der Anomalienformel auf Riemannschen Flächen

Vor dem Hintergrund der in Kapitel 4 diskutierten bereits bekannten Resultate [OPS] mag die Variation der analytischen Torsion auf geschlossenen Riemannschen Flächen nicht mehr besonders spannend erscheinen. Konforme Variation unter Konstanthaltung des Volumens und Variation innerhalb der Kählerklasse sind auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche X sogar äquivalent: Zunächst ist klar, daß eine konforme Variation der Metrik auf X die Kählerbedingung nicht zerstört, wie am Ende von Kapitel 5.2 für geschlossene Kähler-Mannigfaltigkeiten höherer Dimensionen bemerkt (jede Riemannsche Metrik auf X ist Kähler). Nun sei ω die Kählerform einer Kählermetrik g auf X und ψ eine glatte reellwertige Funktion, so daß $e^{2\psi}g$ das gleiche Volumen hat wie g. Offenbar gilt dann

$$\left\langle e^{2\psi}-1,1\right\rangle = \int_X e^{2\psi}\mu - \mathrm{vol}(X) = 0$$

nach Voraussetzung. Daher gibt es eine eindeutig bestimmte glatte Funktion ϑ auf X mit $\Delta\vartheta = e^{2\psi}-1$ (das sieht man z.B. mit Hilfe des Spektralsatzes: Sei $\psi^0,\psi^1,\psi^2,\ldots$ eine Orthonormalbasis aus Eigenfunktionen von Δ zu Eigenwerten $0=\lambda_0<\lambda_1\leq\lambda_2\cdots$, dann ist $\vartheta=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{-1}\left\langle e^{2\psi}-1,\psi^j\right\rangle\psi^j$). Es folgt nun mit Satz 1.2.1 nach Wahl einer lokalen holomorphen Koordinate z^1:

$$\left(e^{2\psi}-1\right)\omega = (\Delta\vartheta)\omega = -2g^{1\bar{1}}\vartheta_{1\bar{1}}\,\frac{i}{2}g_{1\bar{1}}dz^1\wedge d\bar{z}^1 = -i\,\partial\overline{\partial}\vartheta \quad ,$$

d.h. $e^{2\psi}g$ und g gehören zur gleichen Kählerklasse. Umgekehrt gilt für jede φ-Variation g^ε von g nach Bemerkung 1.3.2 offenbar $\frac{\Delta\varphi}{2}<1$, so daß für $\varepsilon\in[-1,1]$ die Funktion $\psi^\varepsilon := \frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\Delta\varphi\right)$ wohldefiniert ist und

$$\omega^\varepsilon = \omega + \frac{i\varepsilon}{2}\,\partial\overline{\partial}\varphi = e^{2\psi^\varepsilon}\omega \quad .$$

Damit ist gezeigt, daß jede φ-Variation von g als konforme Variation unter Konstanthaltung des Volumens geschrieben werden kann und umgekehrt.
Von der Auswertung der Anomalienformel auf geschlossenen Riemannschen Flächen kann somit höchstens ein neuer Beweis für die bereits bekannten Ergebnisse erwartet werden, da ja im eindimensionalen Fall die analytische Torsion gerade die Determinante des Laplace-Operators auf Funktionen ist, wie ich in Kapitel 4 erläutert habe, und nach Korollar 6.2.5 Variation von analytischer Torsion und Quillenmetrik identisch sind. Dennoch soll die Rechnung hier durchgeführt werden, da sie zum einen mit Hilfe von Satz 6.2.2 bzw. Korollar 6.2.5 nicht besonders schwierig ist, zum andern anhand der Rechnung gezeigt werden kann, welche Probleme in höheren Dimensionen auftreten. Im übrigen erhält man mit Hilfe der Anomalienformel einen zweiten unabhängigen Beweis der bekannten Ergebnisse.

Korollar 6.3.1
Bei Variation der analytischen Torsion bzw. der Quillenmetrik innerhalb der Kählerklasse auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche X (i.e. bei Variation der Determinante des Laplace-Operators auf Funktionen – vergleiche Kapitel 4) sind die Metriken konstanter Gaußkrümmung genau die kritischen Punkte.
Beweis:
Die Formel aus Korollar 6.2.5 muß zunächst noch ein wenig umgeformt werden:
Auf X seien eine beliebige Metrik g und der zugehörige metrische Zusammenhang gewählt, und g^ε sei eine φ-Variation von g. Weil die Krümmungsform und der Operator U^ε auf der komplex eindimensionalen Mannigfaltigkeit nur aus einer Komponente bestehen, stimmen sie mit ihren Spuren überein, so daß mit Hilfe der Darstellung (2.2.2) von Repräsentanten der Chernklassen durch die Krümmungsform und aus (6.2.5) (mit den Bezeichnungen aus Korollar 6.2.5) folgt:

$$\frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{tr}\,(\Omega^\varepsilon U^\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{tr}\,(\Omega^\varepsilon)\,\mathrm{tr}\,(U^\varepsilon) = -c_1\,(\Omega^\varepsilon)\,\frac{\Delta^\varepsilon\varphi}{2} \quad .$$

Korollar 6.2.5 liefert damit:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\log\mathcal{Q}^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\log\tau^\varepsilon = -\frac{1}{12}\int_X c_1(\Omega^\varepsilon)\frac{\Delta^\varepsilon\varphi}{2} \quad , \tag{6.3.1}$$

so daß die **Euler-Lagrange-Gleichung** für die Variation direkt abgelesen werden kann; weil nach Bemerkung 1.3.2 jede Variation von g innerhalb der Kählerklasse durch eine φ-Variation beschrieben werden kann und weil (bis auf Skalierung mit Konstanten) jedes $\varphi \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ in (6.3.1) auftauchen kann, folgt: g ist genau dann kritischer Punkt der analytischen Torsion unter Variation der Metrik innerhalb der Kählerklasse, wenn $(\Delta^\varepsilon c_1(\Omega^\varepsilon))_{|\varepsilon=0} \equiv 0$ gilt, denn X ist als geschlossen vorausgesetzt. Nach Korollar 6.2.5 kann überall $\log\tau^\varepsilon$ durch $\log\mathcal{Q}^\varepsilon$ ersetzt werden, im folgenden betrachte ich der Kürze halber nur noch $\log\tau^\varepsilon$.
Nun gilt bezüglich einer lokalen holomorphen Koordinate z^1 (R^ε bezeichne den Riemannschen Krümmungstensor und r^ε den Ricci-Tensor zur Metrik g^ε):

$$\begin{aligned} c_1(\Omega^\varepsilon) \overset{(2.2.2)}{=} \frac{1}{2\pi i}\,(\Omega^\varepsilon)^1_{\bar 1} &\overset{[\text{Go, (5.3.34)}]}{=} -\frac{1}{2\pi i}\,(R^\varepsilon)^1_{\;1 1\bar 1}\,dz^1\wedge d\bar z^1 \\ &\overset{\substack{\text{Bem. 1.1.2 (iii),}\\ [\text{Go, (5.3.35)}]}}{=} -\frac{r^\varepsilon_{1\bar 1}}{g^\varepsilon_{1\bar 1}}\pi^{-1}\,\mu^\varepsilon \quad , \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

d.h. die Euler-Lagrange-Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $\Delta\left(\frac{r_{1\bar 1}}{g_{1\bar 1}}\right) = 0$ (Weglassen von „ε“ bedeutet $\varepsilon = 0$), i.e. $r_{1\bar 1} = l g_{1\bar 1}$ mit konstantem l (denn X ist geschlossen, die einzigen harmonischen Funktionen auf X sind also die Konstanten). Kritische Punkte der analytischen Torsion liegen demnach genau in den Kähler-Einstein-Metriken vor, die aber für die Riemannsche Fläche X genau mit den Metriken konstanter Gaußkrümmung übereinstimmen [Be2, 1.119]. $\square$

Der obige Beweis zeigt, daß die Euler-Lagrange-Gleichung für die Variation nur darum angegeben werden kann, weil sich der Ausdruck $\mathrm{tr}\,(\Omega U)$ leicht in lokalen holomorphen Koordinaten berechnen läßt. Dies ist schon in zwei Dimensionen so nicht mehr möglich, in höheren Dimensionen erhält man entsprechende Ausdrücke, die ich genauso wenig elementar berechnen konnte.
Korollar 6.3.1 kann auch mit der in den Kapiteln 6.5 bis 6.7 angegebenen elementaren Methode bewiesen werden. Bei dieser Herleitung erkennt man jedoch nicht so deutlich, welche Terme dafür verantwortlich sind, daß in höheren Dimensionen die Euler-Lagrange-Gleichungen nicht ebenso leicht aufgestellt werden können; die elementare Herleitung für den eindimensionalen Fall gebe ich darum an dieser Stelle nicht an; aus dem in den Kapiteln 6.5 bis 6.7 Gesagten ist auch klar, wie dieser Beweis zu führen ist.
Weitere Hinweise darauf, warum die Euler-Lagrange-Gleichungen in höheren Dimensionen im allgemeinen nicht formuliert werden können, findet man in den Arbeiten von S. Rosenberg und K. Richardson [Ros], [Ri, p.63]. Beide Arbeiten habe ich in Kapitel 5.2 diskutiert.

Satz 6.3.2
Ist X eine geschlossene Riemannsche Fläche mit $\chi(X) \leq 0$, so haben die Metriken konstanter Krümmung innerhalb ihrer Kählerklasse maximale analytische Torsion (i.e. maximale Determinante des Laplace-Operators) bzw. maximale Quillenmetrik.
<u>Beweis:</u>
Nach Korollar 6.3.1 sind die Metriken konstanter Gaußkrümmung genau die kritischen Punkte der analytischen Torsion und der Quillenmetrik. Zu zeigen ist also, daß es sich dabei um Maxima handelt.
Sei dafür g eine Metrik konstanter Gaußkrümmung κ und g^ε eine φ-Variation von g. Ich differenziere (6.3.1) noch einmal nach ε; die Bezeichnungen sind dabei die gleichen wie im Beweis von Korollar 6.3.1:

$$\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \log \tau^\varepsilon = -\frac{1}{12} \int_X \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(c_1(\Omega^\varepsilon) \right) \frac{\Delta^\varepsilon \varphi}{2} + c_1(\Omega^\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\Delta^\varepsilon \varphi}{2} \right) \right\} \quad . \tag{6.3.3}$$

$\log \tau^\varepsilon$ kann hier und im folgenden wegen Korollar 6.2.5 überall durch $\log \mathcal{Q}^\varepsilon$ ersetzt werden. Um die einzelnen Terme zu berechnen, sei wie im Beweis von Lemma 1.3.4 $\gamma(\varepsilon) := \det g^\varepsilon$. Wegen $\dim_{\mathbb{C}} X = 1$ gilt nach Wahl einer lokalen holomorphen Koordinate z^1 für jede glatte Funktion f auf X:

$$\partial\overline{\partial} f = f_{1\bar{1}} dz^1 \wedge d\bar{z}^1 = \frac{2}{i} (g^\varepsilon)^{1\bar{1}} f_{1\bar{1}} \, \frac{i}{2} g^\varepsilon_{1\bar{1}} dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \overset{\substack{\text{Satz 1.2.1 ,} \\ \text{Bem. 1.1.2 (iii)}}}{=} i(\Delta^\varepsilon f)\mu^\varepsilon \quad . \tag{6.3.4}$$

Außerdem gilt

$$c_1(\Omega^\varepsilon) \overset{(6.3.2)}{=} \frac{1}{2\pi i} (r^\varepsilon)_{1\bar{1}} \, dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \overset{[\text{Go, } (5.3.36)]}{=} -\frac{1}{2\pi i} \partial\overline{\partial} (\log \gamma(\varepsilon)) \quad ,$$

also

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(c_1(\Omega^\varepsilon)\right) \overset{(1.3.2)}{=} \frac{1}{2\pi i}\partial\overline{\partial}\left(\frac{\Delta^\varepsilon\varphi}{2}\right) \overset{(6.3.4)}{=} \frac{1}{2\pi}\Delta^\varepsilon\left(\frac{\Delta^\varepsilon\varphi}{2}\right)\mu^\varepsilon \quad .$$

Wegen $\dim_{\mathbb{C}} X = 1$ ist die Skalarkrümmung s^ε von g^ε gegeben durch $s^\varepsilon = (r^\varepsilon)^1_{\ 1}$, also gilt mit $\kappa^\varepsilon = \frac{s^\varepsilon}{2}$ [Be2, 1.119]

$$c_1(\Omega^\varepsilon) \overset{(6.3.2)}{=} -(r^\varepsilon)^1_{\ 1}\pi^{-1}\mu^\varepsilon = -\frac{2\kappa^\varepsilon}{\pi}\mu^\varepsilon \quad .$$

Weiter erhält man

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\Delta^\varepsilon\varphi}{2}\right) \overset{\text{Satz 1.2.1}}{=} -\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\varphi_{1\bar{1}}}{g^\varepsilon_{1\bar{1}}}\right) = \frac{\varphi^2_{1\bar{1}}}{(g^\varepsilon_{1\bar{1}})^2} \overset{\text{Satz 1.2.1}}{=} \left(\frac{\Delta^\varepsilon\varphi}{2}\right)^2 \quad .$$

Setzt man all dies in (6.3.3) ein, so ergibt sich:

$$\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}\log\tau^\varepsilon = -\frac{1}{12}\int_X\left\{\frac{1}{2\pi}\Delta^\varepsilon\left(\frac{\Delta^\varepsilon\varphi}{2}\right)\cdot\left(\frac{\Delta^\varepsilon\varphi}{2}\right) - \frac{2\kappa^\varepsilon}{\pi}\left(\frac{\Delta^\varepsilon\varphi}{2}\right)^2\right\}\mu^\varepsilon \quad . \tag{6.3.5}$$

Weil auf der Riemannschen Fläche X für die hermitesche Metrik $g_{1\bar{1}} = \det g > 0$ gilt und nach dem Satz von Gauß-Bonnet

$$2\pi\chi(X) = \int_X \kappa\mu \implies \kappa = \frac{2\pi\chi(X)}{\mathrm{vol}\,(X)} \quad ,$$

ist wegen $\chi(X) \leq 0$ (nach Voraussetzung) $\kappa \leq 0$ und somit

$$\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}\left(\log\tau^\varepsilon\right)_{|\,\varepsilon=0} \leq -\frac{1}{96\pi}\int_X \Delta\left(\Delta\varphi\right)\Delta\varphi\;\mu \quad .$$

Damit φ eine „echte“ Variation der Metrik g definiert, i.e. $g^\varepsilon \not\equiv g$, kann o.B.d.A. vorausgesetzt werden, daß φ orthogonal zur 1 ist und $\varphi \not\equiv 0$. Bezeichnet dann nämlich $\lambda_1 > 0$ den kleinsten positiven Eigenwert von Δ, dann liefert das Mini-Max-Prinzip

$$\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}\left(\log\tau^\varepsilon\right)_{|\,\varepsilon=0} \leq -\frac{\lambda_1}{96\pi}\|\Delta\varphi\|^2 \leq -\frac{\lambda_1^3}{96\pi}\|\varphi\|^2 \quad .$$

Obige Ungleichung gilt für jede φ-Variation von g, sofern φ orthogonal zur 1 ist. Da $\lambda_1 > 0$, ist dies eine hinreichende Bedingung dafür, daß in g ein lokales striktes Maximum der analytischen Torsion (und damit der Quillenmetrik) vorliegt [Ze, Corollary 29.37]. □

Bemerkung:
Der in Satz 6.3.2 nicht betrachtete Fall der geschlossenen Riemannschen Fläche mit $\chi(X) > 0$, i.e. der Sphäre, kann nicht ganz so elementar behandelt werden. Um zu zeigen, daß die Standardmetrik der S^2 maximale analytische Torsion hat, kann man z.B. ausnutzen, daß sowohl Eigenfunktionen also auch Eigenwerte des Laplace-Operators bezüglich der Standardmetrik explizit bekannt sind. Die Eigenfunktionen sind nämlich die Kugelflächenfunktionen, die Eigenwerte sind durch $2l(l+1)$, $l \in \mathbb{N}$ jeweils mit $(2l+1)$-facher Entartung gegeben, d.h. mit den Bezeichnungen aus obigem Beweis ist $\lambda_1 = 4$ (siehe z.B. [BS, p.499]). Da für die Standardmetrik in der üblichen Normierung $\kappa = 1$ ist, liest man von (6.3.5) sofort mit Hilfe des Mini-Max-Prinzipes ab, daß die zweite Variation der Torsion in der Standardmetrik nicht positiv ist. Um zu zeigen, daß die Standardmetrik tatsächlich ein lokales Maximum ist, berechnet man die dritte und vierte Variation der analytischen Torsion, sofern φ eine der drei Kugelflächenfunktionen mit Eigenwert 4 ist. Die dritte Variation verschwindet, die vierte ist negativ, so daß man mit einem ähnlichen Argument wie im obigen Beweis zeigen kann, daß die Standardmetrik ein lokales Maximum der analytischen Torsion innerhalb ihrer Kählerklasse ist. Dies wird hier nicht genauer ausgeführt, da die Rechnung zwar elementar aber länglich ist und keine neuen Erkenntnisse liefert.

Nach dem am Anfang dieses Kapitels Gesagten ist damit das Ergebnis von Satz 4.1 a) immerhin zum Teil reproduziert.

6.4 Mannigfaltigkeiten konstanter holomorpher Krümmung

Als Verallgemeinerung kompakter Riemannscher Flächen auf höhere Dimensionen können unter anderem kompakte Quotienten des N-dimensionalen komplexen Einheitsballes D^N durch eine diskrete Gruppe von Isometrien angesehen werden. Dies ist klar, führt man sich das Poincaré-Modell der hyperbolischen Halbebene vor Augen.
Verallgemeinerungen der Metriken *konstanter Krümmung* auf Riemannschen Flächen sind dann Metriken *konstanter holomorpher Krümmung* (siehe Definition 2.1.3), d.h. nach Satz 2.1.4 ist z.B. auf D^N eine *Bergmann-Metrik* zu wählen.
A priori ist nicht klar, ob die analytische Torsion oder die Quillenmetrik die geeignetere Verallgemeinerung der Determinante des Laplace-Operators darstellt. Die in diesem Kapitel aufgeführten Ergebnisse sprechen jedoch dafür, die Quillenmetrik vorzuziehen. In Analogie zum Verhalten der Determinante des Laplace-Operators auf Riemannschen Flächen bei Variation der Metrik innerhalb der Kählerklasse gilt nämlich:

Satz 6.4.1
Sei (X, g) eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension N mit konstanter holomorpher Krümmung H. Dann ist g kritischer Punkt der Quillenmetrik $\mathcal{Q}(X, g)$ unter Variation innerhalb der Kählerklasse.

Beweis:
Sei g^ε eine beliebige φ-Variation von g. Dann ist nach Definition 6.2.3 sowie Bemerkung 1.3.2 für $\mathcal{Q}^\varepsilon := \mathcal{Q}(X, g^\varepsilon)$ zu zeigen:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\log \mathcal{Q}^\varepsilon\right)_{|\ \varepsilon = 0} = 0 \quad .$$

Wie üblich bezeichne ω die zu g assoziierte Kählerform und Ω die Krümmungsform. Außerdem sei an den Operator $U = \left[(g^\varepsilon)^{-1}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}g^\varepsilon\right]_{|\varepsilon=0}$ erinnert (siehe Definition 6.2.1). Werden im folgenden Differentialformen miteinander multipliziert, so ist stets das äußere Produkt gemeint.

i) Darstellung der Variation mit Hilfe von Chernklassen
Ich zeige:

Für alle $(j_0, ..., j_N) \in \mathbb{N}_0^{N+1}$
mit $j_0 + \cdots + j_N = N + 1$ gibt es $a_{j_0\cdots j_N} \in \mathbb{C}$, so daß

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\log \mathcal{Q}^\varepsilon\right)_{|\ \varepsilon = 0} = \sum_{j_0+\cdots+j_N=N+1} a_{j_0\cdots j_N}\int_X \frac{\partial}{\partial b}\Big((\bar{c}_{j_0}\cdots\bar{c}_{j_N})(-\Omega - bU)\Big)_{|b=0}, \quad (6.4.1)$$

wobei wie im Beweis von Korollar 6.2.5 $\bar{c}_j(\mathcal{R}) = c_j(2\pi i\mathcal{R})$ die „untopologischen" Chernklassen sind. Nach Satz 6.2.4 gilt nämlich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\log \mathcal{Q}^\varepsilon\right)_{|\ \varepsilon = 0} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^N \int_X \frac{\partial}{\partial b}\overline{\mathrm{Td}}_{N+1}(-\Omega - bU)_{|b=0} \\
&= \int_X \frac{\partial}{\partial b}\left(\sum_{j_0+\cdots+j_N=N+1}(a_{j_0\cdots j_N}\bar{c}_{j_0}\cdots\bar{c}_{j_N})(-\Omega - bU)\right)_{|b=0} \quad ,
\end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten $a_{j_0\cdots j_N}$ universelle Konstanten sind, die man der Darstellung des Toddgeschlechtes bezüglich der Chernklassen entnehmen kann; ihre konkreten Werte sind an dieser Stelle jedoch irrelevant.

ii) Berechnung der Ableitungen der Chernklassen
Ich zeige:

Für alle $(j_0, ..., j_{N+1}) \in \mathbb{N}_0^{N+2}$
mit $j_0 + \cdots + j_{N+1} = N$ gibt es $b_{j_0\cdots j_{N+1}} \in \mathbb{C}$, so daß

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\log \mathcal{Q}^\varepsilon\right)_{|\ \varepsilon = 0} = \sum_{j_0+\cdots+j_{N+1}=N} b_{j_0\cdots j_{N+1}}\int_X \mathrm{tr}\left(\Omega^{j_{N+1}}U\right) c_{j_0}(\Omega)\cdots c_{j_N}(\Omega). \quad (6.4.2)$$

Diese Gleichung folgt wegen $\bar{c}_0(\Omega) = 1$ sofort aus der folgenden zusammen mit (6.4.1) und $\bar{c}_j(\Omega) = (2\pi i)^j c_j(\Omega)$:

$$\forall\, j \geq 1: \quad \frac{\partial}{\partial b}\Big(\bar{c}_j(-\Omega - bU)\Big)_{|b=0} = (-1)^j\sum_{k=0}^{j-1}(-1)^k\,\mathrm{tr}\left(\Omega^k U\right)\bar{c}_{j-k-1}(\Omega) \quad . \quad (6.4.3)$$

Die Gleichung (6.4.3) beweise ich via vollständiger Induktion über j:

$j = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\bar{c}_1(-\Omega - bU)\right)_{|b=0} \overset{(6.2.3)}{=} -\operatorname{tr}(U) = (-1)^1 \sum_{k=0}^{0}(-1)^k \operatorname{tr}\left(\Omega^k U\right)\bar{c}_{-k}(\Omega) \quad .$$

$j \to j+1$:
Bezeichnet s_k für $k \in \{1, ..., N\}$ die Potenzsumme der Ordnung k (siehe Beweis von Korollar 6.2.5), so gilt nach Newton's Formel

$$\bar{c}_{j+1}(-\Omega - bU) = \frac{1}{j+1}\sum_{k=1}^{j+1}(-1)^{k+1}\left(\bar{c}_{j+1-k}s_k\right)(-\Omega - bU) \quad , \tag{6.4.4}$$

und weil $s_k(\mathcal{R}) = \operatorname{tr}(\mathcal{R}^k)$ für jeden Endomorphismus $\mathcal{R} \in End(V)$ eines endlichdimensionalen Vektorraumes V, gilt

$$\frac{\partial}{\partial b}s_k(-\Omega - bU)_{|b=0} = k(-1)^k \operatorname{tr}\left(\Omega^{k-1}U\right) \quad .$$

Zusammen mit der Induktionsannahme folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial b}\left(\bar{c}_{j+1}(-\Omega - bU)\right)_{|b=0} \quad &= \quad \frac{1}{j+1}\sum_{k=1}^{j+1}\left\{\sum_{l=0}^{j-k}(-1)^{j+l}\operatorname{tr}\left(\Omega^l U\right)\bar{c}_{j-k-l}(\Omega)s_k(-\Omega)\right.\\
&\qquad \left. - \bar{c}_{j+1-k}(-\Omega)k\operatorname{tr}\left(\Omega^{k-1}U\right)\right\}\\
&= \quad \frac{1}{j+1}\sum_{k=1}^{j+1}\left\{\sum_{l=0}^{j-k}(-1)^{l+j+k}\operatorname{tr}\left(\Omega^l U\right)\bar{c}_{j-k-l}(\Omega)s_k(\Omega)\right.\\
&\qquad \left. + (-1)^{j+k}k\,\bar{c}_{j+1-k}(\Omega)\operatorname{tr}\left(\Omega^{k-1}U\right)\right\}\\
&= \quad \frac{1}{j+1}\sum_{l=0}^{j}\operatorname{tr}\left(\Omega^l U\right)\left\{\sum_{k=1}^{j-l}(-1)^{l+j+k}\bar{c}_{j-k-l}(\Omega)s_k(\Omega)\right.\\
&\qquad \left. - (-1)^{j+l}(l+1)\bar{c}_{j-l}(\Omega)\right\}\\
&\overset{(6.4.4)}{=} \quad \frac{(-1)^{j+1}}{j+1}\sum_{l=0}^{j}\operatorname{tr}\left(\Omega^l U\right)(-1)^l\left\{j - l + l + 1\right\}\bar{c}_{j-l}(\Omega)\\
&= \quad (-1)^{j+1}\sum_{l=0}^{j}(-1)^l\operatorname{tr}\left(\Omega^l U\right)\bar{c}_{j-l}(\Omega) \quad .
\end{aligned}$$

(6.4.3) ist also bewiesen, somit auch (6.4.2).

iii) Darstellung der Variation mit Hilfe von Potenzen der Kählerform
Seien $(z^1, ..., z^N)$ lokale holomorphe Koordinaten. Dann zeige ich zunächst mittels vollständiger Induktion über j :

$$\forall\, j \geq 1: \; \left(\Omega^j U\right)^p_{\;q} = \sum_{k=1}^{N} \left\{ (-iH\omega)^j \, g^{p\bar{k}} \varphi_{q\bar{k}} + (-iH\omega)^{j-1} \, \frac{H}{2} \varphi_{q\bar{k}} dz^p \wedge d\bar{z}^k \right\} \quad . \qquad (6.4.5)$$

$j = 1$:

$$\begin{aligned}
(\Omega U)^p_{\;q} &= \sum_{l=1}^{N} \Omega^p_{\;l} U^l_{\;q} \overset{\substack{\text{Korollar}\\ 2.1.6}}{=} \sum_{l,k} \left(-iH\delta_{pl}\omega + \frac{H}{2} \sum_{m=1}^{N} g_{l\bar{m}} dz^p \wedge d\bar{z}^m \right) g^{l\bar{k}} \varphi_{q\bar{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \left(-iH\omega \, g^{p\bar{k}} \varphi_{q\bar{k}} + \frac{H}{2} \varphi_{q\bar{k}} dz^p \wedge d\bar{z}^k \right) \quad ;
\end{aligned}$$

$j \to j+1$:

$$\begin{aligned}
\left(\Omega^{j+1} U\right)^p_{\;q} \quad &= \quad \sum_{l=1}^{N} \Omega^p_{\;l} \left(\Omega^j U\right)^l_{\;q} \\
&\overset{\substack{\text{Korollar 2.1.6},\\ \text{Ind.-Ann.}}}{=} \quad \sum_{k,l} \left(-iH\delta_{pl}\omega + \frac{H}{2} \sum_{m=1}^{N} g_{l\bar{m}} dz^p \wedge d\bar{z}^m \right) \\
&\qquad \wedge \left((-iH\omega)^j \, g^{l\bar{k}} \varphi_{q\bar{k}} + (-iH\omega)^{j-1} \, \frac{H}{2} \varphi_{q\bar{k}} dz^l \wedge d\bar{z}^k \right) \\
&= \quad \sum_{k=1}^{N} \Bigg\{ (-iH\omega)^{j+1} \, g^{p\bar{k}} \varphi_{q\bar{k}} + (-iH\omega)^j \, \frac{H}{2} \varphi_{q\bar{k}} dz^p \wedge d\bar{z}^k \\
&\qquad + (-iH\omega)^j \, \frac{H}{2} \varphi_{q\bar{k}} dz^p \wedge d\bar{z}^k \\
&\qquad - \sum_{l,m} (-iH\omega)^{j-1} \, \frac{H}{2} \cdot \frac{H}{2} g_{l\bar{m}} \, dz^l \wedge d\bar{z}^m \wedge \varphi_{q\bar{k}} dz^p \wedge d\bar{z}^k \Bigg\} \\
&= \quad \sum_{k=1}^{N} \left\{ (-iH\omega)^{j+1} \, g^{p\bar{k}} \varphi_{q\bar{k}} + (-iH\omega)^j \, \frac{H}{2} \varphi_{q\bar{k}} dz^p \wedge d\bar{z}^k \right\} \quad .
\end{aligned}$$

(6.4.5) ist also bewiesen und führt wegen Satz 1.2.1 mit $\Delta := \Delta_{0,0}$ auf folgende Identität:

Für $j \geq 1$:	$\mathrm{tr}\,(\Omega^j U)$	$=$	$-\frac{\Delta\varphi}{2} (-iH\omega)^j + \partial\bar{\partial} \left(\frac{H}{2} \varphi \, (-iH\omega)^{j-1} \right) \quad ;$
außerdem gilt nach (6.2.5):	$\mathrm{tr}\,(U)$	$=$	$-\frac{\Delta\varphi}{2} \quad .$

Dies liefert nun zusammen mit $c_k(\Omega) = \binom{N+1}{k}\left(-\frac{H}{2\pi}\omega\right)^k$ nach Satz 2.2.3 sowie mit (6.4.2):

$$\text{Es gibt } A, B \in \mathbb{C}, \text{ so daß } \quad \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\log \mathcal{Q}^\varepsilon\right)_{|\,\varepsilon = 0} = \int_X \left\{A\Delta\varphi\,\omega^N + B\,\partial\bar{\partial}\left(\varphi\omega^{N-1}\right)\right\} \quad . \tag{6.4.6}$$

iv) Beweis der Behauptung
Weil für die Volumenform μ von X zu g gilt: $\mu = \frac{\omega^N}{N!}$ [GH, p.80] und X kompakt ist, folgt die Behauptung direkt aus (6.4.6). □

Bemerkung:
Wegen Satz 2.1.4 liefert das obige Ergebnis nicht nur eine Aussage über das Verhalten der Quillenmetrik auf den „verallgemeinerten Riemannschen Flächen“, die als kompakte Quotienten von D^N durch eine diskrete Gruppe von Isometrien entstehen: Satz 6.4.1 kann auch auf die projektiven Räume und alle kompakten Mannigfaltigkeiten angewandt werden, deren universelle Überlagerung $\mathbb{C}^N$ ist und die eine flache Metrik tragen!

Um herauszufinden, um welche Art von kritischen Punkten der Quillenmetrik es sich bei den Metriken konstanter holomorpher Krümmung handelt, habe ich versucht, Korollar 6.2.6 anzuwenden. Dies führte allerdings ebensowenig zum Erfolg wie der Versuch, die in Kapitel 5.2 angegebene Methode von K. Richardson zu verallgemeinern.

6.5 Elementare Herleitung einer Variationsformel

In diesem Abschnitt leite ich auf elementare Weise – ohne Verwendung der Ergebnisse von J.-M. Bismut, H. Gillet und C. Soulé [BGSIII] – eine Darstellung der ersten Variation der analytischen Torsion unter Variation der Metrik innerhalb der Kählerklasse her.
Der folgende Satz stellt lediglich eine Vereinfachung von Lemma 6.1.1 für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten mit Hilfe der Asymptotik des Wärmeleitungskernes für $t \to 0$ dar; ein analoges Resultat kann man natürlich in jeder beliebigen Dimension angeben. Für die Anwendung auf (mehr oder weniger) konkrete Beispiele ist dieses Resultat aber nur interessant, wenn es noch weiter vereinfacht werden kann (mit den Bezeichnungen aus Satz 6.5.1 nämlich, wenn $\frac{\beta_2(z)}{\Delta\varphi(z)}$ auf ganz X definiert und unabhängig von φ ist). Dies ist mir für bestimmte zweidimensionale Mannigfaltigkeiten gelungen, wie ich in den folgenden vier Kapiteln erläutern werde.

Satz 6.5.1
Sei (X, g) eine kompakte zweidimensionale Kähler-Mannigfaltigkeit und g^ε eine φ-Variation von g. $K_0(z, z', t)$ sei der Wärmeleitungskern von $\Delta_{0,0}$ mit der bekannten Asymptotik

$$K_0(z, z, t) \overset{t\to 0}{\sim} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z) t^{j-2}.$$

Weiter sei eine Formel der Gestalt $\mathrm{tr}\left(\alpha\left(e^{-t\Delta_{0,1}}-P_{0,1}\right)\right)=\int_X \kappa(z,t)\mu(z)$ *mit*

$$\kappa(z,t)\overset{t\to 0}{\sim}\sum_{j=0}^{\infty}\beta_j(z)t^{j-2}\,,\quad \beta_j\in C^\infty(X,\mathbb{C})$$

bekannt (dies ist keine Einschränkung, da ja für den Kern $K_1(z,z',t)$ *von* $e^{-t\Delta_{0,1}}$ *eine entsprechende Asymptotik bekannt ist; die Voraussetzung dient lediglich der Festlegung der Notation).*
Dann gilt für $\tau^\varepsilon:=\tau_0(X,g^\varepsilon)$*:*

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\log\tau^\varepsilon\right)_{|\;\varepsilon=0}=\int_X\left(\frac{\Delta\varphi}{4}(z)\left[a_2(z)-\frac{1}{\mathrm{vol}\,(X)}\right]+\frac{\beta_2(z)}{2}\right)\mu(z)\,.$$

<u>Beweis:</u>
Wo im folgenden $\varepsilon=0$ schon eingesetzt ist, lasse ich obere und untere Indizes „0" einfach weg.
Nach Lemma 6.1.1 muß lediglich $F'(0)$ für die dort definierte Funktion F berechnet werden. Dies ist möglich, da die einzelnen Summanden mit Hilfe von Lemma 1.3.4 bestimmt werden können:
Da X kompakt ist, besteht der Kern von $\Delta_{0,0}$ genau aus den konstanten Funktionen auf X. Daher gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left(\alpha\left(e^{-t\Delta_{0,0}}-P_{0,0}\right)\right)&\overset{\text{Lemma 1.3.4}}{=}\mathrm{tr}\left(-\frac{\Delta\varphi}{2}\left(e^{-t\Delta_{0,0}}-P_{0,0}\right)\right)\\&=-\int_X\frac{\Delta\varphi}{2}(z)\left\{K_0(z,z,t)-\frac{1}{\mathrm{vol}\,(X)}\right\}\mu(z)\quad.\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\mathrm{tr}\left(\alpha\left(e^{-t\Delta_{0,1}}-P_{0,1}\right)\right)=\int_X\kappa(z,t)\mu(z)\quad,$$

und nach Lemma 1.3.4 ist $\alpha(d\bar z_1\wedge d\bar z_2)=0$, so daß

$$\mathrm{tr}\left(\alpha\left(e^{-t\Delta_{0,2}}-P_{0,2}\right)\right)=0\quad.$$

Insgesamt ergibt sich, daß für Re $s\gg 0$ gilt:

$$\begin{aligned}F(s)&\overset{\substack{\text{Lemma}\\ 6.1.1}}{=}-\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{2}(-1)^q\frac{s}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\,\mathrm{tr}\left(\alpha\left(e^{-t\Delta_{0,q}}-P_{0,q}\right)\right)dt\\&=\frac{s}{2\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\int_X\left(\frac{\Delta\varphi}{2}(z)\left\{K_0(z,z,t)-\frac{1}{\mathrm{vol}\,(X)}\right\}+\kappa(z,t)\right)\mu(z)\,dt.\end{aligned}$$

Jetzt setze ich die asymptotischen Entwicklungen

$$K_0(z,z,t) \overset{t\to 0}{\sim} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z) t^{j-2} \quad , \quad \kappa(z,t) \overset{t\to 0}{\sim} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j(z) t^{j-2}$$

ein, also für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 3$: $K_0(z,z,t) = \sum_{j=0}^{k} a_j(z)t^{j-2} + \varrho_0(z,t)$ und $\kappa(z,t) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j(z)t^{j-2} + \varrho_1(z,t)$ mit glatten, integrierbaren $\varrho_{0,1}$ und für alle $z \in X$: $\varrho_{0,1}(z,t) = \mathcal{O}(t^{j+k-1})$, und erhalte für Re $s \gg 0$:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s}{2\Gamma(s)} \left[\int_0^1 t^{s-1} \int_X \left\{ \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{\Delta\varphi}{2} a_j + \beta_j \right)(z) t^{j-2} - \frac{\Delta\varphi(z)}{2\,\mathrm{vol}\,(X)} \right\} \mu(z)\, dt \right. \\ &\quad + \int_0^1 t^{s-1} \int_X \left\{ \frac{\Delta\varphi}{2}(z) \varrho_0(z,t) + \varrho_1(z,t) \right\} \mu(z)\, dt \\ &\quad \left. - \sum_{q=0}^{2} (-1)^q \int_1^{\infty} t^{s-1}\, \mathrm{tr}\, \left(\alpha \left(e^{-t\Delta_{0,q}} - P_{0,q} \right) \right) dt \right] \quad . \end{aligned}$$

Die beiden hinteren Summanden sind offenbar meromorph in s und in $s = 0$ holomorph, wie aus den Eigenschaften von $\varrho_{0,1}$ und der Weylschen asymptotischen Formel für die Eigenwerte von $\Delta_{0,q}$ folgt; die beiden Summanden werden ab sofort mit $h(s)$ bezeichnet. Dann erhalte ich durch Integration über t für Re $s \gg 0$ (die Wärmeleitungskerne sind jeweils absolut integrierbar und $\Delta\varphi$ ist beschränkt, so daß der Satz von Fubini angewandt werden kann):

$$F(s) = \frac{s}{2\Gamma(s)} \left[\int_X \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=0}^{k} \frac{\Delta\varphi(z) a_j(z) + 2\beta_j(z)}{s+j-2} - \frac{\Delta\varphi(z)}{s\,\mathrm{vol}\,(X)} \right\} \mu(z) + h(s) \right] \quad . \tag{6.5.1}$$

Die rechte Seite ist offenbar meromorph in s, und daher gilt die Gleichung überall; da $\frac{1}{\Gamma(s)} = sf(s)$ mit holomorphem f und $f(0) = 1$, kann (6.5.1) umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} F(s) &= sf(s) \int_X \frac{1}{4} \left\{ \Delta\varphi(z) a_2(z) + 2\beta_2(z) - \frac{\Delta\varphi(z)}{\mathrm{vol}\,(X)} \right\} \mu(z) \\ &\quad + s^2 f(s) \int_X \frac{1}{4} \left\{ \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq 2}}^{k} \frac{\Delta\varphi(z) a_j(z) + 2\beta_j(z)}{j-2+s} \right\} \mu(z) + \frac{s^2}{2} f(s)\, h(s) \,. \end{aligned}$$

Jetzt sind alle Summanden in $s = 0$ holomorph, und ich kann differenzieren:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} \left(\log \tau^{\varepsilon} \right)_{|\,\varepsilon = 0} \overset{\substack{\text{Lemma} \\ 6.1.1}}{=} F'(0) = \int_X \left(\frac{\Delta\varphi}{4}(z) \left[a_2(z) - \frac{1}{\mathrm{vol}\,(X)} \right] + \frac{\beta_2(z)}{2} \right) \mu(z) \,.$$

□

6.6 Zwimannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel werde ich *Zwimannigfaltigkeiten* definieren und einige ihrer Eigenschaften beweisen, um im folgenden Kapitel die analytische Torsion und die Quillenmetrik auf Zwimannigfaltigkeiten variieren zu können.
In Satz 6.6.2 zeige ich, daß die Zwimannigfaltigkeiten genau die komplex zweidimensionalen Tori und die kompakten $K3$-Flächen sind, so daß dieses und das folgende Kapitel im wesentlichen dazu dienen, die Ergebnisse in den Kapiteln 6.8 und 6.9 übersichtlicher darstellen und vergleichen zu können.

Definition 6.6.1
Eine **Zwimannigfaltigkeit** *ist eine geschlossene zweidimensionale Kähler-Mannigfaltigkeit mit holomorph trivialem kanonischem Bündel*.*

Satz 6.6.2
Die Zwimannigfaltigkeiten sind genau die komplex zweidimensionalen Tori und die kompakten $K3$-Flächen.
<u>Beweis:</u>
Nach den Klassifikationssätzen von Kodaira für komplexe Flächen [Kod, Theorems 19, 20] sind wegen der holomorphen Trivialität des kanonischen Bündels von Zwimannigfaltigkeiten die einzigen Flächen, die als Zwimannigfaltigkeiten neben den Tori und $K3$-Flächen in Frage kommen, sogenannte **minimale elliptische Flächen** (also Flächen der Gestalt $\mathbb{C}^2/\Gamma$ mit einer eigentlich diskontinuierlichen Gruppe Γ aus fixpunktfreien affinen Transformationen auf $\mathbb{C}^2$, welche die Zweiform $dz^1 \wedge dz^2$ invariant lassen) mit ungerader erster Bettizahl. Für Kähler-Mannigfaltigkeiten sind aber die Bettizahlen b^{2k+1} für $k \in \mathbb{N}$ immer gerade, da ja nach dem Hodge-Theorem $H^{p,q}(X) = \overline{H^{q,p}(X)}$ [GH, p.116], also $b^{2k+1} = 2\sum_{p=0}^{k} h^{p,2k+1-p}$. Minimale elliptische Flächen mit ungerader erster Bettizahl können also niemals Kähler sein und kommen somit als Zwimannigfaltigkeiten nicht in Frage.
Zu zeigen ist daher nur noch, daß die komplex zweidimensionalen Tori und die kompakten $K3$-Flächen tatsächlich Zwimannigfaltigkeiten sind.

Sei $X = \mathbb{C}^2/\Gamma$ ein komplexer Torus, also $\Gamma \subset \mathbb{C}^2$ ein Gitter; X ist damit offensichtlich Kähler. (z^1, z^2) seien die von den Standardkoordinaten auf $\mathbb{C}^2$ induzierten lokalen holomorphen Koordinaten auf X. Dann gibt es eine global definierte harmonische $(2,0)$-Form $\eta = \frac{1}{2}dz^1 \wedge dz^2$ auf X [GH, p.302]; η ist also ein holomorpher Schnitt von $\Lambda^{2,0}(T^*X)$ mit $\|\eta\| \equiv 1$, d.h. $\Lambda^{2,0}(T^*X)$ ist holomorph trivial und somit X nach Definition 6.6.1 eine Zwimannigfaltigkeit. Nach Satz 2.3.2 ist jede $K3$-Fläche Kähler, und das kanonische

*Ich nenne diese Mannigfaltigkeiten nicht allein darum Zwimannigfaltigkeiten, weil sie zweidimensional sind. Auch hat die Bezeichnung nichts mit Zwietracht oder Zwieback zu tun. Dies wird aber im folgenden klar werden.

Bündel einer $K3$-Fläche ist nach Korollar 2.3.4 holomorph trivial, d.h. jede kompakte $K3$-Fläche ist eine Zwimannigfaltigkeit. □

Bemerkung:
Wie in Bemerkung 2.3.6 erwähnt, werden **Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten** mitunter als kompakte Kähler-Mannigfaltigkeiten X mit $c_1(X) = 0$ definiert. Aus dem in Bemerkung 2.3.6 Gesagten zusammen mit Satz 6.6.2 folgt für $\dim_{\mathbb{C}} X = 2$, daß die zweidimensionalen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten nach *dieser* Definition genau die Zwimannigfaltigkeiten sind. Um Verwechslungen zu vermeiden, bleibe ich jedoch bei meiner Namensgebung.
Vor dem Hintergrund von Satz 6.6.2 mag man sich vielleicht fragen, warum ich Zwimannigfaltigkeiten überhaupt gesondert definiert habe. Das liegt daran, daß ich von der Aufgabe ausgegangen bin, eine elementare Herleitung der Variationsformel auf kompakten zweidimensionalen Kähler-Mannigfaltigkeiten zu finden, zunächst vor allem auf $K3$-Flächen. Im – anfangs für $K3$-Flächen gefundenen – Beweis von Satz 6.7.2 sieht man, daß genau die im folgenden Lemma angegebenen Voraussetzungen an die kompakte Mannigfaltigkeit für den Beweis benötigt werden, welche sich dann als äquivalent zu obiger Definition 6.6.1 erwiesen haben:

Lemma 6.6.3
Eine kompakte zweidimensionale Kähler-Mannigfaltigkeit ist genau dann eine Zwimannigfaltigkeit, wenn sie den folgenden drei Bedingungen genügt:

i. Auf X existiert eine Ricci-flache Kählermetrik $g^* = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

ii. Das kanonische Bündel $\Lambda^{2,0}(T^*X)$ hat einen holomorphen Schnitt, der bezüglich der von g^* auf $\Lambda^{2,0}(T^*X)$ induzierten Metrik konstante Norm 1 hat.

iii. Ist X mit der Metrik g^* versehen und ist $\left(\hat{\psi}^1, ..., \hat{\psi}^m\right)$ eine Orthonormalbasis von $\ker \Delta_{0,1}$, so gilt bezüglich der von g^* auf $\Lambda^{0,1}(T^*X)$ induzierten Metrik $\|\cdot\|$:

$$B(z) := \sum_{j=1}^{m} \left\| \hat{\psi}^j(z) \right\|^2 \equiv \text{const.}$$

Beweis:
Erfüllt eine kompakte zweidimensionale Kähler-Mannigfaltigkeit die Bedingung ii., so ist sie wegen $c_1(X) = [\frac{1}{2\pi i}\text{Ric}]$ [Go, (5.3.38)] offensichtlich eine Zwimannigfaltigkeit. Umgekehrt folgt für jede Zwimannigfaltigkeit X wegen $c_1(X) = -c_1(\Lambda^{2,0}(T^*X)) = 0$ nach Lemma 2.2.1 mit Hilfe des Calabi-Yau-Theorems [Ya, Theorem 2], daß sie die Bedingung i. erfüllt.
Zu zeigen ist also wegen Satz 6.6.2 nur noch, daß die komplex zweidimensionalen Tori und die kompakten $K3$-Flächen auch den Bedingungen ii. und iii. genügen.

Sei $X = \mathbb{C}^2/\Gamma$ ein komplexer Torus und (z^1, z^2) seien die von den Standardkoordinaten auf $\mathbb{C}^2$ induzierten lokalen holomorphen Koordinaten. Daß Bedingung ii. auf X erfüllt ist, habe ich schon im Beweis von Satz 6.6.2 gezeigt. Eine Orthonormalbasis von $\ker \Delta_{0,1}$ ist durch

$$\hat{\psi}^1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{vol}\,(X)}}\, d\bar{z}^1 \ , \ \hat{\psi}^2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\,\mathrm{vol}\,(X)}}\, d\bar{z}^2$$

gegeben [GH, p.302], so daß offensichtlich $B(z) = \sum_{j=1}^{2} \left\| \hat{\psi}^j(z) \right\|^2 = \frac{2}{\mathrm{vol}\,(X)} = \mathrm{const}$ gilt, was Bedingung iii. beweist.

Sei jetzt X eine kompakte $K3$-Fläche. Da das kanonische Bündel von X nach Korollar 2.3.4 holomorph trivial ist, gibt es einen nirgends verschwindenden holomorphen Schnitt η von $\Lambda^{2,0}(T^*X)$. Weil die Krümmungsform Θ des zu g^* gehörigen hermiteschen Zusammenhanges auf $\Lambda^{2,0}(T^*X)$ verschwinden muß (siehe (2.2.1): $\Theta = -\mathrm{Ric} = 0$ nach Wahl von g^*), folgt: $0 = \Theta = \overline{\partial}\partial \log \|\eta\|^2$ [GH, p.142]. $\partial \log \|\eta\|^2 \in \Lambda^{1,0}(T^*X)$ ist also eine auf X global definierte glatte geschlossene Form, aber X ist eine $K3$-Fläche, also gilt nach Definition 2.3.1 $b^1(X) = 2h^{1,0}(X) = 0$, d.h. $\partial \log \|\eta\|^2 = 0$, und analog folgt $\overline{\partial} \log \|\eta\|^2 = 0$, d.h. $\log \|\eta\|^2 = 0$ ist harmonisch. Weil X kompakt ist, folgt hieraus, daß $\|\eta\|$ konstant ist, also o.B.d.A. (nach Definition von $\| \cdot \|$!):

$$\|\overline{\eta}\| = \|\eta\| = 1 \quad ,$$

womit Bedingung ii. erfüllt ist.
Bedingung iii. ist trivialerweise erfüllt, da $b^1(X) = 0$, es also keine harmonischen $(0,1)$-Formen auf X gibt. □

Nach Satz 2.3.7 gilt, da das kanonische Bündel jeder Zwimannigfaltigkeit wegen Lemma 6.6.3 ii. trivial ist:

Auf Zwimannigfaltigkeiten sind die Ricci-flachen Kählermetriken genau die Kähler-Einstein-Metriken.

Folgendes Lemma beruht in gewisser Weise auf einer expliziten Realisierung der Serre-Dualität:

Lemma 6.6.4
Sei X eine Zwimannigfaltigkeit mit Kähler-Einstein-Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und zugehörigem holomorphem Zusammenhang. Dann existieren Isometrien $A_p : \Lambda^{p,0}(T^*X) \longrightarrow \Lambda^{p,2}(T^*X)$, und es gilt $\Delta_{0,2}A_0 = A_0\Delta_{0,0}$.
Beweis:
Nach Lemma 6.6.3 existiert ein holomorpher Schnitt η von $\Lambda^{2,0}(T^*X)$ mit

$$\|\overline{\eta}\| = \|\eta\| = 1 \quad . \tag{6.6.1}$$

Ich definiere nun

$$A_p : \Lambda^{p,0}(T^*X) \longrightarrow \Lambda^{p,2}(T^*X), \quad A_p\nu := \nu \wedge \overline{\eta} \quad , \tag{6.6.2}$$

dann gilt für $\nu \in \Lambda^{p,0}(T^*X)$:

$$\begin{aligned}
\partial A_p\nu \overset{(6.6.2)}{=} \partial(\nu \wedge \overline{\eta}) &= \partial\nu \wedge \overline{\eta} + (-1)^p \nu \wedge \partial\overline{\eta} \\
&\overset{(6.6.2)}{=} A_{p+1}\partial\nu + (-1)^p \nu \wedge \overline{(\overline{\partial}\eta)} \overset{\eta \text{ holomorph}}{=} A_{p+1}\partial\nu,
\end{aligned}$$

also

$$\partial A = A\partial \quad . \tag{6.6.3}$$

Weiter folgt für $\nu, \nu' \in \Lambda^{p,0}(T^*X)$:

$$\langle A_p\nu, A_p\nu'\rangle \overset{(6.6.2)}{=} \langle \nu \wedge \overline{\eta}, \nu' \wedge \overline{\eta}\rangle \overset{\text{Lemma 1.1.7 i.}}{=} \langle \nu, \nu'\rangle \, \|\overline{\eta}\|^2 \overset{(6.6.1)}{=} \langle \nu, \nu'\rangle \quad , \tag{6.6.4}$$

d.h. A_p erhält die Metrik. Weil η nirgends verschwindet, sind klarerweise die Abbildungen $A_p : \Lambda^{p,0}(T^*X) \longrightarrow \Lambda^{p,2}(T^*X)$ injektiv. Aus Dimensionsgründen sieht man sofort, daß die Abbildungen A_p auch surjektiv und somit Isometrien sind.
Weil X eine Kähler-Mannigfaltigkeit ist, gilt

$$\Delta_\partial = \Delta_{\overline{\partial}} \tag{6.6.5}$$

[GH, p.115]. Daher gilt für alle $f, f' \in \Lambda^{0,0}(T^*X)$:

$$\begin{aligned}
&\int_X \langle \Delta_{0,2} A_0 f, A_0 f'\rangle \, \mu \\
&= \int_X \left\langle (\overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\,\overline{\partial}) A_0 f, A_0 f'\right\rangle \mu &&= \int_X \left\langle \overline{\partial}\,\overline{\partial}^*(A_0 f), A_0 f'\right\rangle \mu \\
&= \int_X \left\langle \overline{\partial}^*(A_0 f), \overline{\partial}^*(A_0 f')\right\rangle \mu &&\overset{(1.2.1)}{=} \int_X \left\langle *\overline{\partial} * (A_0 f), *\overline{\partial} * (A_0 f')\right\rangle \mu \\
&\overset{\substack{\text{Lemma} \\ \text{1.1.7 ii.}}}{=} \int_X \left\langle \overline{\overline{\partial} * (A_0 f)}, \overline{\overline{\partial} * (A_0 f')}\right\rangle \mu &&= \int_X \left\langle \partial\overline{*(A_0 f)}, \partial\overline{*(A_0 f')}\right\rangle \mu \\
&\overset{\substack{\text{Lemma} \\ \text{1.1.7 iii.}}}{=} \int_X \langle \partial(A_0 f), \partial(A_0 f')\rangle \, \mu &&\overset{(6.6.3)}{=} \int_X \langle A_1(\partial f), A_1(\partial f')\rangle \, \mu \\
&\overset{(6.6.4)}{=} \int_X \langle \partial f, \partial f'\rangle \, \mu &&= \int_X \langle \partial^* \partial f, f'\rangle \, \mu \\
&= \int_X \langle \Delta_\partial f, f'\rangle \, \mu &&\overset{\substack{(6.6.4), \\ (6.6.5)}}{=} \int_X \langle A_0 \Delta_{0,0} f, A_0 f'\rangle \, \mu \quad .
\end{aligned}$$

Da A_0 eine Isometrie ist (siehe oben), folgt $\Delta_{0,2} A_0 = A_0 \Delta_{0,0}$. □

Weil sich nach Lemma 6.6.4 auf Zwimannigfaltigkeiten mit Kähler-Einstein-Metrik die Bündel $\Lambda^{0,0}(T^*X)$ und $\Lambda^{0,2}(T^*X)$ unter der dort konstruierten Isometrie A_0 – was den jeweiligen Laplace-Operator angeht – wie „Zwillinge“ verhalten, definiere ich:

Definition 6.6.5
Die in Lemma 6.6.4 auf Zwimannigfaltigkeiten mit Kähler-Einstein-Metrik definierte Isometrie A_0 heißt **Zwillingsisometrie**.

Mit der Definition 6.6.5 ist auch die Bezeichnung *Zwimannigfaltigkeit* verständlich: Auf jeder Zwimannigfaltigkeit kann eine Zwillingsisometrie definiert werden.

6.7 Analytische Torsion und Quillenmetrik auf Zwimannigfaltigkeiten

Warum Zwimannigfaltigkeiten im Zusammenhang mit der analytischen Torsion interessant sind, zeigen die beiden folgenden Sätze:

Satz 6.7.1
Sei (X, g) eine Zwimannigfaltigkeit mit Kähler-Einstein-Metrik und zugehörigem holomorphem Zusammenhang. Dann gilt für die analytische Ray-Singer-Torsion:

$$\forall\, p : \tau_p(X, g) = 1 \quad .$$

<u>*Beweis:*</u>
Da nach Lemma 6.6.4 auf X eine Zwillingsisometrie existiert, d.h. eine bijektive Abbildung $A_0 : \Lambda^{0,0}(T^*X) \longrightarrow \Lambda^{0,2}(T^*X)$ mit $\Delta_{0,2}A_0 = A_0\Delta_{0,0}$, stimmen die Spektren von $\Delta_{0,0}$ und $\Delta_{0,2}$ überein; insbesondere gilt

$$\zeta'_{0,0}(0) = \zeta'_{0,2}(0) \quad . \tag{6.7.1}$$

Aus Lemma 3.1.2 folgert man

$$\zeta'_{0,1}(0) = \zeta'_{0,0}(0) + \zeta'_{0,2}(0) \overset{(6.7.1)}{=} 2\zeta'_{0,2}(0), \tag{6.7.2}$$

so daß

$$\log \tau_0(X, g) \overset{\text{Definition 3.2.1}}{=} -\frac{1}{2}\zeta'_{0,1}(0) + \zeta'_{0,2}(0) \overset{(6.7.2)}{=} 0$$

und somit $\tau_0(X, g) = 1$.
Daraus folgt zusammen mit Satz 3.2.3 die Behauptung. □

Satz 6.7.2
Sei X eine Zwimannigfaltigkeit und g eine Kähler-Einstein-Metrik auf X mit zugehörigem holomorphem Zusammenhang. Dann gilt:
Die Metrik g ist genau dann in ihrer Kählerklasse kritischer Punkt der analytischen Torsion $\tau_0(X, g)$, wenn für den Riemannschen Krümmungstensor R zu g gilt: $\|R\| = \mathrm{const}$.

Beweis:
Zu zeigen ist:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für jede } \varphi\text{-Variation } g^\varepsilon \text{ von } g \text{ gilt}\\ \text{mit } \tau^\varepsilon := \tau_0(X, g^\varepsilon): \ \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\log \tau^\varepsilon\right)_{|\varepsilon=0} = 0\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \|R\| = \text{const}\ . \tag{6.7.3}$$

Es soll Satz 6.5.1 angewandt werden, d.h. zunächst sind die Koeffizienten β_j in der Formel

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(\alpha\left(e^{-t\Delta_{0,1}} - P_{0,1}\right)\right) \quad &= \quad \int_X \kappa(z,t)\mu(z)\\ \text{mit } \kappa(z,t) \quad &\overset{t\to 0}{\sim} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j(z) t^{j-2}\ , \quad \beta_j \in C^\infty(X, \mathbb{C})\end{aligned}$$

zu bestimmen. Dazu muß die Spur auf der linken Seite berechnet werden:

i) Bestimmung der Eigenfunktionen von $\Delta_{0,1}$ und Umformung der Spur
Diejenigen Eigenfunktionen von $\Delta_{0,1}$, welche nicht harmonisch sind, lassen sich aus den Eigenfunktionen von $\Delta_{0,0}$ zusammen mit denen von $\Delta_{0,2}$ bestimmen:
Mit $\Gamma_\lambda(\Delta_{0,q}) := \{\psi \in \mathcal{D}(\Delta_{0,q}) \mid \Delta_{0,q}\psi = \lambda\psi\}$ gilt, wie im Beweis von Lemma 3.1.2 gezeigt:

$$\lambda \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \Gamma_\lambda(\Delta_{0,1}) = \overline{\partial}\Gamma_\lambda(\Delta_{0,0}) \oplus \overline{\partial}^*\Gamma_\lambda(\Delta_{0,2}) \quad . \tag{6.7.4}$$

Die Eigenfunktionen von $\Delta_{0,2}$ lassen sich auf der Zwimannigfaltigkeit X mit Kähler-Einstein-Metrik aber ebenfalls aus denen von $\Delta_{0,0}$ berechnen:
Nach Lemma 6.6.4 gibt es eine Isometrie $A : \Lambda^{0,0}(T^*X) \longrightarrow \Lambda^{0,2}(T^*X)$, die mit Δ vertauscht, nämlich die Zwillingsisometrie. Aus einem vollständigen Orthonormalsystem $\{\psi^k\}_{k=0}^\infty$ von $\Lambda^{0,0}(T^*X)$ aus Eigenfunktionen von $\Delta_{0,0}$ zu Eigenwerten $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ (die einzigen harmonischen Funktionen auf der kompakten Mannigfaltigkeit X sind die konstanten Funktionen) erhalte ich also ein vollständiges Orthonormalsystem $\{A\,\psi^k\}_{k=0}^\infty$ von $\Lambda^{0,2}(T^*X)$ aus Eigenfunktionen von $\Delta_{0,2}$.
Mit ψ^k ist auch $\overline{\psi^k}$ eine Eigenfunktion von $\Delta_{0,0}$ zum gleichen Eigenwert:

$$\Delta_{0,0}\overline{\psi^k} \overset{\text{Satz}}{\underset{1.2.1}{=}} -2\sum_{i,j} g^{i\bar{j}} \frac{\partial^2}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\overline{\psi^k} = -2\sum_{i,j} g^{i\bar{j}}\overline{\psi^k_{j\bar{i}}} = \overline{-2\sum_{i,j} g^{j\bar{i}}\psi^k_{j\bar{i}}} \overset{\text{Satz}}{\underset{1.2.1}{=}} \overline{\Delta_{0,0}\psi^k} = \lambda_k\overline{\psi^k}\ .$$

Es kann also o.B.d.A. angenommen werden, daß gilt:

$$\forall\, k : \quad \psi^k = \overline{\psi^k} \quad . \tag{6.7.5}$$

Sei jetzt $\left(\hat{\psi}^1, ..., \hat{\psi}^m\right)$ eine Orthonormalbasis von $\ker \Delta_{0,1}$. Dann erhalte ich wegen (6.7.4) ein vollständiges Orthogonalsystem von $\Lambda^{0,1}(T^*X)$ aus Eigenfunktionen von $\Delta_{0,1}$:

$$\begin{aligned}&\hat{\psi}^1, \ldots, \hat{\psi}^m, \overline{\partial}\psi^1, \overline{\partial}^* A\,\psi^1, \overline{\partial}\psi^2, \overline{\partial}^* A\,\psi^2, \ldots\\ &\qquad \text{mit Eigenwerten } \underbrace{0, \ldots, 0}_{\text{m-mal}}, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \ldots\end{aligned}$$

Diese Eigenfunktionen müssen noch normiert werden; weil A mit Δ vertauscht und A eine Isometrie ist, erhalte ich für $k > 0$:

$$\begin{aligned}\int_X \left\langle \overline{\partial}^* A\,\psi^k, \overline{\partial}^* A\,\psi^k \right\rangle\,\mu &= \int_X \left\langle \overline{\partial}\,\overline{\partial}^* A\,\psi^k, A\,\psi^k \right\rangle\,\mu \\ &= \int_X \left\langle \Delta A\,\psi^k, A\psi^k \right\rangle\,\mu \\ &= \int_X \left\langle \Delta\psi^k, \psi^k \right\rangle\,\mu \quad ,\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}\int_X \left\langle \overline{\partial}^* A\,\psi^k, \overline{\partial}^* A\,\psi^k \right\rangle\,\mu = \int_X \left\langle \overline{\partial}\,\psi^k, \overline{\partial}\,\psi^k \right\rangle\,\mu &= \int_X \left\langle \Delta\psi^k, \psi^k \right\rangle\,\mu \\ &= \lambda_k \quad ,\end{aligned} \tag{6.7.6}$$

so daß sich ergibt:

$$\begin{array}{l}\hat{\psi}^1\,,\,...\,,\,\hat{\psi}^m\,,\,\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\,\overline{\partial}\psi^1\,,\,\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\,\overline{\partial}^* A\,\psi^1\,,\,\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\,\overline{\partial}\psi^2\,,\,\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\,\overline{\partial}^* A\,\psi^2\,,...\\ \text{bilden ein vollständiges Orthonormalsystem von } \Lambda^{0,1}(T^*X)\\ \text{aus Eigenfunktionen von } \Delta_{0,1} \text{ mit Eigenwerten } \underbrace{0,...,0}_{\text{m-mal}},\lambda_1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_2,...\end{array} \tag{6.7.7}$$

Ich erhalte also:

$$\begin{aligned}&\operatorname{tr}\left(\alpha\left(e^{-t\Delta_{0,1}} - P_{0,1}\right)\right) \qquad\qquad (6.7.8)\\ &\overset{(6.7.7)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-t\lambda_k}}{\lambda_k} \int_X \left\{\left\langle \alpha\overline{\partial}\psi^k, \overline{\partial}\psi^k \right\rangle(z) + \left\langle \alpha\,\overline{\partial}^* A\,\psi^k, \overline{\partial}^* A\,\psi^k \right\rangle(z)\right\}\mu(z)\,.\end{aligned}$$

ii) Berechnung der Integranden

Ich wähle jetzt geodätische Normalkoordinaten um einen Punkt $z_0 \in X$ und berechne die Integranden in z_0. Es gilt $g_{i\bar{j}}(z_0) = \delta_{ij}$ für alle i, j, k sowie $g_{i\bar{j};k}(z_0) = 0$, so daß für $\xi \in \Lambda^{0,1}(T^*X)$ mit $\xi = \pi\,d\bar{z}^1 + \varrho\,d\bar{z}^2$ folgt:

$$\begin{aligned}\langle\alpha\xi,\xi\rangle(z_0) &\overset{\substack{\text{Lemma}\\1.3.4}}{=} \left\langle \pi\left(\varphi_{2\bar{2}}d\bar{z}^1 - \varphi_{1\bar{2}}d\bar{z}^2\right) + \varrho\left(-\varphi_{2\bar{1}}d\bar{z}^1 + \varphi_{1\bar{1}}d\bar{z}^2\right), \pi d\bar{z}^1 + \varrho\,d\bar{z}^2\right\rangle(z_0)\\ &\overset{\substack{\text{Lemma}\\1.1.1}}{=} 2\left(|\pi|^2\varphi_{2\bar{2}} + |\varrho|^2\varphi_{1\bar{1}} - \pi\overline{\varrho}\,\varphi_{1\bar{2}} - \varrho\,\overline{\pi}\varphi_{2\bar{1}}\right)(z_0) \quad ,\end{aligned} \tag{6.7.9}$$

also

$$\left\langle \alpha\overline{\partial}\psi^k, \overline{\partial}\psi^k \right\rangle(z_0) \overset{\substack{(6.7.5),\\(6.7.9)}}{=} 2\left(|\psi^k_{\bar{1}}|^2\varphi_{2\bar{2}} + |\psi^k_{\bar{2}}|^2\varphi_{1\bar{1}} - \psi^k_{\bar{1}}\,\psi^k_{\bar{2}}\,\varphi_{1\bar{2}} - \psi^k_{\bar{2}}\,\psi^k_{\bar{1}}\,\varphi_{2\bar{1}}\right)(z_0)\,. \tag{6.7.10}$$

Für die weitere Rechnung benötige ich die Definition der Zwillingsisometrie A explizit: η ist ein nirgends verschwindender holomorpher Schnitt von $\Lambda^{2,0}(T^*X)$ mit $\|\eta\| \equiv 1$; für eine Funktion f auf X ist dann nach (6.6.2) $A\,f = f \wedge \overline{\eta}$. Damit:

$$\overline{\partial}^* A\,\psi^k \overset{(1.2.1)}{=} -*\overline{\partial}*\left(\psi^k \wedge \overline{\eta}\right) \overset{\substack{\text{Lemma}\\ 1.1.7\ \text{iii.,}\\ (6.7.5)}}{=} -*\overline{\partial}\left(\psi^k \wedge \eta\right) \overset{\eta\ \text{holomorph}}{=} -*\left(\overline{\partial}\psi^k \wedge \eta\right) \quad . \qquad (6.7.11)$$

Aus $\|\eta\| \equiv 1$ nach (6.6.1) folgt nun wegen Lemma 1.1.1 : $\eta(z_0) = \frac{e^{i\vartheta}}{2} dz^1 \wedge dz^2(z_0)$ mit $\vartheta \in \mathbb{R}$, so daß

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}^* A\,\psi^k(z_0) &\overset{(6.7.11)}{=} -*\frac{e^{i\vartheta}}{2}\left(\psi^k_{\bar 1}\,dz^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar z^1 + \psi^k_{\bar 2}\,dz^1 \wedge dz^2 \wedge d\bar z^2\right)(z_0) \\
&\overset{\substack{\text{Korollar}\\ 1.1.6}}{=} -e^{-i\vartheta}\left(\overline{\psi^k_{\bar 1}}\,d\bar z^2 - \overline{\psi^k_{\bar 2}}\,d\bar z^1\right)(z_0) \quad ,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
&\left\langle \alpha\,\overline{\partial}^* A\,\psi^k(z_0), \overline{\partial}^* A\,\psi^k(z_0)\right\rangle \\
&\quad \overset{(6.7.5),(6.7.9)}{=} 2\left(|\psi^k_{\bar 2}|^2\varphi_{2\bar 2} + |\psi^k_{\bar 1}|^2\varphi_{1\bar 1} + \psi^k_{\bar 2}\,\overline{\psi^k_{\bar 1}}\,\varphi_{1\bar 2} + \psi^k_{\bar 1}\,\overline{\psi^k_{\bar 2}}\,\varphi_{2\bar 1}\right)(z_0) \quad . \qquad (6.7.12)
\end{aligned}$$

Außerdem erhält man:

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{\partial}^* A\,\psi^k, \overline{\partial}^* A\,\psi^k\right\rangle &\overset{(6.7.11)}{=} \left\langle *(\overline{\partial}\psi^k \wedge \eta), *(\overline{\partial}\psi^k \wedge \eta)\right\rangle \\
&\overset{\substack{\text{Lemma 1.1.7 ii.,}\\ (6.7.5)}}{=} \left\langle \partial\psi^k \wedge \overline{\eta}, \partial\psi^k \wedge \overline{\eta}\right\rangle \\
&\overset{\substack{\text{Lemma 1.1.7 i.,}\\ (6.6.1)}}{=} \left\langle \partial\psi^k, \partial\psi^k\right\rangle \\
&\overset{(6.7.5)}{=} \left\langle \overline{\partial}\psi^k, \overline{\partial}\psi^k\right\rangle \quad . \qquad (6.7.13)
\end{aligned}$$

Dies liefert nun für die Integranden in z_0:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \alpha\overline{\partial}\psi^k, \overline{\partial}\psi^k\right\rangle(z_0) + \left\langle \alpha\,\overline{\partial}^* A\,\psi^k, \overline{\partial}^* A\,\psi^k\right\rangle(z_0) \\
&\quad \overset{\substack{(6.7.10),\\ (6.7.12)}}{=} 2\left\{\varphi_{2\bar 2}\left(|\psi^k_{\bar 1}|^2 + |\psi^k_{\bar 2}|^2\right) + \varphi_{1\bar 1}\left(|\psi^k_{\bar 1}|^2 + |\psi^k_{\bar 2}|^2\right)\right\}(z_0) \\
&\quad \overset{\text{Satz 1.2.1}}{=} -\frac{\Delta\varphi}{2}(z_0)\left\langle \overline{\partial}\psi^k, \overline{\partial}\psi^k\right\rangle(z_0) \\
&\quad \overset{(6.7.13)}{=} -\frac{\Delta\varphi}{4}(z_0)\left\{\left\langle \overline{\partial}\psi^k, \overline{\partial}\psi^k\right\rangle + \left\langle A\overline{\partial}^*\psi^k, A\overline{\partial}^*\psi^k\right\rangle\right\}(z_0) \quad . \qquad (6.7.14)
\end{aligned}$$

In obiger Rechnung ist es nun tatsächlich zur erwarteten „bemerkenswerten Annullierung“ einiger Terme gekommen (siehe die Diskussion am Ende von Kapitel 4).

Der Ausdruck auf der rechten Seite von (6.7.14) ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten, so daß die Gleichung überall auf X für den Integranden eingesetzt werden kann.

iii) Berechnung der Spur

Sei nun $K_1(z,z',t)$ der Wärmeleitungskern von $\Delta_{0,1}$ und $B(z) := \sum_{j=1}^m \|\hat{\psi}^j(z)\|^2$ (B ist konstant nach Lemma 6.6.3). Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}\left(\alpha\left(e^{-t\Delta_{0,1}} - P_{0,1}\right)\right) &\overset{\substack{(6.7.8),\\(6.7.14)}}{=} -\int_X \frac{\Delta\varphi}{4}(z)\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-t\lambda_k}}{\lambda_k}\left\|\overline{\partial}\psi^k(z)\right\|^2\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-t\lambda_k}}{\lambda_k}\left\|\overline{\partial}^* A\,\psi^k(z)\right\|^2\right\}\mu(z) \\
&\overset{(6.7.7)}{=} -\int_X \frac{\Delta\varphi}{4}(z)\left(K_1(z,z,t) - \sum_{j=1}^{m}\left\|\hat{\psi}^j(z)\right\|^2\right)\mu(z) \\
&= \int_X \frac{\Delta\varphi}{4}(z)\Big(B - K_1(z,z,t)\Big)\,\mu(z) \quad .
\end{aligned}
$$

iv) Anwendung von Satz 6.5.1

Weil der Wärmeleitungskern $K_1(z,z',t)$ eine asymptotische Entwicklung

$$
K_1(z,z,t) \overset{t\to 0}{\sim} \sum_{j=0}^{\infty} b_j(z) t^{j-2}
$$

hat, sind die Voraussetzungen von Satz 6.5.1 mit

$$
\kappa(z,t) = \frac{\Delta\varphi}{4}(z)\Big(B - K_1(z,z,t)\Big) \ , \quad \beta_j(z) = \frac{\Delta\varphi}{4}(z)\Big(\delta_{2j}B - b_j(z)\Big)
$$

erfüllt. Satz 6.5.1 liefert also mit

$$
K_0(z,z,t) \overset{t\to 0}{\sim} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z) t^{j-2}
$$

für den Wärmeleitungskern K_0 von $\Delta_{0,0}$ folgende Formel:

$$
\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big(\log\tau^{\varepsilon}\Big)_{|\,\varepsilon=0} = \int_X \frac{\Delta\varphi}{4}(z)\left[a_2(z) - \frac{1}{\operatorname{vol}(X)} + \frac{B}{2} - \frac{b_2(z)}{2}\right]\mu(z) \quad . \tag{6.7.15}
$$

v) Einsetzen der Koeffizienten a_2 und b_2

R sei der Riemannsche Krümmungstensor zu $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ und r der Ricci-Tensor sowie s die Skalarkrümmung. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{360(4\pi)^2}\Big(-12R_{ij\bar{i}\bar{j};k\bar{k}} + 5R_{ij\bar{i}\bar{j}}R_{kl\bar{k}\bar{l}} - 2R_{ij\bar{i}\bar{k}}R_{lj\bar{l}\bar{k}} + 2R_{ij\bar{k}\bar{l}}R_{ij\bar{k}\bar{l}}\Big) \ , \\
b_2 &= \frac{1}{360(4\pi)^2}\Big(6R_{ij\bar{i}\bar{j};k\bar{k}} - 20R_{ij\bar{i}\bar{j}}R_{kl\bar{k}\bar{l}} + 86R_{ij\bar{i}\bar{k}}R_{lj\bar{l}\bar{k}} - 11R_{ij\bar{k}\bar{l}}R_{ij\bar{k}\bar{l}}\Big)
\end{aligned}
\tag{6.7.16}
$$

[Gi, p.330]. Ich wähle jetzt wieder geodätische Normalkoordinaten um $z_0 \in X$ und erhalte dann wegen $g^{k\bar{l}}(z_0) = \delta_{kl}$ und $r \equiv 0$:

$$\begin{array}{lllllllll} 0 &=& r_{i\bar{j}}(z_0) &=& g^{k\bar{l}}(z_0)R_{ik\bar{j}\bar{l}}(z_0) &=& R_{ik\bar{j}\bar{k}}(z_0) &=& R_{ki\bar{k}\bar{j}}(z_0)\,, \\ 0 &=& s(z_0) &=& g^{i\bar{j}}(z_0)r_{i\bar{j}}(z_0) &=& R_{ik\bar{i}\bar{k}}(z_0) & & . \end{array} \tag{6.7.17}$$

(6.7.16) und (6.7.17) liefern:

$$\begin{aligned} a_2(z_0) - \frac{b_2(z_0)}{2} &= \frac{1}{720(4\pi)^2}\left(-30\,R_{ij\bar{i}\bar{j};k\bar{k}}(z_0) + 15\,R_{ij\bar{k}\bar{l}}R_{ij\bar{k}\bar{l}}\right) \\ &\overset{\text{Satz 1.2.1}}{=} \frac{1}{48(4\pi)^2}\left(\Delta s(z_0) + \frac{1}{16}\,\|R\|^2(z_0)\right) \quad . \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten, d.h. obige Gleichung gilt auf ganz X. Wegen $s \equiv 0$ auf der Zwimannigfaltigkeit X mit Kähler-Einstein-Metrik folgt:

$$a_2 - \frac{b_2}{2} = \frac{\|R\|^2}{48(16\pi)^2} \quad . \tag{6.7.18}$$

Daraus erhalte ich:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\log\tau^\varepsilon\right)_{|\,\varepsilon=0} \overset{(6.7.15),(6.7.18)}{=} \int_X \frac{\Delta\varphi}{4}(z)\left\{\frac{\|R\|^2(z)}{48(16\pi)^2} - \frac{1}{\mathrm{vol}\,(X)} + \frac{B}{2}\right\}\mu(z) \quad . \tag{6.7.19}$$

Damit folgt wegen der Kompaktheit von X die Behauptung (6.7.3). □

Weil auf Riemannschen Flächen die Variation der analytischen Torsion gleichwertig ist zur Variation der Quillenmetrik (siehe Kapitel 6.3) und für Mannigfaltigkeiten konstanter holomorpher Krümmung sich die Quillenmetrik als das geeignetere Funktional für eine Variation herausgestellt hat, führt Satz 6.7.2 auf die Frage, ob auch auf Zwimannigfaltigkeiten die Variation von analytischer Torsion und Quillenmetrik gleichwertig sind:

Satz 6.7.3
Sei X eine Zwimannigfaltigkeit und g eine Kähler-Einstein-Metrik auf X mit holomorphem Zusammenhang. Dann gilt:
Die Metrik g ist genau dann in ihrer Kählerklasse kritischer Punkt der Quillenmetrik, wenn für den Riemannschen Krümmungstensor R zu g gilt: $\|R\| = const.$
Beweis:
Für $K3$-Flächen ist nichts zu zeigen, denn nach Korollar 6.2.5 gilt auf einer $K3$-Fläche X wegen $b^1(X) = 0$ für jede φ-Variation g^ε von g mit $\tau^\varepsilon := \tau_0(X, g^\varepsilon)$ und $\mathcal{Q}^\varepsilon := \mathcal{Q}(X, g^\varepsilon)$:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\log\tau^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\log\mathcal{Q}^\varepsilon \quad ,$$

so daß die Behauptung aus Satz 6.7.2 folgt.

Für Tori muß man mit Hilfe von Korollar 6.2.5 die kritischen Punkte der Quillenmetrik bestimmen, und dies kann mit demselben Aufwand für eine beliebige Zwimannigfaltigkeit geschehen. Weil dabei auch für $K3$-Flächen deutlich wird, wie Satz 6.7.2 sehr viel schneller gezeigt werden kann als auf die dort vorgeführte elementare Art – hat man erst einmal die Anomalienformel von J.-M. Bismut, H. Freed und C. Soulé [BGSIII] angewandt und Satz 6.2.2, Satz 6.2.4 bzw. Korollar 6.2.5 hergeleitet – beweise ich die Behauptung für eine beliebige Zwimannigfaltigkeit X mit Ricci-flacher Kählermetrik g und zugehörigem holomorphem Zusammenhang. Es ist also zu zeigen:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Für jede } \varphi\text{-Variation } g^\varepsilon \text{ von } g \text{ gilt} \\ \text{mit } \mathcal{Q}^\varepsilon := \mathcal{Q}(X, g^\varepsilon): \ \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\log \mathcal{Q}^\varepsilon\right)_{|\varepsilon=0} = 0\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \|R\| = \text{const} . \tag{6.7.20}$$

Dabei ist der Riemannsche Krümmungstensor $R = W$ (wobei W den Weylschen Krümmungstensor bezeichnet; weil Ricci- und Skalarkrümmung Null sind, verschwinden die übrigen irreduziblen Komponenten von R).
Nun kann Korollar 6.2.5 angewandt werden; weil die Ricciform der Metrik g aber Null ist, verschwindet auch der dort verwendete Repräsentant der ersten Chernklasse in $\varepsilon = 0$ (siehe (2.3.1)). Bedenkt man, daß Ω dort nur die Krümmungsform von $T^{1,0}X$ ist, W aber den Weyltensor von TX bezeichnet, d.h. $\|W_\Omega\|^2 = \frac{1}{4}\|W\|^2$ für den Weyltensor W_Ω zu Ω, dann liefert das Korollar 6.2.5:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big(\log \mathcal{Q}^\varepsilon\Big)_{|\ \varepsilon=0} = \frac{1}{48}\int_X \frac{\Delta\varphi}{2} c_2(\Omega) \overset{\text{Satz 2.2.2}}{=} \frac{1}{48}\int_X \frac{\Delta\varphi}{4}\frac{\|W\|^2}{(16\pi)^2}\mu ,$$

wobei μ die zu g gehörige Volumenform ist.
Daraus folgt natürlich sofort (6.7.20), da X ja kompakt ist (man beachte, daß obige Formel wegen der Kompaktheit von X mit (6.7.19) übereinstimmt, ersetzt man dort τ^ε durch $\mathcal{Q}^\varepsilon$!). □

Weiter folgt nun aus Satz 6.7.2 und Satz 6.7.3:

Satz 6.7.4
Eine Kähler-Einstein-Metrik auf einer Zwimannigfaltigkeit ist genau dann in ihrer Kählerklasse kritischer Punkt der analytischen Torsion, wenn sie in ihrer Kählerklasse kritischer Punkt der Quillenmetrik ist.

Bemerkungen:

i. Satz 6.7.4 besagt, daß auch im Fall von Zwimannigfaltigkeiten die Suche nach kritischen Punkten der analytischen Torsion unter Umständen (wenn ein kritischer Punkt in einer Kähler-Einstein-Metrik gesucht wird) äquivalent zur Suche nach kritischen Punkten der Quillenmetrik ist. Weil sich aber einige Ergebnisse für die Quillenmetrik (etwa aus Kapitel 6.4 und Kapitel 7) nicht ohne weiteres auf die analytische Torsion übertragen lassen, erweist sich die Verallgemeinerung der Determinante des Laplace-Operators auf Riemannschen Flächen mit Hilfe der Quillenmetrik, i.e. durch das Funktional $\mathcal{Q}$, als geeigneter.

ii. In Kapitel 6.4 habe ich bewiesen, daß auf kompakten Kähler-Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension Metriken konstanter holomorpher Krümmung kritische Punkte der Quillenmetrik $\mathcal{Q}(X,g)$ bei Variation der Metrik innerhalb der Kählerklasse sind. Diese Metriken sind nach Satz 2.1.2 Kähler-Einstein-Metriken, und wegen Satz 2.1.5 gilt

$$\|R\|^2 = 16 \sum_{j,k,l,m} \frac{H}{2}\left(g_{j\bar{k}}g_{l\bar{m}} + g_{j\bar{m}}g_{l\bar{k}}\right)\frac{H}{2}\left(g^{j\bar{k}}g^{l\bar{m}} + g^{j\bar{m}}g^{l\bar{k}}\right) = 8N(N+1)H^2 = \text{const.}$$

Möglicherweise ist also die Kähler-Einstein-Bedingung in Verbindung mit der Bedingung $\|R\| = \text{const}$ entscheidend für die Antwort auf die Frage nach Extrempunkten von $\mathcal{Q}(X,g)$.

iii. Um zu entscheiden, um welche Art von kritischen Punkten es sich bei Ricci-flachen Kähler-Einstein-Metriken auf Zwimannigfaltigkeiten handelt, so sie denn existieren, habe ich versucht, Korollar 6.2.6 anzuwenden.

Wie oben können in $\varepsilon = 0$ alle Repräsentanten der ersten Chernklasse Null gesetzt werden, und mit der nach dem Beweis von Korollar 6.2.6 angegebenen vereinfachten Version der Formel für die zweite Variation ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}\left(\log \mathcal{Q}^\varepsilon\right)_{|\,\varepsilon=0} \quad &= \quad \frac{1}{48}\int_X \left\{\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\Delta^\varepsilon\varphi}{2}\right)_{|\,\varepsilon=0} c_2(\Omega)\right. \\ &\qquad \left. + \; \frac{\Delta\varphi}{2\pi^2}\operatorname{tr}\left(\Omega\wedge\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\Omega^\varepsilon\right)_{|\,\varepsilon=0}\right)\right\} \quad ;\end{aligned}$$

nimmt man nun an, in der Ricci-flachen Metrik liege ein kritischer Punkt vor, also $\|R\| = \|W\| = \text{const}$ nach Satz 6.7.3 , und setzt man $c_2(\Omega) = \frac{\|W\|^2}{2\cdot(16\pi)^2}\,\mu$ ein (siehe Beweis von Satz 6.7.3), so kann man relativ leicht sehen, daß der erste Summand positiv ist. Der zweite Summand bereitet jedoch (noch nicht gelöste) größere Probleme. Rechnungen in lokalen holomorphen Koordinaten zeigen, daß er nicht generell positiv ist. Auch eine Verallgemeinerung der von K. Richardson angegebenen Methode zur Bestimmung der zweiten Variation der Determinante vom Laplace-Operator [Ri] (siehe Kapitel 5.2) ist mir nicht gelungen.

6.8 Komplexe Tori

In diesem Kapitel wende ich zunächst die Ergebnisse aus Kapitel 6.7 an, um für zweidimensionale komplexe Tori das Verhalten der analytischen Torsion und der Quillenmetrik zu untersuchen.
Anwendung der Anomalienformel aus Kapitel 6.2 liefert in diesem Fall dieselben Ergebnisse in beliebigen Dimensionen, wie ich für die Quillenmetrik schon in Kapitel 6.4 gezeigt habe, da Tori ja mit den flachen Metriken konstante holomorphe Krümmung haben.

Auf komplexen Tori beliebiger Dimension $N > 1$ kann sogar die zweite Variation der Quillenmetrik für flache Metriken berechnet werden.

Wegen Satz 6.6.2 ist jeder komplexe Torus der Dimension 2 eine Zwimannigfaltigkeit. Daher ist mit Satz 2.3.7 klar, daß die Ricci-flachen Kählermetriken auf dem komplexen Torus genau die Kähler-Einstein-Metriken sind. Außerdem ist jede Ricci-flache Metrik auf dem Torus flach:

Satz 6.8.1
Sei $X = \mathbb{C}^2/\Gamma$ ein komplexer Torus und g eine Ricci-flache Kählermetrik. X sei mit dem zu g gehörigen holomorphen Zusammenhang versehen. Dann gilt für den Riemannschen Krümmungstensor: $R \equiv 0$.
<u>Beweis:</u>
Ω sei die von Metrik und Zusammenhang bestimmte Krümmungsform auf X. Weil Ricci- und Skalar-Krümmung der Metrik g nach Voraussetzung verschwinden, ist der Riemannsche Krümmungstensor gleich dem Weylschen Krümmungstensor W. Außerdem folgt aus Satz 2.2.2

$$c_2(\Omega) = \frac{\|W\|}{2 \cdot (8\pi)^2}\,\mu \quad ,$$

wobei μ wie immer die zu g gehörige Volumenform bezeichnet.
Andererseits ist die von der Standardmetrik auf $\mathbb{C}^2$ induzierte Metrik auf X flach. Bezüglich dieser Metrik ist daher klar, daß 0 ein Repräsentant von c_2 ist, so daß wegen $\chi(X) = c_2(X)$ (nach dem Satz von Gauß-Bonnet [GH, p.416]) folgt:

$$\chi(X) = \int_X c_2 = 0 \quad .$$

Damit muß aber $\|R\| = \|W\| = 0$ gelten, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Somit sind auf komplexen zweidimensionalen Tori die Kähler-Einstein Metriken genau die flachen Metriken.
Aus Satz 6.6.2 folgt sofort mit Satz 6.7.1 :

Satz 6.8.2
Sei (X, g) ein komplex zweidimensionaler Torus mit flacher Metrik und zugehörigem holomorphem Zusammenhang. Dann gilt für die analytische Ray-Singer-Torsion:

$$\tau_0(X,g) = \tau_1(X,g) = \tau_2(X,g) = 1 \quad .$$

<u>Bemerkung:</u>
Dieses Ergebnis findet man für Tori beliebiger Dimension $N > 1$ – mit einem anderen Beweis – schon bei D.B. Ray und I.M. Singer [RS2, Theorem 5.2].

Satz 6.8.3
Die flache Metrik ist für einen komplex zweidimensionalen Torus kritischer Punkt der analytischen Torsion $\tau_0(X, g)$ und der Quillenmetrik $\mathcal{Q}(X, g)$ unter Variation der Metrik innerhalb der Kählerklasse.
Beweis:
Da nach Satz 6.6.2 der Torus eine Zwimannigfaltigkeit ist, können die Sätze 6.7.2 und 6.7.3 angewandt werden. Weil aber für die flache Metrik offenbar $\|R\| \equiv 0 = \text{const}$ gilt, ist die Behauptung klar. □

Das Ergebnis von Satz 6.8.3 für die Quillenmetrik $\mathcal{Q}(X, g)$ wurde auch schon in Satz 6.4.1 vorweggenommen, der eine Folgerung aus Satz 6.2.4 ist. Demnach gilt noch allgemeiner:

Satz 6.8.4
Flache Metriken sind für jeden komplexen Torus kritische Punkte der Quillenmetrik $\mathcal{Q}(X, g)$ unter Variation der Metrik innerhalb der Kählerklasse.
Beweis:
Die flache Metrik auf dem Torus ist offenbar eine Metrik konstanter holomorpher Krümmung, so daß die Behauptung aus Satz 6.4.1 folgt. □

Da für zweidimensionale Tori mit Satz 6.8.3 schon gezeigt ist, daß die Variationen von Quillenmetrik und analytischer Torsion um flache Metriken gleichwertig sind, liegt die Vermutung nahe, daß Satz 6.8.4 auch für die Variation der analytischen Torsion richtig ist:

Satz 6.8.5
Die flache Metrik ist für jeden komplexen Torus kritischer Punkt der analytischen Torsion $\tau_0(X, g)$ unter Variation der Metrik innerhalb der Kählerklasse.
Beweis:
Nach Satz 6.8.4 und den Sätzen 6.2.2 und 6.2.4 muß für den komplexen Torus $X = \mathbb{C}^N/\Gamma$ mit einer flachen Metrik g gezeigt werden:

$$\sum_{q=0}^{N} (-1)^q \operatorname{tr}\,(\alpha P_{0,q}) = 0 \quad ,$$

wobei $\alpha = *^{-1}\bar{*}$ (Definition 1.3.3) und $P_{0,q}$ die orthogonale Projektion auf den Raum $\mathcal{H}^{0,q}$ der harmonischen Formen vom Typ $(0, q)$ ist. Auf X seien nun für das folgende die von den Standardkoordinaten auf $\mathbb{C}^N$ induzierten Koordinaten $(z^1, ..., z^N)$ gewählt. Eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}^{0,q}$ ist bezüglich dieser Koordinaten durch

$$\left\{ (\text{vol}\,(X) 2^q)^{-1/2}\, d\bar{z}^B \mid B \subset \{1, ..., N\}, \#B = q \right\}$$

gegeben [GH, p.302]. Diese harmonischen Formen bezeichne ich im folgenden auch global mit $(\mathrm{vol}\,(X)2^q)^{-1/2}\ d\bar z^B$. Dann gilt für alle $q \in \{0, ..., N\}$:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{tr}\ (\alpha P_{0,q})} &\overset{\text{Definition 1.3.3}}{=} (\mathrm{vol}\,(X)2^q)^{-1} \sum_{\#B=q} \int_X \left\langle d\bar z^B, *^{-1}\dot{*} d\bar z^B \right\rangle \mu \\
&\overset{\text{Definition 1.1.4}}{=} (\mathrm{vol}\,(X)2^q)^{-1} \sum_{\#B=q} \int_X d\bar z^B \wedge \dot{*} d\bar z^B \\
&= (\mathrm{vol}\,(X)2^q)^{-1} \int_X \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \left(\sum_{\#B=q} d\bar z^B \wedge * d\bar z^B \right)_{|\varepsilon=0} \\
\overline{\mathrm{tr}\ (\alpha P_{0,q})} &\overset{\text{Definition 1.1.4}}{=} (\mathrm{vol}\,(X)2^q)^{-1} \int_X \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \left(\sum_{\#B=q} \left\langle d\bar z^B, d\bar z^B \right\rangle^{\varepsilon} \mu^{\varepsilon} \right)_{|\varepsilon=0} . \qquad (6.8.1)
\end{aligned}$$

Der Integrand von (6.8.1) ist bezüglich der Koordinaten $(z^1, ..., z^N)$ nach Lemma 1.1.1 und Bemerkung 1.1.2 (iii) gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} \left(\sum_{\#B=q} 2^q \overline{(g^\varepsilon)^{BB}} 2^{-N} i^{N^2} \det(g^\varepsilon_{a\bar b}) dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^N \wedge d\bar z^1 \wedge \cdots \wedge d\bar z^N \right)_{|\varepsilon=0} ,$$

und mit Hilfe der Definition der Determinante und $g^{jk} = \delta^{jk}$ sowie (1.3.2) berechne ich den Integranden von (6.8.1) zu

$$\begin{aligned}
&2^{q-N} i^{N^2} \sum_{\#B=q} \left\{ \sum_{b\in B} \dot g^{b\bar b} - \frac{\Delta\varphi}{2} \right\} dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^N \wedge d\bar z^1 \wedge \cdots \wedge d\bar z^N \\
&\qquad \overset{\text{Bem. 1.1.2 (iii)}}{=} \sum_{\#B=q} \left\{ \sum_{b\in B} \dot g^{b\bar b} - \frac{\Delta\varphi}{2} \right\} \mu .
\end{aligned}$$

Nun gilt wegen $g_{j\bar k} = \delta_{jk}$:

$$\begin{aligned}
\dot g^{b\bar b} = \left[\sum_{l,m} \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \left((g^\varepsilon)^{b\bar l} \right) g^\varepsilon_{m\bar l} (g^\varepsilon)^{m\bar b} \right]_{|\varepsilon=0} &= - \left[\sum_{l,m} (g^\varepsilon)^{b\bar l} \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \left(g^\varepsilon_{m\bar l} \right) (g^\varepsilon)^{m\bar b} \right]_{|\varepsilon=0} \\
&= -\dot g_{b\bar b} = -\varphi_{b\bar b} ,
\end{aligned}$$

d.h. der Integrand von (6.8.1) ist

$$\begin{aligned}
- \sum_{\#B=q} \left\{ \sum_{b\in B} \dot\varphi_{b\bar b} + \frac{\Delta\varphi}{2} \right\} \mu &= - \left\{ \sum_{b=1}^{N} \begin{pmatrix} N-1 \\ q-1 \end{pmatrix} \varphi_{b\bar b} + \frac{\Delta\varphi}{2} \right\} \mu \\
&\overset{\text{Satz 1.2.1}}{=} \left[\begin{pmatrix} N-1 \\ q-1 \end{pmatrix} - 1 \right] \frac{\Delta\varphi}{2} \mu .
\end{aligned}$$

Weil X kompakt ist, verschwindet somit der Ausdruck in (6.8.1) für jedes $q \in \{0, ..., N\}$, womit die Behauptung bewiesen ist. $\square$

Auf komplexen Tori kann nun sogar das Ergebnis aus Korollar 6.2.6 angewandt werden, so daß für den Fall $N = 2$ folgender Satz direkt abgelesen werden kann:

Satz 6.8.6
Sei (X, g) ein komplexer Torus der Dimension $N > 1$ mit flacher Metrik. Dann gilt für jede φ-Variation g^ε von g mit $\mathcal{Q}^\varepsilon := \mathcal{Q}(X, g^\varepsilon)$

$$\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2}\left(\log \mathcal{Q}^\varepsilon\right)_{|\ \varepsilon = 0} = 0 \quad .$$

<u>Beweis:</u>
Die wie üblich mit Ω bezeichnete Krümmungsform von $T^{1,0}X$ zum holomorphen Zusammenhang verschwindet nach Voraussetzung. Nun folgt aber aus Satz 6.2.2 (ein Repräsentant der Chernklasse $c_j(\Omega)$ wird wie immer ebenfalls mit $c_j(\Omega)$ bezeichnet):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2}\left(\log \mathcal{Q}^\varepsilon\right)_{|\ \varepsilon = 0} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^N \int_X \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon \partial b} \overline{\mathrm{Td}}_{N+1}(-\Omega^\varepsilon - bU^\varepsilon)_{|b=0,\varepsilon=0} \\ &= \int_X \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon \partial b}\left(\sum_{j_0+\cdots+j_N=N+1} (a_{j_0\cdots j_N}\bar{c}_{j_0}\cdots\bar{c}_{j_N})(-\Omega^\varepsilon - bU^\varepsilon)\right)_{|b=0,\varepsilon=0} , \end{aligned}$$

wobei wie im Beweis von Korollar 6.2.5 die $\bar{c}_j(\mathcal{R}) = c_j(2\pi i \mathcal{R})$ die „untopologischen" Chernklassen bezeichnen und die Koeffizienten $a_{j_0\cdots j_N}$ universelle Konstanten sind, die man der Darstellung des Toddgeschlechtes bezüglich der Chernklassen entnehmen kann und deren konkrete Werte für diesen Beweis irrelevant sind. Wegen $\Omega = 0$ verschwinden alle Repräsentanten von Chernklassen $\bar{c}_j(\Omega)$ mit $j > 0$ in obiger Darstellung. Außerdem gilt nach Wahl lokaler holomorpher Koordinaten $(z^1, ..., z^N)$ mit $\delta^{l_1\ldots l_j}_{k_1\ldots k_j} := \det\left(\delta^{l_n}_{k_m}\right)_{mn}$ für $k_1, ..., k_j, l_1, ..., l_j \in \{1, .., N\}$:

$$\bar{c}_j(-\Omega - bU) = \frac{1}{j!}\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_j,l_1,\ldots,l_j \\ \in\{1,\ldots,N\}}} \delta^{l_1\ldots l_j}_{k_1\ldots k_j}\,(-\Omega - bU)^{k_1}_{l_1}\wedge\cdots\wedge(-\Omega - bU)^{k_j}_{l_j}$$

(siehe (2.2.2)). Darum folgt aus $\Omega = 0$:

$$\begin{aligned} \forall\, j \geq 2: \quad \frac{\partial}{\partial b}\left(\bar{c}_j(-\Omega - bU)\right)_{|b=0} &= 0 \quad , \\ \forall\, j \geq 2: \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\bar{c}_j(\Omega^\varepsilon)\right)_{|\varepsilon=0} &= 0 \quad , \end{aligned}$$

also wegen $N > 1$

$$\frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2}\left(\log \mathcal{Q}^\varepsilon\right)_{|\ \varepsilon = 0} = \int_X \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon \partial b}\left(a\,\bar{c}_{N+1}(-\Omega^\varepsilon - bU^\varepsilon)\right)_{|b=0,\varepsilon=0} \quad .$$

Daß $\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon\partial b}\left(a\,\bar{c}_{N+1}(-\Omega^\varepsilon - bU^\varepsilon)\right)_{|b=0,\varepsilon=0}$ für $N > 1$ auch noch verschwindet, entnimmt man ebenfalls direkt der Darstellung meines Lieblingsrepräsentanten von $\bar{c}_{N+1}$ in Gleichung (2.2.2). Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Für den Fall $N = 1$ funktioniert obiges Verfahren nicht. Satz 6.8.6 habe ich andererseits in der Hoffnung bewiesen, eine Aussage darüber machen zu können, um welche Art von kritischen Punkten der Quillenmetrik es sich bei den flachen Metriken auf Tori handelt. Diese Frage wird natürlich durch obiges Ergebnis nicht beantwortet, für den in Satz 6.8.6 ausgenommenen Fall $N = 1$ ist die Antwort jedoch bereits in Kapitel 6.3 gegeben worden.

6.9 Kompakte $K3$-Flächen

Nach Satz 6.6.2 ist jede kompakte $K3$-Fläche eine Zwimannigfaltigkeit. Daher folgt aus Satz 2.3.7:

Auf $K3$-Flächen sind die Ricci-flachen Kählermetriken genau die Kähler-Einstein-Metriken.

Satz 6.9.1
Sei X eine kompakte K3-Fläche (i.e. eine zweidimensionale Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit). Dann existiert auf X nach Korollar 2.3.5 in jeder Kählerklasse genau eine Ricci-flache Kähler-Einstein-Metrik g; bezüglich dieser gilt für die analytische Ray-Singer-Torsion:

$$\tau_0(X,g) = \tau_1(X,g) = \tau_2(X,g) = 1 \quad .$$

<u>*Beweis:*</u>
Weil X nach Satz 6.6.2 eine Zwimannigfaltigkeit ist, folgt die Behauptung sofort aus Satz 6.7.1 . □

Ebenso folgt direkt aus Satz 6.6.2 und Satz 6.7.2 sowie Satz 6.7.3 :

Satz 6.9.2
Sei X eine kompakte $K3$-Fäche. Dann ist eine Ricci-flache Kähler-Einstein-Metrik g auf X genau dann unter Variation innerhalb der Kählerklasse kritischer Punkt der analytischen Torsion $\tau_0(X,g)$, wenn für den Riemannschen Krümmungstensor R zu g gilt: $\|R\| =$ const. *Die Kähler-Einstein-Metriken mit $\|R\|$ =const sind auch genau die kritischen Kähler-Einstein-Metriken der Quillenmetrik $\mathcal{Q}(X,g)$.*

Weil nach Korollar 6.2.5 auf jeder $K3$-Fläche X wegen $b^1(X) = 0$ die Variationsformeln für die analytische Torsion und die Quillenmetrik übereinstimmen, beschränke ich mich für den Rest dieses Kapitels auf die Betrachtung der analytischen Torsion.

Bemerkung 6.9.3
Es gibt Kähler-Einstein-Metriken auf $K3$-Flächen, die **nicht** kritische Punkte der analytischen Torsion $\tau_0(X,g)$ sind:

Man kann nämlich auf bestimmten $K3$-Flächen Kähler-Einstein-Metriken mit „konzentrierten Krümmungen“ konstruieren [Kob], d.h. sie sind außerhalb von Umgebungen gewisser Kurven flach. Die Norm des Krümungstensors ist also Null außerhalb der genannten Umgebungen. Wäre eine der von Kobayashi konstruierten Metriken kritischer Punkt der analytischen Torsion, so würde daraus wegen Satz 6.9.2 schon $R = 0$ folgen. Da aber $R = W^-$ nach Satz 2.3.10 und $24 = \chi(X) = \frac{1}{8\pi^2}\int_X \|W\|^2 \frac{\mu}{16}$ nach Satz 2.3.8 und dem Satz von Gauß-Bonnet für vierdimensionale Mannigfaltigkeiten [Be1], führt $R = 0$ zum Widerspruch.

Aufgrund von Bemerkung 6.9.3 kann man vermuten, daß auf kompakten $K3$-Flächen *keine* Kähler-Einstein-Metriken existieren, welche kritische Punkte der analytischen Torsion sind; zu zeigen wäre dafür wegen Satz 6.9.2, daß Kähler-Einstein-Metriken auf kompakten $K3$-Flächen niemals einen Krümmungstensor konstanter Norm haben können.
In diesem Zusammenhang konnte ich zeigen:

Satz 6.9.4
Sei (X, g) eine kompakte $K3$-Fläche mit Ricci-flacher Kähler-Einstein-Metrik und zugehörigem holomorphem Zusammenhang. Nach Satz 2.3.10 besteht dann der Krümmungstensor R von (X, g) nur aus dem antiselbstdualen Anteil W^- des Weylschen Krümmungstensors W. Gilt dann $\|W^-\| = \mathrm{const}$, so ist fast überall auf X $\#\,\mathrm{spec}\,(W^-) = 3$.
<u>Beweis:</u>
Zum Beweis verwende ich Bezeichnungen und Ergebnisse von A. Derdziński [De]; diese fasse ich zuerst zusammen, bevor der eigentliche Beweis, ein Widerspruchsbeweis, beginnt: X wird als reelle Mannigfaltigkeit aufgefaßt, und

$$\Lambda^+(T^*X) = \Big\{\nu \in \Lambda^2(T^*X) \mid *\nu = \nu\Big\}, \quad \Lambda^-(T^*X) = \Big\{\nu \in \Lambda^2(T^*X) \mid *\nu = -\nu\Big\}$$

sind die Räume der selbstdualen bzw. antiselbstdualen Zweiformen.
Der Weylsche Krümmungstensor W wird nun als selbstadjungierter Endomorphismus von $\Lambda^2(T^*X)$ aufgefaßt und besitzt somit in jedem Punkt $z \in X$ eine Orthogonalbasis aus Eigenformen $\omega^+(z), \eta^+(z), \vartheta^+(z) \in \Lambda^+(T_z^*X)$, $\omega^-(z), \eta^-(z), \vartheta^-(z) \in \Lambda^-(T_z^*X)$ mit $\|\omega^+(z)\| = \|\eta^+(z)\| = \|\vartheta^+(z)\| = \|\omega^-(z)\| = \|\eta^-(z)\| = \|\vartheta^-(z)\| = \sqrt{2}$.
$\omega^\pm, \eta^\pm, \vartheta^\pm$ sind „lokale Schnitte“ von $\Lambda^\pm(T^*X)$: Setzt man

$$\widehat{X} := \Big\{z \in X \mid \#\,\mathrm{spec}\,(W^-) \text{ ist in } z \text{ lokal konstant}\Big\}\ ,$$

dann ist $\widehat{X} \subset X$ offen und dicht [De, p.423], und $\omega^\pm, \eta^\pm, \vartheta^\pm$ können in einer Umgebung jedes Punktes $z \in \widehat{X}$ als differenzierbare Schnitte von $\Lambda^\pm(T^*X)$ aufgefaßt werden. In diesem Sinne sind die folgenden Gleichungen (6.9.1) bis (6.9.5) *lokal um jeden Punkt* $z \in \widehat{X}$ gültig.
Da alle im folgenden hergeleiteten Gleichungen für $\Lambda^+(T^*X)$ und $\Lambda^-(T^*X)$ völlig analog aussehen, nachher aber nur für $\Lambda^-(T^*X)$ verwendet werden, beschränke ich mich ab sofort weitgehend auf die Formulierung für diese Formen. Im übrigen wird immer lokal gerechnet.

Derdziński zeigt [De, Lemma 2], daß für die Orthonormalbasis $\omega^-, \eta^-, \vartheta^-$ nach geeigneter Wahl der Vorzeichen gilt (man fasse Elemente von $\Lambda^2(T_z^*X)$ als Endomorphismen von $\Lambda^1(T_z^*X)$ auf):

$$(\omega^-)^2 = (\eta^-)^2 = (\vartheta^-)^2 = -\mathrm{id}, \quad \omega^-\eta^- = \vartheta^- = -\eta^-\omega^- \quad . \tag{6.9.1}$$

Daraus folgt sofort für gewisse Einsformen a, b, c:

$$\begin{aligned} \nabla\omega^- &= c \otimes \eta^- - b \otimes \vartheta^- \\ \nabla\eta^- &= -c \otimes \omega^- + a \otimes \vartheta^- \\ \nabla\vartheta^- &= b \otimes \omega^- - a \otimes \eta^- \quad . \end{aligned} \tag{6.9.2}$$

Aus den Eigenschaften des Weylschen Krümmungstensors folgt, daß die Spuren seines selbstdualen Teiles sowie seines antiselbstdualen Teiles verschwinden müssen. Daraus folgt für die Eigenwerte λ^+, μ^+, ν^+ bzw. λ^-, μ^-, ν^- von W^+ bzw. W^- zu obigen Eigenfunktionen (aufgefaßt als skalare Funktionen auf der Mannigfaltigkeit X):

$$\lambda^+ + \mu^+ + \nu^+ = 0, \quad \lambda^- + \mu^- + \nu^- = 0 \quad . \tag{6.9.3}$$

Mit einer einfachen (aber länglichen) Rechnung erhält man daraus [De, (33)] (r bezeichnet den Ricci-Tensor und s die Skalarkrümmung):

$$\begin{aligned} da + b \wedge c &= \left(\lambda^- - \frac{s}{6}\right)\omega^- + \frac{1}{2}\left(r\omega^- + \omega^- r\right) \\ db + c \wedge a &= \left(\mu^- - \frac{s}{6}\right)\eta^- + \frac{1}{2}\left(r\eta^- + \eta^- r\right) \\ dc + a \wedge b &= \left(\nu^- - \frac{s}{6}\right)\vartheta^- + \frac{1}{2}\left(r\vartheta^- + \vartheta^- r\right) \quad . \end{aligned} \tag{6.9.4}$$

Weiter berechnet man für die Divergenz δW^- des antiselbstdualen Teils vom Weylschen Krümmungstensor [De, (34)]:

$$\delta W^- = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} d\lambda^- &= (\lambda^- - \mu^-)\vartheta^- c + (\lambda^- - \nu^-)\eta^- b \\ d\mu^- &= (\mu^- - \lambda^-)\vartheta^- c + (\mu^- - \nu^-)\omega^- a \\ d\nu^- &= (\nu^- - \lambda^-)\eta^- b + (\nu^- - \mu^-)\omega^- a \quad . \end{aligned} \right. \tag{6.9.5}$$

Soweit die Berechnungen für beliebige vierdimensionale Mannigfaltigkeiten. Der eigentliche Beweis beginnt erst jetzt und erfolgt durch Widerspruch:

Ich zeige:
$\Big\{ \#\,\mathrm{spec}\,(W^-) \leq 2$ auf einer offenen Umgebung $U \subset X$ und $\|W^-\| = \mathrm{const} \Rightarrow W^- \equiv 0 \Big\}$;
dies kann nämlich leicht zum Widerspruch geführt werden, denn $R = W^- \equiv 0$ liefert

$$0 = \frac{1}{8\pi^2}\int_X \|W\|^2 \frac{\mu}{16} \overset{\substack{\text{Satz von}\\ \text{Gauß-Bonnet [Be1]}}}{=} \chi(X) \overset{\text{Satz 2.3.8}}{=} 24.$$

$\lightning$

Annahme:
$\#\mathrm{spec}(W^-) \leq 2$ auf einer offenen Umgebung $U \subset X$ und $\|W^-\| = \mathrm{const} \neq 0$.

Nach eventueller Verkleinerung von U kann ich $U \subset \widehat{X}$ und daher (unter Umständen nochmal verkleinern!) die Gültigkeit von (6.9.1) bis (6.9.5) auf ganz U voraussetzen. Nach Voraussetzung gilt $s = 0$ und $r = 0$, so daß sich Gleichung (6.9.4) vereinfacht:

$$\begin{aligned} da + b\wedge c &= \lambda^-\omega^- \\ db + c\wedge a &= \mu^-\eta^- \\ dc + a\wedge b &= \nu^-\vartheta^- \quad . \end{aligned} \tag{6.9.6}$$

Außerdem folgt mit den Ergebnissen von A. Derdziński sofort $\delta W^- = 0$ [De, (9)], so daß (6.9.5) verwendet werden kann. Weiter ist $\#\,\mathrm{spec}\,(W^-) \leq 2$ auf U vorausgesetzt, so daß mit (6.9.3) folgt:

$$\text{Auf } U \text{ gilt o.B.d.A.}\quad \mu^- = \nu^-,\ \lambda^- = -2\mu^-,\ \|W^-\|^2 = (\lambda^-)^2 + (\mu^-)^2 + (\nu^-)^2 = 6(\mu^-)^2. \tag{6.9.7}$$

Dann liefert (6.9.5) auf U

$$\begin{aligned} -2d\mu^- &= -3\mu^-\vartheta^- c - 3\mu^-\eta^- b \\ d\mu^- &= 3\mu^-\vartheta^- c \\ d\mu^- &= 3\mu^-\eta^- b \quad , \end{aligned}$$

also, da nach Annahme $0 \neq \|W^-\|^2 \overset{(6.9.7)}{=} 6(\mu^-)^2$:

$$d\mu^- = 3\mu^-\vartheta^- c, \quad \vartheta^- c = \eta^- b \quad . \tag{6.9.8}$$

Nach Voraussetzung ist $\mathrm{const} = \|W^-\| \overset{(6.9.7)}{=} \sqrt{6}|\mu^-|$, d.h. $d\mu^- = 0$ auf U, so daß (6.9.8) (wegen $\mu^- \neq 0$ nach Annahme und (6.9.7)) liefert: $c = 0, b = 0$. Dies wiederum, eingesetzt in die zweite Zeile von (6.9.6), liefert $\mu^-\eta^- = 0$, also $\mu^- = 0$ und somit wegen (6.9.7) $\|W^-\|^2 = 6(\mu^-)^2 = 0$ zunächst auf U und damit (wegen $\|W^-\| = \mathrm{const}$) überall, im Widerspruch zur Annahme.

$\lightning$

$\square$

Bemerkung:
Um die Vermutung zu beweisen, daß Kähler-Einstein-Metriken auf kompakten $K3$-Flächen nicht kritische Punkte der analytischen Torsion sein können, habe ich versucht, die Normalform des Krümmungstensors (siehe [Be1]) und die Ergebnisse von Derdziński [De] sowie Satz 6.9.4 auszunutzen. Als ernsthaftes Problem erwies sich dabei die Tatsache, daß Derdzińskis Gleichungen im oben erklärten Sinne nur *lokale* Gültigkeit haben. Man sieht z.B. unter Verwendung von Satz 6.9.4 schnell, daß Extrempunkte der Eigenwerte von W^- im allgemeinen nicht in $\widehat{X}$ liegen, d.h. die Gleichungen (6.9.2) und (6.9.5) dort nicht verwendet werden dürfen. (Gäbe es eine Möglichkeit, diese Gleichungen dennoch anzuwenden – insbesondere die Formen a, b, c sowie da, db, dc in solchen Punkten zu definieren, so könnte ich $\|W^-\| = \text{const}$ tatsächlich zum Widerspruch führen).
Allein die Gleichungen (6.9.1) bis (6.9.5) auf $\widehat{X}$ widersprechen der Annahme $\|W^-\| = \text{const}$ jedoch noch nicht.
Man kann versuchen, Analoga zu Derdzińskis Gleichungen in $X - \widehat{X}$ aufzustellen, indem man die Normalkoordinaten durch geeignetere Koordinaten ersetzt. Die Problematik, daß Eigenwerte Verzweigungspunkte haben können, taucht auch in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen auf und wurde in diesem Zusammenhang von M. Costabel und M. Dauge behandelt [CoD, §§2,5]. Möglicherweise lassen sich mit den dort vorgeschlagenen Methoden weitere Aussagen gewinnen, was jedoch den Rahmen dieser Diplomarbeit sprengen würde.

7 Die Quillenmetrik für Dirac-Operatoren auf Formen mit Werten in Tensorprodukten ampler Linienbündel

Nachdem die Variation der *analytischen Torsion* innerhalb der Kählerklasse im allgemeinen nicht zum gewünschten Ziel geführt hat, beschränke ich mich in diesem Kapitel auf die Variation der *Quillenmetrik* $\mathcal{Q}(X, g)$. Weil deren Variation zumindest auf $K3$-Flächen bisher ebensowenig von Erfolg gekrönt war, kann man sich fragen, ob eventuell die Quillenmetrik auf diesen Flächen einfacher zu handhaben ist, wenn sie auf Determinantenbündeln zu Familien von Dirac-Operatoren auf Formen *mit Werten in geeigneten Bündeln* konstruiert wird. Anlaß zu dieser Vermutung gibt eine Arbeit von S.K. Donaldson [Do]: Hier wird unter anderem die Quillenmetrik der Determinantenbündel für Familien von Dirac-Operatoren auf Formen mit Werten in bestimmten Bündeln betrachtet, deren Metrik variiert wird, während die Metrik auf der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit fest bleibt. Dabei spielen die sogenannten *amplen Linienbündel* eine wichtige Rolle:

Definition 7.1
$L \longrightarrow X$ sei ein holomorphes Linienbündel über einem analytischen Raum X, und es sei eine Basis $\{s^0, ..., s^m\}$ von $\Gamma(X, L)$ gewählt. Falls zu jedem $z \in X$ ein Schnitt $s_z \in \Gamma(X, L)$ mit $s_z(z) \neq 0$ existiert, so daß die holomorphe Abbildung

$$X \longrightarrow \mathbb{C}P^m, \ z \mapsto (\alpha_0(z) : \cdots : \alpha_m(z)) \ \text{mit} \ s_z = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j(z) s^j$$

eine Einbettung ist, dann heißt L **sehr ampel*** .
Existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $L^{\otimes k}$ sehr ampel ist, so heißt L **ampel**.

Anschaulich gesagt, sind sehr ample Linienbündel solche Bündel, die *genügend viele Schnitte besitzen*, damit eine Einbettung in $\mathbb{C}P^m$ möglich ist.
Im folgenden werden spezielle ample Linienbündel benötigt:

Definition 7.2
Ein holomorphes Linienbündel $L \longrightarrow X$ auf einer Kähler-Mannigfaltigkeit (X, g) mit Kählerform ω heißt **Polarisierung von** *(X, g), falls für seine Krümmungsform $\Theta_L = -2\pi i\omega$ gilt.*
Für jedes Linienbündel L gilt $c_1(L) = \left[\frac{i}{2\pi}\Theta_L\right]$ [GH, p.141], d.h. falls L eine Polarisierung von (X, g) mit Kählerform ω ist, muß $[\omega] = c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ gelten. Also kann (X, g) nur dann eine Polarisierung besitzen, wenn die Kählerform ganzzahlig ist; die Umkehrung ist auch richtig, wie ich in Satz 7.5 zeigen werde. Eine etwas schwächere Bedingung als die Ganzzahligkeit der Kählerform wird an *Hodgemetriken* gestellt:

Definition 7.3
Eine Kählermetrik g auf einer Mannigfaltigkeit X heißt **Hodgemetrik**, *falls die zugehörige Kählerform in $H^2(X, \mathbb{Q})$ liegt.*
Eine komplexe Mannigfaltigkeit heißt **Hodge-Mannigfaltigkeit**, *falls auf ihr eine Hodgemetrik existiert.*

Ich gebe der Vollständigkeit halber noch die Definition einer weiteren Sorte von Linienbündeln an:

Definition 7.4
Ein holomorphes Linienbündel $L \longrightarrow X$ auf einer komplexen Mannigfaltigkeit X heißt **positiv**, *falls es auf L eine Metrik gibt, deren Krümmungsform Θ_L eine positive $(1,1)$-Form ist, i.e. für alle $z \in X$ und alle $\xi \in T_z^{1,0}X, \xi \neq 0 : \Theta_L(\xi, \bar{\xi}) > 0$.*

Die folgenden Zusammenhänge bestehen zwischen den eben eingeführten Begriffen:

---

*sprich: „ämpel“

Satz 7.5
Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i. *X ist algebraisch.*

ii. *X ist eine Hodge-Mannigfaltigkeit.*

iii. *X besitzt eine Metrik mit Polarisierung.*

iv. *Es existiert ein positives Linienbündel auf X.*

v. *Es existiert ein amples Linienbündel auf X.*

<u>Beweis:</u>
„i.$\Leftrightarrow$ii.“ ist Kodairas Kriterium für Hodge-Mannigfaltigkeiten [GH, p.191].

„ii.$\Rightarrow$iii.“ folgt aus dem Lefschetztheorem [GH, p.163], denn wenn es eine Form $\omega \in H^2(X,\mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ gibt, dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $k\omega \in H^2(X,\mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X,\mathbb{R})$.

„iii.$\Leftarrow$ii.“ ist klar nach den obigen Überlegungen.

„iii.$\Rightarrow$iv.“ ist klar.

„iv.$\Rightarrow$v.“ ist der Einbettungssatz von Kodaira [GH, p.181].

„v.$\Rightarrow$i.“ ist klar. □

Dem Beweis von Satz 7.5 (vor allem „ii. $\Leftrightarrow$ iii.“) entnimmt man auch das folgende, für die weiteren Konstruktionen grundlegende Korollar:

Korollar 7.6
Eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit (X,g) besitzt genau dann eine Polarisierung, wenn die Kählerform ω zu g ganzzahlig ist.

Ich komme jetzt zurück auf die oben zitierte Arbeit von S.K. Donaldson [Do]. Sei dafür X eine kompakte algebraische Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension N. Nach Satz 7.5 gibt es auf X eine Kählermetrik g mit Kählerform $\omega \in H^2(X,\mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ und ein holomorphes Linienbündel $L \longrightarrow X$ mit Krümmungsform $\Theta_L = -2\pi i\omega$.
Es sei nun ein weiteres holomorphes Bündel $E \longrightarrow X$ gegeben, und $\mathcal{A}$ bezeichne wie in Kapitel 3.3 den Raum der holomorphen Zusammenhänge auf E. Zu diesen Daten kann (im Sinne der K-Theorie) ein *virtuelles Bündel*

$$\mathcal{P} := \det\left((L - L^*)^{N-1} \otimes E\right)$$

definiert werden. Dieses Linienbündel über $\mathcal{A}$, so kann man zeigen, ist eine *Polarisierung* von $\mathcal{A}$: Dazu muß auf $\mathcal{A}$ zuerst eine Kählerform K definiert werden, und dies geschieht genau wie schon in Kapitel 3.3 erklärt; $\mathcal{A}$ ist ein affiner Raum bezüglich $\Lambda^{0,1}(X, \mathrm{End}E)$, d.h. der Tangentialraum von $\mathcal{A}$ ist isomorph zu $\Lambda^{0,1}(X, \mathrm{End}E)$. Darum definiert

$$\forall \nu, \nu' \in \Lambda^{0,1}(X, \mathrm{End}E): \quad K(\nu, \nu') := 2^{N-3}\pi^{-2} \int_X \mathrm{tr}\,(\nu \wedge \nu') \wedge \omega^{N-1}$$

eine Kählerform auf $\mathcal{A}$. Mit dieser Form gilt auch das Analogon zu Satz 3.3.3 [BF2, Theorems 1.14, 1.21]:

Satz 7.7
Die Quillenmetrik auf dem Bündel $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{A}$ mit dem zugehörigen holomorphen Zusammenhang hat die Krümmung $-2\pi i K$.

Mit anderen Worten: $\mathcal{P}$ ist nach Definition 7.2 eine *Polarisierung* von $\mathcal{A}$.
S.K. Donaldson studiert nun das Verhalten eines Basiselementes des Bündels $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{A}^{1,1}$ ($\mathcal{A}^{1,1}$ bezeichnet wie schon in Kapitel 3.3 den *Raum der integrablen Zusammenhänge*) unter der Operation der komplexifizierten Gruppe der Eichtransformationen von E; dies ist nichts anderes als die Untersuchung der Abhängigkeit der Quillenmetrik von der Metrik auf E, wenn man die entsprechenden Dolbeaut-Dirac-Operatoren auf Formen mit Werten in $\mathcal{E} := (L - L^*)^{N-1} \otimes E$ operieren läßt [Do, §II]. Der Einfachheit halber wird im folgenden von der „**Quillenmetrik auf holomorphen Bündeln**“ gesprochen, wenn die Quillenmetrik auf dem Determinantenbündel zu einer Familie von Dolbeaut-Dirac-Operatoren $\overline{\partial} + \overline{\partial}^*$ auf Formen mit Werten in solchen Bündeln gemeint ist. In Definition 6.2.3 wurde für die Variation der Quillenmetrik das Funktional $\mathcal{Q}(X, g)$ unter der Annahme $\mathcal{E} = X \times \mathbb{C}$ eingeführt; dies läßt sich, wie dort schon erwähnt, ohne weiteres auf beliebige Bündel $\mathcal{E} \longrightarrow X$ verallgemeinern, und die Variation des Funktionales $\mathcal{Q}(X, g)$ wird analog zum dortigen Notationsmißbrauch „Variation der Quillenmetrik auf holomorphen Bündeln“ genannt. Man kann zeigen [Do, Corollary 16]:

Satz 7.8
$E \longrightarrow X$ sei ein holomorphes Bündel mit $c_1(E) = 0$ auf einer komplex N-dimensionalen algebraischen Mannigfaltigkeit X. Wählt man eine Polarisierung $L \longrightarrow X$ von X, so ist die hermitesche Metrik h auf E genau dann kritischer Punkt der Quillenmetrik auf $\mathcal{E} := (L - L^*)^{N-1} \otimes E$, wenn h eine **Hermite-Yang-Mills Metrik** *ist, d.h. die Krümmungsform Ω von h zum zugehörigen holomorphen Zusammenhang auf E die Gleichung $\langle \Omega, \omega \rangle = 0$ erfüllt.*

Die Voraussetzung $c_1(E) = 0$ kann sogar fallengelassen werden, dann sieht das Bündel $\mathcal{E}$ aus Satz 7.8 allerdings etwas komplizierter aus [IN, §6].
Die Hermite-Yang-Mills Bedingung, wie sie in Satz 7.8 formuliert ist, angewandt auf Metriken auf X (also mit $E = T^*X$), ist auf *Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten* (siehe Bemerkung 2.3.6) äquivalent zur Kähler-Einstein-Bedingung, wie sofort aus Lemma 1.1.3 zusammen mit Satz 2.3.7 folgt, dem man entnimmt, daß auf Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten die Ricci-flachen Kählermetriken *genau* die Kähler-Einstein-Metriken sind.

Satz 7.8 und seine Verallgemeinerung auf Bündel $E \longrightarrow X$ mit beliebiger erster Chernklasse werden zwar in den zitierten Arbeiten mittels anderer Methoden bewiesen, die Beweise sind aber auch relativ leicht mit Hilfe der Anomalienformel [BGSIII, Theorem 1.22] auszuführen. In dieser Rechnung erkennt man, daß die entsprechenden Bündel einfach so „geschickt" gewählt sind, daß sich unliebsame Terme wegheben. Daraufhin kann man sich natürlich fragen, ob andere Bündel so „geschickt" gewählt werden können, daß auch unter Variation der Metrik auf X eine Bedingung für kritische Punkte herzuleiten ist, die sich so elegant formulieren läßt wie die Bedingung in Satz 7.8 – mit der vielleicht sogar die Ricci-flachen Kähler-Einstein-Metriken als kritische Punkte identifiziert werden können. Diese Frage kann glücklicherweise positiv beantwortet werden: Auf einer kompakten $K3$-Fläche (X, g) mit ganzzahliger Kählerform ω und holomorphem Zusammenhang habe ich eine φ-Variation g^ε von g und zu jeder Kählerform ω^ε der φ-Variation (diese ist nach Konstruktion ebenfalls ganzzahlig; siehe Bemerkung 1.3.2 i.) eine Polarisierung $L^\varepsilon \longrightarrow X$ betrachtet. Damit habe ich die Quillenmetrik auf dem Bündel $(L^\varepsilon - (L^\varepsilon)^*)^{\otimes B} \otimes (TX)^{\otimes A}$ zunächst für beliebige $A, B \in \mathbb{N}$ untersucht. Man erkennt schnell, daß nur $B \in \{0, 1, 2\}$ sinnvolle Ergebnisse liefert und der Anteil $(TX)^{\otimes A}$ für solche Terme in der Rechnung verantwortlich ist, die schwer zu handhaben sind und sich nicht wegheben lassen. Also ist $A = 0$ zu wählen.
Um obigen Ansatz nun allgemein formulieren zu können, müssen zuerst die Polarisierungen L^ε so gewählt werden, daß die Quillenmetrik auf den entsprechenden Bündeln überhaupt nach dem Parameter ε differenziert werden kann. Die Wahl der Bündel L^ε und ihrer Metriken ist mitnichten eindeutig festgelegt durch die Forderung, daß L^ε eine vorgegebene Krümmung $-2\pi i\omega^\varepsilon$ habe. Selbst die Voraussetzung, daß alle Bündel L^ε diffeomorph seien, genügt nicht, um die oben beschriebene Variation der Quillenmetrik durchführen zu können. Dann können zwar die Metriken auf den Bündeln L^ε diffeomorph nach L abgebildet und die Bilder studiert werden, aber man sieht leicht, daß die so erhaltene Familie von Metriken auf L nicht notwendigerweise diffenzierbar ist. Darum definiere ich:

Definition 7.9
Sei (X, g) eine Kähler-Mannigfaltigkeit mit ganzzahliger Kählerform ω und zugehörigem holomorphem Zusammenhang. Weiter sei $L \longrightarrow X$ eine Polarisierung von X mit Metrik h und zugehörigem holomorphem Zusammenhang.
Eine **Polarisierungs-Variation** *ist ein Tripel $(g, L, h)^\varepsilon$, wobei g^ε eine φ-Variation von g und $L^\varepsilon \longrightarrow X$ für jedes $\varepsilon \in [-1, 1]$ eine Polarisierung von X mit Metrik h^ε, holomorphem Zusammenhang und Krümmungsform $\Theta^\varepsilon = -2\pi i\omega^\varepsilon = -2\pi i \left(\omega + \frac{i\varepsilon}{2}\,\partial\overline{\partial}\varphi\right)$ ist.*
Eine Polarisierungs-Variation $(g, L, h)^\varepsilon$ heißt **zulässig**, *falls unter geeigneten Diffeomorphismen von den Bündeln L^ε auf L die Bilder der Metriken h^ε auf dem Bündel L eine glatte Familie $\hat{h}^\varepsilon$ von Metriken mit $\hat{h}^0 = h$ bilden.*

Mit anderen Worten: Eine zulässige Polarisierungs-Variation ist eine *glatte Deformation* einer Polarisierung. Die Bedingung für zulässige Polarisierungs-Variationen ist nicht ganz so restriktiv, wie sie auf den ersten Blick erscheinen mag:

Satz 7.10
Sei (X, g) eine Kähler-Mannigfaltigkeit mit ganzzahliger Kählerform ω und zugehörigem holomorphem Zusammenhang. Die erste Bettizahl von X sei Null. Dann existieren zu jeder Polarisierungs-Variation $(g, L, h)^\varepsilon$ einer gegebenen Polarisierung $L \longrightarrow X$ Metriken $\tilde{h}^\varepsilon$ auf den Bündeln L^ε, so daß $(g, L, \tilde{h})^\varepsilon$ eine zulässige Polarisierungs-Variation ist.
<u>Beweis:</u>
g^ε ist eine φ-Variation von g; auf L können darum Metriken $\hat{h}^\varepsilon := e^{-\pi\varepsilon\varphi}h$ definiert werden. Die Krümmungsform $\Theta_{\hat{h}^\varepsilon}$ von $\hat{h}^\varepsilon$ mit zugehörigem holomorphem Zusammenhang kann aus diesen Daten wegen $\Theta_h = -2\pi i\omega$ wie folgt berechnet werden [GH, p.142]:

$$\Theta_{\hat{h}^\varepsilon} = \overline{\partial}\partial \log \hat{h}^\varepsilon = \pi\varepsilon\, \partial\overline{\partial}\varphi + \overline{\partial}\partial \log h = -2\pi i \left(\frac{i\varepsilon}{2}\partial\overline{\partial}\varphi + \omega\right) = -2\pi i\omega^\varepsilon \quad .$$

Weil $b^1(X) = 0$ vorausgesetzt wurde und für alle $\varepsilon \in [-1, 1]$

$$c_1(L^\varepsilon) \overset{\text{[GH, p.141]}}{=} \left[\frac{i}{2\pi}\Theta_{L^\varepsilon}\right] = \left[\omega^\varepsilon\right] \overset{\text{Bem. 1.3.2 i.}}{=} \left[\omega\right] = c_1(L)$$

gilt, gibt es nach Lemma 2.3.3 Diffeomorphismen $L \longrightarrow L^\varepsilon$; die Bilder $\tilde{h}^\varepsilon$ der Metriken $\hat{h}^\varepsilon$ unter diesen Diffeomorphismen definieren also Metriken auf den Bündeln L^ε, deren Krümmungen (mit den zugehörigen holomorphen Zusammenhängen) durch $-2\pi i\omega^\varepsilon$ gegeben sind. $\square$

Hält man in der Polarisierungs-Variation das Bündel L fest, anstatt eine Familie L^ε von Bündeln zu betrachten, dann wird die Bedingung $b^1(X) = 0$ im obigen Satz offenbar hinfällig, so daß folgende Definition ermöglicht wird:

Definition 7.11
Sei (X, g) eine Kähler-Mannigfaltigkeit mit ganzzahliger Kählerform und zugehörigem holomorphem Zusammenhang. $L \longrightarrow X$ sei eine Polarisierung mit Metrik h und g^ε eine φ-Variation von g. Wie aus dem Beweis von Satz 7.10 hervorgeht, ist dann durch $L^\varepsilon := L, h^\varepsilon := e^{-\pi\varepsilon\varphi}h$ eine zulässige Polarisierungs-Variation $(g, L, h)^\varepsilon$ von $L \longrightarrow X$ gegeben. Diese heißt **von der φ-Variation g^ε induzierte (zulässige) Polarisierungs-Variation**.

Jetzt kann die Quillenmetrik auf geeigneten Bündeln variiert werden:

Definition 7.12
Sei (X, g) eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit mit ganzzahliger Kählerform ω und $B \in \{0, ..., N\}$.
Für eine Polarisierung $L \longrightarrow X$ und eine zulässige Polarisierungs-Variation $(g, L, h)^\varepsilon$ sei $\hat{\mathcal{Q}}_B(X, g^\varepsilon, h^\varepsilon)$ die Quillenmetrik $\mathcal{Q}(X, g^\varepsilon)$ auf dem Bündel $(L^\varepsilon - (L^\varepsilon)^*)^{\otimes B}$, das mit der von h^ε induzierten Metrik und dem zugehörigen holomorphen Zusammenhang versehen sei.

g heißt **kritischer Punkt der Quillenmetrik in der B-Polarisierung**, *falls für jede Polarisierung $L \longrightarrow X$ mit Krümmung $\Theta_L = -2\pi i\omega$ und jede zulässige Polarisierungs-Variation $(g, L, h)^\varepsilon$ von $L \longrightarrow X$ die Abbildung $\varepsilon \mapsto \hat{\mathcal{Q}}_B(X, g^\varepsilon, h^\varepsilon)$ einen kritischen Punkt in $\varepsilon = 0$ hat.*

Mit obiger Definition kann das erste Hauptergebnis dieses Kapitels formuliert werden:

Satz 7.13
Ist (X, g) eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension N mit ganzzahliger Kählerform und zugehörigem holomorphem Zusammenhang, so ist g genau dann kritischer Punkt der Quillenmetrik in der N-Polarisierung, wenn die Skalarkrümmung s von g verschwindet.
Beweis:
$L \longrightarrow X$ sei eine Polarisierung mit Krümmung $\Theta_L = -2\pi i\omega$ und $(g, L, h)^\varepsilon$ eine zulässige Polarisierungs-Variation, $U^\varepsilon = (g^\varepsilon)^{-1}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}g^\varepsilon$ wie in Definition 6.2.1 sowie Ω^ε die Krümmungsform zur Metrik g^ε. Da $(g, L, h)^\varepsilon$ zulässig ist, kann o.B.d.A. angenommen werden, daß alle Bündel L^ε gleich sind und nur die Metrik h^ε auf L variiert wird. f^ε sei die auf $(L^\varepsilon - (L^\varepsilon)^*)^{\otimes N}$ von h^ε induzierte Metrik, F^ε die zugehörige Krümmungsform sowie $\mathcal{U}^\varepsilon := (f^\varepsilon)^{-1}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f^\varepsilon$. Zu guter Letzt sei $\mathcal{Q}^\varepsilon := \hat{\mathcal{Q}}_N(X, g^\varepsilon, h^\varepsilon)$.
Aus der Anomalienformel [BGSIII, Theorem 1.22] kann zusammen mit den Umformungen im Beweis von Satz 6.2.2 gefolgert werden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\log\mathcal{Q}^\varepsilon &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^N \int_X \left[\frac{\partial}{\partial b}\overline{\mathrm{Td}}\,(-\Omega^\varepsilon - bU^\varepsilon)_{|b=0}\,\overline{\mathrm{ch}}(F^\varepsilon)\right.\\ &\qquad \left. + \overline{\mathrm{Td}}(\Omega^\varepsilon)\frac{\partial}{\partial b}\overline{\mathrm{ch}}\,(-F^\varepsilon - b\,\mathcal{U}^\varepsilon)_{|b=0}\right]^N \quad , \qquad (7.1)\end{aligned}$$

wobei $\overline{\mathrm{Td}}$ und $\overline{\mathrm{ch}}$ analog zu den Bezeichnungen in Satz 6.2.2 das „untopologische“ Toddgeschlecht bzw. den „untopologischen“ Cherncharakter bezeichnen.
Für die Berechnung des ersten Summanden erhält man mit $\Theta^\varepsilon = \Theta_{L^\varepsilon} = -2\pi i\omega^\varepsilon$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{ch}}(F^\varepsilon) &= \left(\overline{\mathrm{ch}}(L^\varepsilon - (L^\varepsilon)^*)\right)^N\\ &= \left(\mathrm{tr}\,\left(e^{2\pi i\omega^\varepsilon}\right) - \mathrm{tr}\,\left(e^{-2\pi i\omega^\varepsilon}\right)\right)^N\\ &= \left(4\pi i\omega^\varepsilon + \frac{1}{3}(2\pi i\omega^\varepsilon)^3 + \cdots\right)^N\\ &\overset{\dim_{\mathbb{C}} X = N}{=} 2^N(2\pi i\omega^\varepsilon)^N \quad .\end{aligned}$$

Darum lautet der erste Summand in (7.1)

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial b}\overline{\mathrm{Td}}\,(-\Omega^\varepsilon - bU^\varepsilon)_{|b=0}\,\overline{\mathrm{ch}}(F^\varepsilon)\right]^N &= \frac{\partial}{\partial b}\overline{\mathrm{Td}}_1\,(-\Omega^\varepsilon - bU^\varepsilon)_{|b=0}\,2^N(2\pi i\omega^\varepsilon)^N \\
&\overset{[\text{Hir, §1.7}]}{=} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial b}\bar{c}_1\,(-\Omega^\varepsilon - bU^\varepsilon)_{|b=0}\,2^N(2\pi i\omega^\varepsilon)^N \\
&\overset{(6.2.3)}{=} -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(U^\varepsilon)2^N(2\pi i\omega^\varepsilon)^N \\
&\overset{(6.2.5)}{=} \frac{\Delta^\varepsilon\varphi}{4}\,2^N(2\pi i\omega^\varepsilon)^N \quad , \qquad (7.2)
\end{aligned}
$$

wobei ich $\Delta^\varepsilon := \Delta^\varepsilon_{0,0}$ gesetzt habe.
Im folgenden symbolisiere ein Punkt Differentiation bezüglich ε. Dann erhalte ich:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial b}\overline{\mathrm{ch}}\,(-F^\varepsilon - b\mathcal{U}^\varepsilon)_{|b=0} &= N\overline{\mathrm{ch}}\,((L^\varepsilon)^* - L^\varepsilon)^{N-1}\cdot \\
&\quad \cdot\frac{\partial}{\partial b}\left\{\overline{\mathrm{ch}}\left(-\Theta^\varepsilon - b\frac{\dot{h}^\varepsilon}{h^\varepsilon}\right) - \overline{\mathrm{ch}}\left(\Theta^\varepsilon + b\frac{\dot{h}^\varepsilon}{h^\varepsilon}\right)\right\}_{|b=0} \\
&= N\left(-4\pi i\omega^\varepsilon + \frac{1}{3}(-2\pi i\omega^\varepsilon)^3 + \cdots\right)^{N-1}\cdot \\
&\quad \cdot\left\{\mathrm{tr}\left(\frac{\dot{h}^\varepsilon}{h^\varepsilon}e^{2\pi i\omega^\varepsilon}\right) - \mathrm{tr}\left(-\frac{\dot{h}^\varepsilon}{h^\varepsilon}e^{-2\pi i\omega^\varepsilon}\right)\right\} \\
&\overset{\dim_{\mathbb{C}}X=N}{=} N2^N(-2\pi i\omega^\varepsilon)^{N-1}\frac{\dot{h}^\varepsilon}{h^\varepsilon} \quad .
\end{aligned}
$$

Der zweite Summand in (7.1) lautet also

$$
\left[\overline{\mathrm{Td}}(\Omega^\varepsilon)\frac{\partial}{\partial b}\overline{\mathrm{ch}}\,(-F^\varepsilon - b\mathcal{U}^\varepsilon)_{|b=0}\right]^N = \overline{\mathrm{Td}}_1(\Omega^\varepsilon)N2^N(-2\pi i\omega^\varepsilon)^{N-1}\frac{\dot{h}^\varepsilon}{h^\varepsilon} \quad .
$$

Setzt man dieses Ergebnis zusammen mit (7.2) sowie $\mu^\varepsilon = \frac{(\omega^\varepsilon)^N}{N!}$ [GH, p.80] in (7.1) ein und stellt das Toddgeschlecht durch Chernklassen dar [Hir, §1.7], so erhält man

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\log\mathcal{Q}^\varepsilon &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^N\int_X\left[\frac{\Delta^\varepsilon\varphi}{4}(4\pi i)^N N!\,\mu^\varepsilon\right. \\
&\qquad\left. + N2^{N-1}(-2\pi i)^{N-1}\frac{\dot{h}^\varepsilon}{h^\varepsilon}\bar{c}_1(\Omega^\varepsilon)\wedge(\omega^\varepsilon)^{N-1}\right] \\
&\overset{\text{Lemma 1.1.3}}{=} \frac{(-1)^N}{\pi}2^{N-2}N!\int_X\frac{\dot{h}^\varepsilon}{h^\varepsilon}s^\varepsilon\mu^\varepsilon \quad , \qquad (7.3)
\end{aligned}
$$

wobei ich für die letzte Umformung die Kompaktheit von X ausgenutzt habe.

Der Gleichung (7.3) entnimmt man, daß g kritischer Punkt der Quillenmetrik in der N-Polarisierung ist, genau wenn das Integral $\int_X \frac{\dot{h}}{h} s\mu$ für jede φ-Variation g^ε verschwindet, zu der es eine zulässige Polarisierungs-Variation $(g, L, h)^\varepsilon$ gibt (weggelassene obere und untere Indizes „ε" bedeuten wieder, daß $\varepsilon = 0$ gesetzt wurde). Zu zeigen ist demnach nur noch, daß die Bedingung $s = 0$ auch notwendig ist, damit g kritischer Punkt der Quillenmetrik in der N-Polarisierung ist:
Sei also $\int_X \frac{\dot{h}}{h} s\mu = 0$ für jede zulässige Polarisierungs-Variation $(g, L, h)^\varepsilon$ von $L \longrightarrow X$. Nach Bemerkung 1.3.2 ii. kann zu jedem $\varphi \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ nach eventueller Reskalierung eine φ-Variation g^ε von g konstruiert werden. Die von g^ε induzierte Polarisierungs-Variation $(g, L, h)^\varepsilon$ erfüllt dann nach Konstruktion $\frac{\dot{h}}{h} = -\pi\varphi$. Also verschwindet $\int_X \pi\varphi s\mu$ für alle $\varphi \in C^\infty(X, \mathbb{R})$, woraus sofort $s = 0$ gefolgert werden kann. □

Satz 7.13 besagt insbesondere, daß Kähler-Einstein-Metriken auf $K3$-Flächen kritische Punkte der Quillenmetrik in der 2-Polarisierung sind. Dies kann noch genauer formuliert werden:

Korollar 7.14
Sei X eine komplexe kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension N und es existiere eine Funktion $f \in C^\infty(X, \mathbb{R})$, die nicht als Skalarkrümmung einer Metrik auf X vorkommt. Dann sind die Ricci-flachen Kähler-Einstein Metriken auf X mit ganzzahligen Kählerformen genau die kritischen Punkte der Quillenmetrik in der N-Polarisierung.
Beweis:
Dies kann direkt aus Satz 7.13 gefolgert werden, da aus der Existenz einer Metrik mit verschwindender Skalarkrümmung aber nicht verschwindender Ricci-Krümmung folgen würde, daß jede Funktion aus $C^\infty(X, \mathbb{R})$ als Skalarkrümmung einer Metrik auf X realisiert werden kann [Bé, KW]. □

Aus dem letzten Teil des Beweises von Satz 7.13 geht hervor, daß allein die von φ-Variationen induzierten Polarisierungs-Variationen genügen, um die notwendige Bedingung $s = 0$ für kritische Metriken bezüglich der N-Polarisierung anzugeben. Daher ist es gerechtfertigt, sich bei der Variation auf solche Polarisierungs-Variationen zu beschränken. Es gilt:

Satz 7.15
Sei (X, g) eine kompakte Ricci-flache Kähler-Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension N mit ganzzahliger Kählerform. Dann ist g ein Maximum (Minimum) der Quillenmetrik in der N-Polarisierung bezüglich der induzierten Polarisierung-Variationen, falls N ungerade (gerade) ist.
Beweis:
Nach Satz 7.13 ist g kritischer Punkt der Quillenmetrik in der N-Polarisierung. Sei nun g^ε eine φ-Variation von g, $L \longrightarrow X$ eine Polarisierung und $(g, L, h)^\varepsilon$ die induzierte Polarisierungs-Variation. Im übrigen seien alle Bezeichnungen wie im Beweis von Satz

7.13. Dann folgt aus (7.3) wegen $\frac{\dot{h}^\varepsilon}{h^\varepsilon} = -\pi\varphi$ und $s = 0$ nach Voraussetzung:

$$\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}\left(\log \mathcal{Q}^\varepsilon\right)_{|\varepsilon=0} = (-1)^{N+1}2^{N-2}N!\int_X \varphi\,\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(s^\varepsilon\right)_{|\varepsilon=0}\mu \quad . \tag{7.4}$$

Es seien nun lokale holomorphe Koordinaten $(z^1, ..., z^N)$ gewählt, und wie im Beweis von Lemma 1.3.4 sei $\gamma(\varepsilon) = \det(g^\varepsilon_{a\bar{b}})$, dann gilt ($r^\varepsilon$ bezeichnet wie üblich den Ricci-Tensor zu g^ε, und nach Voraussetzung gilt $r = r^0 = 0$)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(s^\varepsilon\right)_{|\varepsilon=0} &= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\sum_{j,k=1}^{N}(g^\varepsilon)^{j\bar{k}}r^\varepsilon_{j\bar{k}}\right)_{|\varepsilon=0} \\
&\overset{\text{[Go, (5.3.36)]}}{=} \sum_{j,k=1}^{N}\dot{g}^{j\bar{k}}\,r_{j\bar{k}} - \sum_{j,k=1}^{N}g^{j\bar{k}}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^j\partial\bar{z}^k}\left(\log\gamma(\varepsilon)\right)\right)_{|\varepsilon=0} \\
&\overset{(1.3.2)}{=} \sum_{j,k=1}^{N}g^{j\bar{k}}\frac{\partial^2}{\partial z^j\partial\bar{z}^k}\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \\
&\overset{\text{Satz 1.2.1}}{=} -\frac{1}{2}\Delta\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \quad ,
\end{aligned}$$

d.h. (7.4) liefert, da X kompakt ist,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}\left(\log\mathcal{Q}^\varepsilon\right)_{|\varepsilon=0} &= (-1)^N 2^{N-2}N!\int_X \frac{\varphi}{2}\,\Delta\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\mu \\
&= (-1)^N 2^{N-2}N!\left\|\frac{\Delta\varphi}{2}\right\|^2 \quad .
\end{aligned}$$

Es darf nun o.B.d.A. angenommen werden, daß es sich bei g^ε um eine „echte" φ-Variation handelt, d.h. $g^\varepsilon \not\equiv g$ und φ ist orthogonal zur 1. Bezeichnet dann $\lambda_1 > 0$ den kleinsten positiven Eigenwert von Δ, dann folgt aus obiger Gleichung

$$(-1)^N\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}\left(\log\mathcal{Q}^\varepsilon\right)_{|\varepsilon=0} \;\geq\; 2^{N-4}N!\;\lambda_1^2\|\varphi\|^2 \quad .$$

Da die Ungleichung für alle $\varphi \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ richtig ist, die orthogonal zur 1 sind, ist dies eine hinreichende Bedingung dafür, daß g je nach Parität von N bezüglich der induzierten Polarisierungs-Variationen ein Maximum bzw. ein Minimum der Quillenmetrik in der N-Polarisierung ist [Ze, Corollary 29.37]. □

Obiger Satz kann nun tatsächlich als Verallgemeinerung des Ergebnisses von B. Osgood, R. Phillips und P. Sarnak gewertet werden, welches ich in Kapitel 4 diskutiert habe. Insbesondere ist eine Charakterisierung für Kähler-Einstein-Metriken auf $K3$-Flächen gefunden:

Korollar 7.16
Ist X eine kompakte $K3$-Fläche, so sind die Kähler-Einstein-Metriken mit ganzzahliger Kählerform genau die Minima der Quillenmetrik in der 2-Polarisierung. Weitere kritische Metriken gibt es nicht.
Beweis:
Dies folgt aus den Sätzen 7.13 und 7.15, da auf $K3$-Flächen alle Metriken mit verschwindender Skalarkrümmung Ricci-flach sind [Be2, Example 4.50]. □

Bemerkung:
In fast allen Sätzen und Korollaren dieses Kapitels habe ich voraussetzen müssen, daß die betrachtete Mannigfaltigkeit algebraisch ist. Für $K3$-Flächen ist immerhin bekannt, daß jede $K3$-Fläche diffeomorph zu einer quartischen Fläche in $\mathbb{C}P^3$ ist [Kod].

Wie oben erläutert, habe ich Satz 7.13 durch Untersuchung der Quillenmetrik auf $K3$-Flächen mit Werten in Bündeln $(L - L^*)^{\otimes B}$ für $B \in \{0, 1, 2\}$ gefunden. $B = 0$ entspricht natürlich dem Fall, den ich außerhalb dieses Kapitels betrachtet habe, und das Ergebnis für $B = 1$ gebe ich der Vollständigkeit halber an:

Satz 7.17
Sei (X, g) eine kompakte $K3$-Fläche mit ganzzahliger Kählerform ω. Ist die Metrik g eine Kähler-Einstein-Metrik, so ist sie nicht *kritischer Punkt der Quillenmetrik in der 1-Polarisierung.*
Beweis:
Der Beweis erfolgt völlig analog zum Beweis von Satz 7.13, wenn man überall die Bündel $(L^\varepsilon - (L^\varepsilon)^*)^N$ durch die Bündel $L^\varepsilon - (L^\varepsilon)^*$ ersetzt. Ich gebe darum lediglich die Rechnungen an, die sich von den dortigen unterscheiden; die Bezeichnungen sind ebenfalls analog gewählt, d.h. f^ε ist die auf $L^\varepsilon - (L^\varepsilon)^*$ von den Metriken h^ε einer zulässigen Polarisierungs-Variation $(g, L, h)^\varepsilon$ induzierte Metrik etc.
In (7.1) muß mit diesen Bezeichnungen $N = 2$ eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Big(\log \mathcal{Q}^\varepsilon\Big)_{|\ \varepsilon = 0} &= -\frac{1}{8\pi^2}\int_X \Bigg[\frac{\partial}{\partial b}\overline{\mathrm{Td}}\,(-\Omega - bU)_{|b=0}\,\overline{\mathrm{ch}}(F) \\ &\qquad + \overline{\mathrm{Td}}(\Omega)\frac{\partial}{\partial b}\overline{\mathrm{ch}}\,(-F - b\mathcal{U})_{|b=0}\Bigg]^2 \quad . \qquad (7.5)\end{aligned}$$

Mit $\Theta = \Theta_L = -2\pi i\omega$ erhält man

$$\overline{\mathrm{ch}}(F) = 4\pi i\omega \quad ,$$

und somit lautet der erste Summand in (7.5)

$$\left[\frac{\partial}{\partial b}\overline{\mathrm{Td}}\,(-\Omega - bU)_{|b=0}\,\overline{\mathrm{ch}}(\Omega)\right]^2 \quad = \quad \frac{\partial}{\partial b}\overline{\mathrm{Td}}_2\,(-\Omega - bU)_{|b=0}\,4\pi i\omega$$

$$\overset{(6.2.4)}{=} \quad \frac{1}{12}\left\{3\,\mathrm{tr}\,(U)\bar{c}_1(\Omega) - \mathrm{tr}\,(\Omega U)\right\} 4\pi i\omega \quad .$$

Weil g nach Voraussetzung eine Kähler-Einstein-Metrik und somit Ricci-flach ist (siehe Kapitel 6.9), verschwindet der übliche Repräsentant der ersten Chernklasse (2.2.2). Außerdem folgt aus Lemma 1.1.3 $\mathrm{tr}\,(\Omega U)\wedge\omega = \mathrm{tr}\,(-2irU\mu) = 0$, d.h der erste Summand in (7.5) ist Null. Weiter erhalte ich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial b}\overline{\mathrm{ch}}\,(-F - b\mathcal{U})_{|b=0} \quad &= \quad \mathrm{tr}\left(\frac{\dot h}{h}e^{2\pi i\omega}\right) - \mathrm{tr}\left(-\frac{\dot h}{h}e^{-2\pi i\omega}\right) \\
&\overset{\dim_{\mathbb{C}} X=2}{=} \quad 2\frac{\dot h}{h}\left(1 - 2\pi^2\omega^2\right) \quad ,
\end{aligned}$$

der zweite Summand in (7.1) lautet also

$$\left[\overline{\mathrm{Td}}(\Omega)\frac{\partial}{\partial b}\overline{\mathrm{ch}}\,(-F - b\mathcal{U})_{|b=0}\right]^2 = 2\,\frac{\dot h}{h}\left(\overline{\mathrm{Td}}_2(\Omega) - 2\pi^2\overline{\mathrm{Td}}_0(\Omega)\omega^2\right) \quad .$$

Setzt man dieses Ergebnis zusammen mit $\mu = \frac{\omega^2}{2}$ [GH, p.80] in (7.5) ein und stellt das Toddgeschlecht durch Chernklassen dar [Hir, §1.7], so erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\log \mathcal{Q}^{\varepsilon}\right)_{|\,\varepsilon = 0} \quad &= \quad -\frac{1}{4\pi^2}\int_X \frac{\dot h}{h}\left(\frac{1}{12}\left(\bar{c}_1^2(\Omega) + \bar{c}_2(\Omega)\right) - 4\pi^2\mu\right) \\
&= \quad \int_X \frac{\dot h}{h}\left(\frac{1}{12}\left(c_1^2(\Omega) + c_2(\Omega)\right) + \mu\right) \quad .
\end{aligned}$$

Dieser Gleichung entnimmt man wie im Beweis von Satz 7.13, daß g kritischer Punkt der Quillenmetrik in der 1-Polarisierung ist, genau wenn für alle $\varphi \in C^{\infty}(X, \mathbb{R})$

$$\int_X \pi\varphi\left(\frac{1}{12}\left(c_2(\Omega) + c_1^2(\Omega)\right) + \mu\right) = 0 \quad .$$

Angenommen, g sei ein kritischer Punkt der Quillenmetrik in der 1-Polarisierung, dann folgt daraus $-\mu \equiv \frac{1}{12}(c_2(\Omega) + c_1^2(\Omega))$ und somit wegen $\int_X \mathrm{Td}_2(X) = \chi(\mathcal{O}_X)$ nach dem Satz von Hirzebruch-Riemann-Roch [Hir, Theorem 21.1.1]:

$$0 > \frac{1}{12}\int_X \left(c_2(\Omega) + c_1^2(\Omega)\right) \overset{[\mathrm{Hir},\ \S1.7]}{=} \int_X \mathrm{Td}_2(X) = h^{0,0} - h^{0,1} + h^{0,2} \overset{\mathrm{Korollar\ 2.3.9}}{=} 2 \quad .$$

$\lightning$

$\square$

Anwendungen in der theoretischen Physik

Im letzten, dem „physikalischen Teil“ meiner Arbeit gebe ich einen Überblick über verschiedene Anwendungen von *regularisierten Determinanten* und *(analytischer) Ray-Singer-Torsion* in einigen Gebieten der theoretischen Physik. Dabei muß ich mich mit einführenden Worten über die physikalischen Theorien und Verfahren auf das Wesentliche beschränken, um den Rahmen dieser Diplomarbeit nicht gänzlich zu sprengen; eine umfassende Einführung in die Theorie der Pfadintegrale und in die Stringtheorie entnimmt man besser einem der gängigen Lehrbücher.
Abgesehen davon, daß der Stoffumfang recht groß ist, der als Grundlage für die folgende Darstellung dient, sind nicht alle angegebenen Zusammenhänge mathematisch rigoros bewiesen*. Einige Erläuterungen müssen auf rein intuitiver Ebene bleiben, ich werde häufig zu Anführungszeichen greifen.

8 Regularisierte Determinanten in Pfadintegralen

8.1 Pfadintegrale

In diesem Kapitel sind in aller Kürze die für die weiteren Betrachtungen wichtigsten Punkte in der Theorie der Pfadintegrale zusammengefaßt. Ich folge dabei weitgehend der Darstellung von G. Roepstorff [Roe]. Ein erster Hinweis auf das Objekt, das heute *Pfadintegral* genannt wird, tauchte im Jahre 1933 in einer Arbeit von P.A.M. Dirac auf [Di]. Die Theorie wurde dann (1948) von R. Feynman ausgearbeitet [Fe1]. Ihre Stärke liegt in der großen Anwendbarkeit (auf Punktteilchen nach der ersten Quantisierung ebenso wie auf Eichfelder nach der zweiten Quantisierung), ihre Schwäche in den mathematischen Lücken, die in vielen Herleitungen klaffen.
Die Definition der Pfadintegrale läßt sich am besten aus einer Problemstellung der Thermodynamik, statistischen Mechanik oder Stochastik motivieren:
Im einfachsten Fall betrachtet man ein Teilchen in einem n-dimensionalen Raum, das sich zum Zeitpunkt $T = 0$ im Ursprung des Koordinatensystems befindet, und fragt nach der Wahrscheinlichkeit $P(x,t)$, mit der man das Teilchen zum Zeitpunkt $T = t$ im Punkt x antreffen wird. Um diese zu bestimmen, muß über alle auf dem Zeitintervall $[0,t]$ parametrisierten *Pfade* summiert werden, die das Teilchen von 0 nach x zurücklegen kann. Die einzelnen Pfade müssen im allgemeinen noch *gewichtet* werden – je nachdem, welchen physikalischen Gesetzen das Teilchen gehorcht. Wie die Bezeichnung „Pfadintegral“ schon sagt, handelt es sich tatsächlich nicht um eine Summation, sondern um eine Integration; das Maß, das dabei verwendet werden soll, ist jedoch a priori gar nicht definiert.

*„*The physicist cannot understand the mathematician's care in solving an idealized physical problem. The physicist knows the real problem is much more complicated. It has already been simplified by intuition which discards the unimportant and often approximates the remainder.*“ (R. Feynman)

Bedingtes Wienermaß

Führt das Teilchen eine *Brownsche Bewegung* (i.e. eine Zufallsbewegung) aus, dann kann man die Wahrscheinlichkeit $P(x,t)$ berechnen, indem man sowohl Zeit als auch Ort diskretisiert. Setzt man voraus, daß das Teilchen pro Zeitschritt τ genau einen räumlichen Schritt der Länge h zurücklegt, dann ist für die eindimensionale Bewegung offenbar

$$P(ih-jh,\tau)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{falls } |i-j|=1\ ,\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}$$

und dies läßt sich leicht auf beliebige Dimensionen verallgemeinern. Außerdem kann eine Formel für $P(x,t)$ hergeleitet werden, die im *Kontinuumslimes*, d.h. nach Grenzübergang $\tau\to 0, h\to 0$ unter Konstanthaltung der *Diffusionskonstante* $D=\frac{h^2}{2\tau}$ auf

$$P(x,t)=\frac{1}{(4\pi Dt)^{-\frac{n}{2}}}e^{-x^2/4Dt}\qquad ,$$

führt, also auf die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung, bzw. in diesem Fall besser der *Diffusionsgleichung*. Dieses Ergebnis ist konsistent mit dem physikalischen Ansatz.
Ab sofort sei $D=\frac{1}{2}$: Wenn man P als Lösung der Schrödingergleichung nach Wickrotation $t\mapsto it$ interpretiert, entspricht das der Vereinbarung, die Masse $m=1$ und $\hbar=1$ zu setzen (auf die Wickrotation gehe ich weiter unten noch genauer ein).
Die *Dichte* P dient jetzt auch als „Wichtungsfunktion“ bei der Bestimmung von *Erwartungswerten* für das Teilchen, das die Brownsche Bewegung ausführt (zur Definition des Erwartungswertes siehe z.B. [BS, p.667]: Ist X eine stetige Zufallsgröße mit Dichte $\varrho(x)$, dann ist der **Erwartungswert** von X durch $\int_{-\infty}^{\infty}x\varrho(x)dx$ gegeben und kann als „Zentrum der Verteilung“ oder „wahrscheinlichster Wert“ für die Größe X angesehen werden). Ist $f(x,t)$ eine meßbare Größe oder *Observable* des Brownschen Teilchens, dann kann deren Erwartungswert wie folgt bestimmt werden:
Angenommen, supp $f\subset[x,x']\times[s,s']$, dann definiert man nach obigem Ansatz für die Menge Ω aller auf dem Zeitintervall $[s,s']$ parametrisierten Pfade von x nach x'

$$\begin{aligned}\Omega &:= \left\{\gamma\in C^0\left([s,s'],\mathbb{R}^n\right)\mid\gamma(s)=x,\gamma(s')=x'\right\}\quad ,\\ \varrho(\Omega)=\int_\Omega d\varrho(\gamma) &:= P(x-x',s-s')>0\quad .\end{aligned}$$

Des weiteren muß noch das Maß bestimmter Teilmengen von Ω definiert werden: Dazu wird erneut die Zeit diskretisiert, $s=s^0<s^1<\cdots<s^{m+1}=s'$, und jedem m-Tupel von „Fenstern“ $A_1,...,A_m\in\mathbb{R}^n$ werden alle Pfade $\gamma\in\Omega$ zugeordnet, die zum Zeitpunkt $s^j(j\in\{1,...,m\})$ durch das Fenster A_j führen. Formal setzt man für $A=A_1\times\cdots\times A_m\in(\mathbb{R}^n)^m$

$$\Omega_A := \left\{\gamma\in\Omega\mid\gamma(s^j)\in A_j, j=1,...,m\right\}\quad ,$$

$$\varrho(\Omega_A) = \int_{\Omega_A} d\varrho(\gamma) \quad := \quad \int_{A_m}\int_{A_{m-1}} \cdots \int_{A_1} P(x' - x^m, s' - s^m)$$
$$\cdots P(x^2 - x^1, s^2 - s^1) P(x^1 - x, s^1 - s) dx^1\, dx^2 \cdots dx^m$$

und nennt ϱ das **bedingte Wienermaß** (es handelt sich dabei allerdings nicht um ein W-Maß).
Jetzt kann endlich der Erwartungswert von f hingeschrieben werden, und zwar ist er durch das *Pfadintegral*

$$I(f) := \int_\Omega f(\gamma) d\varrho(\gamma) \left(=: \int_{(x,s)\rightsquigarrow(x',s')} f(\gamma) d\varrho(\gamma) \right)$$

gegeben; die Definition von $\varrho(\Omega_A)$ spielt z.B. eine Rolle, wenn f nur von endlich vielen Koordinaten des Pfades, nämlich den Positionen $\gamma(s^1), ..., \gamma(s^m)$ abhängt. Unter diesen Umständen kann man nämlich über bestimmte m-Tupel $A = A_1 \times \cdots \times A_m$ summieren, um das Pfadintegral wieder auf eine Summe endlicher Integrale zurückzuführen (siehe [Roe, S.33]).
Im allgemeinen muß f natürlich „geeignet" gewählt werden, damit der obige Ausdruck für den Erwartungswert überhaupt wohldefiniert ist. Daran sieht man schon, was des Pudels Kern ist: Meist wird man nicht so genau angeben können, für welche Funktionen das Pfadintegral nun definiert ist; das bedingte Wienermaß ist auch nur eines von vielen Maßen, die unter das Pfadintegral geschrieben werden können – je nachdem, welcher physikalische Prozeß behandelt wird. Gerade für das bedingte Wienermaß gibt es aber eine ganze Reihe von Beispielen, für die obiges Pfadintegral definiert (und sogar berechnet) werden kann. Für den Physiker, der mit den Anwendungen vertraut ist, dürfte etwa die folgende Formel beruhigend sein [Sim, Theorem 6.1]:

Feynman-Kac Formel
Ist $H = -\frac{\Delta}{2} + V$ ein selbstadjungierter Operator auf dem Definitionsbereich $\mathcal{D}(\Delta)$ mit $V \in C^0_\infty(\mathbb{R}^n)$ (d.h. V ist stetig und verschwindet im Unendlichen), dann gilt

$$\int_{(x,s)\rightsquigarrow(x',s')} \exp\left\{ -\int_s^{s'} V(\gamma(t))dt \right\} d\varrho(\gamma) = \langle x' \mid e^{-(s'-s)H} \mid x \rangle \quad ,$$

wobei ich die in der physikalischen Literatur übliche Schreibweise $\langle x' \mid e^{-(s'-s)H} \mid x\rangle$ für den Integralkern des Operators e^{-tH} im Punkt $(x, x', s'-s)$ übernommen habe. Dieser Ausdruck heißt auch **Übergangsmatrixelement von $e^{-(s'-s)H}$ von x nach x'.**

Die Feynman-Kac Formel ist sogar unter noch schwächeren Voraussetzungen richtig [Sim, Kapitel 6], unter anderem für Potentiale V, die nach unten beschränkt sind. Für den harmonischen Oszillator mit $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ gilt dann etwa:

Mehler-Formel
Sei $H = -\frac{\Delta}{2} + V$ der Hamilton-Operator zu einem harmonischen Oszillator der Masse $m = 1$ in $\mathbb{R}^n$, also $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, und $\vartheta := k(s'-s)$. Dann gilt:

$$\int_{(x,s)\rightsquigarrow(x',s')} \exp\left\{-\int_s^{s'} V(\gamma(t))dt\right\} d\varrho(\gamma) = \langle x' \mid e^{-(s'-s)H} \mid x\rangle$$
$$= \left(\frac{k}{2\pi\sinh\vartheta}\right)^{n/2} \exp\left\{\frac{e^{-k^2(x^2+(x')^2)}}{2\tanh\vartheta} + \frac{k\,\langle x, x'\rangle}{\sinh\vartheta}\right\}$$

[Roe, (2.24)]. Die Mehler-Formel läßt sich leicht für den Hamilton-Operator zu l harmonischen Oszillatoren der Massen $m_1, ..., m_l$ verallgemeinern. Man findet sie auch in der mathematischen Fachliteratur (siehe z.B. [BGV, p.154]), da sie eine wichtige Rolle im Beweis des Atiyah-Singer-Indexsatzes übernehmen kann.

Zustandssumme

Im allgemeinen verwendet man Pfadintegrale nicht, um irgendwelche Erwartungswerte zu berechnen, sondern um die sogenannte *Zustandssumme* für eine Theorie zu bestimmen. Diese Größe läßt sich ebenfalls aus der Thermodynamik ableiten: Dort bezeichnet U die *innere Energie* und S die *Entropie* eines thermodynamischen Systems, das sich in Kontakt mit einem Wärmebad der Temperatur T befinde. Nach den Gesetzen der Thermodynamik tritt thermodynamisches Gleichgewicht genau dann ein, wenn der Ausdruck $U - TS$ minimal ist, $F := \min(U - TS)$ heißt **freie Energie** oder **Helmholtzenergie**. Die „Störung“, welche das Wärmebad auf das System ausübt, drückt sich dabei in dem Term TS aus. Der Gleichgewichtszustand im Minimum wird **kanonisches Ensemble** genannt. Die **Zustandssumme** des Systems ist durch $Z(\beta) := e^{-\beta F}$ definiert, wobei $\beta := (k_B T)^{-1}$ und k_B die *Boltzmannkonstante* ist, die im folgenden auf den Wert 1 gesetzt wird.
Um ein Analogon in der Quantenfeldtheorie zu finden, beachte man zunächst, daß sich die klassischen Lösungen der Feldgleichungen („Gleichgewichtszustände“) einer Theorie durch Minimierung der zugehörigen Wirkung $\mathcal{W}$ ergeben. Mit der Quantisierung ist man nun von den physikalischen Größen zu deren *Erwartungswerten* bezüglich eines „geeigneten“ Maßes ϱ übergegangen, die jetzt z.B. mit $\langle\varrho, \Phi\rangle = \int \varphi d\varrho(\varphi)$ oder $\langle\varrho, \mathcal{W}\rangle = \int \mathcal{W}(\varphi)d\varrho(\varphi)$ bezeichnet werden, wobei die Integration über alle Felder ausgeführt wird, welche den zu der in Frage stehenden Theorie gehörigen Randbedingungen genügen. Wie vorher kann man $\langle\varrho, \Phi\rangle$ und $\langle\varrho, \mathcal{W}\rangle$ als „wahrscheinlichste“ Werte für die Größen Φ und $\mathcal{W}$ ansehen, die unversehens zu *Zufallsvariablen* geworden sind.
In diesem Stadium ist es keine Einschränkung, statt mit den ursprünglichen Feldern mit deren Erwartungswerten zu rechnen, denn jetzt ist das Maß ϱ beliebig wählbar, kann also insbesondere ein Diracmaß sein – wir haben es hier mit einer Art *Korrespondenzprinzip* zu tun!

Wollten wir klassisch die Wirkung $\mathcal{W}$ minimieren, so müssen wir das jetzt mit dem Erwartungswert von $\mathcal{W}$ tun. In Analogie zu dem entsprechenden Ausdruck aus der Thermodynamik („U-TS“) muß der Erwartungswert noch mit einem Term „gestört“ werden, welcher proportional zur Entropie des Systems ist und in der Größenordnung des Planckschen Wirkungsquantums liegen soll; dieser Term verursacht eine *Quantenfluktuation* der Lösung um die klassische Lösung, denn es soll nicht mehr $\delta\mathcal{W} = 0$ sondern vielmehr $\delta\mathcal{W} \sim \hbar$ gelten. Die **Entropie** kann hier ganz analog zur Thermodynamik für ein Maß ϱ mit $d\varrho(\varphi) = p(\varphi)\mathcal{D}\varphi$ und $\mathcal{D}\varphi := \prod_x d\varphi(x)$ definiert werden:

$$S(\varrho) := -\int p(\varphi)\log p(\varphi)\mathcal{D}\varphi \quad ,$$

und zu minimieren ist der Ausdruck $\langle\varrho, \mathcal{W}\rangle - \hbar S(\varrho)$. Im Vergleich mit dem entsprechenden Ausdruck aus der Thermodynamik ist also U mit $\langle\varrho, \mathcal{W}\rangle$ und T mit $\hbar$ zu identifizieren. Die **Zustandssumme** ist jetzt durch

$$Z := \int e^{-\hbar^{-1}\mathcal{W}(\varphi)}\mathcal{D}\varphi \tag{8.1.1}$$

definiert, damit ergibt sich nämlich $\inf_\varrho \{\langle\varrho, \mathcal{W}\rangle - \hbar S(\varrho)\} = -\hbar\log Z$ (man beachte die Analogie zu den entsprechenden Ausdrücken aus der Thermodynamik!), und das Minimum wird genau in solchen Maßen angenommen, die sich höchstens auf Nullmengen von dem Maß

$$d\varrho_0(\varphi) := \frac{1}{Z}e^{-\hbar^{-1}\mathcal{W}(\varphi)}\mathcal{D}\varphi \tag{8.1.2}$$

unterscheiden [Roe, S.163].

Effektive Wirkung

Als nächstes stellt sich die Frage nach Bewegungsgleichungen, die ja jetzt für die Erwartungswerte formuliert werden müssen (und die Erwartungswerte erfüllen sicher nicht die klassischen Bewegungsgleichungen). Es ist wünschenswert, diese Gleichungen wie in der klassischen Theorie als Euler-Lagrange-Gleichungen eines Variationsproblemes zu formulieren; die in diesem Variationsproblem zu minimierende Wirkung wird **effektive Wirkung** genannt (wie das *effektive Potential* führt sie gewisse Teilaspekte eines quantenmechanischen Modells auf die eines korrespondierenden klassischen Modells zurück). Es ist auch klar, wie die Definition der effektiven Wirkung vorgenommen werden kann: Setzt man

$$\mathcal{W}_{\text{eff}}(\varphi) := \inf_\varrho \{\langle\varrho, \mathcal{W}\rangle - \hbar S(\varrho) \mid \langle\varrho, \Phi\rangle = \varphi\} \quad ,$$

dann liefern die Euler-Lagrange-Gleichungen von $\mathcal{W}_{\text{eff}} \overset{!}{=}$min offenbar genau die richtigen Feldgleichungen für die Zufallsvariable $\langle\varrho, \Phi\rangle$.
$\mathcal{W}_{\text{eff}}$ entsteht also aus einem Minimierungsproblem mit Nebenbedingung, das sich mit der

Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren lösen läßt: Zu minimieren ist der Ausdruck

$$\langle \varrho, \mathcal{W} \rangle - \hbar S(\varrho) - \int_{\mathbb{R}^n} j(x) \left(\langle \varrho, \Phi \rangle (x) - \varphi(x) \right) d^n x \quad ;$$

für festes j kann man die Lösung wie oben bei der Minimierung von $\langle \varrho, \mathcal{W} \rangle - \hbar S(\varrho)$ angeben:

$$\begin{aligned} Z[j] &:= \int e^{\hbar^{-1}\left(\int j(x)\varphi(x)d^n x - \mathcal{W}(\varphi)\right)} \mathcal{D}\varphi \\ d\varrho_j(\varphi) &:= \frac{1}{Z[j]} \mathcal{D}\varphi e^{\hbar^{-1}\left(\int j(x)\varphi(x)d^n x - \mathcal{W}(\varphi)\right)} \quad , \end{aligned}$$

ϱ_j minimiert das Funktional bei festem j und das Minimum ist $-\mathcal{W}^*_{\text{eff}}(j) := -\log Z[j]$. Um $\mathcal{W}_{\text{eff}}$ zu berechnen, muß man also zuerst die Funktionalgleichung $\int \psi(x) d\varrho_j(\psi) = \varphi(x)$ umkehren, um j zu bestimmen, und dann $\mathcal{W}_{\text{eff}}(\varphi) := \langle \varrho_j, \mathcal{W} \rangle - \hbar S(\varrho_j)$ setzen. Die Wirkungen $\mathcal{W}^*_{\text{eff}}$ und $\mathcal{W}_{\text{eff}}$ gehen durch eine Legendre-Transformation aus einander hervor [Roe, S.169], [Av, p.11].
$j(x)$ kann jetzt als *äußerer Strom* interpretiert werden, der Teilchen erzeugt und dadurch die Erfüllung der Nebenbedingung erzwingt (dies ist die bekannte Interpretation des Lagrangeschen Multiplikators). $Z[j]$ kann als Übergangsamplitude zwischen zwei Vakua unter dem äußeren Strom j gedeutet werden (weil der äußere Strom Teilchen produziert, können Vakua instabil werden) und wird **Erzeugendenfunktion** genannt, weil sich alle Vertexoperatoren der Theorie als (Funktional-) Ableitungen von $Z[j]$ nach j in $j \equiv 0$ ergeben (siehe z.B. [BD, (2.117)]). $Z[j \equiv 0]$ ist die Zustandssumme Z, wie sie weiter oben schon definiert wurde (8.1.1). Aus der Interpretation von $Z[j]$ als Übergangsamplitude zwischen zwei Vakua folgt $Z = 1$ im flachen Raum, denn dann reduzieren sich die beiden Vakua auf das quellenfreie Vakuum $|0\rangle$ des Minkowskiraumes, das üblicherweise auf 1 normiert wird [BD, p.29].
Die effektive Wirkung ist natürlich nicht eindeutig bestimmt durch die Bedingung, daß ihre Minimierung die Bewegungsgleichungen für die Erwartungswerte produzieren soll; unter anderem dürfen Konstanten jederzeit addiert werden.
Es stellt sich nun heraus, daß die effektive Wirkung mit obiger Definition auch in gekrümmter Raumzeit Sinn macht, sie ist dann wieder als Wirkung und j als äußerer Strom zu interpretieren. Jetzt sorgt jedoch schon die Krümmung der Raumzeit dafür, daß Vakua instabil werden können, also nicht generell $Z[j \equiv 0] = 1$ gilt; im folgenden soll daher nur $Z = Z[0]$, i.e. die Zusandssumme (8.1.1) untersucht werden.
Es ist nun eine Formel für die Zustandssumme hergeleitet, die noch ein wenig verallgemeinert werden muß: Die Wirkung wird im allgemeinen nicht nur von den Feldern, sondern auch von der Metrik abhängen (also gravitative Terme enthalten). Man muß darum denselben Argumentationsgang noch einmal auf „Gravitationsfelder“ anwenden, um die von S. Hawking untersuchte Zustandssumme aufstellen zu können:

$$Z = \int e^{i\hbar^{-1}\mathcal{W}(g,\varphi)} \mathcal{D}g\mathcal{D}\varphi \tag{8.1.3}$$

[Ha, (2.1)], wobei $\mathcal{D}g$ und $\mathcal{D}\varphi$ geeignete Maße sein sollen und die Integration sich über alle Metriken g und Felder φ erstrecken soll, die entsprechenden Randbedingungen genügen. Der imaginäre Exponent in der Exponentialfunktion unter diesem Pfadintegral kommt daher, daß man jetzt im allgemeinen nicht mehr eine Riemannsche sondern vielmehr eine semi-Riemannsche Metrik einzusetzen hat. Die Wellen- bzw. Diffusionsgleichung z.B. wird dann zur Schrödingergleichung, und man muß eine imaginäre Zeitvariable einführen (also eine **Wickrotation** durchführen), um aus der Fundamentallösung für die Riemannsche Metrik zunächst formal eine für die semi-Riemannsche Metrik zu machen. Die Exponentialfunktion mit imaginärem Exponenten wird nun als analytische Fortsetzung der „Wick-rotierten" Funktion auf der reellen Achse interpretiert (vergleiche zur Wick-Rotation [Roe, §1.5]).
Aus der Herleitung des Pfadintegrales, wie ich sie angegeben habe, ist klar, daß für die Beschreibung eines kanonischen Ensembles $\hbar$ durch T ersetzt werden muß (die Boltzmann-konstante ist nach wie vor 1). Stellt man an die Felder φ dann z.B. die Randbedingung, daß sie auf einem Rand in großem Abstand vom Ursprung in der imaginären Zeit mit Periode β oszillieren, so ist obiges Z gerade die Zustandssumme des kanonischen Ensembles bei Temperatur $T = (k_B\beta)^{-1} = \frac{1}{\beta}$ [Ha, p.136].
Nun mag man sich langsam fragen, ob bei so vielen unsicheren und ungesicherten Argumentationen überhaupt zum Schluß eine physikalisch oder mathematisch relevante Größe definiert worden ist. Ein Einwand könnte z.B. auch darin bestehen, daß zu Beginn der Herleitung mit einer Maxwell-Boltzmann-Statistik gerechnet wurde, die in der Natur eigentlich gar nicht vorkommt. Hier kann man geltend machen, daß diese Statistik immerhin für kleine Dichten und nicht extreme Temperaturen ($\hbar(mk_BT)^{-1/2} \ll 1$) eine brauchbare Näherung liefert. Allen anderen Kritikern kann man nur entgegnen, daß der oben angegebene Ansatz für das Pfadintegral eine Reihe von bekannten Problemen richtig löst: Für die Wirkung $\mathcal{W} = \int \frac{1}{2}m\dot{x}^2dt$ z.B. erhält man eine Übergangsamplitude, die der Diffusionsgleichung genügt [Kak, p.22ff]. æ

8.2 Störungsreihen zur approximativen Berechnung von Pfadintegralen

Unter geeigneten Voraussetzungen gewinnt auch beim Thema *Pfadintegral* die Mathematik wieder Raum*.
Aus dem physikalischen Ansatz heraus (Fluktuation der Felder um die klassischen Lösungen) erwartet man für das Pfadintegral (jetzt ist $\hbar = 1$ gesetzt)

$$Z = \int e^{i\mathcal{W}(g,\varphi)}\mathcal{D}g\mathcal{D}\varphi \tag{8.2.1}$$

*„*Clearly this is a subject in which common sense will have to guide the passage between the Scylla of mathematical Talmudism and the Charibdis of mathematical nonsense.*" (J. Bernstein)

den Hauptbeitrag von *Hintergrundfeldern* g_0, φ_0, die den klassischen Feldgleichungen genügen. Daher macht es Sinn, für $\mathcal{W}$ eine Taylorreihe um diese Felder zu berechnen:

$$\mathcal{W}(g_0 + \delta g, \varphi_0 + \delta\varphi) = \mathcal{W}(g_0, \varphi_0) + \mathcal{W}_2(\delta g) + \mathcal{W}_2(\delta\varphi) + \text{Terme höherer Ordnung} ,$$

wobei $\mathcal{W}_2$ die quadratischen Terme in δg bzw. $\delta\varphi$ bezeichnet und g_0 je nach Situation z.B. der euklidische Schnitt des komplexifizierten de Sitter Kosmos oder der Schwarzschild-Geometrie sein kann. Bis auf Terme höherer Ordnung ist jetzt also

$$\begin{aligned} \log Z &= i\mathcal{W}(g_0, \varphi_0) + \log \int e^{i\mathcal{W}_2(\delta g)} \mathcal{D}(\delta g) + \log \int e^{i\mathcal{W}_2(\delta\varphi)} \mathcal{D}(\delta\varphi) \\ &=: i\mathcal{W}(g_0, \varphi_0) + \log \hat{Z}_g + \log \hat{Z}_\varphi \quad . \end{aligned} \tag{8.2.2}$$

$\hat{Z}_g$ kann beispielsweise als Beitrag thermischer Gravitonen und $\hat{Z}_\varphi$ als Beitrag der Materiequanten vor dem entsprechenden Hintergrund interpretiert werden. $\hat{Z}_g$ und $\hat{Z}_\varphi$ sind von der gleichen Größenordnung, und für kleine Energien im Vergleich zur Planck-Energie ($E \ll \frac{\hbar c^5}{G} \approx 10^{19}$GeV) werden alle weiteren Gravitationsterme unterdrückt [Av, p.4]. Ist die Masse groß gegenüber der Planckmasse, so argumentiert S. Hawking über das Skalierungsverhalten der Terme höherer Ordnung, daß diese keine große Rolle spielen sollten [Ha, §9].
Bei obigem Ansatz (Abbruch der Störungsreihe nach der zweiten Ordnung) spricht man von **Ein-Schleifen-Quantengravitation**: Man arbeitet mit einem quantisierten Materiefeld und linearisierten Gravitationsfeldern, welche in Wechselwirkung stehen mit den Hintergrund-Gravitations– (und Materie–) feldern. Der Ausdruck „Ein-Schleifen" ist vor dem Hintergrund der *Feynman-Diagramme* zu verstehen: Die Korrekturterme zweiter Ordnung in der Störungsreihe entsprechen Feynman-Diagrammen mit einer Schleife.
Hat man es mit *Bosonen* zu tun, dann hat der quadratische Term $\mathcal{W}_2(\delta\varphi)$ die Gestalt

$$\mathcal{W}_2(\delta\varphi) = -\frac{1}{2} \int \delta\varphi H \delta\varphi \, \mu_0 , \tag{8.2.3}$$

wobei μ_0 die Volumenform zur Hintergrundmetrik ist. H wird ein Differentialoperator zweiter Ordnung sein, der aus φ_0 und g_0 konstruiert ist: Dies läßt sich durch eine Reihe von Beispielen belegen. Im Euklidischen kann man z.B. folgendes zeigen [Roe, §5.1]: Man betrachte ein Boson mit l Freiheitsgraden, jeder mit einer spezifischen Energie ε_j, wo $0 < \varepsilon_1 \leq \cdots \leq \varepsilon_l$, sowie mit Erzeugern a_j^* und Vernichtern a_j. Die Relationen $[a_j, a_k^*] = \delta_{jk}$ sichern dann das Bose-Einstein-Verhalten. Die *Energie* des wechselwirkungsfreien Systems ist $E_B = \sum_{j=1}^{l} \varepsilon_j a_j^* a_j$, und $Z_B = \text{tr } e^{-\beta E_B}$ ist die *Zustandssumme des freien Systems*. Formal hat man es also offenbar mit einem harmonischen Oszillator in l Dimensionen zu tun (für den das Pfadintegral, jedenfalls bezüglich des bedingten Wienermaßes, mit Hilfe der Mehlerformel berechnet werden kann), und für H muß der Laplace-Operator eingesetzt werden.
Außerdem wird die Behauptung, H sei im allgemeinen ein Differentialoperator zweiter Ordnung, durch die von I.G. Avramidi angegebenen Formeln gestützt, die sich auf massive

Skalar-, Spinor und Vektorfelder im äußeren Gravitationsfeld beziehen [Av, (1.23),(1.28)]. Für *Fermionen* ist H ein Differentialoperator erster Ordnung, es können Komplikationen wegen der *Quillenanomalie* (siehe Kapitel 8.5) auftreten; ich beschränke mich hier auf die Betrachtung für *Bosonen*.
Der Term $\mathcal{W}_2(\delta g)$ kann analog zu $\mathcal{W}_2(\delta\varphi)$ dargestellt werden, aber H ist dann im allgemeinen ein degenerierter Operator. Hat man z.B. die klassische Wirkung $\mathcal{W}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{L}(\varphi,x)d^4x$ mit $\mathcal{L}(\varphi,x) = \frac{1}{2}(|\nabla\varphi|^2 - m^2\varphi^2)(x)$ unters Pfadintegral geschrieben, dann ist $\mathcal{L}$ eichinvariant, d.h. bei der Integration im Pfadintegral summiert man über unendlich viele Exemplare ein und derselben Größe (wenn man nämlich entlang eines Orbits der Eichgruppe integriert); dann konvergiert das Pfadintegral natürlich nicht (vergleiche [BD, p.32]). Um mit dem Pfadintegral eine sinnvolle Größe zu produzieren, muß man daher in geeigneter Weise aus jedem Orbit einen Repräsentanten auswählen, indem man sich auf eine *Eichung* (etwa der Gestalt $F = 0$) festlegt. Einfach die Deltadistribution $\delta(F)$ mit unters Integral zu schreiben, würde dabei ein nichttriviales zusätzliches Maß beisteuern – die Jacobi-Determinante der Projektion auf die ausgewählte Eichung muß mitbeachtet werden. Diese liefert nun einen zusätzlichen Faktor, der nach Umformung die Gestalt eines Beitrags weiterer masseloser Skalarfelder hat (siehe [Kak, p.30]). Diese zusätzlichen Felder werden **Feynman-de Witt-** [Fe2, deW] oder **Fadeev-Popov-Geister** [FP] genannt.

Dem Artikel von S. Hawking folgend [Ha], werde ich mich auf die Betrachtung von $\mathcal{W}_2(\delta\varphi)$ beschränken:
Für das Weitere soll vorausgesetzt sein, daß H ein vollständiges Orthonormalsystem aus Eigenfunktionen $\varphi^1, \varphi^2, ...$ zu diskreten Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, ...$ besitze, wobei jetzt als Metrik die Wick-rotierte Hintergrundmetrik g' mit Volumenform $\mu' = i\mu_0$ verwendet wird (H muß nicht notwendigerweise selbstadjungiert sein, vergleiche [Ha, p.137]). Im Euklidischen ist H der Laplace-Operator, so daß die Voraussetzung auf jeder kompakten Mannigfaltigkeit erfüllt ist, für *beliebige* Hintergrundmetriken ist dies jedoch nicht notwendigerweise der Fall. Welche Hintergrundmetrik zu wählen ist, muß von Situation zu Situation entschieden werden; g_0 wird jedoch im allgemeinen *keine* reelle Lorentzmetrik sein. Beschreibt man z.B. ein kanonisches Ensemble in einem sphärischen Kasten mit vollständig reflektierenden Wänden, so ist ein de Sitter-Kosmos als Hintergrundmetrik zu wählen, in dem die Raumzeit komplexifiziert und ein Euklidischer Schnitt betrachtet wird, auf dem die Metrik reell und positiv definit ist.
Bei geeigneter Wahl der Metrik g_0 läßt sich jedoch für eine große Klasse von Differentialoperatoren zweiter Ordnung zeigen, daß die oben gestellte Voraussetzung an die Eigenfunktionen erfüllt ist:

Definition 8.2.1
Eine Metrik g heißt **streng elliptisch***, falls es eine Funktion f gibt, so daß* $\mathrm{Re}\,(fg)$ *positiv definit ist.*

Unter der Voraussetzung, die Metrik g_0 sei streng elliptisch, hat jeder selbstadjungierte verallgemeinerte Laplace-Operator (Definition 3.1.4) ein rein diskretes Spektrum, wie aus einem Theorem von C.B. Morrey gefolgert werden kann [Be2, Appendix I, 36/37], [Mo, Theorem 6.5.4]. S. Hawking hat vermutet, daß die strenge Elliptizität der Hintergrundmetrik „eines der grundlegenden Postulate der Quantengravitation" sein könne [Ha, p.136].
Zusammenfassend ist H im folgenden ein Differentialoperator zweiter Ordnung mit vollständigem Orthonormalsystem aus Eigenfunktionen zu diskreten Eigenwerten, z.B. ein selbstadjungierter verallgemeinerter Laplace-Operator, wenn die Hintergrundmetrik g_0 streng elliptisch ist. Zetafunktion und regularisierte Determinante lassen sich dann auf jeden Fall mit den gleichen Methoden definieren wie für verallgemeinerte Laplace-Operatoren. Ob allerdings Konvergenzaussagen übertragbar sind, bleibt dahingestellt.
Jetzt läßt sich jedes $\delta\varphi$ durch die φ^j darstellen: $\delta\varphi = \sum_j \xi^j \varphi^j$, und man erhält $\mathcal{D}(\delta\varphi) = \prod_j \kappa d\xi^j$, wobei κ eine Normierungsgröße mit Dimension einer inversen Länge ist, die eingeführt wird, damit die Terme in der Zustandssumme dimensionslos sind. Der zweite Korrrekturterm $\hat{Z}_\varphi$ im Pfadintegral (8.2.1) lautet dann nach (8.2.2) und (8.2.3)

$$\hat{Z}_\varphi = \prod_j \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i \left[-\frac{1}{2i} \sum_k (\xi^k)^2 \lambda_k \right] \right) \kappa d\xi^j = \prod_j \kappa \sqrt{\pi} \left(\frac{\lambda_j}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad .$$

Dabei ist die Konvergenz des unendlichen Produktes auf der rechten Seite natürlich noch nicht geklärt. Mathematischer Sinn kann dem Ausdruck auf der rechten Seite verliehen werden, wenn er durch $\det\left((2\pi\kappa^2)^{-1}H\right)^{-1/2}$ ersetzt wird (mit det ist wie üblich die regularisierte Determinante gemeint): Zuerst müssen also die Nullmoden von H weggelassen werden. Das ist weder mathematisch ein Problem (man rechnet einfach auf dem orthogonalen Komplement des Kernes von H, und die Definition 3.1.5 der regularisierten Determinante des verallgemeinerten Laplace-Operators leistet dies schon), noch physikalisch, denn $\hat{Z}_\varphi$ ist ja ohnehin nur ein Korrekturterm in der Störungsreihe, für den divergente Terme keinen Sinn machen und einfach weggelassen werden können (ähnlich wie beim Verfahren der *Renormierung*, das ich in Kapitel 8.3 diskutiere).
Formal ist nach der obigen Einschränkung also

$$\hat{Z}_\varphi = \det\left((2\pi\kappa^2)^{-1} H \right)^{-\frac{1}{2}} \quad , \tag{8.2.4}$$

und mathematisch sauber kann man diese Gleichung mit einer ähnlichen Konstruktion wie der für die Definition des Determinantenbündels (Kapitel 3.3) herleiten:
Sei B ein linearer Operator auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, der eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren besitze und dessen Kern leer sei. $\mathcal{D}(\delta\varphi)$ bezeichne das Volumenelement von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle \cdot \kappa^2)$, d.h. wie oben wird in jede Koordinatenrichtung mit einer Normierungskonstanten κ gestreckt. Dann kann

$$\Xi(B) := \int \exp\left(-\frac{i}{2} \int \langle B\delta\varphi, \delta\varphi \rangle \; \mu_0 \right) \mathcal{D}(\delta\varphi)$$

definiert werden, und klarerweise gilt $\Xi(B) = \det\left((2\pi\kappa^2)^{-1}B\right)^{-\frac{1}{2}}$. Sei $\lambda < \mu$ und $\mathcal{H}_{(\lambda,\mu)}$ die orthogonale direkte Summe aus Eigenräumen von H zu Eigenwerten in (λ,μ). Dann gilt mit $\tilde{H}_{\alpha,\beta} := (2\pi\kappa^2)^{-1}H_{|\mathcal{H}_{(\alpha,\beta]}}$

$$\begin{aligned}
\Xi\left(H_{|\mathcal{H}_{(0,\lambda]}}\right) &= \det\left((2\pi\kappa^2)^{-1}H_{|\mathcal{H}_{(0,\lambda]}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{1}{2}\zeta'_{\tilde{H}_{0,\lambda}}(0)\right) \quad , \\
\Xi\left(H_{|\mathcal{H}_{(0,\mu]}}\right) &= \Xi\left(H_{|\mathcal{H}_{(0,\lambda]}}\right)\cdot \prod_{\lambda_j\in(\lambda,\mu]\cap\operatorname{spec} H} \kappa\sqrt{\pi}\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\left[\zeta'_{\tilde{H}_{0,\lambda}}(0) - \sum_{\lambda_j\in(\lambda,\mu]\cap\operatorname{spec} H}\log\frac{\lambda_j}{2\pi\kappa^2}\right]\right) \quad .
\end{aligned}$$

Der Exponent der Exponentialfunktion auf der rechten Seite ist aber gerade $\frac{1}{2}\zeta'_{\tilde{H}_{0,\mu}}(0)$ (falls H ein verallgemeinerter Laplace-Operator ist, siehe z.B. [BGV, Proposition 9.36]), d.h. (8.2.4) kann als konsistente Regularisierung von $\hat{Z}_\varphi$ gewertet werden.
Wie im Beweis zu Lemma 3.1.7 sieht man nun

$$\log\hat{Z}_\varphi = \frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{2}\zeta_H(s)\left(2\pi\kappa^2\right)^s\right\}_{|\,s=0} = \frac{1}{2}\zeta'_H(0) + \frac{1}{2}\zeta_H(0)\log\left(2\pi\kappa^2\right) \quad ; \tag{8.2.5}$$

die Ableitung der Zetafunktion des Operators H in $s=0$, i.e. **die regularisierte Determinante von H, tritt also als Korrekturterm zweiter Ordnung in der Störungsreihe für die Zustandssumme auf.**
Kennt man die Eigenwerte des Operators H explizit, so kann man auch $\hat{Z}_\varphi$ berechnen (siehe [Ha, §3]). Andernfalls kann man unter der Voraussetzung, daß H ein verallgemeinerter Laplace-Operator sei, mit Hilfe der asymptotischen Entwicklung des zugehörigen Wärmeleitungskernes weitere Aussagen machen, von denen einige im folgenden noch benötigt werden. Ist die Mannigfaltigkeit nicht kompakt, so muß man Randbedingungen stellen; dann und falls X nichtleeren Rand hat, tauchen in der asymptotischen Entwicklung des Wärmeleitungskernes noch zusätzliche Terme auf, die von der Krümmung auf dem Rand und deren Ableitungen abhängen. Sei im folgenden aber X als geschlossen vorausgesetzt, $\dim_{\mathbb{R}} X = n$ und für den Wärmeleitungskern die Asymptotik $\operatorname{tr}\left(e^{-tH}\right) \overset{t\to 0}{\sim} t^{-\frac{n}{2}}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j t^j$ bekannt. Es sei ein $k\in\mathbb{N}$ mit $k>\frac{n}{2}$ gewählt, dann folgt aus dieser Asymptotik $\operatorname{tr}\left(e^{-tH}\right) = t^{-\frac{n}{2}}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j t^j + \varrho(t)$ mit $\varrho(t) = \mathcal{O}(t^{k+1-\frac{n}{2}})$ für $t\to 0$. Es sei P_H die orthogonale Projektion auf den Kern von H und $b := \dim\ker H$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\zeta_H(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\operatorname{tr}\left(e^{-tH}-P_H\right)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)}\left\{\int_0^1 t^{s-1}\left[\sum_{j=0}^{k}\alpha_j t^{j-\frac{n}{2}} + \varrho(t) - b\right]dt + \int_1^\infty t^{s-1}\operatorname{tr}\left(e^{-tH}-P_H\right)dt\right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \left\{ \sum_{j=0}^{k} \frac{\alpha_j}{j - n/2 + s} - \frac{b}{s} + h(s) \right\} \quad ,$$

wobei h in $s = 0$ holomorph ist. Weil $\frac{1}{\Gamma(s)} = sf(s)$ mit holomorphem f und $f(0) = 1$, liest man daraus sofort ab:

Lemma 8.2.2
Sei X eine kompakte Mannigfaltigkeit mit $\dim_{\mathbb{R}} X = n$ und H ein verallgemeinerter Laplace-Operator auf X. Für den Wärmeleitungskern zu H sei die Asymptotik

$$\operatorname{tr}\left(e^{-tH}\right) \overset{t \to 0}{\sim} t^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j t^j$$

bekannt, $b := \dim \ker H$ und $\alpha_r := 0$ für $r \notin \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\zeta_H(0) = \alpha_{n/2} - b \quad .$$

Anhand der oben hergeleiteten Gleichung kann man natürlich genauso in allen negativen ganzen Zahlen die Werte von ζ_H sowie in allen positiven ganzen Zahlen die Residuen ablesen (siehe [Ros, (1.5)]).

8.3 Dimensionale Regularisierung

Wie schon in Kapitel 3.1 angemerkt, gibt es auch noch andere Möglichkeiten außer der Regularisierung via Zetafunktionen, um Determinanten von verallgemeinerten Laplace-Operatoren zu definieren. In der theoretischen Physik wird vor allem die Methode der *Renormierung* häufig verwendet, die zum ersten Mal von J.F. Ashmore, C.G. Bollini/ I.J. Giambiagi und G. 't Hooft [As, BG, tHo] angewandt wurde.
Am besten kann man *Renormierung* anhand eines Beispieles erläutern [BD, p.153ff]:
In Analogie zu den *semiklassischen Theorien* der Thermodynamik sind während der Entwicklung der Quantentheorie viele semiklassische Rechnungen durchgeführt worden (ein elektromagnetisches Feld steht etwa als klassisches Hintergrundfeld mit der quantisierten Materie in Wechselwirkung). Hier soll nun eine **semiklassische Gravitationstheorie** erläutert werden, i.e. die Gravitationsfelder werden klassisch behandelt, während die Materiefelder quantisiert sind. Die Einsteinschen Feldgleichungen lauten dann

$$r_{\mu\nu} - \frac{s}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda_B g_{\mu\nu} = -8\pi G_B \langle T_{\mu\nu} \rangle,$$

wobei r die Ricci- und s die Skalarkrümmung bezeichnen, Λ_B bzw. G_B die kosmologische bzw. die Gravitationskonstante sind und $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ der Erwartungswert des *Energie-Impuls-Tensors* ist, auf den ich in Kapitel 8.5 noch einmal genauer eingehen werde. Die Herleitung der *klassischen Feldgleichungen* kann z.B. durch Minimierung einer Wirkung $\mathcal{W}$ erfolgen, also

$$\frac{2}{(-\det g)^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \quad .$$

Man setzt dann $\mathcal{W}_g := \int (16\pi G_B)^{-1} (s - 2\Lambda_B) (-\det g)^{\frac{1}{2}} d^4x$ (das ist der Gravitationsterm) und $\mathcal{W}_m := \mathcal{W} - \mathcal{W}_g$ (der Materieterm), so daß die klassischen Feldgleichungen äquivalent sind zu

$$\frac{2}{(-\det g)^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta \mathcal{W}_m}{\delta g^{\mu\nu}} = T_{\mu\nu} \quad . \tag{8.3.1}$$

Dies kann umgekehrt auch als Definition des Energie-Impuls-Tensors angesehen werden. Nachdem ja semiklassisch gerechnet werden sollte, und zwar die Materiefelder – hier also $T_{\mu\nu}$ – quantisiert werden, der Hintergrund aber – die Metrik $g^{\mu\nu}$ also – klassisch behandelt werden sollte, muß wie in Kapitel 8.1 erläutert eine *effektive Wirkung* $\mathcal{W}_{\text{eff}}$ eingeführt werden, die $\mathcal{W}$ in den Feldgleichungen ersetzt. $\mathcal{W}_g$ darf nicht verändert werden, denn gravitative Terme sollen klassisch behandelt werden, so daß mit $\mathcal{W}_{\text{eff},m} = \mathcal{W}_{\text{eff}} - \mathcal{W}_g$ die Feldgleichungen

$$\frac{2}{(-\det g)^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta \mathcal{W}_{\text{eff},m}}{\delta g^{\mu\nu}} = \langle T_{\mu\nu} \rangle \tag{8.3.2}$$

lauten. Es stellt sich nun aber das Problem, daß $\mathcal{W}_{\text{eff},m}$ ein divergenter Term ist. Man kann nämlich zeigen, daß

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\text{eff},m} &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}_{\text{eff}}(x) (-\det g)^{\frac{1}{2}} d^n x \\ \mathcal{L}_{\text{eff}}(x) &\approx \lim_{x' \to x} \frac{D^{\frac{1}{2}}(x, x')}{2(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(x, x') \int_0^{\infty} (is)^{j-1-\frac{n}{2}} e^{-i(m^2 s - \frac{\sigma}{2s})} i ds \end{aligned} \tag{8.3.3}$$

[BD, (6.39)], wobei D die *von-Vleck-Determinante* [BD, p.75], m die Masse, $\sigma = \frac{1}{2}\|x - x'\|^2$ und α_j der j-te Koeffizient aus der asymptotischen Entwicklung um $t = 0$ des Wärmeleitungskernes von $H = \Delta - \xi s$ ist, dem hier relevanten Differentialoperator, mit einer zusätzlichen Kopplungskonstante ξ (α_j ist also eine geometrische Größe, die durch die Metrik, den Krümmungstensor und deren Ableitungen gegeben ist).

Der Ausdruck in (8.3.3) würde konvergieren, wäre n keine natürliche Zahl, denn das Integral stellt eine Gammafunktion dar. Man faßt daher zunächst n als komplexe Variable auf und untersucht die so erhaltene meromorphe Funktion in den Polen; dadurch kann man die divergenten Terme aufspüren und gesondert behandeln. Man bezeichnet diesen Schritt als **dimensionale Regularisierung**. $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ ist nun durch eine Potenzreihe in m gegeben, aber dimensionsbehaftete Größen verursachen bei der Störungsrechnung große Komplikationen, weil sich ihretwegen Terme unterschiedlicher Ordnungen nicht mehr wegheben können. Daher führt man noch eine Normierungskonstante k der Dimension einer

Masse ein. Warum das „erlaubt“ ist, wird im nachhinein klarwerden. Setzt man jetzt noch $\alpha_j(x) := \alpha_j(x,x)$, dann kann das Integral (8.3.3) für $n \notin \mathbb{N}$ ausgerechnet werden:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(x) \approx \frac{1}{2}(4\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{m}{k}\right)^{n-4} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(x) m^{4-2j} \Gamma\left(j - \tfrac{n}{2}\right) \quad . \tag{8.3.4}$$

Die Koeffizienten α_j heißen in diesem Zusammenhang (d.h. in der physikalischen Literatur) **de Witt-Koeffizienten** (R.T. Seeley, 1967 [Se]*) und können bekanntlich (mit exponentiell wachsendem Aufwand pro Ordnung) für jeden verallgemeinerten Laplace-Operator rekursiv berechnet werden [BGV, Theorem 2.26 mit Beweis]. Dies hat I.G. Avramidi im Fall $n = 4$ für massive Skalar-, Spinor- und Vektorfelder bis zur Ordnung m^{-2} durchgeführt [Av].
Für $n \to 4$ kommen die divergenten Terme in $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ nach (8.3.4) von den Gammafunktionen $\Gamma(-\frac{n}{2}), \Gamma(1-\frac{n}{2})$ und $\Gamma(2-\frac{n}{2})$. Setzt man nun noch die Laurentreihen der Gammafunktionen um den Pol $n = 4$ ein, so kann der divergente Term von $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ bestimmt werden:

$$\mathcal{L}_{\text{div}} = -\left(-\det g\right)^{\frac{1}{2}} (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \left\{\frac{1}{n-4} + \frac{1}{2}\left(\gamma + \log\frac{m^2}{k^2}\right)\right\} \left[\frac{4m^4\alpha_0}{n(n-2)} - \frac{2m^2\alpha_1}{n-2} + \alpha_2\right] , \tag{8.3.5}$$

wobei γ die *Eulersche Konstante* ist [BD, (6.44)].
Man hilft sich nun einfach über die divergente effektive Wirkung hinweg, indem man die divergenten Terme von $\mathcal{W}_{\text{eff},m}$ in $\mathcal{W}_g$ „absorbiert“, was auch dadurch gerechtfertigt werden kann, daß $\mathcal{L}_{\text{div}}$ nach (8.3.5) nur geometrische Terme enthält, die ohnehin eher als Beitrag zum gravitativen Teil der Wirkung anzusehen sind. Setzt man noch $\alpha_0 = 1$ und $\alpha_1 = (\frac{1}{6} - \xi)s$ für die de Witt-Koeffizienten ein [BD, (3.131)-(3.133)], dann ist klar, daß $\mathcal{L}_g$ in $\mathcal{W}_g = \int \mathcal{L}_g(x) d^4x$ mit $\mathcal{L}_g = (-\det g_0)^{1/2} (16\pi G_B)^{-1} (s - 2\Lambda_B)$ (siehe oben) durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g^{\text{ren}} := \mathcal{L}_g - \mathcal{L}_{\text{div}} \;\; &= \;\; (-\det g)^{\frac{1}{2}} \left\{-\left(A + \frac{\Lambda_B}{8\pi G_B}\right) + \left(B + \frac{1}{16\pi G_B}\right) s \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\alpha_2}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \left[\frac{1}{n-4} + \frac{1}{2}\left(\gamma + \log\frac{m^2}{k^2}\right)\right]\right\} \end{aligned}$$

ersetzt werden muß mit

$$\begin{aligned} A &= \frac{4m^4}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} n(n-2)} \left\{\frac{1}{n-4} + \frac{1}{2}\left(\gamma + \log\frac{m^2}{k^2}\right)\right\} \quad , \\ B &= \frac{2m^2(\frac{1}{6} - \xi)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}(n-2)} \left\{\frac{1}{n-4} + \frac{1}{2}\left(\gamma + \log\frac{m^2}{k^2}\right)\right\} \quad . \end{aligned}$$

*Hier tauchten diese Koeffizienten tatsächlich zuerst auf. Die etymologische Entwicklung des Namens *Seeley* zum Namen *de Witt* ist ungeklärt.

Jetzt können Λ_B und G_B **renormiert** werden, d.h. durch andere Größen so ersetzt werden, daß $\mathcal{L}_g^{\text{ren}}$ wieder die gleiche Gestalt hat wie $\mathcal{L}_g$:

$$\begin{aligned} \Lambda &:= \Lambda_B + 8\pi G_B A \quad , \\ G &:= \frac{G_B}{1 + 16\pi G_B B} \quad . \end{aligned}$$

Daß die Terme in den geschweiften Klammern divergieren, ist unerheblich, denn die *physikalischen* Größen sind die renormierten Konstanten Λ und G, während Λ_B und G_B (der Index B steht für „bare") niemals gemessen werden können. Mit demselben Argument kann man auch den Einwand gegen das Verfahren der Renormierung zurückweisen, die renormierten Größen seien gar nicht eindeutig bestimmt: Natürlich spricht nichts dagegen, zu Λ oder G aus obigem Beispiel noch eine endliche Größe hinzuzuaddieren (darum war es ja auch „erlaubt", die Normierungskonstante k einzuführen). Dies entspricht aber lediglich einer Umeichung der Meßgeräte, ist also physikalisch nicht relevant.
Eine ähnliche Vorgehensweise ist schon aus der QED bekannt: Ein Elektron ist von einer Wolke virtueller Photonen umgeben, die zu der *renormierten* (endlichen!) Elektronenmasse einen unendlichen Beitrag liefern.
Auf die Behandlung des dritten Summanden in (8.3.5) gehe ich an dieser Stelle nicht weiter ein, er ist in den klassischen Einsteinschen Feldgleichungen völlig unbekannt, da er mit α_2 vierte Ableitungen der Metrik enthält; statt zu renormieren muß man dann zusätzliche Terme im Lagrangian einführen.
Renormierung ist in der „Ein-Schleifen-Quantengravitation" also möglich, aber eine *vollständige* Renormierung kann für die Gravitationstheorie nicht funktionieren: Versucht man, eine Störungsreihe um die flache Metrik aufzustellen, d.h. $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}$ mit der Minkowskimetrik $\eta_{\mu\nu}$ und einer Kopplungskonstanten ε, dann ist $\varepsilon^2 \sim G$ [Kak, (1.2.6)], man hat also eine dimensionsbehaftete Kopplungskonstante. Wie oben schon erwähnt, führt das dazu, daß sich Terme verschiedener Ordnungen in der Störungsreihe (im generischen Fall) nie wegheben können, also für jede Ordnung neue Konstanten renormiert werden müssen (nur die Tatsache, daß renormiert wurde, erlaubte in obigem Beispiel die Einführung der Normierungskonstante k).

Der Zusammenhang mit der Regularisierung durch Zetafunktionen wird klar, wenn man folgende Vereinfachung vornimmt: Die Wirkung $\mathcal{W}$ soll nur noch in ihrer Abhängigkeit von den Materiefeldern untersucht werden, man setzt also

$$Z := \int e^{i\mathcal{W}_m(\varphi)} \mathcal{D}\varphi$$

[BD, (6.14)], denn mit diesem Ansatz ist $\mathcal{W}_{\text{eff},m}$ berechenbar. Mit dem in Kapitel 8.1 über Erwartungswerte Gesagten folgt nämlich

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{(-\det g_0)^{\frac{1}{2}}}\frac{\delta Z}{\delta g^{\mu\nu}} &= i\int e^{i\mathcal{W}_m(\varphi)}\frac{2}{(-\det g_0)^{\frac{1}{2}}}\frac{\delta \mathcal{W}_m}{\delta g^{\mu\nu}}\mathcal{D}\varphi \\
&\overset{(8.3.1)}{=} i\int e^{i\mathcal{W}_m(\varphi)} T_{\mu\nu}\mathcal{D}\varphi \\
&\overset{(8.1.2)}{=} i\langle T_{\mu\nu}\rangle Z
\end{aligned}
$$

(wie in (8.1.3) ist das Minuszeichen im Exponenten der Zustandssumme nach Wickrotation durch ein i ersetzt worden). Wegen (8.3.2) erhält man damit $\mathcal{W}_{\text{eff},m} = -i\log Z$. Ersetzt man auch in (8.2.2) $\mathcal{W}(g,\varphi)$ durch die Wirkung $\mathcal{W}_m(\varphi)$ und beachtet, daß die effektive Wirkung um beliebige Konstanten verändert werden darf, dann erhält man

$$
\mathcal{W}_{\text{eff},m} = -i\log \hat{Z}_\varphi \quad . \tag{8.3.6}
$$

Will man $\mathcal{W}_{\text{eff},m}$ regularisieren, so kann man das daher genauso gut mit $\log \hat{Z}_\varphi$ tun. Hierfür muß dann wegen (8.2.5) eine Zetafunktion regularisiert werden, und die unterschiedlichen Regularisierungsmethoden können in diesem Fall direkt verglichen werden [Ha, §5]:
H sei ein verallgemeinerter Laplace-Operator auf einer vierdimensionalen kompakten Mannigfaltigkeit und besitze ein Orthonormalsystem aus Eigenfunktionen, und es gelte $\ker H = \{0\}$. Dann ist nach (8.2.5)

$$
\log \hat{Z}_\varphi = \frac{1}{2}\zeta_H'(0) + \frac{1}{2}\zeta_H(0)\log\left(2\pi\kappa^2\right) \quad .
$$

Mit Hilfe des Weierstraß-Produktes

$$
\frac{1}{\Gamma(s)} = s e^{s\gamma}\prod_j\left(1+\frac{s}{j}\right)e^{-s/j} = s + \gamma s^2 + \mathcal{O}(s^3)
$$

(siehe z.B. [La, p.273]) und der Definition 3.1.4 der Zetafunktion zu H folgt nun:

$$
\begin{aligned}
\zeta_H'(0) &= \frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\,\mathrm{tr}\,\left(e^{-tH}\right)dt\right\}_{|\,s=0} \\
&= \lim_{s\to 0}\left\{(1+2\gamma s)\int_0^\infty t^{s-1}\,\mathrm{tr}\,\left(e^{-tH}\right)dt + (s+\gamma s^2)\int_0^\infty t^{s-1}\log t\,\mathrm{tr}\,\left(e^{-tH}\right)dt\right\} \quad .
\end{aligned}
$$

Setzt man nun noch die asymptotische Entwicklung $\mathrm{tr}\,\left(e^{-tH}\right) \overset{t\to 0}{\sim} \sum_{j=0}^\infty \alpha_j t^{j-2}$ des Wärmeleitungskernes zu H ein, dann sieht man, daß diejenigen Terme, welche nach Integration bei der Auswertung an den unteren Integralgrenzen divergieren, gerade durch

$$
\frac{\alpha_0}{2}t^{-2} + \alpha_1 t^{-1} + \alpha_2\log t
$$

gegeben sind; diese Terme bilden genau $\mathcal{L}_{\text{div}}$ aus der obigen Betrachtung, $\frac{\alpha_0}{2}, \alpha_1$ und α_2 sind also potentielle Koeffizienten für eine Renormierung.
Die *dimensionale Regularisierung* kann man an demselben Beispiel vorführen, indem man die Wärmeleitungsgleichung nicht auf dem vierdimensionalen sondern auf einem 2ν-dimensionalen Raum löst, d.h. an die Ausgangsmannigfaltigkeit $2\nu - 4$ weitere Dimensionen anfügt. Dabei besteht der Trick wie oben darin, daß man sich (formal) von der Vorstellung löst, die Dimension müsse eine natürliche Zahl sein. Am einfachsten ist es dabei im allgemeinen, das Produkt der ursprünglichen vierdimensionalen Mannigfaltigkeit mit dem $(2\nu - 4)$-dimensionalen flachen Raum zu betrachten, dann wird der Wärmeleitungskern nämlich lediglich mit $(4\pi t)^{2-\nu}$ multipliziert. Ist $\nu \neq 2$, dann erhält man wie oben mit Hilfe des Weierstraß-Produktes für $\frac{1}{\Gamma(s)}$:

$$\begin{aligned} -(\log\det H)(\nu) &:= \frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty (4\pi)^{2-\nu} t^{s+1-\nu}\,\mathrm{tr}\left(e^{-tH}\right)dt\right\}_{|\,s=0} \\ &= (4\pi)^{2-\nu}\lim_{s\to 0}\left\{(1+2\gamma s)\int_0^\infty t^{s+1-\nu}\,\mathrm{tr}\left(e^{-tH}\right)dt\right. \\ &\qquad\left. + \left(s+\gamma s^2\right)\int_0^\infty t^{s+1-\nu}\log t\,\mathrm{tr}\left(e^{-tH}\right)dt\right\} \\ &= (4\pi)^{2-\nu}\int_0^\infty t^{1-\nu}\,\mathrm{tr}\left(e^{-tH}\right)dt \quad , \end{aligned}$$

und $(\log\det H)(\nu)$ hat einen Pol in $\nu = 2$. Aus der asymptotischen Entwicklung des Wärmeleitungskernes zu H folgt nach Wahl eines $k \in \mathbb{N}$ mit $k > \nu$

$$\mathrm{tr}\left(e^{-tH}\right) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j t^{j-2} + \varrho(t) \text{ mit } \varrho(t) = \mathcal{O}(t^{k-1}) \quad ,$$

und Einsetzen in obige Gleichung liefert:

$$\begin{aligned} -(\log\det H)(\nu) &= (4\pi)^{2-\nu}\left\{\int_0^1 \sum_{j=0}^{k}\alpha_j t^{j-\nu-1}dt + \int_0^1 t^{1-\nu}\varrho(t)dt\right. \\ &\qquad\left. + \int_1^\infty t^{1-\nu}\,\mathrm{tr}\left(e^{-tH}\right)dt\right\} \\ &= \left\{1 + (2-\nu)\log(4\pi) + \mathcal{O}\left((2-\nu)^2\right)\right\} \\ &\qquad \cdot\left\{\sum_{j=0}^{k}\frac{\alpha_j}{j-\nu} + \int_0^1 t^{1-\nu}\varrho(t)dt + \int_1^\infty t^{1-\nu}\,\mathrm{tr}\left(e^{-tH}\right)dt\right\} \quad , \end{aligned}$$

woraus man sofort abliest, daß

$$\mathrm{res}_{\nu=2}\left[-(\log\det H)\right] = \alpha_2 \overset{\text{Lemma 8.2.2}}{=} \zeta_H(0)$$

($\dim\ker H = 0$ wurde oben vorausgesetzt) und der endliche Teil von $-(\log\det H)(\nu)$ in $\nu = 2$ durch

$$-(\log\det H)_{\mathrm{ren}} := \sum_{\substack{j=0\\ j\neq 2}}^{k} \frac{\alpha_j}{j-2} + \int_0^1 t^{-1}\varrho(t)dt + \int_1^\infty t^{-1}\,\mathrm{tr}\,\left(e^{-tH}\right)dt + \alpha_2\log(4\pi)$$

gegeben ist. Es gilt daher mit der analogen Rechnung wie oben für die mit Hilfe von Zetafunktionen regularisierte Determinante von H

$$\begin{aligned}
-\log\det H &= \frac{d}{ds}\left\{\left(s+\gamma s^2+\mathcal{O}(s^3)\right)\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{\alpha_j}{j+s-2}+\int_0^1 t^{s-1}\varrho(t)dt\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\int_1^\infty t^{s-1}\,\mathrm{tr}\,\left(e^{-tH}\right)dt\right)\right\}_{|\,s=0}\\
&= \lim_{s\to 0}\left[\frac{d}{ds}\left\{\left(1+\gamma s+\mathcal{O}(s^2)\right)\alpha_2+\left(s+\gamma s^2+\mathcal{O}(s^3)\right)\sum_{\substack{j=0\\ j\neq 2}}^{k}\frac{\alpha_j}{j+s-2}\right\}\right.\\
&\qquad\left.+\int_0^1 t^{-1}\varrho(t)dt+\int_1^\infty t^{s-1}\,\mathrm{tr}\,\left(e^{-tH}\right)dt\right] \qquad (8.3.7)\\
&= \gamma\alpha_2-(\log\det H)_{\mathrm{ren}}-\alpha_2\log 4\pi \quad ,
\end{aligned}$$

d.h. man erhält mit Lemma 8.2.2

$$(\log\det H)_{\mathrm{ren}} = \log\det H + \zeta_H(0)\,(\gamma-\log(4\pi)) \quad .$$

Die *renormierte* Determinante unterscheidet sich somit von der via Zetafunktionen regularisierten Determinante nur um ein Vielfaches von $\zeta_H(0)$, das aber in der Formel für $\hat{Z}_\varphi$ (8.2.5) in die Normierungskonstante κ hineingeschrieben werden kann. Verwendet man bei der *dimensionalen Regularisierung* als zusätzliche Dimensionen also *flache* Dimensionen, dann unterscheidet sich das Ergebnis der Regularisierung nur um unwesentliche Terme von dem Ergebnis der Regularisierung via Zetafunktionen, die ich in meiner Arbeit verwendet habe. Das ist jedoch nicht mehr der Fall, wenn die zusätzlichen Dimensionen bei der dimensionalen Regularisierung nicht flach sind; die Wahl flacher zusätzlicher Dimensionen ist aber nicht immer die naheliegendste:
Betrachtet man z.B. die Sphäre S^4 als euklidische Version des *de Sitter Kosmos*, dann wäre es natürlicher, die zusätzlichen Dimensionen so zu wählen, daß man S^n erhält. Auch für die *Schwarzschild-Geometrie* $\mathbb{R}^2 \times S^2$ gibt es offenbar keine „kanonische" Wahl der zusätzlichen Dimensionen.
Für die von mir bisher verwendete Methode der Regularisierung von Determinanten via Zetafunktionen spricht also neben der Tatsache, daß man damit interessante Mathematik betreiben kann, einerseits daß sie mir die Renormalisierung von Kopplungskonstanten mit unendlichen Termen erspart hat (eine Methode, die dem Mathematiker nach wie vor

Zahnschmerzen macht), und andererseits die Feststellung, daß die Ergebnisse mit der in der physikalischen Literatur beliebtesten Technik (dimensionale Regularisierung) übereinstimmen, sofern flache Dimensionen angefügt wurden.

8.4 Skalierungsverhalten der Zustandssumme

Auch in diesem Abschnitt soll es um die Berechnung von $\log \hat{Z}_\varphi$ gehen, sie kann nämlich unter Umständen allein durch Kenntnis des Verhaltens der Zustandssumme unter Volumenänderung durchgeführt werden [Ha, §6]:
Im folgenden sei (X, g_0) stets eine kompakte vierdimensionale (semi-)Riemannsche Mannigfaltigkeit und H ein skalenkovarianter verallgemeinerter Laplace-Operator (siehe Definition 3.1.6). Der Dolbeaut-Laplace-Operator z.B. erfüllt diese Voraussetzung [Be2, 1.159]. $\widetilde{g}_0$ bezeichne die mit einem konstantem Faktor $\lambda > 0$ umskalierte Metrik $\widetilde{g}_0 = \lambda g_0$. Dann gilt nach Lemma 3.1.7 $\zeta_{\widetilde{H}}(s) = \lambda^s \zeta_H(s)$, und (8.2.5) liefert

$$\begin{aligned} \log \widetilde{\hat{Z}_\varphi} &= \frac{1}{2}\Big(\zeta_H(0)\log\lambda + \zeta_H'(0)\Big) + \frac{1}{2}\zeta_H(0)\log\left(2\pi\widetilde{\kappa}^2\right) \\ &= \log \hat{Z}_\varphi + \frac{1}{2}\zeta_H(0)\log\lambda + \frac{1}{2}\zeta_H(0)\Big(\log\left(2\pi\widetilde{\kappa}^2\right) - \log\left(2\pi\kappa^2\right)\Big)\ . \qquad (8.4.1) \end{aligned}$$

Die Rechnungen würden sich offensichtlich vereinfachen, wenn κ skaleninvariant wäre. Um zu prüfen, ob dies der Fall ist, muß man die Definition von κ zurückverfolgen (vergleiche Kapitel 8.2). Wegen der Bedingung $\int_X \varphi^j \varphi^k (\det g_0)^{\frac{1}{2}}\, d^4x = \delta_{jk}$ müssen die Eigenfunktionen φ^j von H umskaliert werden, nämlich $\widetilde{\varphi}^j = \lambda^{-1}\varphi^j$, d.h. $\delta\varphi = \sum_j \alpha_j \varphi^j = \sum_j \widetilde{\alpha}_j \widetilde{\varphi}^j$ mit $\widetilde{\alpha}_j = \lambda\alpha_j$. Demnach muß κ genau dann nicht umskaliert werden, wenn das Maß $\mathcal{D}\varphi$ durch $\mathcal{D}\varphi = \prod_x (\det g(x))^{1/4}\, d\varphi(x)$, also auf Dichten vom Gewicht $1/2$ definiert ist. Daß dies für das Gravitationsfeld tatsächlich zutrifft, wurde von L.D. Fadeev und V.N. Popov gezeigt [FP], und daß es auch für andere Felder der Fall ist, hat S. Hawking vermutet [Ha, p.144].
Für das folgende sei nun vorausgesetzt, daß κ skaleninvariant ist. Dann lassen sich aus dem oben angegebenen Skalierungsverhalten von $\log \hat{Z}_\varphi$ Aussagen über die Zustandssumme selber gewinnen. Der *de Sitter Kosmos* etwa ist vollständig durch die Skala (nämlich den Radius) bestimmt, so daß man sofort

$$\log \hat{Z}_\varphi^{\text{de Sitter}} = \alpha_2^{\text{de Sitter}} \log \frac{r}{r_0}$$

ablesen kann, wobei r_0 mit dem Normierungsfaktor κ korreliert ist. Für die *Schwarzschildmetrik* mit Masse M in einem sphärischen Kasten vom Radius r_0 kann man folgern:

$$\log \hat{Z}_\varphi^{\text{Schwarzschild}} = \alpha_2^{\text{Schwarzschild}} \log \frac{M}{M_0} + f\left(\frac{r_0}{M}\right)$$

– hier ist M_0 mit κ korreliert [Ha, (6.12)]. Die Funktion f erhält man aus dem Ansatz, daß sich $\log Z$ für $\frac{r_0}{M} \gg 1$ der Zustandssumme für thermische Strahlung bei der Temperatur

$T = \frac{1}{8\pi M}$ im flachen Raum annähern sollte, so daß man

$$f\left(\frac{r_0}{M}\right) = \frac{r_0^3}{34560 M^3} + \mathcal{O}\left(\frac{r_0^2}{M^2}\right)$$

folgern kann [Ha, (6.13)].
Für konform invariante Skalarfelder berechnet man

$$\begin{aligned} \alpha_2^{\text{de Sitter}} &= -\frac{2}{45} \quad , \\ \alpha_2 := \alpha_2^{\text{Schwarzschild}} &= \frac{1}{45} \quad . \end{aligned}$$

Im Fall der Schwarzschildmetrik kann man jetzt sogar das Pfadintegral über alle Hintergrundmetriken berechnen, ohne eine Taylorreihe für g aufzustellen; dafür wird also $\mathcal{W}(g,\varphi) = \mathcal{W}(g,\varphi_0) + \mathcal{W}_2(\delta\varphi)$ in (8.2.1) eingesetzt.

$$\begin{aligned} Z &\overset{(8.2.1)}{=} \int e^{i\mathcal{W}(g,\varphi_0)+i\mathcal{W}_2(\delta\varphi)} \mathcal{D}(\delta\varphi)\mathcal{D}g \\ &\overset{(8.2.2)}{=} \int e^{i\mathcal{W}(g,\varphi_0)} \hat{Z}_\varphi \mathcal{D}g \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-4\pi M^2}}{M} \left(\frac{M}{M_0}\right)^{\alpha_2} dM \end{aligned}$$

(für das letzte Gleichheitszeichen siehe z.B. [Ha, (6.14)]); dieser Ausdruck konvergiert (!) wegen $\alpha_2 > 0$.
Obige Rechnung stimmt natürlich nur bis auf Terme höherer Ordnung in der Störungsreihe, die aber gerade für kleine M eine Rolle spielen können (also dort, wo der Integrand ohne den ersten Korrekturterm der Störungsreihe divergiert). Man kann aber hoffen, daß diese Terme höherer Ordnung durch weitere Hintergrundmetriken schwarzer Löcher darstellbar sind [Ha, p.145].

8.5 Anomalien

Der Begriff *Anomalie* wird für eine ganze Reihe „anomaler“ Phänomene in der mathematischen Physik verwendet. Anomalien entstehen im allgemeinen durch Zusammenbruch einer Symmetrie bei der Quantisierung einer klassischen Theorie. Wie in Kapitel 8.3 erklärt, treten dabei mitunter Faktoren auf, die unendlichen Wert annehmen; die Anomalien können als Ergebnisse der Multiplikation dieser unendlichen Faktoren mit Null angesehen werden. Zwei Abarten der Gattung Anomalie erläutere ich in diesem Kapitel.

Konforme Anomalie

Im vorigen Kapitel wurde das Skalierungsverhalten von $\log \hat{Z}_\varphi$ unter Skalierung der Metrik um konstante Faktoren untersucht. In diesem Abschnitt soll es um die konformen

Transformationen der Gestalt $(\tilde{g}_0)_x := \lambda(x)(g_0)_x$ mit einer positiven Funktion λ gehen, genauer gesagt um die Frage, was für den Energie-Impuls-Tensor gefolgert werden kann, wenn man konforme Invarianz der Wirkung voraussetzt.
Dazu dient das Beispiel der semiklassischen Gravitationstheorie aus Kapitel 8.3 (ich folge zunächst im wesentlichen der Darstellung in [BD, §6.3]): Klassisch erhält man mit

$$\delta\tilde{g}^{\mu\nu} = -\lambda^{-1}\tilde{g}^{\mu\nu}\delta\lambda \tag{8.5.1}$$

aus (8.3.1)

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu} T^{\mu}_{\mu}(\tilde{g}) &= \sum_{\mu,\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} \frac{2}{(-\det\tilde{g})^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta\mathcal{W}(\tilde{g})}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}} \\
&\overset{(8.5.1)}{=} -\sum_{\mu,\nu} \frac{2\lambda}{(-\det\tilde{g})^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}}{\delta\lambda} \frac{\delta\mathcal{W}(\tilde{g})}{\delta\tilde{g}^{\mu\nu}} \\
&= -\frac{2\lambda}{(-\det\tilde{g})^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta\mathcal{W}(\tilde{g})}{\delta\lambda} \quad ,
\end{aligned}$$

d.h. falls $\mathcal{W}$ konform invariant ist, folgt tr $T = 0$. Dies kann man für masselose Skalar- und Spin $\frac{1}{2}$-Felder sowie vierdimensionale elektromagnetische Felder explizit nachrechnen. Nach Renormierung des Energie-Impuls-Tensors ist solch ein Zusammenhang aber nicht mehr vorhanden, wie im folgenden gezeigt werden soll. Dieses Phänomen nennt man **konforme Anomalie** oder einfach **Spuranomalie**.
Zunächst ist klar, daß konforme Transformationen die Längen skalieren, d.h. Masse und damit eine festgelegte Längenskala wird in jedem Fall die konforme Invarianz zerstören (man beachte: Wegen der Übereinkunft $\hbar = c = 1$ folgt für die Einheiten [Zeit] = [Länge] = $[\text{Masse}]^{-1}$). Nach (8.3.4) muß daher in

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{\text{eff}} &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{L}_{\text{eff}}(x)\,(-\det g_0)^{\frac{1}{2}}\, d^n x \quad , \\
\mathcal{L}_{\text{eff}}(x) &\approx \frac{1}{2}(4\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{m}{k}\right)^{n-4} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(x) m^{4-2j} \Gamma\left(j - \tfrac{n}{2}\right)
\end{aligned}$$

der Limes $m \to 0$ und $n \to 4$ gebildet werden. Alle Summanden mit $j > 2$ divergieren für $m \to 0$ („Infrarotdivergenz"), aber um die Ursachen für die Spuranomalie des Energie-Impuls-Tensors zu erkennen, genügt es, die *Ultraviolettdivergenz* der Summanden für $j \in \{0, 1, 2\}$ zu untersuchen. Im Limes $m \to 0$ und $n \to 4$ liefert nur der Summand mit $j = 2$ einen divergenten Beitrag, und nach Einsetzen der Formel für α_2 [BD, (3.133)] erhält man

$$\mathcal{W}_{\text{div}} = \frac{1}{2}(4\pi)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{k}\right)^{n-4} \Gamma\left(2 - \tfrac{n}{2}\right) \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{F(x)}{120} - \frac{G(x)}{360}\right) (-\det g_0)^{\frac{1}{2}}\, d^n x + \mathcal{O}(n-4)$$

mit Funktionen F und G, die aus den Koeffizienten des Krümmungstensors und der Metrik zusammengesetzt sind [BD, (6.102)]. Für $n = 4$ ist $F = \|W\|^2$ die Norm des Weylschen Krümmungstensors und $G = c_2$ die zweite Chernklasse. Dann ist $\mathcal{W}_{\text{div}}$ also konform invariant; daß dies für $n \neq 4$ nicht stimmt, ist die eigentliche Ursache für die konforme Anomalie. Denn die physikalisch relevanten Größen – hier der Energie-Impuls-Tensor T – müssen aus $\mathcal{W}$ berechnet werden, *bevor* der Grenzübergang $n \to 4$ durchgeführt wird; Renormierung würde andernfalls die physikalischen Gesetze manipulieren. Mit Hilfe von entsprechenden Identitäten für F und G [Du] kann man zeigen:

$$\langle \text{tr } T\rangle_{\text{div}} := \frac{2}{(-\det g)^{\frac{1}{2}}} \sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu} \frac{\delta \mathcal{W}_{\text{div}}}{\delta g^{\mu\nu}} \xrightarrow{n\to 4} \frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{1}{120}\left(\|W\|^2 - \frac{2}{3}\Delta s\right) - \frac{c_2}{360}\right)$$

[BD, (6.110)]. Dieser Ausdruck ist rein geometrischer Natur und außerdem unabhängig von m, es kann also $m = 0$ eingesetzt werden. Hat man in der Wirkung die *konforme Kopplung* gewählt [BD, p.44], d.h. die Wirkung konform invariant gemacht, dann folgt aus den klassischen Überlegungen am Anfang dieses Kapitels $\langle \text{tr } T\rangle = 0$ und daraus wiederum

$$\langle \text{tr } T\rangle_{\text{ren}} := \langle \text{tr } T\rangle - \langle \text{tr } T\rangle_{\text{div}} = -\frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{1}{120}\left(\|W\|^2 - \frac{2}{3}\Delta s\right) - \frac{c_2}{360}\right) . \tag{8.5.2}$$

Der letzte Ausdruck ist im allgemeinen von Null verschieden. Obwohl also $\mathcal{W}$ und $\mathcal{W}_{\text{div}}$ für $n = 4$ konform invariant sind, ist $\langle \text{tr } T\rangle_{\text{ren}} \neq 0$, und zwar darum, weil $\mathcal{W}_{\text{div}}$ in $n \neq 4$ *nicht* konform invariant ist. Wie oben schon erwähnt, ist dies die **konforme** oder **Spuranomalie**.
Die Vorgehensweise kann auf beliebige Spins verallgemeinert werden, dann erhält man allerdings mit unterschiedlichen Regularisierungsmethoden unterschiedliche Ergebnisse, was die experimentell meßbaren Größen angeht. Ähnliche Unstimmigkeiten habe ich schon in Kapitel 8.3 angedeutet.

In einem Spezialfall kann man die konforme Anomalie noch leichter erkennen [Ha, §8]: Man betrachtet wie in Kapitel 8.4 Skalierungen der Metrik mit konstanten Faktoren, also $\widetilde{g} = \lambda g$ mit konstantem $\lambda > 0$. Außerdem sei vorausgesetzt, daß die Normierungskonstante κ in der Ein-Schleifen-Zustandssumme $\hat{Z}_\varphi$ in (8.2.4) skaleninvariant ist, nach den Ergebnissen von Kapitel 8.4 also, daß das Maß $\mathcal{D}\varphi$ auf Dichten vom Gewicht $\frac{1}{2}$ definiert ist. Aus (8.3.2) folgt dann mit (8.3.6):

$$\begin{aligned}
\int_X \left\langle \sum_\mu T^\mu_\mu(\widetilde{g})\right\rangle (\det g_0)^{\frac{1}{2}}\, d^4x \quad &= \quad \int_X \sum_{\mu,\nu} \widetilde{g}_0^{\mu\nu} \left(-\frac{2i}{(-\det \widetilde{g}_0)^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta \log \widetilde{\hat{Z}_\varphi}}{\delta \widetilde{g}_0^{\mu\nu}}\right) (\det g_0)^{\frac{1}{2}}\, d^4x \\
&\overset{(8.5.1)}{=} \int_X 2\lambda \frac{\delta \log \widetilde{\hat{Z}_\varphi}}{\delta\lambda} d^4x \\
&\overset{(8.4.1)}{=} \text{vol}\,(X)\zeta_H(0) \quad .
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird im allgemeinen nicht verschwinden (auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche X z.B. verschwindet $\zeta_\Delta(0) = \frac{\chi(X)}{6} - 1$ niemals). $\zeta_H(0)$ wird übrigens auch in der mathematischen Fachliteratur mitunter als *Spuranomalie* bezeichnet (siehe z.B. [BØ, p.670]).
Nun mag man sich fragen, ob die konforme Anomalie nicht durch Änderung der Definition der effektiven Wirkung behoben werden kann, ist diese doch ohnehin nicht eindeutig bestimmt. Das kann jedoch widerlegt werden [ChD].
Als nächstes kann man fragen, ob unter solchen Umständen der renormierte Energie-Impuls-Tensor überhaupt physikalisch sinnvoll definiert ist. Diese Frage wird in [BD, §6.6] ausführlich diskutiert; man sucht zunächst nach „Mindestanforderungen", denen ein physikalisch sinnvoller Energie-Impuls-Tensor genügen muß. Ein solches Axiomensystem wurde von R.M. Wald aufgestellt [Wa]; er fordert für den Energie-Impuls-Tensor T

i. *Divergenzfreiheit*,

   damit der Tensor auf der rechten Seite der Einsteinschen Feldgleichungen stehen kann,

ii. *Kausalität*,

   d.h. der Tensor soll in jedem Punkt nur von der Raumzeit in der kausalen Vergangenheit abhängen,

iii. *außerhalb der Diagonalen soll er Standardergebnisse liefern*,

   d.h. für $\langle\varphi \mid \psi\rangle = 0$ soll $\langle\varphi \mid T \mid \psi\rangle = 0$ gelten,

iv. *im Minkowskiraum soll er Standardergebnisse liefern*,

   d.h. im Minkowskiraum sollen beispielsweise normalgeordnete Produkte definiert sein.

R.M. Wald hat nun gezeigt, daß die ersten drei Forderungen den Tensor schon bis auf einen lokalen erhaltenen Tensor bestimmen [Wa]. Außerdem erfüllt der Tensor $\langle T\rangle_{\mathrm{ren}}$, so wie er nach (8.5.2) zu definieren ist, alle vier Punkte. Darum ist davon auszugehen, daß – vorausgesetzt, die semiklassische Theorie ist eine adäquate Theorie – die Definition des renormierten Energie-Impuls-Tensors physikalisch Sinn macht.

Quillenanomalie

Am Ende des ersten Abschnittes von Kapitel 3.3 tauchte das Stichwort „Anomalie" schon einmal im Zusammenhang mit der Definition von Determinanten gewisser Differentialoperatoren auf: Dabei war X eine kompakte Riemannsche Fläche und D eine Familie von Dirac-Operatoren auf einem $C^\infty-$Bündel $E \longrightarrow X$. In dem affinen Raum $\mathcal{A}^{(1,1)}$ der integrablen Zusammenhänge auf E wurde ein Basispunkt D_0 gewählt, dann konnte eine

über den Operatoren vom Index 0 holomorphe Funktion $\det(D, D_0)$ auf $\mathcal{A}^{(1,1)}$ definiert werden, die jedoch *nicht* eichinvariant war.
Wie schon in Kapitel 8.2 erwähnt, kommt es durchaus vor, daß auch die Determinante eines Differentialoperators erster Ordnung definiert werden muß, nämlich wenn die Zustandssumme für *Fermionen* mit Hilfe eines Pfadintegrales berechnet werden soll.
Ein erstes Hindernis für eine solche Definition stellt der *Index* der Familie D dar; ist der Index von Null verschieden, so spricht man von **chiraler Anomalie**. Der Index eines Dirac-Operators ist invariant unter Störung des Operators, d.h. er ist eine Invariante der Mannigfaltigkeit und des Cliffordmoduls, auf dem er definiert ist [BGV, Theorem 3.51]. Die chirale Anomalie wird auch **gravitativ** genannt, weil mit Hilfe des Atiyah-Singer--Indexsatzes der Index durch ein Integral über Krümmungsterme dargestellt werden kann, der Index also geometrischer Natur ist [At1].
Das zweite Hindernis für die Definition der Determinante eines Differentialoperators erster Ordnung besteht in der **Quillenanomalie**, die ich in diesem Abschnitt beschreibe; es ist nämlich unter Umständen überhaupt nicht möglich, eine komplexwertige regularisierte Determinante $\det D_z$ zu definieren, die

i. genau dann verschwindet, wenn $\ker D_z \neq \{0\}$,

ii. differenzierbar in der Metrik

und

iii. eichvariant ist.

Natürlich kann $|\det D| = (\det(D^*D))^{\frac{1}{2}}$ immer bestimmt werden, das Problem ist die Definition der Phase.
Ob nun eine Determinante mit i.-iii. definiert werden kann, hängt vom *Grad* der Familie D ab, den M.F. Atiyah folgendermaßen definiert [At1]:

Definition 8.5.1
Wie in Kapitel 3.3 sei $\pi : M \longrightarrow B$ eine Familie von komplexen Mannigfaltigkeiten mit typischer Faser Z (also $\forall\, z \in B : \pi^{-1}(z) = M_z \cong Z$). M sei hier eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Spinstruktur und $(D_z \mid z \in B)$ eine Familie von Dirac-Operatoren (unter Umständen auf einem Cliffordbündel $E \longrightarrow B$). Für alle $z \in B$ sei $\operatorname{ind} D_z = 0$ und für alle bis auf endlich viele Punkte $z_1, ..., z_k \in B$ gelte $\ker D_z = \{0\}$ (das kann für jede Familie von Dirac-Operatoren mit Index 0 durch Störung der Metrik auf M erreicht werden). Weiter sei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda > 0$ und $\lambda \notin \cup_{j=1}^{k} \operatorname{spec}(D_{z_j})$ gewählt, und wie üblich sei $(\mathcal{H}_{[0,\lambda)})_z$ die orthogonale direkte Summe der Eigenräume von D_z zu Eigenwerten in $[0, \lambda)$. Dann ist $T_z := \det(D_{|\mathcal{H}_{[0,\lambda)}})_z$ wohldefiniert, und für $j \in \{1, ..., k\}$ soll $2\pi\nu_j$ die Monodromie von $\det T_z$ um z_j sein, also die Phasenänderung, die T_z auf einem geschlossenen Weg um z_j erfährt (das ist natürlich die Ordnung der Nullstelle z_j von $\det T_z$). Der **Grad** *der Familie $(D_z \mid z \in B)$ ist dann $\sum_{j=1}^{k} \nu_j$.*

Mit Hilfe des Familien-Indexsatzes [AS1] kann man eine topologische Formel für den Grad einer Familie D von Dirac-Operatoren angeben, d.h. auch die Quillenanomalie ist eine **gravitative Anomalie**.
Der Grad kann aber auch definiert werden, falls der Index der Familie nicht überall verschwindet [At1, §5]; in diesem Fall kann nämlich im Rahmen der K-Theorie dennoch ein *Indexbündel* ind D über B definiert werden (siehe z.B. [BGV, Kapitel 9.5]: Sind die Dimensionen von $\ker D$ und $\ker D^*$ konstant auf ganz B, dann kann einfach ind $D := \ker D$ gesetzt werden; andernfalls ist das Indexbündel ein *virtuelles Bündel* in der *K-Theorie von B*).

Definition 8.5.2
Alle Voraussetzungen seien wie in Definition 8.5.1, *aber die Familie* $(D_z \mid z \in B)$ *von Dirac-Operatoren muß nicht notwendigerweise den Index* 0 *haben.*
Dann ist der **Grad** *der Familie D durch die erste Chernklasse der Determinante des Indexbündels gegeben.*

Daß Definition 8.5.2 eine Verallgemeinerung von Definition 8.5.1 ist, kann man an folgendem Beispiel sehen [At1, §5]: Gilt für die Familie D mit $D_z : E_z^+ \to E_z^-$ etwa $\dim\ker D \equiv 1$ und $\dim\ker D^* \equiv 0$, dann gibt es zu jedem $z \in B$ ein von Null verschiedenes Element $\psi_z \in \Gamma(X,E)$ mit $D_z\psi_z = 0$. Versucht man jedoch, einen glatten Schnitt ψ des Bündels $\ker D \longrightarrow B$ zu bestimmen, dann hat er $c_1(\ker D)$ Nullstellen (gezählt mit Multiplizitäten). Bildet man jetzt eine neue Familie von Dirac-Operatoren $\tilde{D}_z : E_z^+ \to E_z^- \oplus \mathbb{C}$ via $\tilde{D}_z(\nu) := D_z\nu \oplus \psi_z$, dann hat die Familie $\tilde{D}$ Index 0 und der Grad der Familie $\tilde{D}$ ist gemäß Definition 8.5.1 gerade die Anzahl der Nullstellen von ψ, also $c_1(\ker D) = c_1(\text{ind } D)$.
Ist der Grad einer Familie von Dirac-Operatoren nicht Null, dann kann für diese Familie *keine* Determinante definiert werden, die den Bedingungen i.-iii. genügt [At1]. Der Grad ist also das *Hindernis* für die Definition einer Determinante, i.e. eine *Anomalie*, und heißt **Quillenanomalie**.

Beispiel [At1, §4]:
Sei $\pi : M \longrightarrow B$ mit $B = S^2$ und $\forall\, z \in B : M_z \cong Z = S^4$ sowie $E \longrightarrow M$ ein $SU(3)$-Prinzipalbündel. $\mathcal{G}$ bezeichne die Gruppe der Eichtransformationen $\gamma : S^4 \to SU(3)$. $(D_z \mid z \in B)$ kann jetzt als Familie von Dirac-Operatoren auf S^4 aufgefaßt werden, die durch $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ parametrisiert wird. Ein geschlossener Pfad in S^2 um ∞ definiert dann offenbar ein Element aus $\pi_1(\mathcal{G})$ und der Grad ist ein Homomorphismus $\pi_1(\mathcal{G}) \to \mathbb{Z}$. In diesem Beispiel gilt $\pi_1(\mathcal{G}) = \pi_5(SU(3)) \cong \mathbb{Z}$ [AS1], und der letzte Isomorphismus ist genau durch den Grad gegeben.

In fermionischen Pfadintegrale führt die Quillenanomalie zum Verlust der Eichinvarianz; sei im folgenden X eine orientierte Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit und $P \longrightarrow X$ ein G-Prinzipalbündel mit einer kompakten Lie-Gruppe G. Außerdem seien Spinbündel $S^\pm$ auf X gewählt. $\mathcal{A}$ bezeichne wieder den Raum der Zusammenhänge (also der Vektorpotentiale) auf P, und $\mathcal{G}$ sei die Gruppe der Eichtransformationen. Weiter sei $\chi : G \to GL(m, \mathbb{C})$

eine Darstellung und $E_\chi := P \times_\chi \mathbb{C}^m$ das assoziierte Vektorbündel (also $E = P \times \mathbb{C}^m / \sim$, wobei $\forall \gamma \in G, (p,z) \in P \times \mathbb{C}^m : (p,z) \sim (\gamma.p, \chi(\gamma)(z))$). Über $\mathcal{A}$ ist dadurch eine Familie von Dirac-Operatoren $(D_A : C^\infty(S^+ \otimes E_\chi) \to C^\infty(S^- \otimes E_\chi) \mid A \in \mathcal{A})$ gegeben (ich weiche hier von den Bezeichnungen in Kapitel 3.3 ein wenig ab, indem ich die Elemente von $\mathcal{A}$ als Vektorpotentiale auffasse). Ist G_A die Green-Funktion zum Operator D_A, dann ist das fermionische Pfadintegral durch

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_r(A) &= \int e^{\widetilde{\psi} D_A \psi} \widetilde{\psi}(y_1)\psi(x_1) \cdots \widetilde{\psi}(y_r)\psi(x_r) \mathcal{D}\widetilde{\psi}\mathcal{D}\psi \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_r} \mathrm{sign}\sigma \det D_A \left(G_A(y_{\sigma(1)}, x_1) \cdots G_A(y_{\sigma(r)}, x_r) \right) \end{aligned}$$

gegeben [AS2, p.2599]; $\mathcal{S}_r$ bezeichnet die Gruppe der Permutationen von $\{1, ..., r\}$. $\mathcal{I}_1$ ist offenbar ein Spezialfall von $W_2(\delta g)$ aus Kapitel 8.2, denn für jede Metrik δg gibt es zu jeder komplexen Struktur genau einen metrischen Zusammenhang.
Nach den obigen Überlegungen ist der Grad der Familie D (also die erste Chernklasse der Determinante des Indexbündels über $\mathcal{A}$) das Kriterium dafür, ob $\mathcal{I}_r$ eichinvariant definiert werden kann:

Satz 8.5.3
Das Pfadintegral $\mathcal{I}_r(A)$ kann genau dann als eichinvariantes glattes Funktional auf $\mathcal{A}$ definiert werden, wenn das Determinantenbündel des Indexbündels trivial ist.
Dies ist nicht der Fall, wenn $X = S^n$, $G = SU(m)$, $\chi =$id und $m \geq n+1$.

Zum Beweis siehe [AS2, Theorems 4,5].

9 Die (analytische) Ray-Singer Torsion in der theoretischen Physik

9.1 Die Ray-Singer-Torsion in der topologischen Quantenfeldtheorie

Der Kürze halber werde ich in diesem Kapitel weder Herleitungen noch Konzepte der topologischen Quantenfeldtheorie darstellen (den Zugang zur topologischen Quantenfeldtheorie nach Hamilton verschweige ich), Motivationen der verwendeten Formeln werden also weitgehend weggelassen. Dies betrifft z.B. die Definition des *Chern-Simons-Lagrangian*; wichtig ist mir an dieser Stelle lediglich, daß eine Wirkung mit einem rein *topologischen* Lagrangian unter dem Pfadintegral auftauchen kann, die sogar gewisse Parallelen zu den bereits diskutierten Wirkungen zeigt. Wieso Pfadintegrale auch in der topologischen Quantenfeldtheorie eine Rolle spielen, kann man in der Fachliteratur nachlesen (siehe z.B. [At2]). Als Leitfaden für dieses Kapitel diente das Kapitel über Pfadintegrale im Buch von M. Atiyah über Knotentheorie [At2, §7].

Im folgenden seien X eine geschlossene orientierte reelle Drei-Mannigfaltigkeit, G eine kompakte Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathbf{g}$ und $\mathcal{A}$ der Raum der G-Zusammenhänge auf dem trivialen Bündel $X \times G \longrightarrow X$. Der Einfachheit halber wird $G = SU(n)$ gewählt. $\mathcal{A}$ ist ein affiner Raum und $\Lambda^1(X, \mathbf{g})$ in jedem $A \in \mathcal{A}$ sein Tangentialraum [BGV, Propositions 1.9, 1.12]. Die Krümmung Θ_A eines Zusammenhanges $A \in \mathcal{A}$ ist also eine Zweiform mit Werten in der Lie-Algebra $\mathbf{g}$, kann aber auf der Drei-Mannigfaltigkeit X auch als Einsform auf $\mathcal{A}$ aufgefaßt werden (Θ_A wird auf ein Element aus $T_A\mathcal{A} = \Lambda^1(X, \mathbf{g})$ angewandt, indem erst die Variablen der Lie-Algebra kontrahiert werden und danach über X integriert wird). Θ_A ist offenbar invariant unter der Operation der Eichgruppe $\mathcal{G}$ auf $\mathcal{A}$ und verschwindet entlang der Fasern $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{G}$, kann also auch als Einsform auf $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ aufgefaßt werden. Außerdem gilt $d\Theta = 0$. Wäre $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ einfach zusammenhängend, so würde daraus mit dem Poincaré-Lemma die Existenz einer Funktion $\vartheta \in \Lambda^0(X, \mathbf{g})$ mit $d\vartheta = \Theta$ folgen. Weil dies aber nicht der Fall ist, kann eine entsprechende Funktion auf $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ nicht definiert werden; man hat jedoch das **Chern-Simons-Funktional**

$$\forall\, A \in \mathcal{A}: \quad \mathcal{W}(A) := \frac{1}{4\pi} \int_X \operatorname{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \quad ,$$

das auf $\mathcal{A}$ die Rolle von ϑ übernehmen kann: Für jedes $\gamma \otimes \nu \in \Lambda^1(X, \mathbf{g}) = T_A\mathcal{A}$ ist

$$\begin{aligned} d\mathcal{W}_A(\gamma \otimes \nu) &= \frac{d}{dt} \mathcal{W}(A + t\,\gamma \otimes \nu)_{|t=0} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_X \operatorname{tr} \left(\gamma \otimes \nu \wedge dA + A \wedge d(\gamma \otimes \nu) + 2\gamma \otimes \nu \wedge A \wedge A \right) \\ &\overset{\text{Satz von Stokes}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_X \operatorname{tr} \left(\gamma \otimes \nu \wedge (dA + A \wedge A) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \Theta_A(\gamma \otimes \nu) \quad . \end{aligned} \tag{9.1.1}$$

$\mathcal{W}$ ist zwar invariant unter Operation der Komponente der Identität $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$, aber läßt man Elemente aus $\mathcal{G}/\mathcal{G}_0$ operieren, so verändert sich $\mathcal{W}$ um ganzzahlige Vielfache von 2π [At2, p.54]. Darum ist für $k \in \mathbb{Z}$ der Ausdruck $e^{ik\mathcal{W}(A)}$ auch auf $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ wohldefiniert. Witten definiert nun als topologische Invariante der Mannigfaltigkeit X das folgende Pfadintegral, das nicht von ungefähr große Ähnlichkeiten mit der Zustandssumme (8.2.1) hat:

$$Z(X) := \int_{\mathcal{A}} e^{ik\mathcal{W}(A)} \mathcal{D}\mathcal{A} \quad (k \in \mathbb{Z}) \tag{9.1.2}$$

[Wi2]. Obiges Z heißt auch **Witten-Invariante**. Wann und ob dieses Pfadintegral überhaupt definiert ist, soll an dieser Stelle nicht diskutiert werden (vergleiche [At2, p.54]). Weil weder Metrik noch Volumen in (9.1.2) vorkommen, handelt es sich tatsächlich um eine topologische Invariante. Nach Vergleich mit (8.1.3) ist klar, daß die natürliche Zahl k dem Inversen des Planckschen Wirkungsquantums entspricht, also $\hbar \to 0$ in (9.1.2) $k \to \infty$ bedeutet. Für große k kann man daher wie in Kapitel 8.2 davon ausgehen, daß der Hauptbeitrag in (9.1.2) von „klassischen Lösungen“, also stationären Punkten der Wirkung $\mathcal{W}$ kommt. In einem solchen stationären Punkt $A \in \mathcal{A}$ gilt aber wegen (9.1.1) $0 = d_A\mathcal{W} = \frac{1}{2\pi}\Theta_A$, d.h. A ist ein flacher Zusammenhang. A induziert somit eine Darstellung $\chi : \pi_1(X) \to G$, die *Holonomiedarstellung*. Im folgenden werde ich die stationären Punkte von $\mathcal{W}$ durch die zugehörigen Holonomiedarstellungen indizieren, also $A = A_\chi$. Jetzt kann wie in Kapitel 8.2 eine Taylorreihe von $\mathcal{W}$ um den stationären Punkt A_χ gebildet werden, und der Rechnung (9.1.1) entnimmt man

$$W(A_\chi + \delta A) = W(A_\chi) + \frac{1}{4\pi}\int_X \mathrm{tr}\,(\delta A \wedge d_\chi \delta A) + \text{ Terme höherer Ordnung} \quad ,$$

wobei $d_\chi := d_{A_\chi}$ die kovariante Ableitung bezüglich des Zusammenhanges A_χ bezeichnet. Weil nach Ansatz der dominante Teil des Pfadintegrales Z von den stationären Punkten A_χ kommen soll, genügt es, über „kleine“ Störungen $\alpha = \delta A$ zu integrieren, also über $\alpha \in \Lambda^1(X, \mathbf{g}_\chi)$, wobei $\mathbf{g}_\chi$ das zu χ assoziierte Bündel ist [At2, p.56].
Damit kann der Ausdruck für die Zustandssumme (9.1.2) umgeformt werden, nachdem eine Metrik auf X gewählt wurde („Eichung“):

$$\begin{aligned} Z &= \sum_\chi e^{ik\mathcal{W}(A_\chi)} \int_{\Lambda^1(X,\mathbf{g}_\chi)} e^{iQ_\chi(\alpha)}\mathcal{D}\alpha \,, \qquad (9.1.3)\\ \text{wobei } \forall\, \alpha \in \Lambda^1(X,\mathbf{g}_\chi):\ Q_\chi(\alpha) &:= \frac{1}{4\pi}\int_X \mathrm{tr}\,(\alpha \wedge d_\chi\alpha) = -\frac{1}{4\pi}\langle \alpha, *d_\chi\alpha\rangle \text{ und}\\ \forall\, \nu,\nu' \in \Lambda^1(X,\mathbf{g}):\ \langle \nu,\nu'\rangle &:= -\,\mathrm{tr}\int_X \nu \wedge *\nu' \end{aligned}$$

(dabei wurde $*^2 = 1$ auf der ungeraddimensionalen Mannigfaltigkeit X verwendet [Go, p.70]).
Die Witten-Invariante Z soll mit Hilfe von (9.1.3) regularisiert werden, und zwar möglichst so, daß der regularisierte Ausdruck genau wie Z rein topologischer Natur ist.
Die quadratische Form Q_χ ist durch den selbstadjungierten Operator $- * d_\chi$ gegeben, wobei d_χ als Randoperator des de Rham-Komplexes über X mit Werten in $\mathbf{g}_\chi$ aufgefaßt werden kann; weil A_χ flach ist, gilt $d_\chi^2 = 0$. Für das folgende sei vorausgesetzt, daß χ eine irreduzible isolierte (also *nicht degenerierte*) Darstellung ist, dann verschwindet nämlich obige de Rham-Kohomologie: $H^*(X, \mathbf{g}_\chi) = 0$ [At2, p.57]. In diesem Fall verschwindet die Form Q_χ genau auf $d_\chi\Lambda^0(X, \mathbf{g}_\chi)$, ist also degeneriert. Eine Parallele zu den Termen $W_2(\delta g)$, wie ich sie in Kapitel 8.2 diskutiert habe, ist erkennbar; diese waren zwar nicht rein topologischer Natur, aber das Phänomen bleibt dasselbe: Es muß in $\Lambda^1(X, \mathbf{g}_\chi)$ für jede Klasse von $\Lambda^1(X, \mathbf{g}_\chi)/d_\chi\Lambda^0(X, \mathbf{g}_\chi)$ ein Repräsentant fixiert werden, um insgesamt eine konvergente Größe zu erhalten. Dabei wird die Jacobi-Determinante der Projektion auf $\Lambda^1(X, \mathbf{g}_\chi)/d_\chi\Lambda^0(X, \mathbf{g}_\chi)$ einen zusätzlichen Faktor erzeugen. Formal kann man schreiben (ich löse mich hier von M. Atiyahs Darstellung [At2]):

$$\int_{\Lambda^1(X,\mathbf{g}_\chi)} e^{iQ_\chi(\alpha)}\mathcal{D}\alpha = \int_{\Lambda^1(X,\mathbf{g}_\chi)/d_\chi\Lambda^0(X,\mathbf{g}_\chi)} e^{iQ_\chi(\alpha')}\mathcal{D}\alpha' \int_{d_\chi\Lambda^0(X,\mathbf{g}_\chi)} \mathcal{D}\alpha'' \quad .$$

Das erste Integral ist ein Gauß-Integral, und weil Q_χ auf $\Lambda^1(X,\mathbf{g}_\chi)/d_\chi\Lambda^0(X,\mathbf{g}_\chi)$ nicht degeneriert ist, kann es mit genau den Methoden, die ich in Kapitel 8.2 für die Regularisierung von (8.2.4) angegeben habe, berechnet werden. Weil $-*d_\chi$ im Gegensatz zu dem dort betrachteten Operator auch negative Eigenwerte haben kann, sieht die Formel ein wenig anders aus:

$$\left(\int_{\Lambda^1(X,\mathbf{g}_\chi)/d_\chi\Lambda^0(X,\mathbf{g}_\chi)} e^{iQ_\chi(\alpha')}\mathcal{D}\alpha'\right)_{\text{reg}} = |\det Q_\chi|^{-\frac{1}{2}}\, e^{\frac{\pi i}{4}\,\text{sgn}\,Q_\chi} \quad .$$

Das Maß unterm Pfadintegral wurde hier mit einem Faktor $(\sqrt{\pi})^{-1}$ in jeder „Koordinatenrichtung“ skaliert [At2, p.57]; mit anderen Worten: Die Normierungskonstante κ in Kapitel 8.2 ist $(\sqrt{\pi})^{-1}$.
Das zweite Integral ergibt nach dem Transformationssatz

$$\int_{d_\chi\Lambda^0(X,\mathbf{g}_\chi)} \mathcal{D}\alpha'' = \int_{\Lambda^0(X,\mathbf{g}_\chi)} \left(\det\left(d_\chi^* d_\chi\right)_{|\Lambda^0(X,\mathbf{g}_\chi)}\right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{D}\alpha'' \quad .$$

Dieses Integral kann „normalisiert“ werden, indem man die verbleibende Integration einfach wegläßt (vergleiche [At2, p.58]). Mit $\det\left(d_\chi^* d_\chi\right)_{|\Lambda^0(X,\mathbf{g}_\chi)} = \det\Delta_0$ ergibt sich insgesamt:

$$\left(\int_{\Lambda^1(X,\mathbf{g}_\chi)} e^{iQ_\chi(\alpha)}\mathcal{D}\alpha\right)_{\text{reg}} = \frac{(\det\Delta_0)^{\frac{1}{2}}}{|\det Q_\chi|^{\frac{1}{2}}}\, e^{\frac{\pi i}{4}\,\text{sgn}\,Q_\chi} \quad . \tag{9.1.4}$$

Ich berechne zunächst den *Betrag* dieses regularisierten Integrales:
Dafür sei $D_\chi^- : \Lambda^-(X,\mathbf{g}_\chi) \to \Lambda^+(X,\mathbf{g}_\chi)$ definiert durch $D_\chi^- := \left(d_\chi + d_\chi^*\right)_{|\Lambda^-(X,\mathbf{g}_\chi)}$ (vergleiche Lemma 3.1.2). Außerdem setze ich $\varepsilon_{|\Lambda^p(X,\mathbf{g}_\chi)} := (-1)^{[(p+1)/2]}$. Der Operator $\delta_\chi : \Lambda^0(X,\mathbf{g}_\chi)\oplus\Lambda^1(X,\mathbf{g}_\chi) \to \Lambda^0(X,\mathbf{g}_\chi)\oplus\Lambda^1(X,\mathbf{g}_\chi)$ sei nun nach Identifikation von $\Lambda^0(X,\mathbf{g}_\chi)$ mit $\Lambda^3(X,\mathbf{g}_\chi)$ via $*$ durch $\varepsilon D_\chi^- *$ definiert, also

$$\begin{array}{rcccccc}
\forall\,\nu\in\Lambda^0(X,\mathbf{g}_\chi): & \delta_\chi(\nu) & := & \varepsilon\,D_\chi^- *^2(\nu) & = & \varepsilon\,d_\chi\nu & = & -\,d_\chi\nu \quad , \\
\forall\,\nu\in d_\chi\Lambda^0(X,\mathbf{g}_\chi): & \delta_\chi(\nu) & := & *\varepsilon\,D_\chi^- *(\nu) & = & *d_\chi*\nu & = & -\,d_\chi^*\nu \quad , \\
\forall\,\nu\in(d_\chi\Lambda^0(X,\mathbf{g}_\chi))^\perp: & \delta_\chi(\nu) & := & \varepsilon\,D_\chi^- *(\nu) & = & -*d_\chi*^2\nu & = & -*d_\chi\nu
\end{array}$$

(hier habe ich $*^2=1$ [Go, p.70] sowie $(d_\chi^*)_{|\Lambda^p(X,\mathbf{g}_\chi)} = (-1)^p * d_\chi *$ [Go, (2.8.7)] verwendet, da $\dim_{\mathbb{R}} X \equiv 1 \bmod 2$).
Der Operator δ_χ wird demnach auf $\Lambda^0(X,\mathbf{g}_\chi)\oplus d_\chi\Lambda^0(X,\mathbf{g}_\chi)\oplus(d_\chi\Lambda^0(X,\mathbf{g}_\chi))^\perp$ beschrieben durch die Matrix

$$\delta_\chi = \begin{pmatrix} 0 & -d_\chi^* & 0 \\ -d_\chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -*d_\chi \end{pmatrix} \quad .$$

Weil Q_χ durch $-*d_\chi$ gegeben ist, liefert dies

$$(\det\Delta_0)\,|\det Q_\chi| = \det\left(d_\chi^* d_\chi\right)_{|\Lambda^0(X,\mathbf{g}_\chi)} |\det Q_\chi| = |\det\delta_\chi| \;, \quad \text{sgn}\;Q_\chi = \text{sgn}\;\delta_\chi \;, \tag{9.1.5}$$

und mit

$$\delta_\chi^2 = \begin{pmatrix} d_\chi^* d_\chi & 0 & 0 \\ 0 & d_\chi d_\chi^* & 0 \\ 0 & 0 & *d_\chi * d_\chi \end{pmatrix} = \Delta_0 \oplus \Delta_1$$

auf $\Lambda^0(X, \mathbf{g}_\chi) \oplus \Lambda^1(X, \mathbf{g}_\chi)$ folgt unter Verwendung von $\Delta * = *\Delta$ mit $* : \Lambda^p(X, \mathbf{g}_\chi) \to \Lambda^{3-p}(X, \mathbf{g}_\chi)$:

$$\begin{aligned} \frac{(\det \Delta_0)^{\frac{1}{2}}}{|\det Q_\chi|^{\frac{1}{2}}} &= \frac{\det \Delta_0}{|\det \delta_\chi|^{\frac{1}{2}}} &&= \frac{(\det \Delta_0)^{3/4}}{(\det \Delta_1)^{1/4}} \\ &= \left(\frac{(\det \Delta_3)^3 \det \Delta_1}{(\det \Delta_2)^2} \right)^{\frac{1}{4}} &&= \tilde{\tau}_\chi^{1/2} \quad , \end{aligned} \tag{9.1.6}$$

wobei $\tilde{\tau}_\chi$ die *Ray-Singer-Torsion* auf reellen Mannigfaltigkeiten bezeichnet, wie ich sie in Bemerkung 3.2.2 ii. eingeführt habe. $\tilde{\tau}_\chi$ ist unabhängig von der Metrik, falls die Kohomologie $H^*(X, \mathbf{g}_\chi)$ verschwindet [RS1, Theorem 2.1], und dies ist ein gutes Argument für die Brauchbarkeit der Definition (9.1.2): Mit dieser Definition kann der Betrag von $Z(X)$ für $k \to \infty$ regularisiert werden, und das Ergebnis ist unabhängig von der Metrik (dies ist nicht selbstverständlich, obwohl Z ohne Verwendung der Metrik definiert wurde, denn für die Regularisierung wurde die Metrik benutzt).
Um die *Phase* des Integrales aus (9.1.4) zu berechnen, muß in Analogie zur Definition 3.1.1 der Zetafunktion eine *Etafunktion* eingeführt werden. Seien dazu $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ die mit ihren Multiplizitäten gezählten positiven Eigenwerte von δ_χ, dann kann man für Re $s \gg 0$

$$\eta_\chi(s) := \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^{-s} \operatorname{sgn} \lambda_j$$

definieren und diese Funktion nach ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortsetzen, so daß die Fortsetzung in $s = 0$ analytisch ist [APS]. Mit Hilfe der Etafunktion ist die Regularisierung

$$(\operatorname{sgn} \delta_\chi)_{\text{reg}} := \eta_\chi(0)$$

möglich, und man erhält wegen (9.1.5) $(\operatorname{sgn} Q_\chi)_{\text{reg}} = \eta_\chi(0)$. Damit ist $(\operatorname{sgn} Q_\chi)_{\text{reg}}$ jedoch nicht unabhängig von der Metrik; ist η_1 nämlich die entsprechende Etafunktion zur trivialen Darstellung von $\pi_1(X)$, dann kann man zeigen, daß $\tilde{\eta}_\chi(0) := \eta_\chi(0) - \dim(G)\eta_1(0) = \frac{4}{\pi} c(G) \mathcal{W}(A_\chi)$ (mit einer Konstanten $c(G)$, die nur von der Gruppe G abhängt) unabhängig von der Metrik ist [At2, p.62]. Dies zusammen mit (9.1.6) ergibt in (9.1.4)

$$\left(\int_{\Lambda^1(X, \mathbf{g}_\chi)} e^{iQ_\chi(\alpha)} \mathcal{D}\alpha \right)_{\text{reg}} = \tilde{\tau}_\chi^{1/2} \, e^{ic(G)\mathcal{W}(A_\chi)} \, e^{\frac{\pi i}{4} \dim(G) \eta_1(0)} \quad .$$

Mit (9.1.3) folgt daraus

$$Z_{\text{reg}} = \sum_\chi C_k \, \tilde{\tau}_\chi^{1/2} \, e^{i[c(G)+k]\mathcal{W}(A_\chi)} \quad ,$$

wobei C_k von k und der Metrik abhängt, während alle anderen Terme von der Metrik unabhängig sind.
Das Ziel, die Invariante $Z(X)$ so zu regularisieren, daß auch die Regularisierung rein topologischer Natur ist, kann also nur „fast" erreicht werden; die Regularisierung der Phase ist nicht unabhängig von der Metrik.

9.2 Die analytische Ray-Singer-Torsion in der Stringtheorie

Da nach dem bisher Gesagten die *reelle* Torsion und *reelle* Determinanten in Pfadintegralen der Quantenfeldtheorie auftauchen, mag man schon vermuten, wo die *komplexe* Torsion zu finden ist: Sie tritt in Pfadintegralen der Stringtheorie in Verbindung mit Supersymmetrie auf, wie ich im folgenden darstellen werde.
In diesem Kapitel muß ich mich mehr noch als in den vorhergehenden darauf beschränken, aus der Fachliteratur zu zitieren und nur einige wenige Rechnungen einzufügen.
Die *supersymmetrischen Sigma-Modelle* sind diejenigen Theorien, in denen man die Rolle der analytischen Ray-Singer-Torsion am besten versteht. Solche Theorien führen auf Kähler-Mannigfaltigkeiten zu $N = 2$ *Quantenfeldtheorien* [AF], d.h. man hat vier Superladungen, zwei *linkshändige* $G^{\pm}$ und zwei *rechtshändige* $\bar{G}^{\pm}$, sowie zwei $U(1)$-Ströme. Die Superladungen erfüllen die Relationen

$$\left(G^{\pm}\right)^2 = 0, \quad \left\{G^+, G^-\right\} = 2H_L, \quad \left\{G^{\pm}, H_L\right\} = 0 \quad , \tag{9.2.1}$$

wobei H_L der *linkshändige Hamiltonian* ist. Für die rechtshändigen Superladungen gelten analoge Relationen. X bezeichne im folgenden die Kähler-Mannigfaltigkeit, auf der die Theorie leben soll, entgegen der bisher verwendeten Bezeichnung soll n die *komplexe Dimension* von X sein (denn die Variable N ist schon belegt). Außerdem sei auf X eine Spinstruktur mit Spin-Zusammenhang gewählt. ω bezeichne die Kählerklasse von X, die bezüglich lokaler holomorpher Koordinaten die Koeffizienten $\omega_{i\bar{\jmath}}$ habe.
Für das supersymmetrische Sigma-Modell ist die Wirkung durch

$$\mathcal{W} = \int_X \left(\omega_{i\bar{\jmath}} \partial X^i \overline{\partial} \bar{X}^j + \omega^*_{i\bar{\jmath}} \overline{\partial} X^i \partial \bar{X}^j\right) d^2 z + \text{ fermionische Terme} \tag{9.2.2}$$

gegeben [BCOV2, §2.2].
Als nächstes muß die supersymmetrische Theorie *getwistet* werden, um aus ihr eine *topologische* Theorie zu machen [CV, §3.3]: Das halbe Potential des Hintergrund Spin-Zusammenhanges wird an die $U(1)$-Ströme gekoppelt, wodurch der Spin geladener Felder um $\frac{1}{2}$ verschoben und die Superladung $Q^+ = G^+ + \bar{G}^+$ skalar wird. Die *Observablen* sind dann diejenigen Operatoren, die mit Q^+ kommutieren, und erzeugen den *chiralen Ring*. Formal rechnet man also in einer Q^+-Kohomologie im Raum der Quantenoperatoren. Der konjugierte Twist führt entsprechend auf eine sogenannte *antitopologische* Theorie, in diesem Fall wird die Superladung $Q^- = G^+ + \bar{G}^-$ skalar und die Observablen erzeugen den *antichiralen Ring*. Beim topologischen Twist spricht man auch vom **A-Modell** oder

Kähler-Twist, während der antitopologische Twist zum **B-Modell** oder **komplexen Twist** führt.
Hat man eine Basis $\{\alpha_j\}$ von $H^{(1,1)}(X,\mathbb{Z})$ gewählt, dann kann die Kählerform durch eine Linearkombination $\omega = \sum_j t^j \alpha_j$ dargestellt werden. Die Koeffizienten t^j werden im folgenden verwendet, um den Modulraum der Kählermetriken auf X zu parametrisieren. Es soll damit einer der Grenzwerte $t^j \to \infty$ oder $\bar{t}^j \to \infty$ betrachtet werden. Hierbei ist zu beachten, daß die Wirkung $\mathcal{W}$ nicht holomorph in den t^j ist, andernfalls wäre der Limes für $t^j \to \infty$ unabhängig von der Hintergrundmetrik. Die sogenannte *holomorphe Anomalie* [BCOV2, §3] führt dazu, daß t^j und $\bar{t}^j$ als unabhängige Parameter des Modulraumes angesehen werden müssen (vergleiche [BCOV2, §5]). Mit $t^j \to \infty$ bzw. $\bar{t}^j \to \infty$ wird nun der Limes der (anti-)topologischen Theorie für große Volumina gebildet, der nur noch Beiträge vom Rand des Modulraumes enthalten kann. Mit anderen Worten: Betrachtet man z.B. die Wirkung (9.2.2) des Sigma-Modells, dann ist klar, daß im Grenzwert $t^j \to \infty$ nur noch über antiholomorphe Felder und im Grenzwert $\bar{t}^j \to \infty$ nur noch über holomorphe Felder integriert werden darf, weil $\mathcal{W}$ andernfalls divergieren würde. Man kann zeigen, daß der Propagator für die Theorie im Grenzwert eine Projektion auf die Grundzustände ist (vergleiche Kapitel 3.1: Mit $P^t_{p,q} := e^{-t\Delta_{p,q}}$ konvergiert $P^t_{p,q} \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} P_{p,q}$, wobei $P_{p,q}$ die orthogonale Projektion auf die harmonischen Formen vom Typ (p,q) ist [MR]). Man erhält auf diese Weise zwei verschiedene "kanonische" Basen für die Vakuumzustände [CV, §3.1]: Eine aus dem topologischen und eine aus dem antitopologischen Grenzwert. Die Matrix, welche die topologische Basis in die antitopologische überführt, definiert jetzt eine *hermitesche Metrik* auf dem Hilbertraum der Theorie [CV, §3.1]. Die oft zitierten *tt^*-Gleichungen* kann man als Krümmungsgleichungen für diese hermitesche Metrik verstehen.
Es lassen sich eine Reihe von Parallelen zwischen getwisteten $N=2$ Theorien und *bosonischen* Stringtheorien ziehen [BCOV2, §2.4], wobei die chiralen Felder mit den Bosonen in Analogie zu setzen sind. Soll die $N=2$ Theorie mit der Gravitation gekoppelt werden, so kann aus solchen Analogieschlüssen ein Ansatz für die **Ein-Schleifen-String-Zustandssumme** F_1 gemacht werden; dies – wie schon in Kapitel 8.2 für die Ein-Schleifen-Quantengravitation (ohne String!) angedeutet – ist die Summe über alle Feynman-Diagramme mit einer Schleife, also über alle Tori, wenn man der Stringtheorie Rechnung trägt. Daß diese Zustandssumme als Pfadintegral über den Modulraum $\mathcal{F}$ des Torus angegeben werden kann, ist daher nicht verwunderlich. Ich werde unten die für das Sigma-Modell relevanten Operatoren in die folgende Formel (9.2.3) einsetzen; dann wird auch deutlich, daß das Pfadintegral vom selben Typ ist wie die bereits betrachteten:

$$F_1 = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{F}} \mathrm{tr}\, \left[(-1)^F F_L F_R q^{H_L} \bar{q}^{H_R}\right] \frac{dxdy}{y} \quad , \tag{9.2.3}$$

wobei über $z \in \mathcal{F}$, den Modulraum des Torus (und somit den Fundamentalbereich von $SL(2,\mathbb{Z})$), integriert wird mit $z = x + iy$ und $q := e^{2\pi i z}$; die Spur wird über den Hilbertraum der Theorie gebildet, und $F_{R,L}$ gibt die Anzahl der rechts- bzw. linkshändigen

Fermionen an mit $F := F_L - F_R$ [BCOV2, (2.37)]. Daß (9.2.3) tatsächlich die Korrekturterme zweiter Ordnung der Zustandssumme für das B-Modell im Limes $\bar{t}^j \to \infty$ angibt, haben M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri und C. Vafa gezeigt [BCOV2, §5].
Eine etwas andere Motivation für (9.2.3) geben S. Cecotti und C. Vafa an [CV]: Für das eindimensionale Sigma-Modell stimmen die oben erwähnten tt^*-Gleichungen mit den Spin-Korrelationsfunktionen im *Ising-Modell* überein. F_1 korrespondiert dann zu der im Ising-Modell zentralen *τ-Funktion* (in welcher Weise, erläutere ich am Ende dieses Kapitels), die auch als Determinante eines Dirac-Operators definiert werden kann [CV, §2.1].
Im folgenden soll nur noch das Sigma-Modell ($N = 2$) auf einer Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit X (siehe Bemerkung 2.3.6) mit B-Twist im Limes $\bar{t}^j \to \infty$ betrachtet werden. Dies ist die **quantisierte Kodaira-Spencer-Theorie**. Der Hilbertraum dieser Theorie besteht aus den quadratintegrierbaren (p,q)-Formen mit Werten in E_χ, dem zu einer unitären Darstellung $\chi : \pi_1(X) \to GL(V)$ assoziierten Bündel (siehe Bemerkung 3.2.2 i.) [CV, §6.3],[BCOV2, §2.1]. Man hat $G^+ = \frac{1}{2}\left(\overline{\partial}^* + \partial\right)$ und $\bar{G}^- = \frac{1}{2}\left(\overline{\partial} - \partial^*\right)$ [BCOV2, (2.7)], so daß wegen (9.2.1)

$$2H_L = \frac{1}{4}\left\{\overline{\partial}^* + \partial, \overline{\partial} + \partial^*\right\} = \frac{1}{4}\left\{\overline{\partial}^*, \overline{\partial}\right\} + \frac{1}{4}\left\{\partial, \partial^*\right\} \overset{(6.6.5)}{=} \frac{1}{2}\Delta_{\overline{\partial}}$$

und analog $2H_R = \frac{1}{2}\Delta_{\overline{\partial}} = \frac{1}{2}\Delta$ in meiner bisherigen Notation. Auf $\Lambda^{p,q}(T^*X)$ ist im B-Modell $F_{L,R} = \frac{1}{2}\left(iL - i\Lambda \pm (p-q)\right)$, wobei $L : \Lambda^{p,q}(T^*X) \to \Lambda^{(p+1,q+1)}(T^*X)$ durch $\nu \mapsto \omega \wedge \nu$ gegeben und Λ der zu L adjungierte Operator ist [BCOV2, (2.8)]. Also folgt $F = p - q$, und ich erhalte aus (9.2.3) für die **Ein-Schleifen-String-Zustandssumme $F_1^{\overline{\infty}}$ der quantisierten Kodaira-Spencer-Theorie** mit

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1^{\overline{\infty}} + \mathcal{O}\left((\sum_j \bar{t}^j)^{-1}\right) \quad \text{für } \bar{t}^j \to \infty \qquad (9.2.4)\\ F_1^{\overline{\infty}} &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{F}} \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \operatorname{tr}\left(\left(-(L-\Lambda)^2 - (p-q)^2\right) e^{\frac{\pi i}{2} z \Delta_{p,q}}\, e^{-\frac{\pi i}{2}\bar{z}\Delta_{p,q}}\right) \frac{dxdy}{y}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{p,q}(-1)^{p+q}\int_{\mathcal{F}} \operatorname{tr}\left(\left(L\Lambda + \Lambda L - (p-q)^2\right) e^{-\pi y \Delta_{p,q}}\right)\frac{dxdy}{y} \quad . \end{aligned}$$

Definiert man auf $\Lambda^*(T^*X)$ den Operator h, der auf $\Lambda^{p,q}(T^*X)$ durch Multiplikation mit $n - (p+q)$ operieren soll, so gilt

$$[\Lambda, L] = h, \quad [h, L] = -2L, \quad [h, \Lambda] = 2\Lambda$$

[GH, p.121], d.h. $\Lambda^*(T^*X)$ trägt eine $sl(2)$-Darstellung; deswegen kann unter der Spur $h^2 = L\Lambda + \Lambda L$ gesetzt werden [Hu, Example 6.2]. Dies liefert:

$$F_1 = \frac{1}{2}\sum_{p,q}(-1)^{p+q}\left((n-(p+q))^2 - (p-q)^2\right)\int_{\mathcal{F}} \operatorname{tr}\left(e^{-\pi y \Delta_{p,q}}\right)\frac{dxdy}{y} \quad . \qquad (9.2.5)$$

Durch Integration über den bekannten Fundamentalbereich von $SL(2,\mathbb{Z})$ erhalte ich zunächst

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{F}} \operatorname{tr}\left(e^{-\pi y \Delta_{p,q}}\right) \frac{dx\,dy}{y} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \operatorname{tr}\left(e^{-\pi y \Delta_{p,q}}\right) \frac{dy\,dx}{y} \\ &\overset{\vartheta := \pi y}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\pi\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \operatorname{tr}\left(e^{-\vartheta \Delta_{p,q}}\right) \frac{d\vartheta}{\vartheta}\, dx \quad . \end{aligned} \tag{9.2.6}$$

M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri und C. Vafa geben nun für das Weitere die etwas dubiose Formel

$$\log \tau_p(X) = \sum_q \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{\vartheta} \operatorname{tr}\left[(-1)^q q e^{-\vartheta \Delta_{p,q}}\right] d\vartheta \tag{9.2.7}$$

für die analytische Ray-Singer-Torsion an [BCOV2, (5.28)] (vergleiche [Ha, §5]), die (9.2.5) mit Hilfe von (9.2.6) natürlich sofort stark vereinfacht. Das innere Integral in (9.2.6) hat zwar gewisse Ähnlichkeiten mit (9.2.7), aber daß diese Formel hier tatsächlich eingesetzt werden darf, bedarf zumindest noch einer Diskussion:
Mit einer zu (8.3.7) analogen Rechnung erhalte ich (dabei habe ich lediglich die Integralgrenzen 1 durch ein $\varepsilon > 0$ ersetzt, von 2 auf n komplexe Dimensionen verallgemeinert und der Einfachheit halber k beliebig groß angenommen; wie immer sind $\alpha_j^{(p,q)}$ die Koeffizienten aus der asymptotischen Entwicklung des Wärmeleitungskernes zu $\Delta_{p,q}$ um $t = 0$):

$$\begin{aligned}\zeta'_{p,q}(0) &= \lim_{s\to 0}\Bigg[\frac{d}{ds}\Bigg\{\left(1+\gamma s+\mathcal{O}(s^2)\right)\alpha_n^{(p,q)}\,\varepsilon^s \\ &\qquad + \left(s+\gamma s^2+\mathcal{O}(s^3)\right)\sum_{\substack{j=0\\ j\neq n}}^{\infty}\frac{\alpha_j^{(p,q)}}{j+s-n}\,\varepsilon^{j-n+s}\Bigg\} \\ &\qquad + \int_{\varepsilon}^{\infty}\vartheta^{s-1}\operatorname{tr}\left(e^{-\vartheta\Delta_{p,q}}\right)d\vartheta\Bigg] \\ &= \gamma\alpha_n^{(p,q)} + \alpha_n^{(p,q)}\log\varepsilon + \sum_{\substack{j=0\\ j\neq n}}^{\infty}\frac{\alpha_j^{(p,q)}}{j-n}\,\varepsilon^{j-n} + \int_{\varepsilon}^{\infty}\vartheta^{-1}\operatorname{tr}\left(e^{-\vartheta\Delta_{p,q}}\right)d\vartheta \quad .\end{aligned}$$

Dies setze ich in (9.2.6) ein und erhalte:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{F}} \operatorname{tr}\left(e^{-\pi y \Delta_{p,q}}\right) \frac{dx\,dy}{y} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Bigg\{\zeta'_{p,q}(0) - \alpha_n^{(p,q)}\left(\gamma + \log(\pi\sqrt{(1-x^2)})\right) \\ &\qquad - \sum_{\substack{j=0\\ j\neq n}}^{\infty}\frac{\alpha_j^{(p,q)}}{j-n}\left(\pi\sqrt{(1-x^2)}\right)^{j-n}\Bigg\}\, dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \zeta'_{p,q}(0) - \alpha_n^{(p,q)} \left(\gamma + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log(\pi \sqrt{(1-x^2)}) dx \right) \\
& - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq n}}^{\infty} \frac{\alpha_j^{(p,q)}}{j-n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\pi \sqrt{(1-x^2)} \right)^{j-n} dx \quad .
\end{aligned}
$$

Seien nun

$$
C_1 := \gamma + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log(\pi \sqrt{(1-x^2)}) dx \quad , \quad C_2 := \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\pi \sqrt{(1-x^2)} \right)^{j-n} dx \quad ,
$$

dann folgt aus (9.2.5) mit Lemma 3.1.2 und wegen $\zeta_{p,q} = \zeta_{q,p}$ für alle p, q, da der Laplace-Operator mit der komplexen Konjugation vertauscht,

$$
\begin{aligned}
F_1^{\overline{\infty}} &= \frac{1}{2} \sum_{p,q=0}^{n} (-1)^{p+q} \left(n^2 - 2n(p+q) + 4pq \right) \left\{ \zeta'_{p,q}(0) - C_1 \alpha_n^{(p,q)} - C_2 \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq n}}^{\infty} \frac{\alpha_j^{(p,q)}}{j-n} \right\} \\
&= 2 \sum_{p=0}^{n} (-1)^p p \sum_{q=0}^{n} (-1)^q q \left\{ \zeta'_{p,q}(0) - C_1 \alpha_n^{(p,q)} - C_2 \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq n}}^{\infty} \frac{\alpha_j^{(p,q)}}{j-n} \right\} \quad .
\end{aligned}
$$

Setzt man nun

$$
\beta_j^{(p)} := \sum_{q=0}^{n} (-1)^q q \; \alpha_j^{(p,q)}
$$

und verwendet Definition 3.2.1, so ergibt dies

$$
F_1^{\overline{\infty}} = 2 \sum_{p=0}^{n} (-1)^p p \log \tau_p(X) - 2 \sum_{p=0}^{n} (-1)^p p \left\{ C_1 \beta_n^{(p)} + C_2 \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq n}}^{\infty} \frac{\beta_j^{(p)}}{j-n} \right\} \quad . \tag{9.2.8}
$$

Da M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri und C. Vafa im Gegensatz zur Definition der analytischen Torsion mit der Regularisierung (9.2.7) arbeiten, taucht in deren Ergebnis die zweite Summe in (9.2.8) überhaupt nicht auf. Der Fehler, den sie damit vernachlässigen, ist aber ein Term, der von der Metrik abzuhängen scheint (und das wäre fatal), denn er enthält ja die Koeffizienten der asymptotischen Entwicklung des Wärmeleitungskernes. Damit für F_1 die Anomalienformel angewandt werden darf, wie M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri und C. Vafa es tun, muß demnach noch gezeigt werden, daß die zweite Summe in (9.2.8) von der Metrik unabhängig ist.
Immerhin sind fast alle $\beta_j^{(p)}$ unabhängig von der Metrik: Zunächst zeigt man mit Hilfe der Definition von $\zeta_{p,q}$ und der asymptotischen Entwicklung des Wärmeleitungskernes zu $\Delta_{p,q}$ um $t = 0$, daß

$$
\beta_j^{(p)} = \operatorname{res}_{s = n-j} \left(\Gamma(s) \sum_{q=0}^{n} (-1)^q q \zeta_{p,q}(s) \right) + \delta_{jn} \sum_{q=0}^{n} (-1)^q q h^{p,q} \quad .
$$

Ist nun (g^ε) eine glatte Familie von Kähler-Metriken auf X, dann folgt aus den Beweisen von Lemma 6.1.1 und Satz 6.2.2 mit den dortigen Bezeichnungen:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\beta^{(p)}_{j,\varepsilon} = (n-j)\left(M_{j-n,\varepsilon} + \delta_{jn}\operatorname{tr}_S(\alpha P^\varepsilon_{p,\cdot})\right) \quad .$$

Unter Verwendung der Darstellung von $M_{k,\varepsilon}$ für $k \leq 0$ nach J.-M. Bismut, H. Gillet und C. Soulé [BGSIII, Theorem 1.22] folgt

$$\text{für } j < n-1 \text{ oder } j = n : \quad \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\beta^{(p)}_{j,\varepsilon} = 0 \quad ,$$

und für eine φ-Variation (g^ε) einer Kähler-Metrik g (Ω^ε sei die Krümmungsform von (X, g^ε) und R^ε_p die Krümmungsform von $\Lambda^{p,0}(T^*X) \otimes E_X$):

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\beta^{(p)}_{n-1,\varepsilon} = -\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \frac{i}{2}\int_X \frac{i}{2}\,\partial\overline{\partial}\varphi\,\overline{\mathrm{Td}}(-\Omega^\varepsilon)\,\overline{\mathrm{ch}}(-R^\varepsilon_p) = 0 \quad ,$$

da X kompakt ist. $\beta^{(p)}_j$ mit $j \leq n, j \neq n-1$ ist somit von der Metrik unabhängig und für $j = n-1$ lediglich von der Kählerklasse abhängig. Der Dolbeaut-Laplace-Operator ist skalenkovariant [Be2, 1.159], d.h. unter Skalierung der Metrik g verhalten sich die Koeffizienten $\alpha^{(p,q)}_j = \alpha^{(p,q)}_j(g)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} & \alpha^{(p,q)}_j(\lambda g) &=& \lambda^{n-j}\alpha^{(p,q)}_j(g) \\ \Longrightarrow \quad & \beta^{(p)}_j(\lambda g) &=& \lambda^{n-j}\beta^{(p)}_j(g) \quad . \end{aligned} \tag{9.2.9}$$

Da jedoch $\beta^{(p)}_j$ für $j < n-1$ nach obigem von der Metrik unabhängig ist, folgt hieraus $\beta^{(p)}_j = 0$ für $j < n-1$.
Für die Koeffizienten $\beta^{(p)}_j$ mit $j \geq n$ kommt offenbar zum Tragen, daß im Limes $\bar{t}^j \to \infty$ gerechnet, also der Limes für große Volumina betrachtet wird: $\alpha^{(p,q)}_j$ mit $j > n$ verschwindet wegen (9.2.9) im topologischen Limes, d.h. auch für $j > n$: $\beta^{(p)}_j = 0$.
Insgesamt ist gezeigt, daß sich die zweite Summe in (9.2.8) auf

$$2\sum_{p=0}^{n}(-1)^p p\left(C_1\beta^{(p)}_n - C_2\beta^{(p)}_{n-1}\right)$$

reduziert, wobei $C_1\beta^{(p)}_n$ von der Metrik unabhängig und $C_2\beta^{(p)}_{n-1}$ nur von der Kählerklasse abhängig ist. Auf Konstanten (im Modulraum, also von der Metrik unabhängige Größen) kommt es aber bei der Definition von F_1 überhaupt nicht an [BCOV1, p.280]: Eigentlich interessiert ohnehin nur die Ableitung dieser Funktion, ihre *Anomalie* also (siehe unten). Wie die verbleibende Abhängigkeit von $\beta^{(p)}_{n-1}$ von der Kählerklasse im allgemeinen wegzudiskutieren ist, bleibt leider unklar. Für $n = 1$ ist insbesondere $\alpha^{1,1}_0(g) = \frac{1}{4\pi}\mathrm{vol}_g(X)$ [Gi, Theorem 4.1.18(a)], der von der Metrik abhängige Term also

$$-2C_2\beta^{(1)}_0 = \frac{C_2}{2\pi}\mathrm{vol}_g(X) \quad ,$$

ein Ausdruck, dem man die Abhängigkeit von der Metrik direkt ansieht. Für $n = 2$ kann man jedoch zeigen, daß alle Koeffizienten $\beta_{n-1}^{(p)}$ verschwinden, sofern man eine Kähler-Einstein-Metrik gewählt hat (Lemmata 3.1.2 und 6.6.4 verwenden!). Dies beweist immerhin in zwei komplexen Dimensionen die Unabhängigkeit von $\beta_{n-1}^{(p)}$ von der Metrik, da ja nach dem Calabi-Yau Theorem [Ya, Theorem 2] in jeder Kählerklasse von X genau eine Kähler-Einstein-Metrik existiert und nach dem oben gezeigten $\beta_{n-1}^{(p)}$ nur von der Kählerklasse abhängt. Auf höhere komplexe Dimensionen läßt sich dieser Beweis jedoch nicht ohne weiteres verallgemeinern. Das in der Physik gebräuchliche Argument für die Unabhängigkeit der Koeffizienten $\beta_{n-1}^{(p)}$ von der Metrik beruft sich darauf, daß sie wegen (9.2.9) im topologischen Limes offenbar unendlich werden.
Mit (nahezu) gutem Gewissen kann demnach aus (9.2.8) und (9.2.4) gefolgert werden:

$$F_1^{\chi} := F_1 = 2\sum_p (-1)^p p \log \tau_p^{\chi}(X) + C + \mathcal{O}\left((\sum_j \bar{t}^j)^{-1} \right) \text{ für } \bar{t}^j \to \infty \quad , \qquad (9.2.10)$$

wobei die Verzierungen mit χ daran erinnern sollen, daß ja die ganze Zeit mit Werten in dem Bündel E_χ gerechnet wird, und C eine von der Metrik unabhängige Konstante ist; offenbar wurde in [BCOV2] eine etwas andere Normierung gewählt, der Vorfaktor auf der rechten Seite ist dort $\frac{1}{2}$. O.B.d.A. wird nun $C = 0$ gesetzt (siehe oben), dann zeigt (9.2.10):

Für das Sigma-Modell mit B-Twist im Limes $\bar{t}^j \to \infty$ ist die Ein-Schleifen-Zustandssumme der Stringtheorie mit Kopplung an die Gravitation eine Linearkombination der analytischen Ray-Singer-Torsionen.

Für $n = 2$ sieht man sofort, daß

$$\frac{1}{2} F_1 = -\log \tau_1(X) + 2 \log \tau_2(X) \overset{\text{Satz 3.2.3}}{=} -2 \log \tau_0(X) \quad ,$$

und τ_0 ist genau die Torsion, die ich in dieser Arbeit im allgemeinen betrachtet habe.
Satz 6.9.1 liefert auf $K3$-Flächen $F_1 = 0$, ein Ergebnis, das M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri und C. Vafa auf anderem Wege (neben expliziten Formeln für F_1 von der "threefold" und der "Quintic") hergeleitet haben [BCOV1, §3]; in dem dort verwendeten Verfahren zeigt sich auch die Bedeutung des Ergebnisses (9.2.10):
Daß F_1 nicht holomorph von den t^j abhängt, habe ich bereits am Anfang dieses Kapitels erwähnt; F_1 kann aber nicht einmal als Summe einer holomorphen und einer antiholomorphen Funktion dargestellt werden: Eine weitere Anomalie, nämlich $\partial\overline{\partial} F_1 \neq 0$, kommt ins Spiel. Diese Anomalie ist jedoch (ohne Verwendung von (9.2.10)) berechenbar, auch das Verhalten von F_1 am Rand des Modulraumes ist bekannt, so daß F_1 im Limes $\bar{t}^j \to \infty$ bestimmt werden kann [BCOV1]. Andererseits ist die *Anomalienformel* für die analytische Ray-Singer Torsion bekannt [BGSIII, (1.154)] (eine Folgerung aus der Anomalienformel habe ich in Kapitel 6.2.2 ausführlich diskutiert). Daß diese Formel, angewandt auf (9.2.10),

dieselben Ergebnisse liefert wie die älteren Berechnungen [BCOV1], ist ein gutes Argument für die Richtigkeit des Ansatzes (9.2.3).
Wegen (9.2.10) ist auch die Anomalie $\partial\bar{\partial}F_1$ eine natürliche Verallgemeinerung der *Quillenanomalie* (siehe Kapitel 8.5).
Für offene Strings mit $N = 2$ Supersymmetrie im B-Modell erhält man ein analoges Ergebnis für die Ein-Schleifen-Zustandssumme nach Kopplung an die Gravitation: In diesem Fall definiert der Raum der Vakua ein holomorphes Vektorbündel, und F_1 ist genau durch die analytische Ray-Singer-Torsion $\log \tau_0(X)$ gegeben [BCOV2, §§4.2,5.9].
Wie oben bereits erwähnt, kann der Ansatz (9.2.3) auch mit dem Ziel gemacht werden, in der $N = 2$ supersymmetrischen Theorie zum eindimensionalen Sigma-Modell ein Analogon zur τ-Funktion aus dem Ising-Modell zu finden. Die τ-Funktion ist ein sogenannter *Index*, d.h. sie stellt eine physikalische Größe dar, welche invariant unter Deformationen des D-Termes ist (siehe [CV, §6]). Die mit der τ-Funktion korrellierte Größe ist jetzt $F_1^\chi - F_1^{\chi'}$ für zwei verschiedene Darstellungen χ, χ' von $\pi_1(X)$ [CV, (6.18)]. Diese Differenz ist tatsächlich genau wie die τ-Funktion ein *Index*, denn $\log \tau_p^\chi(X) - \log \tau_p^{\chi'}(X)$ hängt nur von der komplexen Struktur auf X, i.e. der Kählerklasse ab [RS1, Theorem 2.1]. Unter diesem Aspekt kann man vermuten, daß τ-Funktionen für beliebige zweidimensionale supersymmetrische Sigma-Modelle Verallgemeinerungen der analytischen Ray-Singer-Torsion entsprechen [CV, §6.3].

Zusammenfassung

Im Rahmen meiner Diplomarbeit erzielte ich folgende Resultate:

1. Ich habe die von B. Osgood, R. Phillips und P. Sarnak für kompakte Riemannsche Flächen entwickelten Methoden zur Untersuchung der Determinante des Laplace-Operators auf nichtkompakte („zulässige“) Riemannsche Flächen verallgemeinert. Damit konnte ich die Definition dieser Determinante auf Metriken verallgemeinern, die in der konformen Klasse einer zulässigen Metrik liegen und in den Spitzen „nahe bei“ einer zulässigen Metrik liegen. Ich habe gezeigt, daß in jeder konformen Klasse solcher Metriken vorgegebenen Volumens auf einer Riemannschen Fläche mit Spitzen genau eine Metrik konstanter Gaußkrümmung existiert. In jeder derartigen Klasse ist die Metrik konstanter Gaußkrümmung gleichzeitig der einzige kritische Punkt der Determinante des Laplace-Operators, und zwar stets ein Maximum, wie ich beweisen konnte.

2. Auf geschlossenen Riemannschen Flächen konnte ich mit Hilfe bekannter Formeln [BGSIII] die Euler-Lagrange-Gleichung für kritische Punkte der Determinante des Laplace-Operators bei Variation der Metrik innerhalb der Kählerklasse aufstellen und lösen. Wiederum ergaben sich die Metriken konstanter Gaußkrümmung als kritische Punkte. Weiter konnte ich für Riemannsche Flächen mit nichtpositiver Eulercharakteristik zeigen, daß diese kritischen Punkte strikte lokale Maxima sind, und daß sie mit den kritischen Punkten der Quillenmetrik für Riemannsche Flächen übereinstimmen.

   Damit ist ein zweiter, unabhängiger Beweis eines Teiles des bekannten Ergebnisses von B. Osgood, R. Phillips und P. Sarnak für geschlossene Riemannsche Flächen gefunden.

3. Für kompakte Mannigfaltigkeiten, die eine Metrik konstanter holomorpher Krümmung zulassen, konnte ich mit Hilfe der bekannten Formeln für die Variation der Quillenmetrik unter Variation der Metrik innerhalb der Kählerklasse [BGSIII] zeigen, daß die Metriken konstanter holomorpher Krümmung kritische Punkte sind.

4. Ich habe einen elementaren Beweis für die Variationsformel der analytischen Torsion um Kähler-Einstein-Metriken bei Variation innerhalb der Kählerklasse gefunden, der auf geschlossene $K3$-Flächen und auf komplexe zweidimensionale Tori angewandt werden kann.

   Für $K3$-Flächen konnte ich damit ein Kriterium für den Krümmungstensor angeben, um zu entscheiden, ob eine Kähler-Einstein-Metrik kritischer Punkt der analytischen Torsion bei Variation innerhalb der Kählerklasse ist.

Für komplexe Tori der Dimension $N = 2$ habe ich so einen elementaren Beweis dafür gefunden, daß die flachen Metriken kritische Punkte der analytischen Torsion unter Variation der Metrik innerhalb der Kählerklasse sind.

Sowohl für $K3$-Flächen als auch für Tori konnte ich zeigen, daß die Resultate bei Variation von analytischer Torsion und von Quillenmetrik um Kähler-Einstein-Metriken übereinstimmen.

5. Für komplexe Tori der Dimension $N \geq 2$ habe ich über die Ergebnisse für Mannigfaltigkeiten konstanter holomorpher Krümmung hinaus (wiederum mit Hilfe bekannter Formeln) gezeigt, daß die zweite Variation der Quillenmetrik in der flachen Metrik verschwindet und daß flache Metriken auch kritische Punkte der analytischen Torsion sind.

   Aus den bisher genannten Resultaten kann man schließen, daß die Quillenmetrik für eine Verallgemeinerung der Determinante des Laplace-Operators auf Riemannschen Flächen besser geeignet ist als die analytische Torsion.

6. Für die Variation der Quillenmetrik auf Determinantenbündeln zu Familien von Dolbeaut-Dirac-Operatoren auf Formen mit Werten in holomorphen Vektorbündeln über geschlossenen algebraischen Mannigfaltigkeiten konnte ich Linienbündel angeben, für welche eine Variation der Metrik auf der Mannigfaltigkeit und in den Bündeln simultan durchgeführt werden kann. Ich konnte zeigen, daß die Metriken mit verschwindender Skalarkrümmung bei geeigneter Wahl der Bündel genau die kritischen Punkte dieser Variation sind. Für Ricci-flache Kähler-Einstein-Metriken konnte ich dabei auch die Art des Extremums in Abhängigkeit von der Dimension der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit bestimmen.

Des weiteren habe ich in dieser Diplomarbeit einen Überblick gegeben über bereits vorhandene Resultate, die im Zusammenhang mit meinem Thema stehen. Im letzten Abschnitt habe ich die Verbindung zu verschiedenen Gebieten der theoretischen Physik aufgezeigt. In mehreren Fällen habe ich nachgewiesen, daß die in der physikalischen Literatur angegebenen Formeln und Methoden bis auf (physikalisch) unwesentliche Terme mit den in der Mathematik gängigen übereinstimmen.

Viele Fragen mußten unbeantwortet bleiben, insbesondere die folgenden:

1. Welche Spektralinformation enthält die in Definition 5.1.11 eingeführte „g-skalierende Determinante“ über den Laplace-Operator zu einer „konform zulässigen“ Metrik, und läßt sie sich unter Umständen als relative Determinante dieses Laplace-Operators und eines geeigneten weiteren Operators interpretieren?

2. Um welche Art von kritischen Punkten handelt es sich bei den Metriken konstanter holomorpher Krümmung und den flachen Metriken auf komplexen Tori?

3. Um welche Art von kritischen Punkten für die oben beschriebene Variation der Metrik in holomorphen Bündeln über algebraischen Mannigfaltigkeiten handelt es sich bei den Metriken verschwindender Skalarkrümmung, aber nichtverschwindender Ricci-Krümmung?

4. Sind die Ricci-flachen Kähler-Einstein-Metriken auf geschlossenen $K3$-Flächen kritische Punkte der analytischen Torsion oder der Quillenmetrik bei Variation der Metrik innerhalb der Kählerklasse?

Die Beantwortung der ersten Frage würde den Rahmen dieser Diplomarbeit sprengen.
Weder die zweite noch die dritte Frage konnte ich durch einfache Koordinatenrechnungen beantworten. Auch ein Ansatz, der sich an den Ideen von K. Richardson orientiert (Kapitel 5.2) führte nicht weiter.
Die Antwort auf die vierte Frage scheint nicht elementar zu sein, einen möglichen Ansatz habe ich am Ende von Kapitel 6.9 angegeben.

Literatur

[Alt] H.W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1980.

[Alv] O. Alvarez: Theory of strings with boundary, *Nucl. Phys.* **B216** (1983), 125-184.

[AF] L. Alvarez-Gaume, D.Z. Freedman: Ricci-flat Kähler manifolds and supersymmetry, *Phys. Lett.* **94B** (1980), 171-173.

[As] J.F. Ashmore: *Lett. Nuovo Cimento* **4** (1972), 289.

[At1] M.F. Atiyah: Anomalies and index theory, *Lecture Notes in Physics* **208** (1984), 313-322.

[At2] M.F. Atiyah: *The Geometry and Physics of Knots*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney, 1990.

[ABP] M.F. Atiyah, R. Bott, V.K. Patodi: On the heat equation and the index theorem, *Invent. Math.* **19** (1973), 279-330.

[APS] M.F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer: Spectral asymmetry and Riemannian geometry I, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **77** (1975), 43-69.

[AS1] M.F. Atiyah, I.M. Singer: The index of elliptic operators IV, *Ann. Math.* **93** (1971), 119-139.

[AS2] M.F. Atiyah, I.M. Singer: Dirac operators coupled to vector potentials, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **81** (1984), 2597-2600.

[Av] I.G. Avramidi: *Covariant methods for the calculation of the effective action in quantum field theory and investigation of higher-derivative quantum gravity*, Dissertation at the Physics Faculty of the Moscow State Lomonosov University (1986), hep-th/9510140.

[BPV] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven: *Compact Complex Surfaces*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.

[Bé] L. Bérard Bergery: *La Courbure Scalaire des Variétes Riemanniennes, Séminaire Bourbaki, 1979-80, exposé no. 556*, Lecture Notes 842, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[BGM] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet: *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*, Lecture Notes in Math. 194, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

[BGV] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne: *Heat Kernels and Dirac Operators*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1991.

[BCOV1] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri, C. Vafa: Holomorphic anomalies in topological field theories, *Nucl. Phys.* **B405** (1993), 279-304.

[BCOV2] M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri, C. Vafa: Kodaira-Spencer theory of gravity and exact results of quantum string amplitudes, *Comm. Math. Phys.* **165** (1994), 311-427.

[Be1] A.L. Besse: *Géométrie riemannienne en dimension 4*, Cedic-Fernand Nathan, Paris, 1981.

[Be2] A.L. Besse: *Einstein Manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3.Folge, Band 10, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.

[BD] N.D. Birrell, P.C.W. Davies: *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1982.

[Bi] J.-M. Bismut: The Atiyah-Singer index theorem for families of Dirac operators: Two heat equation proofs, *Invent. Math.* **83** (1986) 91-151.

[BF1] J.-M. Bismut, D.S. Freed: The analysis of elliptic families, I, Metrics and connections on determinant bundles, *Comm. Math. Phys.* **106** (1986), 159-176.

[BF2] J.-M. Bismut, D.S. Freed: The analysis of elliptic families, II, Dirac operators, êta invariants and the holonomy theorem, *Comm. Math. Phys.* **107** (1986), 103-163.

[BGSI] J.-M. Bismut, H. Gillet, C. Soulé: Analytic torsion and holomorphic determinant bundles, I. Bott-Chern forms and analytic torsion, *Comm. Math. Phys.* **115** (1988), 49-78.

[BGSII] J.-M. Bismut, H. Gillet, C. Soulé: Analytic torsion and holomorphic determinant bundles, II. Direct images and Bott-Chern forms, *Comm. Math. Phys.* **115** (1988), 79-126.

[BGSIII] J.-M. Bismut, H. Gillet, C. Soulé: Analytic torsion and holomorphic determinant bundles, III. Quillen metrics on holomorphic determinants, *Comm. Math. Phys.* **115** (1988), 301-351.

[BG] C.G. Bollini, I.J. Giambiagi: Lowest order "divergent" graphs in ν-dimensional space, *Phys. Lett.* **40B** (1972), 566-568.

[BC] R. Bott, S.S. Chern: Hermitian vector bundles and the equidistribution auf zeros of their holomorphic sections, *Acta Math.* **114** (1968), 71-112.

[BCY] T.P. Branson, S.-Y.A. Chang, P.C. Yang: Estimates and extremals for zeta function determinants on four-manifolds, *Comm. Math. Phys.* **149** (1992), 241-262.

[BØ] T.P. Branson, B. Ørsted: Explicit functional determinants in four dimensions, *Proc. A.M.S.* **113 (3)** (1991), 669-682.

[BS] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik*, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart · Leipzig und Verlag Nauka, Moskau, 1991.

[CV] S. Cecotti, C. Vafa: Ising model and $N = 2$ supersymmetric theories, HUTP-92/A044, SISSA-167/92/EP.

[CY] S.-Y.A. Chang, P.C. Yang: Extremal metrics of zeta function determinants on 4-manifolds, *Ann. Math.* **142** (1995), 171-212.

[Chee] J. Cheeger: Analytic torsion and the heat equation, *Ann. Math.* **109 (2)** (1979), 259-322.

[CG] J. Cheeger, M. Gromov: On the characteristic numbers of complete manifolds of bounded geometry and finite volume. In: I. Chavel, H.M. Farkas (eds.), *Differential Geometry and Complex Analysis*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1985, 115-154.

[Cher] P.R. Chernoff: Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations, *J. Funct. Anal.* **12** (1973), 401-414.

[ChD] S.M. Christensen, M.J. Duff: Axial and conformal anomalies for arbitrary spin in gravity and supergravity, *Phys. Lett.* **76B (5)** (1978), 571-574.

[CoD] M. Costabel, M. Dauge: Stable asymptotics for elliptic systems on plane domains with corners, *Comm. Part. Diff. Eq.* **19 (9&10)** (1994), 1677-1726.

[De] A.Derdziński: Self-dual Kähler manifolds and Einstein manifolds of dimension four, *Comp. Math.* **49** (1983), 405-433.

[deW] B.S. de Witt: Quantum theory of gravity II. The manifestly covariant theory, *Phys. Rev.* **162 (5)** (1967), 1195-1239.

[Di] P.A.M. Dirac: *Physik. Z. Sowjetunion* **3** (1933), 64.

[Do] S.K. Donaldson: Infinite determinants, stable bundles and curvature, *Duke Math. Journal* **54 (1)** (1987), 231-247.

[Du] M.J. Duff: Observations of conformal anomalies, *Nucl. Phys.* **B125 (2)** (1977), 334-348.

[FP] L.D. Fadeev, V.N. Popov: Covariant quantization of the gravitational field, *Usp. Fiz. Nauk* **11 (3)** (1973), 427-450; englische Übersetzung in *Sov. Phys. Usp.* **16** (1974), 777-788.

[Fe1] R.P. Feynman: Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, *Rev. Mod. Phys.* **20 (2)** (1948), 367-387.

[Fe2] R.P. Feynman: *Magic without Magic*, eds. J.A. Wheeler and J. Klaunder, W.H. Freeman, San Francisco, 1972.

[Ge] E. Getzler: Pseudodifferential operators on supermanifolds and the index theorem, *Comm. Math. Phys.* **92** (1983), 163-178.

[Gi] P.B. Gilkey: *Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah-Singer Index Theorem*, Mathematics Lecture Series 11, Publish or Perish Inc., 1984.

[GS] H. Gillet, C. Soulé: Analytic torsion and the arithmetic Todd genus, *Topology* **30 (1)** (1991), 21-54.

[Go] S.I. Goldberg: *Curvature and Homology*, Academic Press, New York and London, 1962.

[Gr] B.R. Greene: An introduction to mirror manifolds, in: *Essays on Mirror Manifolds*, ed. S.-T. Yau, International Press, Hongkong (1992), 1-30.

[GH] P. Griffiths, J. Harris: *Principles of Algebraic Geometry,* John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 1978.

[Ha] S.W. Hawking: Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime, *Comm. Math. Phys.* **55** (1977), 133-148.

[Hil] D. Hilbert: Die Grundlagen der Physik, *Nach. Ges. Wiss., Göttingen* (1915), 461-472.

[Hir] F. Hirzebruch: *Topological Methods in Algebraic Geometry*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 131, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.

[HT] D. Hulin, M. Troyanov: Prescribing curvature on open surfaces, *Math. Ann.* **293** (1992), 277-315.

[Hu] J.E. Humphreys: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1972.

[IN] M. Itoh, H. Nakajima: Yang-Mills connections and Einstein-hermitian metrics, *Adv. Stud. Pure Math.* **18-II** (1990), 395-457.

[Kac] M. Kac: Can one hear the shape of a drum? *Amer. Math. Monthly* **73 (4,II)** (1966), 1-23.

[Kak] M. Kaku: *Introduction to Superstrings*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1988.

[KW] I.L. Kazdan, F.W. Warner: A direct approach to the determination of Gaussian and scalar curvature Functions, *Invent. Math.* **28** (1975), 227-230.

[Kob] R. Kobayashi: Moduli of Einstein metrics on a $K3$-surface and degeneration of type I, *Adv. Stud. Pure Math.* **18-II** (1990), 257-311.

[KN] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry, vol. II*, Interscience Publishers, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, 1969.

[Kod] K. Kodaira: On the structure of compact complex analytic surfaces, I. *Amer. J. Math.* **86** (1964), 751-798.

[La] S. Lang: *Complex Analysis*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1993.

[Lu] R.E. Lundelius: Asymptotics of the determinant of the Laplacian on hyperbolic surfaces of finite volume, *Duke Math. Journal* **71 (1)** (1993), 211-242.

[McK] H.P. McKean: Selberg's trace formula as applied to compact Riemann surfaces, *Comm. Pure and Appl. Math.* **25** (1972), 225-246.

[MR] A.N. Milgram, P.C. Rosenbloom: Harmonic forms and heat conduction, I: Closed Riemannian manifolds, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **37** (1951), 180-184.

[MP] S. Minakshisundaram, A. Pleijel: Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds, *Canad. J. Math.* **1** (1949), 242-256.

[Mo] C.B. Morrey: *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Grundlehren Series Vol. 130, Springer-Verlag, Berlin (1966).

[Mü1] W. Müller: Analytic torsion and R-torsion of Riemannian manifolds, *Adv. Math.* **28** (1978), 233-305.

[Mü2] W. Müller: Spectral theory for Riemannian manifolds with cusps and a related trace formula, *Math. Nachr.* **111** (1983), 197-288.

[Mü3] W. Müller: Spectral geometry and scattering theory for certain complete surfaces of finite volume, *Invent. Math.* **109** (1992), 265-305.

[Mü4] W. Müller: *Vorlesung „Analysis auf Mannigfaltigkeiten I-IV“* an der Rheinischen Friedrich-Wilhelms Universität Bonn, WS 1992/93 bis SS 1994.

[NN] A. Newlander, L. Nirenberg: Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, *Ann. Math.* **65** (1975), 391-404.

[O'N] B. O'Neill: *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, Inc., 1983.

[OPS] B. Osgood, R. Phillips, P. Sarnak: Extremals of determinants of Laplacians, *J. Funct. Anal.* **80** (1988), 148-211.

[Po1] A. Polyakov: Quantum geometry of bosonic strings, *Phys. Lett.* **B103** (1981), 207-210.

[Po2] A. Polyakov: Quantum geometry of fermionic strings, *Phys. Lett.* **B103** (1981), 211-213.

[Qu] D. Quillen: Determinants of Cauchy-Riemann operators over a Riemann surface, *Funct. Anal. Appl.* **19** (1985), 31-34.

[RS1] D.B. Ray, I.M. Singer: R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds, *Adv. Math.* **7** (1971), 145-210.

[RS2] D.B. Ray, I.M. Singer: Analytical torsion for complex manifolds, *Ann. Math.* **98** (1973), 154-177.

[Ri] K. Richardson: Critical points of the determinant of the Laplace operator, *J. Funct. Anal.* **122** (1994), 52-83.

[Roe] G. Roepstorff: *Pfadintegrale in der Quantenphysik*, Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1992.

[Ros] S. Rosenberg: The variation of the de Rham zeta function, *Trans. Amer. Math. Soc.* **299 (2)** (1987), 535-557.

[Se] R.T. Seeley: Complex powers of an elliptic operator, *Proc. Symp. Pure Math. A.M.S.* **10** (1967), 288-307.

[Sim] B. Simon: *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1979.

[Siu] Y.T. Siu: Every K3 surface is Kähler, *Invent. Math.* **73** (1983), 139-150.

[tHo] G. 't Hooft, M. Veltmann: Regularization and renormalization of gauge fields, *Nucl. Phys.* **B44** (1972), 189-213.

[Wa] R.M. Wald: The back reaction effect in particle creation in curved space time, *Comm. Math. Phys.* **54** (1977), 1-19.

[Wei] A. Weil: *Œuvre Scientifiques (Collected Papers) I,II,III*, Springer, Heidelberg, 1980.

[Wel] R.O. Wells, jr.: *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Prentice-Hall Inc., Englewood-Cliffs, New Jersey, 1973.

[Wi1] E. Witten: Global gravitational anomalies, *Comm. Math. Phys.* **100** (1985), 197-229.

[Wi2] E. Witten: Quantum field theory and the Jones polynomial, *Comm. Math. Phys.* **121** (1989), 351-399.

[Ya] S.T. Yau: On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I, *Comm. Appl. Math.* **31** (1978), 339-411.

[Ze] E. Zeidler: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications IIB: Nonlinear Monotone Operators*, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1990.

Danksagungen

An erster Stelle danke ich Herrn Prof. Dr. Werner Müller für Themenstellung und Betreuung dieser Diplomarbeit, für seine ständige Diskussionsbereitschaft und Geduld während zweier für mich überaus lehrreicher Jahre. Bei Dr. Kai Köhler möchte ich mich für die Korrektur meiner Version der Anomalienformel (Satz 6.2.2) und für hilfreiche Literaturhinweise bedanken. Oliver Sick hat mich auf die Dissertation von K. Richardson hingewiesen, die zur Grundlage von Kapitel 5.2 wurde. Ich danke Matthias Dräger, Petra Martini, Rainer Martini, Michael Rösgen, Falk Rohsiepe und Gisela Wendland, die aufmerksam Korrektur gelesen haben; Rainer Martini danke ich für seinen seelischen Beistand in Stunden der Frustration. Auch meinen Kommilitonen Susanne Dahlmann und Olaf Köhnken bin ich zu Dank verpflichtet für zahlreiche mathematische und nichtmathematische Diskussionen.

Herrn Prof. Dr. Werner Nahm danke ich für seinen Optimismus in bezug auf eine Zusammenarbeit und für seine Geduld in bezug auf deren Beginn. Für ein stets positives Arbeitsklima während der Fertigstellung meiner Diplomarbeit sorgte seine Arbeitsgruppe, namentlich Michael Rösgen, Falk Rohsiepe, Andreas Wißkirchen und besonders Dr. Rolf Schimmrigk danke ich für ihre Hilfsbereitschaft und wertvolle Diskussionen.

Ich danke der Studienstiftung des Deutschen Volkes für die Förderung in den Jahren 1992 bis 1994.

Ganz besonderer Dank gilt jedoch meiner Familie, meinem Bruder David und vor allen anderen meinen Eltern: Nicht zuletzt für den finanziellen Rückhalt während meines gesamten Studiums, wichtiger noch für die liebevolle Fürsorge und die Ermutigungen, mit denen sie mich nach jedem Rückschlag und jeder Frustration wieder aufzurichten wußten.